

## 概要

本シリーズはトポロジーを中心に量子論の基本原則を基礎からとらえ直し、現代物理学の新しい課題を見出していこうとするものである。大学教養レベルの物理学は既習であることを前提にしている。物理的な内容と数学的な内容が各部で交互に登場するように構成してある。はじめの第5部までは現代物理学を学ぶための基礎固めを目標にして数学の重要な内容をイメージをもって自分のものにしていくことを目標にしている。先輩たちの有用な文献をまとめ、再構築し、補足をしている。非常に多くの内容になってしまったが、現代的な課題を明らかにするためにはどれも必要な項目であると考えながら肥大化した。特に演習問題は用意していないので各自必要とあれば参考文献を見て各分野で演習問題を探すとよいだろう。

本部は第1回として今後必要な基礎数学の復習を複素数の扱いを中心におこない、その応用例として特に幾何との関係について注目する。アインシュタインが相対論を導く際に幾何学的なイメージを大切にしながら幾何学(図形)は時に複雑な方程式を解くよりも明快な理解を与えてくれる。もちろんその逆もある。前半はNeedhamの複素解析を中心に複素数に関する内容を幾何的なイメージをもって理解することを中心にまとめている。後半では直交関数の性質からフーリエ変換と境界値問題、そしてGreen関数の基礎を学ぶ。これらは次部の微分幾何やファイバーの考え方に不可欠な内容であり、物理の散乱現象を理解する強力な道具になる。

インターネット上ではWIKIや大学のオープンコース、WEBコンテンツ、が充実してきた。参考文献等も参考にして興味あることは各自で深めて欲しい。本部は未完成部分が多く、今後加筆修正される。

## 1 ベクトル解析

### 1.1 内積

ベクトルの内積から高校で学習した余弦定理が次のように簡単に求めることができる。

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$$

として自身の内積をとると  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  のなす角を  $\theta$  として

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{C} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{B})$$

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos \theta$$

である。

### 1.2 固有微分

はじめに微分可能な1変数関数  $f(x)$  の変分は微分係数が

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

微小変化であれば次のように書くことができる。

$$df = \left( \frac{df}{dx} \right) dx$$

これを固有微分 (Ordinary Derivatives) という。

1変数であれば問題はないがベクトルのように複数次元を持つものをあつかうとき、これはスカラーをつくるための基本的な構造式を与える。

例えば3次元のベクトル  $V(x, y, z)$  を考えよう。この時は

$$dV = \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right) dx + \left( \frac{\partial V}{\partial y} \right) dy + \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right) dz$$

となる。これを単位ベクトル  $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$  を用いて次のような2つのベクトルの内積であると考え。

$$dV = \left( \frac{\partial V}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{z} \right) \cdot (dx \hat{x} + dy \hat{y} + dz \hat{z})$$

ここで新たにベクトルの勾配 (gradient) として

$$\nabla V = \left( \frac{\partial V}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \right)$$

さらに微小変位 (infinitesimal displacement) を

$$d\mathbf{l} = (dx\hat{\mathbf{x}} + dy\hat{\mathbf{y}} + dz\hat{\mathbf{z}})$$

とすればこれらは共にベクトルなのでそのなす角を  $\theta$  として

$$dV = \nabla V \cdot d\mathbf{l} = |\nabla V| |d\mathbf{l}| \cos \theta$$

が定義できる。従って勾配  $\nabla V$  は  $V$  を関数とみなした時のもっとも増加量の多い方向を示し、勾配の大きさ  $|\nabla V|$  は関数  $V$  のもっとも増加量の大きい方向への傾きの大きさを示している。

つまり真っ暗の中で山の頂上を方向を知るには現在地から最も傾きが大きくなる方向を探していけばいいわけである。重力場の上のビー玉はまさにその逆の向きを知っている。

ただし、重要なのはその変化量は双対する微小変位との内積により得られ、微小変位の方向に依存している。2つベクトルはそれぞれ方向に依存するが内積により得られる固有微分は変化しない。こうした法則が物理学では常に運動や変化の裏に隠れている。

### 1.3 Operator

ベクトル解析ではあるベクトルに作用して意味をなす演算子があり、作用素 (Operator) という。

前節の Gradient が代表的な作用素であり、これ自身ベクトルで

$$\nabla \equiv \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z}$$

であり、任意のベクトルに左から作用し、スカラー値を得る。

しかし、スカラーに作用すればベクトルを得る。例えば位置ベクトル  $\mathbf{r}$  と変位  $\mathbf{r}'$  の大きさを

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$r' = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$

とおくと

$$\begin{aligned} \nabla r &= \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial r}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial r}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial r}{\partial z} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \hat{\mathbf{x}} + \frac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \hat{\mathbf{y}} + \frac{2z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \hat{\mathbf{z}} \right) \\ &= \frac{x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ &= \frac{\mathbf{r}}{r} \equiv \hat{\mathbf{r}} \end{aligned}$$

となりこれは  $\mathbf{r}$  方向への単位ベクトルが現れる。単位元をつくる手法として重要である。

さらにスカラーに作用させる例として

$$\begin{aligned} \nabla (r'^2) &= \left( \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z} \right) ((x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2) \\ &= 2 \{ (x - x')\hat{\mathbf{x}} + (y - y')\hat{\mathbf{y}} + (z - z')\hat{\mathbf{z}} \} \\ &= 2\mathbf{r}' \end{aligned}$$

となり、変位ベクトルの2倍が現れる。拡張すると

$$\begin{aligned}\nabla(r'^n) &= \left( \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z} \right) ((x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2)^{n/2} \\ &= \frac{n}{2} \{ 2(x-x')\hat{\mathbf{x}} + 2(y-y')\hat{\mathbf{y}} + 2(z-z')\hat{\mathbf{z}} \} ((x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2)^{\frac{n-2}{2}} \\ &= \frac{n((x-x')\hat{\mathbf{x}} + (y-y')\hat{\mathbf{y}} + (z-z')\hat{\mathbf{z}})}{((x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2)^{1/2}} ((x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2)^{\frac{n-1}{2}} \\ &= n\hat{\mathbf{r}}'r'^{n-1}\end{aligned}$$

である。また、興味ある例として次のスカラー量の勾配をとると

$$\begin{aligned}\nabla\left(\frac{1}{r'}\right) &= \left( \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z} \right) ((x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2)^{-1/2} \\ &= -\frac{1}{2} \left( \frac{2(x-x')\hat{\mathbf{x}} + 2(y-y')\hat{\mathbf{y}} + 2(z-z')\hat{\mathbf{z}}}{((x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2)^{3/2}} \right) \\ &= -\frac{\hat{\mathbf{r}}'}{r'^2}\end{aligned}$$

となり、変位ベクトルの単位ベクトルが出てきて、物理的にポテンシャルから中心力を導くことに対応する。

#### 1.4 ガウスの定理 [57]

例えば熱の伝導のような連続した物理現象を扱う時、ガウスの定理 (Gauss's theorem) は非常に有用である。

固体中の任意の閉じた体積を  $V$  とし、その境界面を  $S$ 、さらに外向きの単位法線ベクトルを  $\mathbf{n}$  とし、位置  $\mathbf{x}$ 、時刻  $t$  での温度場を  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ 、熱流束ベクトル場を  $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$  とする。

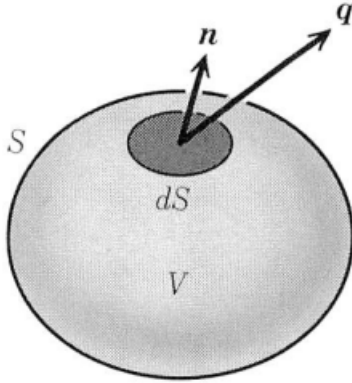


図 1.1: [57] より

この時物体の密度を  $\rho$ 、比熱を  $c$  とすると境界を通過して出入りする熱の差は体積内の熱量に等しいとして単位時間当たりの熱量保存則が次の積分形式でかける。

$$\int_V c\rho \frac{\partial u}{\partial t} dV = - \int_S \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS \quad (1.1)$$

左辺符号は出ていく向きを正にとったことによる。この時ガウスの定理から

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS \quad (1.2)$$

が成り立つ。これを用いると面積積分は体積積分としてまとめることができ

$$\int_V \left( c\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{q} \right) dV = 0$$

とすることができる。これは積分に関係なく次のような零点を見出したことになる。

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{q} = 0 \tag{1.3}$$

これは言うならば、現在、過去、未来の内の「現在」を決めたようなもので後部でこの幾何的なイメージを構築する。さらに、フーリエが示したように物質が等方的であるとすると

$$\mathbf{q} = -k\nabla u (k > 0)$$

を条件にとることができる。(符号は熱の流れが高から低に決めたことによる)

これは言うならば現在の領域をある数値で代表させたことになる。この時は式 1.3 は

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot \nabla u$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \Delta u, \quad \kappa = \frac{k}{c\rho}, \quad \Delta = \nabla \cdot \nabla$$

となり、これは後節で考察するラプラス方程式である。この  $\kappa$ (熱伝導率) の実数版が熱伝導方程式であり、 $\kappa = i\hbar$  の複素数版がシュレディンガー方程式になる。

ここでの数学的な変形が基本的な物理の考え方を示していて、これら時空の計量や接続に後部で関係していく。最初に 0 点を見出したのは連続性として、次の勾配を定数化したのは粗視化として 1 つの物理量を観測する不可欠な 1 つの作用になる。

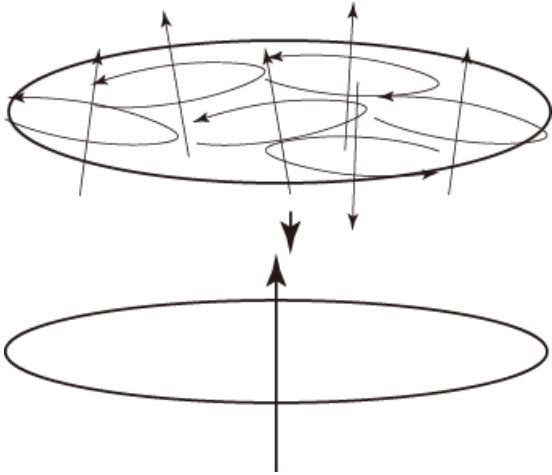


図 1.2: 観測側の空間の疎視化と連続性

次に電磁気での Maxwell 方程式を考えてみよう。

$$\text{div} \mathbf{B} = 0 \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \text{rot} \mathbf{E} = 0 \tag{1.5}$$

$$\text{div} \mathbf{D} = \rho \tag{1.6}$$

$$\text{rot} \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{j} \tag{1.7}$$

また、

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

とする。電流密度については

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

とする。2,4番目の式から外積として

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

を得る。 $\mathbf{H}, \mathbf{E}$  は対称ではない。 $\mathbf{E}$  の式から出発すると

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$$

だから電荷がない場合も含めて  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$  を選べると

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{E} &= \mu \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{H}) \\ &= \mu \frac{\partial}{\partial t} \left( \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \sigma \mathbf{E} \right) \\ &= \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \end{aligned}$$

これは  $\mathbf{E}$  の物質を含む場での伝播方程式である。

特に真空の場では  $\sigma = 0$  とおけば、よく知られた

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \mathbf{E}$$

となり、光速で伝播する波動方程式である。これは  $\mathbf{H}$  の式から出発すると  $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$  を選べると

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{H} &= \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \left( \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) \\ &= \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \end{aligned}$$

を得るので真空の場では  $\sigma = 0$  とおけば全く同様に

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \mathbf{H}$$

を得る。重要なのはこの式は  $\mathbf{H}, \mathbf{E}$  で対称である。

## 2 微分方程式

### 2.1 運動方程式

数学でおそらく微分方程式は苦勞して学習した諸君が多いだろう。

ここではもっとも基本的な形に次の運動方程式を選ぶ。

$$\frac{d}{dt} \mathbf{P}(t) = \mathbf{F}(x, t)$$

簡単のために1次元の系を考え、 $\mathbf{F} = -ax$  とすればこの解は1次元調和振動子で

$$m\ddot{x} = -ax$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

が成り立った。この質量  $m$  の物体が連続してこのバネに結ばれていていれば物体の変位  $y = u(x, t)$  として

$$\left( \frac{1}{v_g^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u(x, t) = 0 \quad (2.1)$$

が成り立った。これは速さ  $v_g$  で伝わる波を表している。この物体を媒質とみなし、その位相速度  $v_p$  が振幅を  $A$  として

$$\omega = \sqrt{\frac{a}{m}} v_p = A\omega$$

であった。

興味あることにバネの振動はいかなる重力の異なる場合においても

$$m\ddot{x} = -ax + mg \quad (2.2)$$

は  $x = x_0$  でつりあうため

$$x_0 = \frac{mg}{a}$$

が成り立ち、これを代入すると

$$m\ddot{x} = -a(x + x_0)$$

であり 2.2 が得られる。つまり、原点をずらすことで変わらず成立している

。これは逆に質量が異なる重力場においても原点をずらすような系からみれば一定であることである。

複数の媒質が連動し、波ができるとすると波長  $\lambda$ 、波数  $k$  が登場して次のような分散関係が成り立つ。

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}$$

つまり、 $v_g$  は媒質全体を見る視点にスケールアップした波の速度である。これは媒質の位相速度  $v_p$  より通常は遅い。

これは媒質の運動が次の媒質に伝達するのに有限の速度が必要であるということである。

これも現実に非常に多様な速さが存在するのは異なる分散関係がいくつもとれることによる。

今ここである極限を考え、分散がない場合  $\omega = v_g k$  となる場合を考えよう。

これは光速で伝搬することに相当する。

ただし、ここでは媒質そのものが動くわけではないので注意する。

$$\sqrt{\frac{a}{m}} = \omega = \frac{v_p}{A} = v_g k \quad (2.3)$$

式 2.1 に  $k \neq 0$  であるから

$$E = a/k^2 \quad (2.4)$$

として、この分散関係を代入すると

$$v_g^2 = \frac{a}{mk^2} = \frac{E}{m}$$

である。

$$\left( \frac{m}{E} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u(x, t) = 0$$

である。ただし、この時の群速度は媒質の質量との間に

$$mv_g^2 = E$$

を満たす。これはアインシュタインの関係

$$mc^2 = E$$

である。興味ある点はこの式がマクロな視点と、ミクロな視点を共に持ちうる視点から導いたことである。式 2.1 は 2 つの演算子からなると考えられ、1 つは時間の 2 階部分、もう一つは空間の 2 階部分である。空間の 2 階部分については

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi(x) = 0$$

というラプラス方程式として知られている。

時間の 2 階部分は慣性項ともよばれこれは原点を過ぎても物体は慣性で運動を続け、つりあいを過ぎて慣性力がつり合うところ

$$m\ddot{x}_{max} = ax_{max}$$

まではバネが伸びる。

さて式 2.1 に速度抵抗を考慮することにする。これは

$$m\ddot{x} = -\kappa\dot{x}$$

が運動方程式となるので

$$\left( \frac{1}{v_g^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1}{\kappa} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u(x, t) = 0 \quad (2.5)$$

となる。この真ん中の項が摩擦項と呼ばれる。これによって各媒質はバネ以外にダンパーのようなものが接続されたように減衰振動をすることになる。この式から慣性項をとってしまうとどうだろう。

$$\left( \frac{1}{\kappa} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u(x, t) = 0 \quad (2.6)$$

この式はもはや振動ではなく、原点を過ぎても戻ってくることはない。

この時の  $\kappa$  は拡散係数と呼ばれ、これは熱伝導によく表れる拡散方程式になる。

ところが式 2.1 において少々特殊な振動を考えよう。

つまり、時間の 1 階微分は振動面を 90 回転させる。とし、

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\hbar \frac{E}{m}$$

とすると

$$\left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u(x, t) = 0$$

はシュレディンガー方程式である。

このように物理の方程式は微分形で表されることが多い。しかし、場合によっては積分の形が便利な場合もある。

## 2.2 完全微分方程式

1 階微分方程式は陽の形

$$y' = f(x, y)$$

という形であれば次のような  $\omega$  が 0 とおける。

$$\omega \equiv P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad (2.7)$$

このように  $\omega$  がおければこの  $\omega$  は完全 (exact) であるという。

例えば 2 変数  $x, y$  を考え、 $xy$  平面の近隣の 2 点を  $(x, y), (x + \Delta x, y + \Delta y)$  のように表す。

$\Delta x$  は直接  $\Delta y$  に影響を与えないとできるなら

$$\Delta U = U(x + \Delta x, y + \Delta y) - U(x, y)$$

として次の偏微分 (partial\_differential) が定義できる。

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{U(x + \Delta x, y) - U(x, y)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{U(x, y + \Delta y) - U(x, y)}{\Delta y}$$

よって  $\Delta x, \Delta y$  はそれぞれ異なる変化の時には 0 とみなせるから

$$\begin{aligned} \Delta U &= U(x + \Delta x, y + \Delta y) - U(x, y) \\ &= \frac{\partial U}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial U}{\partial y} \Delta y \end{aligned}$$

である。よって微小変化の極限では

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy$$

が成り立つ。この  $dU$  を  $U$  の全微分 (total\_differential) という。

式 2.7 から

$$P(x, y) = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Q(x, y) = \frac{\partial U}{\partial y} \tag{2.8}$$

であれば

$$\omega = dU = 0$$

である。このような微分方程式は完全微分方程式 (exact differential equation) という。

この場合この方程式は簡単に解けて

$$U(x, y) = Const$$

であり、次節の第一積分の条件を満たす。

この完全性の条件は式 2.8 から

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

であれば成り立つ。逆も成立するから完全性の条件が

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

であることがわかる。これは次章の複素積分ではコーシー・リーマンの条件として複素数に拡張される。しかし、微分方程式が完全になるためにはかなりきつい変数の制約が成り立っていることは承知しておく必要がある。

$$Pdx + Qdy = dU$$

となるような  $P, Q$  を作れば図のような 2 つの経路  $C_1, C_2$  での積分が一致することを示す。

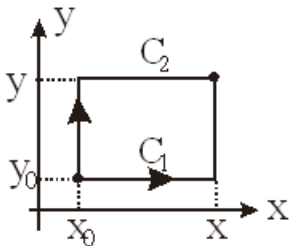


図 2.1: 2 つの積分経路



$$C_1 : U(x, y) = \int_{x_0}^x P(u, y_0) du + \int_{y_0}^y P(x, v) dv + U(x_0, y_0)$$

$$C_2 : U(x, y) = \int_{y_0}^y P(x_0, v) dv + \int_{x_0}^x P(u, y) du + U(x_0, y_0)$$

従って閉じた経路  $C$  について 1 周すれば

$$\int_C (Pdx + Qdy) = \int_{C_1} (Pdx + Qdy) - \int_{C_2} (Pdx + Qdy) = 0$$

である。これは式 2.7 から

$$\int_C \omega = \int_C (Pdx + Qdy) = 0 \tag{2.9}$$

この関係は図のような長方形の経路に限らず閉じたループであれば成り立つ。これを示すにはループを方眼  $D_i$  に区切りこの方眼の 1 辺の長さを  $a$  とすれば

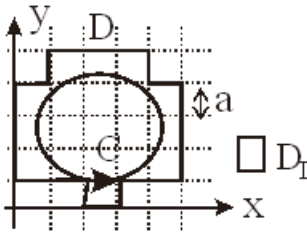


図 2.2: 積分経路は方眼を小さくすれば  $D=C$  である。

$$\int_C \omega = \lim_{a \rightarrow 0} \sum_i \int_{D_i} \omega = 0$$

である。ただし、方眼ループと  $C$  の回転の向きは同じである必要がある。よって完全性の条件が成り立てば閉回路で積分してやれば必ず 0 になる。

### 2.3 原点の問題

完全性が成り立っていればループの取り方には依存することなく式 2.9 は成り立つ。

ところが経路上の動点を  $P$  とするとこの点  $P$  は原点を決め、原点からの  $OP$  ベクトルの端点と考える必要がある。

では積分の結果は完全性が満たされていれば原点の取り方、座標系の取り方に依存することがあるであろうか。これを次の例で見てみよう。

$$\omega = \frac{y}{x^2 + y^2} dx - \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

を考える。これは次部でベクトルポテンシャルの例で紹介する。

すると

$$U = \tan^{-1} \left( \frac{x}{y} \right)$$

とおくと

$$\{ \tan^{-1} x \}' = \frac{1}{1 + x^2}$$

だから

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{y} \frac{1}{1 + (x/y)^2} = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} \frac{1}{1 + (x/y)^2} = -\frac{x}{x^2 + y^2}$$

となるから  $\omega$  は完全である。よって  $\omega = 0$  は完全微分方程式で、その解が

$$U = \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) = \text{Const} \quad (2.10)$$

から

$$y = Ax$$

が解であることがわかる。  
ところが極座標を用いて

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

をとると式 2.10 から

$$\begin{aligned} U &= \tan^{-1}\left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-\sin[\theta - \pi/2]}{\cos[\theta - \pi/2]}\right) \\ &= \tan^{-1}\left(\frac{\sin[-\theta + \pi/2]}{\cos[-\theta + \pi/2]}\right) \\ &= \frac{1}{2}\pi - \theta \end{aligned}$$

である。従って

$$\omega = dU = -d\theta$$

であり、これを積分すれば

$$\int_C \omega = -\int_C d\theta = 0$$

となるはずであるが、ここに問題がある。

次の図に見るように  $\theta$  の原点として閉経路の中にある場合と外にある場合を考える。

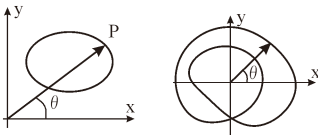


図 2.3: 原点が積分経路の外にある場合と中にある場合

原点が経路の外であれば明らかに何周回ろうとも

$$\int_C d\theta = 0$$

であるが、経路の中に原点がある場合には

$$\int_C d\theta = 2n\pi$$

である。この場合は巻き数  $n$  が出て、 $\theta$  は多価関数になる。

これをさけるためには下図左のように  $xy$  平面に原点から無限遠までの切れ込みをどこかに入れて、この領域を除外すればいい。 $\omega$  の完全性が全  $xy$  平面で実現しないことには注意がいる。

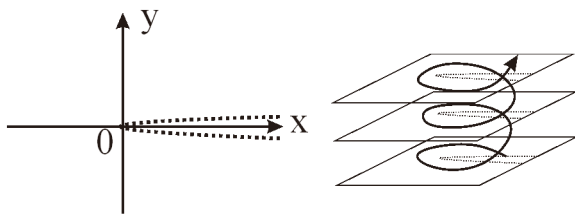


図 2.4: x 軸の正の領域を除外すれば完全性が保たれる。

従って巻き数  $n$  が複数になれば図右のように何葉もの平面を用意しながら連続的なパラメタ  $\xi$  と 0 から  $2\pi$  で定義された  $\theta$  の変数を持つ多様体を考えなくてはならない。

## 2.4 1 階線形

$y$  と  $y'$  について 1 次の微分方程式

$$y' + p(x)y = q(x) \quad (2.11)$$

を 1 階線形微分方程式という。特に  $q(x) \equiv 0$  の時、

$$y' + p(x)y = 0 \quad (2.12)$$

となり、これを斉次方程式 (homogeneous-equation) という。式 2.11 は非斉次微分方程式という。斉次方程式は次のように変数分離として

$$\frac{1}{y} dy = -p(x) dx$$

とすることができるので、両辺を積分すれば

$$\log |y| = - \int p(x) dx + C$$

となるので、一般解が

$$y = A \exp \left[ - \int p(x) dx \right] \equiv z(x)$$

となる。次に非斉次の場合を解くために、この結果を用いて

$$y(x) = a(x)z(x)$$

とおく。つまり、非斉次項  $q(x)$  の影響は指数関数の因子  $z(x)$  を変えないと考える。ここで  $z(x)$  は式 2.12 を満たすので、次のように ( ) 内は 0 にできる。

$$y' + py = a(z' + pz) + a'z = a'z$$

つまり、 $z(x)$  は変化せず、 $a'$  側に変化を吸収させる。

したがって、式 2.11 は

$$\begin{aligned} a'z &= q \\ a' &= \frac{q(x)}{z(x)} \end{aligned}$$

となるので、積分して

$$a(x) = \int \frac{q(x)}{z(x)} dx + A$$

となるので、これを式に代入し、

$$y(x) = Az(x) + z(x) \int \frac{q(x)}{z(x)} dx$$

この解には任意定数  $A$  が1つ含まれるので、解を（斉次方程式の解） $\times$ （未知関数）として解く方法を定数変化法 (method of variation of constants) という。

第2項を特殊解として  $\phi(x)$  とおくと一般解は

$$y(x) = Az(x) + \phi(x)$$

で与えられる。これから任意の3つの解について

$$\frac{y_1(x) - y_2(x)}{y_1(x) - y_2(x)} = Const.$$

となることがわかる。

#### 2.4.1 例 1: 空気抵抗のある落下

例えば高校物理でよくあつかった速度抵抗のある場を考えると、定数を  $\nu$  として、

$$\dot{v} + \nu v = g$$

であり、まさに1階線形微分方程式である。そこで

$$v = az$$

と、おき

$$z(t) = Ae^{-\nu t}$$
$$a(t) = A^{-1}g \int e^{\nu t} dt + C = A^{-1}\frac{g}{\nu}e^{\nu t} + C$$

$v$  の一般解は

$$v(t) = Ce^{-\nu t} + \frac{g}{\nu}$$

となるので、初期条件を  $v_0 = v(0)$  から

$$C = v_0 - \frac{g}{\nu}$$

よって

$$v(t) = v_0 e^{-\nu t} + \frac{g}{\nu} (1 - e^{-\nu t})$$

終端速度は

$$v = \frac{g}{\nu}$$

となるが、これは非斉次方程式の特殊解である。

## 2.5 第一積分

$D$  を  $(t, x) = (\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n)$  として、逆関数を持つある関数  $G(t, x) \in C^1(D, \mathbf{R})$  が微分方程式  $\dot{x} = f(t, x)$  の第一積分 (first integral) であるとは  $G$  が解に沿って不変であることから次のような定数  $c = G(\xi \in \mathbf{R}^n)$  と集合  $S$  が存在する。

$$S = G^{-1}(c); G^{-1}(c) := \{x \in \mathbf{R}^n | G(x) = c\}$$

この  $S$  のことをレベル集合 (level set) という。

この時、任意の  $(\tau \in \mathbf{R}, \xi \in \mathbf{R}^n)$  について

$$\frac{d}{dt}G(t, x(t, \tau, \xi)) = 0 \quad (2.13)$$

が成り立つ。 $t$  の全微分は

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{x} \frac{\partial}{\partial x}$$

とかけるからこれを式 2.13 に代入すると  $G$  の時間変化がないとして

$$\frac{d}{dt}G(x(t)) = \langle \nabla G(x(t)), \dot{x}(t) \rangle = 0$$

を意味する。これは多様体の接ベクトル  $\dot{x}(t)$  に対し勾配ベクトル  $\nabla G$  は直交しているため、接空間に対しても法線方向を向いていることになる。 $S$  上の任意の点において  $\nabla G$  が消えないなら  $S$  を正則 (regular) なレベル集合という。

$$G(x) = c$$

が成り立つことで局所的に  $x_1$  について

$$x_1 = x_1(x_2, \dots, x_n) \quad (2.14)$$

とかけることになる。そのため、 $S$  上の点は  $n-1$  個のパラメタで表すことができる。これは  $S$  が  $n-1$  次元の  $C^1$  クラスの多様体であることを表す。

また式 2.13 は

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial G}{\partial x_k} f_k(t, x) = 0 \quad (2.15)$$

とかける。これは時間と空間が必ずしも対等ではないことを示す。時間はここでははじめから内積として与えられた結果であるパラメタであるのに対し、空間は広がりを持つので速度と掛け合わせて

スカラ値を得る方式となる。しかし、この差が多様な構造を動的に展開していくことを可能にしている。

$G, f$  が陽に  $t$  によらないならば

$$\nabla G = {}^t \left( \frac{\partial G}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial G}{\partial x_n} \right) \quad (2.16)$$

として

$$\langle \nabla G(x(t)), f(x) \rangle = 0$$

となる。これは関数  $G$  の  $f$  方向からの方向微分が恒等的 0、すなわち

$$XG \equiv 0, \quad X = \sum_{k=1}^n f_k(x) \frac{\partial}{\partial x_k}$$

が成り立つ。このように  $G$  に対して核的に作用するのが微分演算子 (differential\_operator) という。例えば前節のベクトル場は微分方程式

$$\dot{x} = \mathbf{e}_k$$

の微分演算子は

$$\frac{\partial}{\partial x_k}$$

であり、これは  $n$  個集まれば曲面を形成し、 $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\}$  がその基底になる。この空間を  $\mathbf{R}^n$  の接空間 (tangent space) と呼び、 $T_x\mathbf{R}^n$  と書く。この時、図のように  $f(x)$  は接ベクトルを表す。

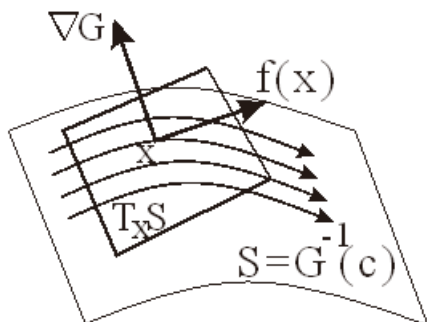


図 2.5: レベル集合がつくる曲面と接ベクトル

今、 $t = 0$  で点  $\xi \in S$  を通る曲線を

$$\gamma : t \rightarrow x(t), \quad x(0) = \xi$$

とし、 $\xi$  を通る積分曲線  $x(t, \xi)$  を考える。 $\dot{x}(0, \xi) = f(\xi) \in T_\xi S$  となるのでベクトル場が

$$x \in S \rightarrow f(x) \in T_x S$$

に対応して存在する。この時微分方程式

$$\dot{x} = f(x)$$

が局所的に成り立つ。これは式 2.14 から  $n - 1$  個の連立方程式

$$\dot{x}_k = f_k(x_1(x_2, \dots, x_n), x_2, x_3, \dots, x_n) \quad k = 2, \dots, n$$

として成り立つことになる。

## 2.6 ハミルトン系

### 2.6.1 中心力

具体的な例を少し見ていこう。古典的な保存力は少なくとも 2 回微分可能な  $C^2$  関数である  $U(x)$  を考えて  $x = x(x_1, \dots, x_n)$  に対して次の運動方程式が成り立った。 $n$  粒子ある  $\mathbf{R}^n$  の領域を考えて

$$m_k \ddot{x}_k = -\frac{\partial U}{\partial x_k} \quad (k = 1, \dots, n) \quad (2.17)$$

これから両辺に  $\dot{x}_k$  をかけてまとめると

$$m_k \dot{x}_k \ddot{x}_k - \frac{\partial U}{\partial x_k} \dot{x}_k = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} m_k \dot{x}_k^2 - U \right) = 0$$

よって第一積分として次の  $H$  をとることができる。

$$H = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} m_k \dot{x}_k^2 + U(x)$$

明らかにこれは系の全エネルギーであり、時間的に保存される。しかし、式 2.16 から相空間として双対空間の組み合わせ  $(x, p)$  を考えて

$$\dot{x}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}$$

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial x_k}$$

とすればこれは 2.17 を表している。この関係をみたす  $H$  をハミルトニアンという。

### 2.6.2 単振動

微分方程式は独立変数、およびその導関数間の関係式である。独立変数が 1 つの場合は常微分方程式といい、2 つ以上ある場合は偏微分方程式になる。例えば単振動の場合の運動方程式は

$$\ddot{x} = -\omega^2 x \tag{2.18}$$

であった。一般解は

$$x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$$

となる。古典力学でははっきりした初期条件があるので解は一意に決まる。これは本当だろうか。そこで式 2.18 の両辺に  $\dot{x}$  をかけると次のようにまとめることができる。

$$\dot{x}\ddot{x} = -\omega^2 \dot{x}x$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \omega^2 x^2 \right) = 0$$

これは括弧内が時間的に一定であることを示す。つまり括弧内が第一積分になる。

ただし、天下りの的に  $\dot{x}$  をかけることには十分注意がいる。一定の速さを大域的に認めなければこうはならない。古典的な場ではこれが可能である。高校物理では誰もが

$$\omega^2 = k/m$$

となることにはじめは戸惑う。なぜなら左辺は振動数の 2 乗であり、 $\omega$  は回転速度である。右辺は力学的なバネ定数と質量の比だから振動のようなものが一見からは出てこない。そこで

$E$  を時間的な定数として

$$\frac{1}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \omega^2 x^2 = E$$

とおき、これを速さ  $\dot{x}(t)$  について解くと、

$$\dot{x}(t) = \pm \sqrt{2E - \omega^2 x^2(t)}$$

となるので新たに変数  $z(t)$  を用いて

$$x(t) = \sqrt{2E} \omega^{-2} z(t) \tag{2.19}$$

とおくと

$$\dot{z}(t) = \pm \frac{\omega}{\sqrt{2E}} \sqrt{2E - \omega^2 x^2(t)} = \pm \omega \sqrt{1 - z^2}$$

という微分方程式が得られた。正の解をとると、

$$\omega dt = \frac{z}{\sqrt{1 - z^2}} dz$$

と分離できるので両辺を積分すると時間  $0 \rightarrow t$  の間に  $z$  は  $z_0 \rightarrow z$  と変化したとして

$$\begin{aligned} \int_0^t \omega dt &= \int_{z_0}^z \frac{z}{\sqrt{1-z^2}} dz \\ &= [\sin^{-1}(z)]_{z_0}^z \\ \omega t &= \sin^{-1} z - \sin^{-1} z_0 \end{aligned}$$

となる。つまり  $\omega t$  の正体は  $\sin$  の逆関数、つまり角度の差である。  
これから

$$z(t) = \sin(\omega t + \alpha) \quad \alpha = \sin^{-1} z_0$$

と求まる。よって式 2.19 から

$$x(t) = \sqrt{2E\omega^{-2}} \sin(\omega t + \alpha)$$

と求まる。

## 2.7 ケプラー問題

次に 3 体問題として惑星の運動を考える。太陽は不動点として 3 次元  $\mathbf{R}^3$  空間を考え、惑星を質点 P として質量を  $m, x = (x_1, x_2, x_3)$  とすると万有引力定数を  $G$  として

$$m\ddot{x} = -GM \frac{mx}{|x|^3}$$

ここで  $k = GM$  とおけば運動方程式は次のような微分方程式となる。

$$\ddot{x} = -\frac{k}{|x|^3} x$$

となり、このときの  $x$  の成分  $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$  を求めることをケプラー問題という。  
そこでまず回転行列を  $R$  とし次のような座標変換  $x \rightarrow x'$  を考える。

$$x = Rx'$$

としても

$$|Rx| = |x|$$

が成り立つから運動方程式は

$$\ddot{x}' = -\frac{k}{|x'|^3} x' \tag{2.20}$$

となり、座標変換に対して不変である。

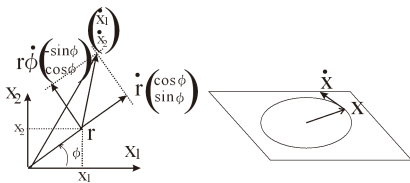


図 2.6: 惑星運動の極座標

$\mathbf{r}(x_1, x_2)$  の微分は

$$\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}$$

とかけるから次の 2 つのベクトル和で表される。



$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}} &= \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\hat{\mathbf{r}}} \\ &= \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\phi}\hat{\phi}\end{aligned}\tag{2.21}$$

ただし、

$$\dot{\hat{\mathbf{r}}} = \frac{d}{dt}(\cos \phi, \sin \phi)^t = \dot{\phi}(-\sin \phi, \cos \phi)^t = \dot{\phi}\hat{\phi}$$

であり、上の図左のようになる。惑星運動はほぼ右図のように同一平面にあるから初期条件として

$$x_{1,2}(0) = \xi_{1,2} \quad \dot{x}_{1,2}(0) = \eta_{1,2} \quad x_3(0) = \dot{x}_3(0) = 0$$

である。式 2.20 に  $\dot{x}$  をかけて積分すると

$$\frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = Const$$

ここで次のような極座標を用いると

$$\begin{aligned}x_1 &= r \cos \phi \\ x_2 &= r \sin \phi\end{aligned}$$

として式 2.21 から

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} &= \dot{r} \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix} + r\dot{\phi} \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} &= (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix} + (2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}) \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix}\end{aligned}$$

一方で式 2.20 を極座標で表すと

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = -\frac{k}{r^2} \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix}$$

となる。従って両者を比較し、各基底の係数が等しいとすれば次の 2 式を得る。

$$\begin{aligned}\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 &= -\frac{k}{r^2} \\ 2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi} &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (r^2\dot{\phi}) = 0\end{aligned}$$

2 式からは

$$r^2\dot{\phi} = Const$$

であり、これは面積速度が一定であるというケプラー第 2 法則である。また角運動量の保存も表している。これは  $(x_1, x_2)$  座標に戻すと

$$x_1\dot{x}_2 = -r^2\dot{\phi}\sin^2 \phi$$

$$x_2\dot{x}_1 = r^2\dot{\phi}\cos^2 \phi$$

なので

$$r^2\dot{\phi} = x_2\dot{x}_1 - x_1\dot{x}_2$$

のように微分を含む交換積になっている。

## 2.8 2階線形偏微分方程式

2つの独立変数を持った2階線形偏微分方程式は双曲線型、放物線型、楕円型に分類される。物理で非常によく扱うこれらの型について基礎的な復習から始める。

2階線形微分方程式の一般形は次のようにおける。

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu + E = 0 \quad (2.22)$$

各  $A \sim G$  は  $x, y$  のみの関数である。そこで  $P$  点  $(x, y)$  の近傍で2組の曲線族

$$\xi(x, y) = \text{Const}, \quad \eta(x, y) = \text{Const}$$

を考える。座標系  $(x, y) \rightarrow (\xi, \eta)$  の変換を考えることで、この微分方程式を簡単にすることができる。対応  $(x, y) \rightarrow (\xi, \eta)$  が1対1であるためには次のような行列式が0にならない必要がある。

$$\begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0$$

この条件が成り立つ領域では  $(\xi_x, \xi_y)$  と  $(\eta_x, \eta_y)$  は  $\xi(x, y) = \text{Const}, \eta(x, y) = \text{Const}$  の法線方向を表すのでこれらの法線群が平行にならず、互いに接することがないことを示す。

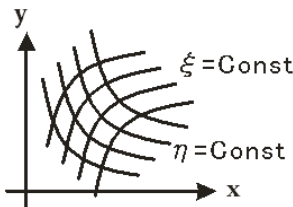


図 2.7: 積分曲線群

そこで式 2.22 を

$$au_{\xi\xi} + 2bu_{\xi\eta} + cu_{\eta\eta} + O(u_\xi, u_\eta, u) = 0$$

と変数変換した時、具体的に

$$\begin{cases} a &= A\xi_x^2 + 2B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2 \\ b &= A\xi_x\eta_x + B(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + C\xi_y\eta_y \\ c &= A\eta_x^2 + 2B\eta_x\eta_y + C\eta_y^2 \end{cases}$$

という関係にある。この時

$$b^2 - ac = (B^2 - AC)J^2 \quad (2.23)$$

が成り立つ。また  $a = 0$  が成り立つ場合は

$$A\xi_x^2 + 2B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2 = 0$$

という条件が満たされればいい。そこでこれを特性曲線という。  $\xi(x, y) = \text{Const}$  であることからこの曲線に沿って

$$\xi_x dx + \xi_y dy = 0$$

が成り立つことになる。これから  $\xi_x, \xi_y$  を消去すると

$$A dy^2 + 2B dx dy + C dx^2 = 0$$

これを  $dy/dx$  の 2 次方程式とみなせば解の公式から

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A} \quad (2.24)$$

が得られるのでこれから次のような分類が式 2.22 にできる。

1. 双曲型  $B^2 - AC > 0$
2. 放物型  $B^2 - AC = 0$
3. 楕円型  $B^2 - AC < 0$

これらの分類は式 2.23 があるおかげで座標系に依存しない。

しかし、これらは局所的で領域によっては異なる分類に属することがある。 $A, B, C$  が定数なら特性曲線は直線になる

。この場合について先の分類に従ってみていく。

1. 双曲型  $B^2 - AC > 0$  の場合

$A \neq 0$  ならば特性曲線が成り立つことから

$$a = c = 0, b \neq 0$$

となるので結局

$$u_{\xi\eta} + O(u_{\xi}, u_{\eta}, u) = 0 \quad (2.25)$$

となる。

$A = 0, C \neq 0$  の場合にも同様に

$$u_{\xi\eta} + O(u_{\xi}, u_{\eta}, u) = 0$$

を得る。

$A = 0, C = 0$  の場合にも同様である。次のような変数変換をすると

$$\xi = X + Y, \eta = X - Y$$

式 2.25 は  $u_{\xi\eta} = (u_{XX} - u_{YY})/4$  となるので

$$u_{XX} - u_{YY} + O(u_X, u_Y, u) = 0$$

であり標準的な波動方程式

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \quad (2.26)$$

はこの分類に属することがわかる。

2. 放物型  $B^2 - AC = 0$  の場合

この時特性曲線の族は 1 つだけになる。

$$A dy - B dx = 0$$

の解となるのでこれを  $\xi(x, y) = Const$  としてこれと独立な任意の曲線 (直線) 族を  $\eta(x, y) = Const$  として新しい座標系を選ぶと  $a = 0$  とすることができる。また式 2.23 から  $b = 0$  ともなるので

$$u_{\eta\eta} + O(u_x, u_y, u) = 0$$

という標準形ができる。物理でよく登場する熱伝導方程式

$$u_t - \kappa u_{xx} = 0 \quad (2.27)$$

が代表的な例である。

### 3. 楕円型 $B^2 - AC < 0$ の場合

この時、実数の特性曲線は存在しない。複素数を含む次の2つの方程式が出てくる。

$$A dy - (B + i\sqrt{AC - B^2}) dx = 0$$

$$A dy - (B - i\sqrt{AC - B^2}) dx = 0$$

これを積分すると次の複素共役な2式が得られる。

$$f(x, y) = Ay - (B + i\sqrt{AC - B^2})x = Const$$

$$f^*(x, y) = Ay - (B - i\sqrt{AC - B^2})x = Const$$

これから

$$A f_x^2 + 2B f_x f_y + C f_y^2 = 0$$

$$A f_x^{*2} + 2B f_x^* f_y^* + C f_y^{*2} = 0$$

が成り立つ、そこで次のような変数変換を考えると

$$\xi = \frac{1}{2} \{f(x, y) + f^*(x, y)\}$$

$$\eta = \frac{1}{2i} \{f(x, y) - f^*(x, y)\}$$

$a = c, b = 0$  となるので標準形は

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + O(u_x, u_y, u) = 0 \tag{2.28}$$

となり、以下の調和関数の章で紹介する2次元のラプラス方程式やポアソン方程式が代表例である。

## 2.9 ベッセル微分方程式

球面波のところで扱うベッセル関数は物理で重要な関数である。これは点波源から波が平面に伝播していく様子を表す。

次の微分方程式をベッセル微分方程式 (**Bessel's differential equation**) という。

$$x \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{1}{x} \left( x \frac{du}{dx} \right) + (x^2 - \nu^2) u = 0$$

次のように両辺を  $x^2$  で割ったものをいうこともある。

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{du}{dx} + \left( 1 - \frac{\nu^2}{x^2} \right) u = 0$$

## 3 複素幾何 [4]

物理学を学ぶにあたって複素数は非常に重要である。複素数の導入に際し、視覚的に複素数をあつかった本に Tristan Needham の Visual Complex Analysis[10] がある。

ここではこの本の内容を引用しながら複素数の概念を明らかにしていこう。通常のユークリッド幾何に慣れてしまっている人はここでその慣れを払拭して欲しい。

### 3.1 メビウス変換

$z = re^{i\theta}$  および定数を複素数まで拡張し、メビウス変換は次で与えられる。

$$M(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (3.1)$$

第5部でみる特殊相対性理論で登場するローレンツ変換はこのメビウス変換を表している。

また、逆に複素空間  $\mathbb{C}$  においてメビウス変換から時空のローレンツ変換は唯一決まる。

はじめにこの内容を考察していこう。

メビウス変換は次の4つの変換の合成とみることができる。

$$z \mapsto z + \frac{d}{c} \text{ 平行移動} \quad (3.2)$$

$$z \mapsto \frac{1}{z} \text{ 複素反転} \quad (3.3)$$

$$z \mapsto -\frac{ad - bc}{c^2} z \text{ 伸縮} \quad (3.4)$$

$$z \mapsto z + \frac{d}{c} \text{ 平行移動} \quad (3.5)$$

この変換は非常に興味ある性質を多くもっている。ローレンツ変換は次の値を一定に保つ  $4 \times 4$  の座標変換である。

$$S^2 = T^2 - (X^2 + Y^2 + Z^2)$$

この変換を  $L$  とよぼう。負符号が入っているせいで  $S$  は複素数をとる場合がある。

4次元の時空の変換  $L$  に対応する複素写像が実はメビウス変換で、ローレンツ変換と1対1に対応する。

#### 3.1.1 行列との対応と同次座標

メビウス変換を次のように行列と対応つけよう。通常の行列と区別するためにこの節では  $[ ]$  をつけることにする。

$$M(z) = \frac{az + b}{cz + d} \longleftrightarrow [M] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

注意すべきは通常の  $\mathbb{R}^2$  空間では回転を表す次の行列は複素数の行列においては異なってくる。

$$[M] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{-1}{z} \quad (3.7)$$

しかし、逆行列や単位行列、や積はそのまま扱える利点がある。そこでメビウス変換と行列の相違点について考えよう。

さらに2つの複素数の比

$$z = \frac{c_1}{c_2} \quad (3.8)$$

で複素数  $z$  を表す時、この順序つけられた  $[c_1, c_2]$  を  $z$  の同次座標という。この時  $k$  を定数とし、

$$[kc_1, kc_2] = k[c_1, c_2]$$

また、 $[c_1, c_2]$  は  $\mathbb{C}^2$  の元とみなし、次のような変換を考えよう。

$$\begin{bmatrix} c'_1 \\ c'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac_1 + bc_2 \\ cc_1 + dc_2 \end{bmatrix}$$

ここで式 3.8 より次のような対応を考えると

$$w = \frac{c'_1}{c'_2} = \frac{ac_1 + bc_2}{cc_1 + dc_2} \quad (3.9)$$

ところが次のように簡単に変形できるので式 3.8 より

$$w = \frac{ac_1/c_2 + b}{cc_1/c_2 + d} = \frac{az + b}{cz + d}$$

となり、これはメビウス変換である。

また式 3.8 より  $\infty$  が次のように対応し、拡張された複素平面との対応を容易にする。

$$\infty \longleftrightarrow \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \rightarrow 0 \end{bmatrix}$$

次に  $[M]$  の固有ベクトルを考えよう。

固有ベクトルとは向きが変わらないベクトルであり、元のベクトルのスカラー倍になる関係である。そこで固有値を  $\lambda$  とおくと

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

これはメビウス変換では 3.8 が

$$M(z) = \frac{\lambda c_1}{\lambda c_2} = z$$

に写ることを意味しているのでこれは不動点である。

つまり  $z = c_1/c_2$  が不動点となる必要十分な条件は  $[c_1, c_2]$  が  $[M]$  の固有ベクトルであればよいということになる。

$[M]$  の固有値は次の特性方程式を満たす。式 3.10 の行列式をとり、

$$\det\{[M] - \lambda[I]\} = 0$$

ただし、 $M$  は  $2 \times 2$  行列だったから  $I$  は単位行列

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

である。式 3.34 が成り立ち正規化されているとすれば特性方程式は次のように書き下せる。

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + 1 = 0$$

この解は  $a, d$  のみで決定され次のようになる。

$$\lambda = \frac{1}{2} \{(a+d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4}\}$$

さらに解と係数の関係からは 2 つの固有値について次の簡単な関係が成り立つ

$$\lambda_1 \lambda_2 = 1, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = a + d$$

これから固有値が互いに逆数の関係であり、その和が対角和になっていることがわかる。

これは線形代数での正規化行列  $N$  の次の関係の特別な場合である。

$$\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = \det N, \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = \text{Tr}[N]$$

### 3.1.2 ユニタリ行列

幾何の対蹠点の考えを複素数に広げてみよう。 $\mathbb{C}^2$  空間において  $p, q$  の 2 つのベクトルが直交するとき、内積

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = 0$$

は

$$p_1 q_1 + p_2 q_2 = 0$$

であった。拡張して、 $p(1, i), q(1, i)$  とし、 $\mathbb{C}^2$  空間において次のように内積を複素共役  $\bar{\phantom{x}}$  を用いて定義する。

$$\langle p, q \rangle = \bar{p}_1 q_1 + \bar{p}_2 q_2 \quad (3.11)$$

直交条件は

$$\bar{p}_1 q_1 + \bar{p}_2 q_2 = 0$$

$$\bar{p}_1 / \bar{p}_2 = -q_1 / q_2$$

とかきなおすことができる。 $p(p_1/p_2), q(q_1/q_2)$  を同次座標とみなせば

$$q = -\frac{1}{\bar{p}} \quad (3.12)$$

が成立する。この関係が成り立つ時  $p, q$  は対蹠点であるという。

$\mathbb{C}^2$  空間において 2 つのベクトルが直交するとはリーマン球面において対蹠点の 2 点の同次座標になっていけばよい。

$\mathbb{C}^2$  の回転に類似した線形変換を  $[R]$  とする。これは角度関係を保つので次のように内積を保存する。

$$\langle [R]p, [R]q \rangle = \langle p, q \rangle$$

式 3.11 から

$$p^* \{ [R]^* [R] \} p = p^* q$$

したがって

$$[R]^* [R] = [I]$$

を満たさなくてはならない。これは

$$\begin{aligned} [R]^* &= [R]^{-1} \\ [R] &= \begin{bmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.13)$$

を満たす。この関係は転置複素共役の関係でありこれをユニタリ行列という。

よってリーマン球の一般的な回転を表すメビウス変換は

$$R(z) = \frac{az + b}{-\bar{b}z + \bar{a}} \quad (3.14)$$

と書き表すことができる。つまり  $a, b$  とその複素共役できまる。

ユニタリ行列は回転に依存しない、どの方向からみても内積値が一定になるメビウス変換である。

これが2つの係数で決まるというのはおもしろい。これは式 3.12 の関係があることによる。

この関係は次の複素幾何において、さらに後の場の理論において重要な役割をする。

## 3.2 円周幾何

円周率  $\pi$  は簡単な次の積分によって得られる。

$$\pi = 4 \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

これは次のように変数変換すると

$$\begin{aligned} x &= \tan \theta \\ \frac{dx}{d\theta} &= \frac{1}{\cos^2 \theta} \end{aligned} \quad (3.15)$$

だから

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx &= \int_0^{\pi/4} \frac{1}{1+\tan^2 \theta} \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta \\ &= \int_0^{\pi/4} \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta} \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta \\ &= \int_0^{\pi/4} d\theta = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

である。つまり、式 3.15 のような傾きをとる変換を考えると単位区間で

$$\frac{1}{1+x^2} \rightarrow \frac{\pi}{4}$$

のように積分される。

### 3.2.1 円の演算

円周上の幾何は非常にきれいに代数と関係する。例えば次の図のように円周上に任意の点  $O$  をとり、これを単位元とみなす。次に任意に  $A, B$  をとり  $A \times B$  を次のように定義する。

線分  $AB$  と平行で点  $O$  を通る直線と  $O$  点以外で円と接する点を  $A \times B$  とする。

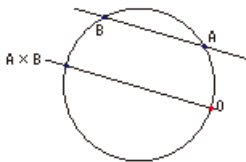


図 3.1:  $O$  を通る  $AB$  に平行な線を  $A \times B$  で定義する

次に同じ円周上に任意の点  $C$  をつくり、同じルールで  $(A \times B) \times C$  をつくる。



その後同じルールで  $B \times C$  をつくり  $A \times (B \times C)$  をつくと、次の図のように円周上で 2 点は一致し、

$$(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$$

が確認できる。

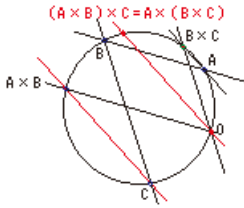


図 3.2: 円周上で  $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$  が成り立つ

### 3.2.2 円による反転

はじめに半径  $R$  の円  $K$  に関する反転  $T$  を次のように定義する。複素数の逆数をとるという複素反転ではなく、次のような幾何的な意味がある。

$z$  を複素数とし、円の中心を  $q$  とすると  $q$  と  $z$  との距離を  $\rho$  として

定義： $z$  の反転  $T(z)$  は  $q$  からの向きが  $z$  と同じで  $q$  からの距離  $\rho'$  が  $R^2/\rho$  となる点が  $T(z)$  である。

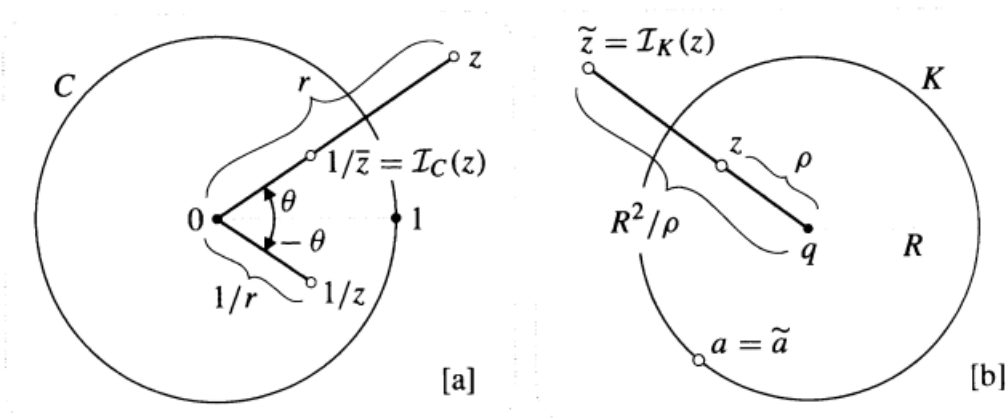


図 3.3: 円に関する反転の定義 [10] より

このとき上図右から

$$|z - q| |T(z) - q| = \rho \rho' = R^2 \quad (3.16)$$

が成り立ち、向きが一定だから

$$(T(z) - q) \overline{(z - q)} = R^2$$

$$T(z) = \frac{R^2}{\bar{z} - \bar{q}} + q = \frac{q\bar{z} + (R^2 - |q|^2)}{\bar{z} - \bar{q}} \quad (3.17)$$

ここで  $q = 0, R = 1$  なら上図左から複素共役をとっての反転

$$T(z) = \frac{1}{\bar{z}} \quad (3.18)$$

である。前節の式 3.12 に対応する。

これは、次の図において点  $O$  を中心とする円に関する反転が  $A, B$  を  $A', B'$  に写すなら  $O$  を共通の頂点とした三角形は相似になり

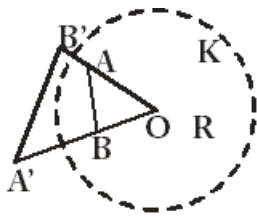


図 3.4: 円に関する反転

$$A'B' = \left( \frac{R^2}{OA \cdot OB} \right) AB \quad (3.19)$$

が成り立つ。つまり

:  $O$  を中心とする円に関する反転で 2 点  $A, B$  が  $A', B'$  に写るなら三角形  $OAB$  と  $OA'B'$  は相似になる。

式 3.17 が複素共役であることに注意し、この変換によって変化しない図形はを探すと、反転  $T$  によって直線  $L$  が円  $K$  の中心を通るなら  $L$  は反転によってそれ自身に写るから中心を通る直線は全て反転操作で変化しない。

では中心を通らない直線はどうなるだろうか。この時、次の定理が成り立つ。

: 直線  $L$  が円  $K$  の中心を通らないならば  $K$  に対する反転により、 $L$  は  $K$  の中心を通る円に写る。

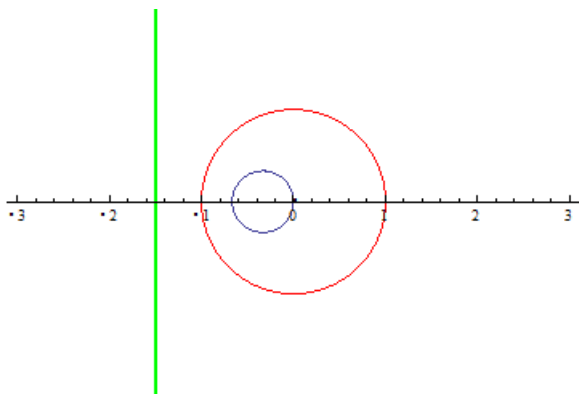


図 3.5: 青の円は同じ中心を通る赤の単位円によって緑の直線に写る。

これは次の図によって説明できる。

$K$  による反転の操作により、直線  $L$  上の点  $A$  が  $A'$  に、 $B$  が  $B'$  に写されたとする。

$\angle BAq$  を  $\pi/2$  に選べば  $\angle A'B'q$  も  $\pi/2$  になる。よって  $qA'$  は直径であり、 $L$  は  $q$  点を通る円に写される。

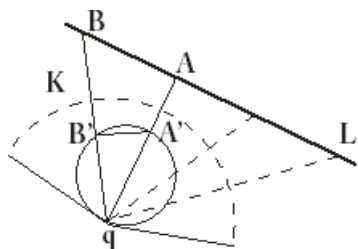


図 3.6: 同じ中心をもつ円に対する反転

これらから簡単に次のように円についての定理が得られる。

: 円  $C$  が円  $K$  の中心  $q$  を通らないならば  $K$  に関する反転によって  $C$  は  $q$  を通らない別の円にうつる。

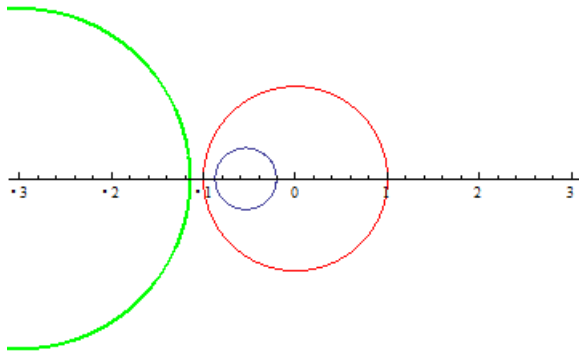


図 3.7: 青の円は同じ中心を通らない赤の単位円によって緑の円に写る。

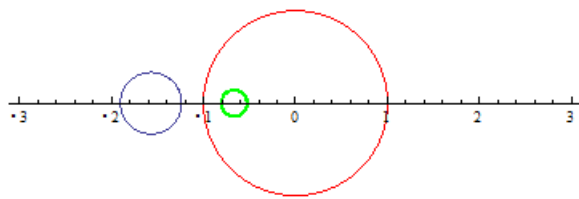


図 3.8: 同じように外部にある場合：青の円は同じ中心を通らない赤の単位円によって緑の円に写る。

この結果は円が反転によって保存されているともいう。これは異なるものをつくるという独立性を示している。

また、この反転の操作が基準の円の内側と外側を区別している。

さらに、次の図 [c] でみるように反転は等角ではなく、反等角であることがわかる。

円  $K$  に対する反転を  $T_K$ 、線  $K$  に対する鏡映を  $R_L$  としよう。すると  $L$  は平面を 2 つの部分にわけるとして鏡映  $R_L$  はこれを図 a の上のように入れ替える。

また、境界上の点はこの鏡映で動かない。そして鏡像を繰り返せば元にもどるので

また、境界上の点はこの鏡映で動かない。そして鏡像を繰り返せば元にもどるので

$$R_L \circ R_L = I$$

となる。以上 3 つの性質は図 [b] のようにそのまま反転  $T_K$  でも成たつ。

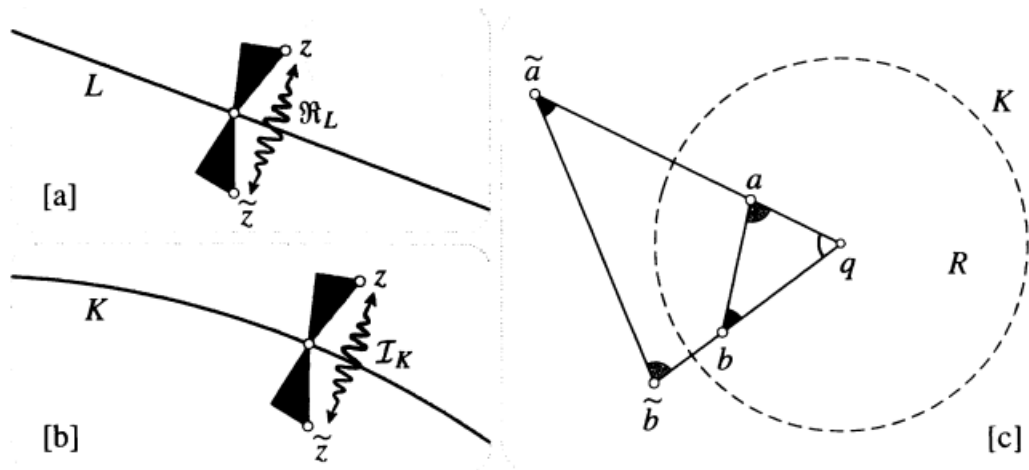
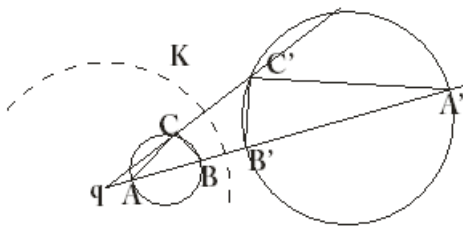


図 3.9: 反転の半等角性 [10] より

### 3.2.3 無限点

この円周上の幾何を平面幾何と 1 対 1 の関係を保つためには 0 と  $\infty$  の対応を考える必要がある。

そこで次の図のように 3.2.2 から円の半径が大きくなる極限として直線が存在し、その像は中心  $q$  に近づくことがわかる。



中心  $q$  を通らない円は円  $K$  による反転により円に写る。この時  $\angle ACB$  と  $\angle A'B'C'$  は共に直角である。写された円の半径を無限大まで大きくすると直線になり、元の円は点  $q$  を通る。

図 3.10: 中心を通らない反転

また、写す側と写される側を逆転させてもこの関係は同じである。しかし、みかけの円の大きさは異なる。そこで円  $K$  の半径を無限大にすることを考え、円  $K$  を直線にしたとすると  $A, B, A', B'$  は実軸上に並び、 $q, C, C'$  と重なる。

よって 2 つの三角形はつぶれてしまい面積をもたない。

この時、円の大きさが同じになるとすると点  $q$  は  $A$  側と  $A'$  側で同一視されなければならない。

これには足りないものがある。また、この円による反転の操作には 0 の像や  $\infty$  を仲間に入れていない。

そこで  $\infty$  と 0 を付け加えてこの考えを拡大する。すると  $z$  と  $1/z$  の対応に次が加わる。

$$\frac{1}{\infty} = 0, \quad \frac{1}{0} = \infty \quad (3.20)$$

これにより複素平面に  $\infty$  と  $-\infty$  が加わり、 $z$  と  $1/z$  の対応は 1 対 1 の関係になった。

さらに 0 を通る円は直線に写ることになり、直線も無限遠を通る円とみなすことができる。

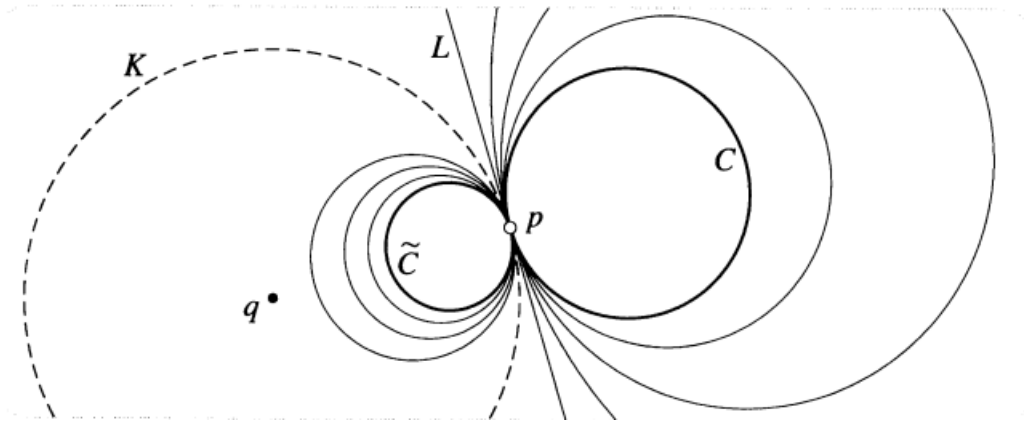


図 3.11: [10] より :  $q$  を含まない半径を持つ  $C$  が無限大の半径を持てば直線  $L$  に近づく、この時、 $C$  の反転の円  $\tilde{C}$  は  $q$  を通る円に限りなく近づく。

### 3.2.4 直交性

次に円の直交関係を定義しよう。

図のように円  $C$  は円  $K$  上の 2 点  $a, b$  で直交するとは点  $a$  の接線  $T$  が  $K$  の中心  $q$  を通るとする。

この時、次の単位元の存在が確認できる。

図 [a] のように  $K$  に関する反転により  $K$  と直交する円は自分自身に写る。

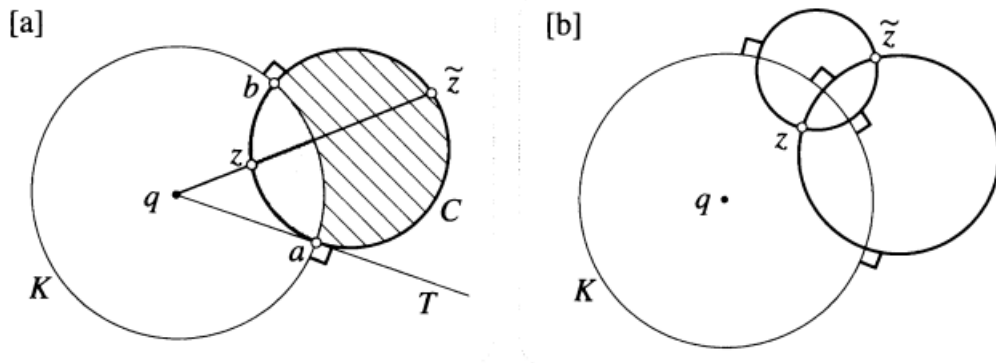


図 3.12: [10] より : 円の直交性; 接線が中心を通る時直交する。

2 つの直交する円があればその円の交点が  $K$  に対して反転の関係になる。

さらに図 [b] のように直交する円周上では  $q$  を通り、 $C$  と点  $z$  で交わる直線は反転像  $\tilde{z}$  で再び  $C$  と交わる。

これから反転を次のようにいうことができる。

$K$  に関する反転による  $z$  の像  $\tilde{z}$  は  $z$  を通って  $K$  と直交する任意の 2 つの円の交点の内、 $z$  ではないほうの交点である。

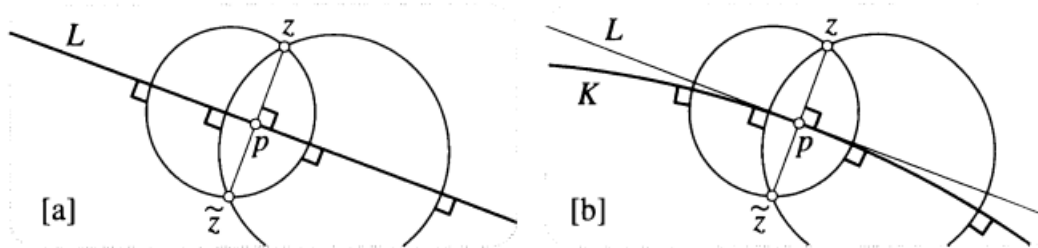


図 3.13: [10] より : 直交する 2 つの円と反転円  $K$  が直線になれば反転は鏡像の関係になる。

興味あることにこれは円  $K$  が無限の半径を持ち、直線になればこれは鏡映になる。つまり、半径が無限大になったとすると上図 [a] のように

$$\frac{pz}{p\bar{z}} = 1$$

になることがわかる。

これを代数的に表すとどうなるだろうか。

$K$  の半径を無限大にする代わりに複素平面を直線  $L$  を実軸にとり、半径  $R$  との接点を  $p$  とする。虚軸上に

$$q = iR$$

を中心に円を描き、接点を  $p$  とする。

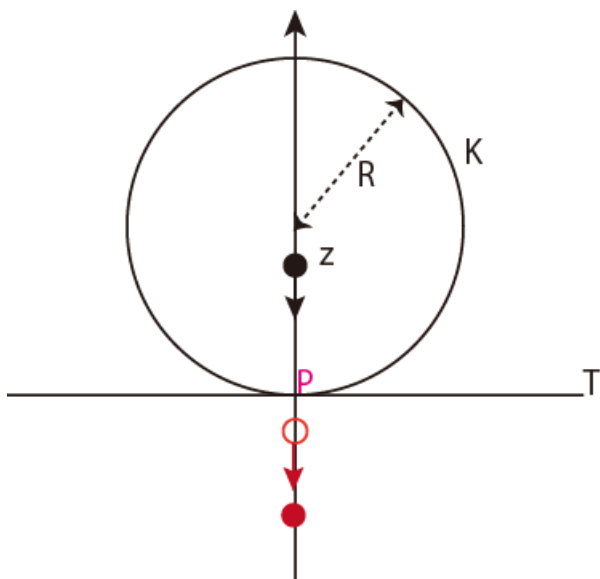


図 3.14:

この時、式 3.17 より  $q = iR$  としたから

$$T_K(z) = \frac{\bar{z}}{1 - (i\bar{z}/R)}$$

となる。つまり、

幾何的には  $K$  の半径が大きくなれば  $T_k(z)$  は図 12 の接線を  $T$  としてその鏡映点  $R_T(z)$  に近づく。

代数的には半径を大きくする代わりに一定の大きさの  $K$  を考え、 $z$  をどんどん点  $p$  に近づける。 $|z| < R$  として  $\bar{z}$  から出発して  $i\bar{z}/R$  倍したものを足していけばよい。これは次の無限級数を表している。公比を  $i\bar{z}/R$  に

とれば

$$\begin{aligned} T_K(z) &= \bar{z} + \frac{i\bar{z}^2}{R} - \frac{\bar{z}^3}{R^2} + \cdots \\ &= \frac{\bar{z}}{1 - (i\bar{z}/R)} \end{aligned}$$

となる。つまり、 $R \rightarrow \infty$  で  $T_K(z)$  は鏡像点  $R_T(z) = \bar{z}$  に等しくなる。

### 3.2.5 メビウス変換の分類 [18]

これまでの円周上の幾何でメビウス変換を一般的に分類ができる。  
複素数のメビウス変換  $M(z)$  の  $n$  回の積を  $M^n$  ただし、 $M \in PSL(2, C)$  で1次分数変換とする。  
また、 $L \in S$  を小円とすると前節の不動点の集合を  $Fix(M)$  で表し次の式で定義する。

$$\{z \in S^2 | Mz = z\}$$

$M \neq I$  (恒等変換) に対し  $M(z)$  を次のように分類することができる。

1. 双曲的 (**hyperbolic**):  $Fix(M)$  は異なる2点  $z_1, z_2$  からなり次が成り立つ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M^n(z) = z_1, \quad \lim_{n \rightarrow -\infty} M^n(z) = z_2$$

2. 楕円的 (**elliptic**):  $Fix(M)$  は異なる2点  $z_1, z_2$  からなるが  $S^2/\{z_1, z_2\}$  は無限個の小円の族  $L_t$  の互いに交わらない和になり各  $L_t$  に対し、次が成り立つ。

$$M(L_t) = L_t$$

3. 放物的 (**parabolic**):  $Fix(M)$  はただ1つ点  $z_0$  からなる。 $S^2$  は  $z_0$  を通り互いに接する無限個小円の族  $L_t$  の和になり次が成立する。

$$M(L_t) = L_t$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M^n(z) = \lim_{n \rightarrow -\infty} M^n(z) = z_0$$

$M(z)$  をメビウス変換とし2つの不動点  $\xi_+, \xi_-$  を持つとする。 $C_1$  はこの2点を通る。さらにこの  $C_1$  と直交し、点  $p$  は固定点  $\xi_+, \xi_-$  を結ぶ直線上の任意の点であり、この  $p$  を中心として半径の円  $K$  をつくと  $\xi_+, \xi_-$  は  $K$  に関して対称である。

一方の固定点  $\xi_+$  を0に、 $\xi_-$  を  $\infty$  に写すメビウス変換が次のように与えられる。

$$F(z) = \frac{z - \xi_+}{z - \xi_-}$$

$z' = F(z), w' = F(w)$  を  $z$  と  $w = M(z)$  での  $F$  の像とする。 $F$  は  $z \mapsto w = M(z)$  を新しいメビウス変換  $M'$  に移す。

$$w' = F(w) = F(M(z)) = F(M[F^{-1}(z')])$$

と表すことができるから次のメビウス変換であらわすことができる。

$$M' = F \circ M \circ F^{-1}$$

$M'$  の固定点は  $0, \infty$  である。しかしこのようなメビウス変換は乗法因子を  $m$  として

$$M'(z') = mz' \tag{3.21}$$

$$m = \rho e^{i\alpha} \tag{3.22}$$

とかける。つまり  $\alpha$  の回転と  $\rho$  の伸縮の合成である。

$m = e^{i\alpha}$  であるときは回転に対応し、この時の  $M$  は楕円型になる。

これは原点中心の円を自分自身に移すので下図右のようになる。

### 3.3 リーマン球

次に円から球に次元を上げて見よう。下図左の複素平面は複素数  $\mathbb{C}$  を表す。

しかし、1つ問題なのは無限大をどこにとるかである。

そこで図右のように単位球を考えこの中心を共通とする大円に複素平面を考える。

この単位球がリーマン球  $S_R$  である。

図のように北極から複素平面への直線を引くと、リーマン球表面で交点  $P'$  を持ち、平面には  $P$  ができる。

半球面上の点  $P'$  は複素平面上の複素数  $P$  と 1 対 1 に対応する。

$$S_R = \mathbb{C} \times R$$

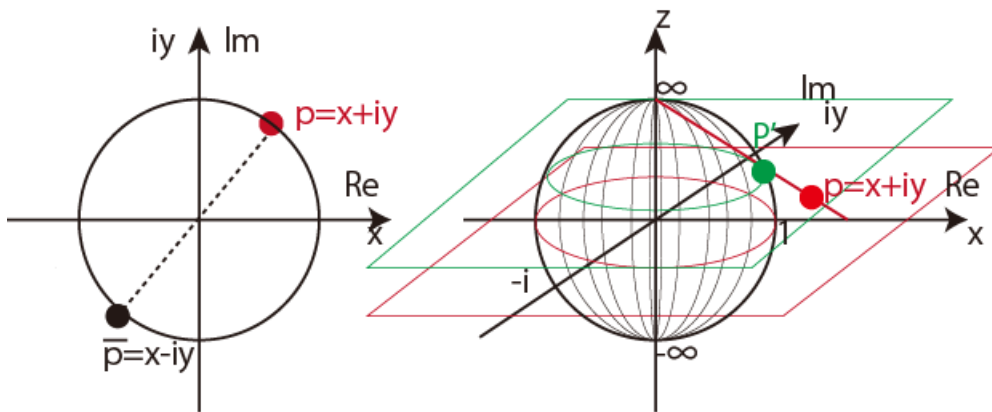


図 3.15: リーマン球

こうすると球面上の北極を  $\infty$  と定義することができる。

#### 3.3.1 立体射影

リーマン球面上の2点  $p', q'$  が直径に関してちょうど対称的である場合、これは前節で登場した、対蹠点の関係になっている。

図のように  $p'$  の立体射影を  $p$  とする。



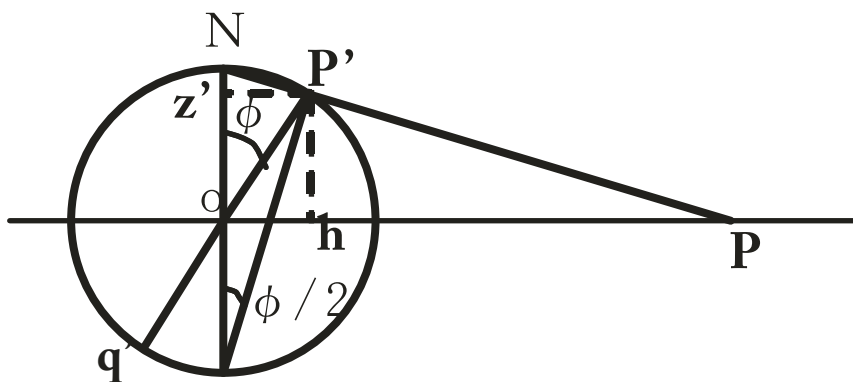


図 3.16:  $p(\phi, \theta)$  において  $\theta = 0$  の断面図

三角形の相似から ON を 1 に規格化すると

$$p = r e^{i\theta} = \cot\left(\frac{\phi}{2}\right) e^{i\theta} \quad (3.23)$$

が成り立つ。一般に  $p'$  の座標を次で表すと

$$p'(\phi, \theta)$$

上図からその対蹠点  $q'$  は次のようにおける。

$$q'(\phi + \pi, -\theta)$$

式 3.23 から  $\cot(\theta + \pi/2) = -\tan(\theta)$  であることを利用して式 3.18 から

$$q = \cot\left(\frac{\phi + \pi}{2}\right) e^{-i\theta} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} &= -\tan(\phi) e^{-i\theta} = -\frac{1}{\bar{p}} \\ &= -T(p) \end{aligned} \quad (3.25)$$

が成り立つ。

また、 $p'$  の座標を  $(x', y', z')$  とするとリーマン球上にあるから

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1 \quad (3.26)$$

また、 $p'$  から C 軸への垂線の足を  $h$ 、N 軸への水平線の足が  $z'$  とすると NO が 1 だから

$$p = h \frac{|p|}{|h|} \quad (3.27)$$

$$\frac{|p|}{|h|} = \frac{1}{1 - z'} \quad (3.28)$$

$$h = x' + iy' \quad (3.29)$$

が成り立つので

$$\begin{aligned} p = x + iy &= \frac{x' + iy'}{1 - z'} \\ |p|^2 &= \frac{x'^2 + y'^2}{(1 - z')^2} = \frac{1 - z'^2}{(1 - z')^2} = \frac{1 + z'}{1 - z'} \end{aligned} \quad (3.30)$$

でありこれから次の立体射影の公式を得る。

$$x' + iy' = \frac{2p}{1 + |p|^2} = \frac{2x + i2y}{1 + x^2 + y^2} \quad (3.31)$$

$$z' = \frac{|p|^2 - 1}{|p|^2 + 1} \quad (3.32)$$

### 3.3.2 角の保存

まずなす角の決め方を次のようにする。曲線  $S_1$  と  $S_2$  が点  $p$  で交わっている。曲線が滑らかであれば点  $p$  で接線を引くことができる。この接線を  $T_1, T_2$  とし、点  $p$  での  $S_1, S_2$  の角を  $T_1$  から  $T_2$  への鋭角で定義する。つまり、角度には符号が入る。

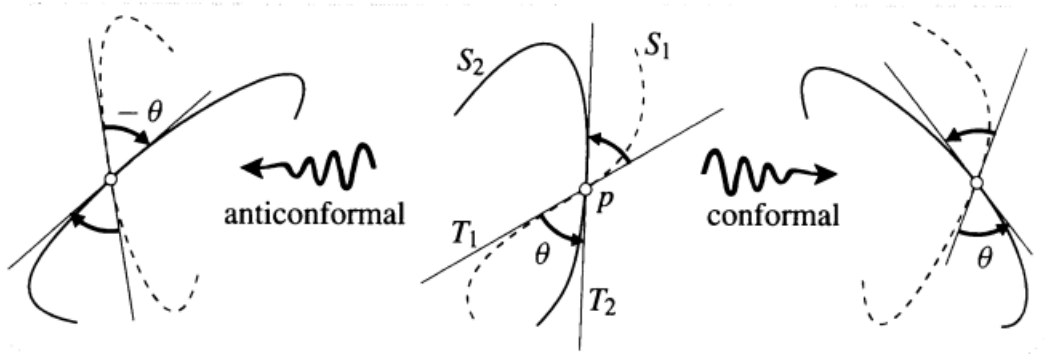


図 3.17: 等角、反等角の定義 [10] より

等角であるとは点  $p$  を通る全ての曲線の対角が保たれる写像の場合をいう。もちろん符号も保存されないといけない。図左のように符号のみが反転する場合は反等角であるという。ここで

前節での円に関する反転は反等角であるが次節の複素反転は等角になる。

円に関する反転では次の図のように円  $K$  には任意の点  $z$  から任意の方向に向かって  $K$  に直交する円がユニークに決まることを示す。まさにこれは 2 点電荷の電位と電場を表している。

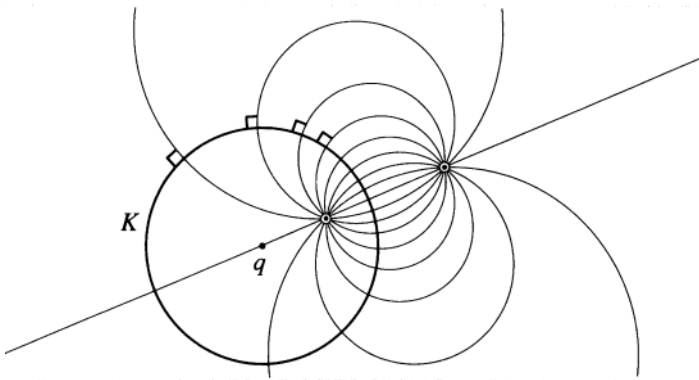


図 3.18: ある点から異なる方向への円と直交する円は 1 つだけ決まる。[10] より

次の図 a のように点  $p$  で  $K$  に直交する 2 つの円を考えその接線を  $T_1, T_2$  とする。この時、 $K$  に関する反転がその円を保ったので  $\tilde{p} = T_K(p)$  での新しい角は  $-\theta$  となり、これは反等角である。

これに対し図 b は複素反転を特徴的に示している。複素反転では単位円で円に関して反転を実施し、さらにその後、実軸に関する反転をおこなう。よって図 b のように反等角が 2 つおこなわれるので結局等角になる。つまり、等角か反等角かは鏡映を偶数か奇数回数含むかで決まる。

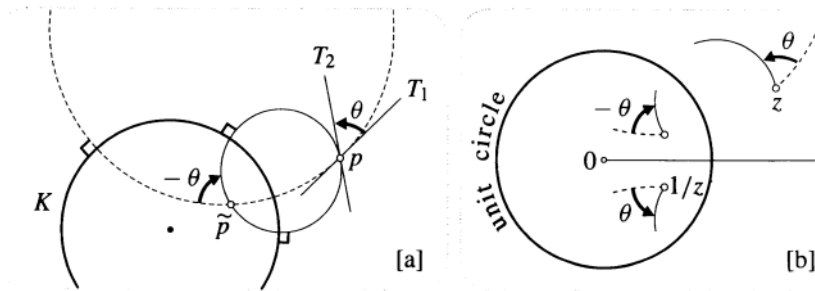


図 3.19: a は円に関する反転、b は複素反転である。[10] より

### 3.3.3 対称性の保存

物理学では対称性があるということはそこに保存則があるということである。ここでも直線に関する鏡映は直線に関する対称性を保存することをまず見てみよう。

### 3.3.4 複素反転

$z$  の複素反転  $T$  を次のように表す。

$$T : re^{i\theta} \mapsto \frac{1}{r}e^{-i\theta} \quad (3.33)$$

これを単位円を使って次のように視覚化する。

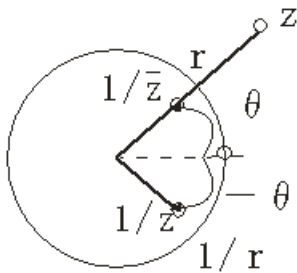


図 3.20: 複素反転

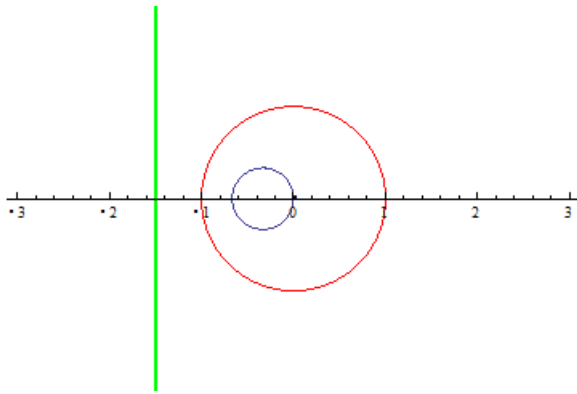
この複素反転は次の 2 つの手順からなる。

1.  $z = re^{i\theta}$  を原点からの向きが  $z$  と同じで長さが  $z$  の逆数である点  $\frac{1}{r}e^{i\theta} = \frac{1}{z}$  に写す。
2. 複素共役、実軸に関する鏡映をつかい点  $\frac{1}{z}$  を  $\frac{1}{z}$  に写す。

反時計回りを正とし、正の方向への移動に対し、左側の領域を対応した領域とする。

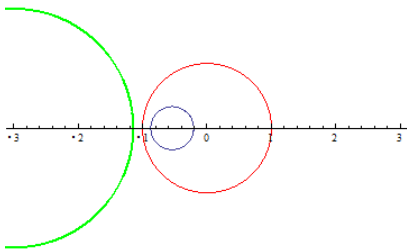
円  $K$  に対して円  $C$  の変換を考える。??のうち、平行移動、回転、拡大については円の向きを保ち、円の内部は内部に写る。

次の図で円  $K$  に対する円の反転を円  $K$  の中心を通る場合と、通らないが円  $K$  の内部にある場合と外にある場合を示す。



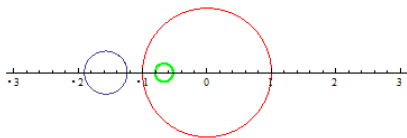
赤の半径 1 の円に対し青の半径  $1/3$  で原点を通る円を反転させた結果が緑の直線になる。

図 3.21: 原点を通る円の反転



赤の半径 1 の円に対し青の半径  $1/3$  で原点を通らない内部の円を反転させた結果が緑の円になる。

図 3.22: 原点を通らない円の反転 1

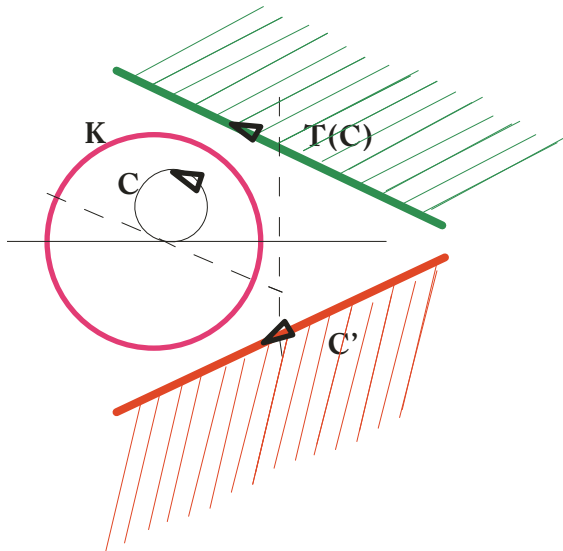


赤の半径 1 の円に対し青の半径  $1/3$  で原点を通らない外部の円を反転させた結果が緑の円になる。

図 3.23: 原点を通らない曲線の反転 2

この 3 つの図は単純な反転である。複素反転の場合はさらに実軸に対する鏡映が加わるので  $C$  の内部が原点を含むなら  $C$  は逆向きで円  $K$  の外部に写る。

この時円の内部は内部に写る。しかし、次の図のように  $C$  が原点を通るならば  $C$  は直線に写り、この時円の内部は直線左側の半平面に写る。



円 C が円 K の中心を通るとまず反転  $T(C)$  に写る。その後実軸に対して反転し円 C の内部は半平面  $C'$  に写る。

図 3.24: 円 C の円 K に対する複素反転

メビウス変換は次のように 4 つの複素数の定数を持つがこれは定数倍してもかわらないので独立した変数は 3 つであり、3 点を決めれば 1 つの変換が存在することになる。

$$M(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{kaz + kb}{kcz + kd}$$

ユークリッド空間においても相似変換は 3 点で一意に決めることができた。またメビウス変換において

$$ad - bc = 0$$

であればメビウス変換の分母分子に  $ac$  をかけると  $ad = bc$  が成り立てば

$$M(z) = \frac{acaz + acb}{accz + acd} = \frac{a^2cz + a^2d}{ac^2z + bc^2} = \frac{a^2(cz + d)}{c^2(az + b)} = \frac{a^2}{c^2} \frac{1}{M(z)}$$

$$M(z)^2 = \frac{a^2}{c^2}$$

よって全複素平面は 1 点  $a/c$  に押しつぶされる。これはメビウス変換の  $z$  に  $\infty$  を代入した極限でもある。またメビウス変換で無限大に変換される  $z$  は

$$M\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$$

である。また次が成り立つ時、メビウス変換は正規化されたという。

$$ad - bc = 1 \tag{3.34}$$

またメビウス変換の逆変換は次で表される。

$$M^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a}$$

これから非特異なメビウス変換の全体は写像の合成に対して群をつくる。

またメビウス変換には高々 2 つの不動点が存在し、次を解くことによってその解を  $\xi$  とすると

$$z = M(z) \tag{3.35}$$

$$\xi_{\pm} = \frac{(a-b) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4}}{2c} \quad (3.36)$$

となる。

### 3.3.5 複比

複素  $z$  平面において  $q,r,s$  の 3 点の順番に向きづけられた円  $C$  を  $q'r's'$  の順番に写すメビウス変換  $C'$  を考えよう。

この時図のように領域も反転するとする。

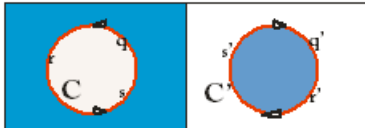


図 3.25: 反転

このような 3 点  $p,q,r,s$  を図のように反転した 3 点  $p',q',r',s'$  に写すメビウス変換はただ 1 つしか存在しない。それが次のように表現できるのである。

$$[w, q', r', s'] = [z, q, r, s] = \frac{(z-q)(r-s)}{(z-s)(r-q)} \quad (3.37)$$

この変換を複比という。

おもしろいことにこの変換によって 3 点  $q,r,s$  が円  $C$  を通るなら、この円  $C$  実軸上に写し、3 点の像が  $0,1,\infty$  に写る。

## 3.4 球面幾何

反時計回りの回転を正として角を保存する運動を順運動、角が反転する運動を反運動と呼ぶことにする。球面において中心  $O$  を通る平面との交線は大円であり、球面上でこれを直線  $L$  と呼ぶ。この直線  $L$  に関しての鏡映変換を

$$M_L \quad (3.38)$$

で表す。球面の運動で反運動はこの鏡映に相当する。また、次の図のように大円  $P$  に直交する 2 つの直線  $L1, L2$  の交点は対蹠点  $p, \hat{p}$  をつくり、これを極という。

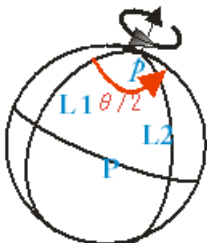


図 3.26: 極  $p$  での回転

点  $p$  での法線方向に回転軸をとり  $L1, L2$  のなす角を  $\theta/2$  としてこの軸周りの回転  $\theta$  を

$$R_p^\theta \quad (3.39)$$

で表す。球面ではどの2直線も交わるので  $p$  点まわりの回転  $R_p^\theta$  は任意の2つの鏡映の合成である。

$$R_p^\theta = M_{L_2} \circ M_{L_1}$$

つまり順運動は回転である。また、球面上に線分  $ab$  とこれを長さの等しい  $a'b'$  に写す写像は順運動  $P$  と反運動  $\hat{P}$  が共に1つだけ存在し、 $a'b'$  を通る直線を  $L$  とすると

$$\hat{P} = M_L \circ P$$

$$P = R_{a'}^\phi \circ R_p^\theta \quad (3.40)$$

である。球面の順運動は全て回転であり反運動は回転と鏡映が奇数回加わる。

球面の運動において反運動の例は鏡映である。直線  $L$  に関する鏡映を  $Rf_L$  で表す。これに対し順運動は回転  $R$  である。 $P$  点まわりの  $\phi$  の回転を  $R_p^\phi$  で表すと  $p, q$  が対蹠点であれば次の関係が成り立つ。

$$R_p^\phi = R_q^{-\phi} \quad (3.41)$$

平面の順運動は2つの鏡映の合成であり、鏡映の直線が交差するなら回転になった。球面ではどの2直線も直交するので2つの鏡映は全て回転になることになる。

つまり

$$Rf_{L_2} \circ Rf_{L_1} = R_p^\phi$$

つまり次の図で示すように次の定理が示せる。

定理:球面における点  $p$  における  $\theta$  の回転は共に  $p$  点を通りなす角  $\theta/2$  をなす任意の2直線に関する鏡映の合成である。

### 3.4.1 球面反転

前節の結果を3次元の球に拡張することは自然である。そこで  $T_s$  を球  $S$  内の3次元空間とする。

次の図のように球  $S$  の中心を  $q$  とし、2次元の円の場合と同様に  $S$  の内部に  $q$  を通る球面を考える。式 5.22 から点  $p$  と中心  $q$  との距離が  $\rho$  ならば  $T_s(p)$  を  $q$  から見て  $p$  と同じ方向に距離

$$\frac{R^2}{\rho}$$

だけ離れた点であると定義する。

この時、図のように  $q$  を通る内部の球が反転により平面  $\Pi$  に移される。これは  $q$  を通る接平面と平行である。

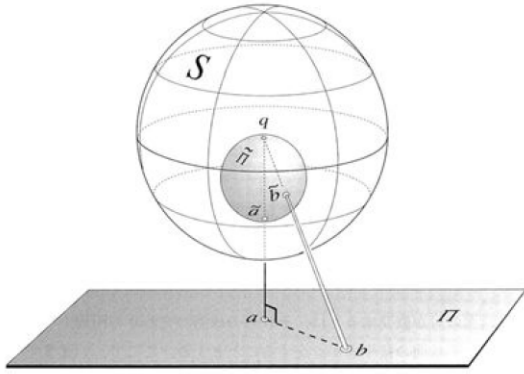


図 3.27: [12] より

これは 2 次元の時と同じように  $q$  を通らない球は球に写す。

### 3.5 複素曲率

点  $p$  で既知の曲率  $\kappa$  を持つ曲線  $K$  に解析関数  $f$  が作用した時、これらの像を  $\tilde{\kappa}$ 、 $\tilde{K}$  とする。曲率の像がどう変換されるかを求めよう。

今図のように点  $p$  で既知の曲率  $\kappa$  を持つ曲線  $K$  を描く。 $p$  中心の無限小変化を表す半径  $\xi$  の微小円も描いてある。これが  $f$  により図右のように変換される。

この  $\xi$  を 1 つの複素数として次の時間後には  $\tilde{\zeta}$  に変化したとしてこの変化の角を  $\epsilon$  とする。

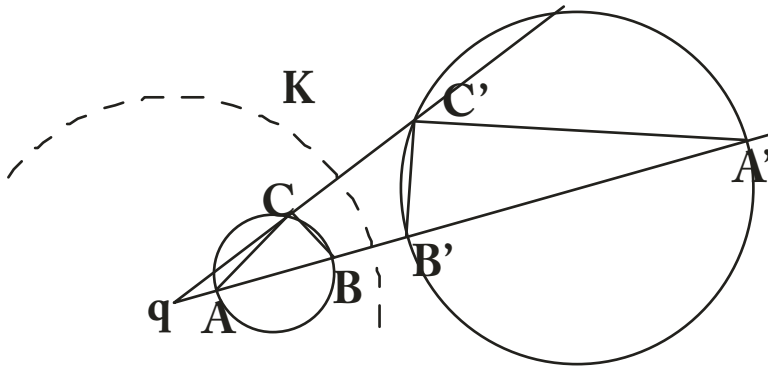


図 3.28: 解析関数による曲率の変換

点  $p, \tilde{p}$  について曲率は

$$\kappa = \epsilon / |\xi|$$

$$\tilde{\kappa} = \tilde{\epsilon} / |\tilde{\xi}| \tag{3.42}$$

となる。ところが式 4.12 により

$$|\tilde{\xi}| = |f'(p)| |\xi|$$

となる。回転角の像は点  $p$  と  $p$  から  $\epsilon$  だけ回転した位置では同じではないとし、 $\sigma$  のずれが生じるとしよう。すると



$$\tilde{\epsilon} = \epsilon + \sigma$$

となる。この  $\sigma$  を求めればよい。点  $p$  の中心の無限小円板を  $f(p)$  を中心とする円板に写す操作が  $f'(p)$  であった。そこで  $p$  を  $f'(p)$  を中心とする円板に写す操作は  $f'(p)$  をもう一度  $z$  で微分することと考える。次の図のように  $\xi$  が  $f''(p)$  によって  $\chi$  に写されたとする。

$$\chi = f''(p)\xi \quad (3.43)$$

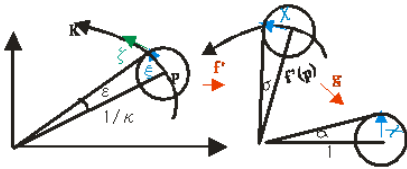


図 3.29: 微分の幾何

さらに長さを 1 に調整するために  $f'(p)$  で割る。すると図右のように  $\sigma$  は虚成分方向への弧の長さに等しいから

$$\sigma = \text{Im} [\chi / f'(p)]$$

式 3.43 より

$$\sigma = \text{Im} [f''(p)\xi / f'(p)] \quad (3.44)$$

である。よって式 3.42 から式??において  $v$  が  $\theta$  のみの関数、 $u$  が  $r$  のみの関数である場合について考えよう。

$$\partial_\theta v(\theta) = r \partial_r u(r) \quad (3.45)$$

この時、両辺ともに定数と考えることができるのでこれを  $A$  とおく。すると

$$\partial_\theta v(\theta) = A \quad (3.46)$$

$$r \partial_r u(r) = A \quad (3.47)$$

となるので両辺を積分すると  $c$  は定数として

$$v = A\theta + c$$

$$u = A \log r + c$$

従って

$$u + iv = A(\log r + i\theta) + c'$$

ところが  $z = re^{i\theta}$  の対数をとれば括弧内の式が得られるので

$$u + iv = A \log z + c'$$

は次の図のように円を直線に写す複素写像である。

図 3.30: 左から  $\log z, z$  のグラフ

$$\tilde{\kappa} = \frac{\text{Im}[f''(p)\xi/f'(p)] + \epsilon}{|f'(p)||\xi|}$$

曲線  $K$  の点  $p$  における単位接線を

$$\hat{\xi} = \frac{\xi}{|\xi|} \tag{3.48}$$

で定義すれば曲率  $\kappa$  の  $f$  による像は次で与えられることになる。

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa} &= \frac{1}{|f'(p)|} \left( \text{Im} \left[ f''(p)\hat{\xi}/f'(p) \right] + \kappa \right) \\ &= \text{Im} \left[ \frac{f''(p)\hat{\xi}}{f'(p)|f'(p)|} \right] + \frac{\kappa}{|f'(p)|} \end{aligned}$$

2 行目の式の第 2 項は平面が  $R$  倍の引き延ばしがあったとき、半径  $r = 1/k$  の円が半径  $r' = R/k$  に写ることを表している。第一項の存在は元には曲率がなくても写像には曲率が現れてくることを示している。そこで

$$\begin{aligned} k(\hat{\xi}) &= \text{Im} \left[ \frac{f''(p)\hat{\xi}}{f'(p)|f'(p)|} \right] \\ K &= \frac{i \bar{f}''}{f'|f'|} \end{aligned}$$

とおき、 $K$  を複素曲率とする。これによって

$$\kappa(\hat{\xi}) = K \cdot \hat{\xi} + \frac{\kappa}{|f'(p)|}$$

この複素曲率  $K$  のイメージを与えていこう。次のように複素平面で直交する成分にわけると

$$K = K_1 + i K_2 \tag{3.49}$$

これは図のように複素平面でのベクトルを表し、成分  $K_1, K_2$  の単位ベクトルを  $e_1, e_2$  とするとこれらの  $f$  による像は図右のように円周上に写され、直交関係を保つ

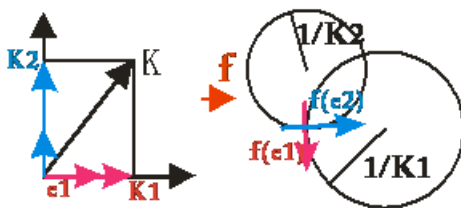


図 3.31: 単位ベクトルの直交関係は保たれる

さらに複素空間でこの  $K$  の方向には  $f$  による変換において回転の最大となる向きであり、この回転角が式 3.44 の最大値に等しいことが次からわかる。

これをみるために複素平面上のベクトルを任意の方向に平行移動し、 $f$  による像がどうなるかを次の図に示す。

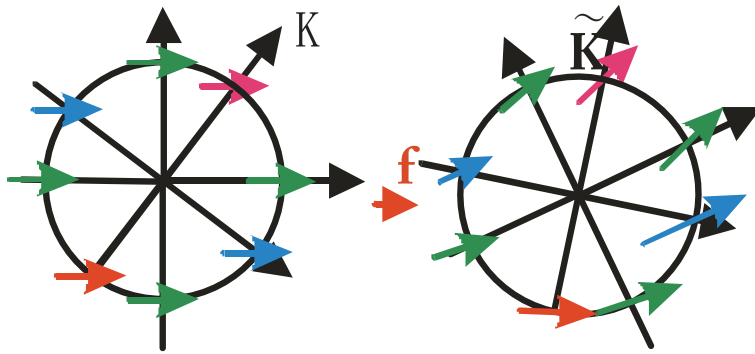


図 3.32: ベクトルの平行移動

$K$  の方向については  $\xi$  がこの方向にあれば次が成り立つとして

$$\xi \propto K \quad (3.50)$$

式 3.43 による  $\chi, K$  の定義から

$$\chi \propto f'' K \propto \frac{i}{f'} \propto i f' \quad (3.51)$$

となる。つまり虚軸方向に  $f'$  だけ移動しているのでその像は最大の回転をなす。

さらにこれと  $\pi/2$  だけ回転した方向については  $|f'|$  の増加、すなわち伸縮度の増加が最大になるので図のように各位置のベクトルは写されるわけである。

以上から  $Q$  が無限小のベクトルである時、解析写像  $f$  の像を  $\tilde{Q}$  とすると  $Q$  が複素曲率  $K$  の方向に動くと  $\tilde{Q}$  はもっとも速く回転するがその長さは変わらない。逆に  $Q$  が  $-iK$  の方向に動く時は回転はしないがその長さの引き伸ばしは最大になる。

これらは式で表すことができる。回転については  $Q$  が任意の方向  $\hat{\xi}$  に動くと  $\tilde{Q}$  の回転の割合を  $R$  とすると

$$R = K \cdot \hat{\xi} \quad (3.52)$$

この最大値が  $Q$  が  $K$  の方向を向いた時に最大になる。

同様に伸縮については大きさの割合を  $S$  とすると  $K$  と  $\hat{\xi}$  のなす角を  $\theta$  とすると

$$S = K \cdot \hat{\xi} \sin \theta \quad (3.53)$$

$$S = \hat{\xi} \times K \quad (3.54)$$

とかける。

この過程において点  $p$  から  $\xi$  が微小変化した  $\zeta$  が変換先で 2 次の微分係数である  $\sigma$  を引き出していることになる。

### 3.5.1 中心力場への応用

中心力  $f(r)$  が働いている場を考えよう。この時の運動方程式は

$$m\ddot{r} = -f(r)$$

である。まず単純に  $f(r)$  が  $r$  で  $m$  は 1 とする。

$$\ddot{r} = -r$$

この方程式の解は一般に

$$r = pe^{it} + qe^{-it} \tag{3.55}$$

$r$  を複素数  $z$  に置き換える。

$$z = a \cos\theta + ib \sin\theta$$

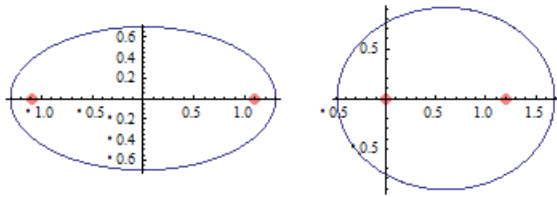
$$a = p + q$$

$$b = p - q$$

$a > b$  とするとこの図形は焦点が

$$\pm\sqrt{a^2 - b^2} = \pm 2\sqrt{pq}$$

で  $a$  が長径、 $b$  が短径の楕円である。この図が下図右に描いてある。この楕円の中心は原点にある。また、 $a$  が発射点であれば  $b$  はその速度であることがわかる。さらに興味深いことに、天体の運動は太陽が中心力の中心でこの位置は焦点の1つである。この時の中心力は  $r^{-2}$  の形をしているので  $z^2$  の像を図左に描いてみるとやはり楕円になり、しかも焦点が原点にくる。



$z^2$  によって中心が焦点の1つに写る。

図 3.33:  $z = e^{it} + 0.3e^{-it}$  と  $z^2$  の像

### 3.5.2 Kasner, Arnol'd の定理

ある力  $F$  が位置  $r$  とその像について次のような関係があるとき双対性があるという。この時、次の写像で写され

$$z \rightarrow z^m$$

$$(A + 3)(\tilde{A} + 3) = 4$$

$$m = \frac{A + 3}{2}$$

の関係がある。例えば線形写像は  $A = 1$  の場合である。この時、 $m = 2$  であり、逆 2 乗の力の場合は  $A = -2, m = 1/2$  である。

さらにこの Kasner, Arnol'd の定理は次のようにエネルギーとしての解釈を与える。

一般にエネルギー 0 の軌道は力のない直線運動に写され  $F \propto r^A$  の引力、または斥力の中の正のエネルギー軌道は双対の場合では引力に写され、負のエネルギーの場合は斥力に写されるただし、重力場のように

$$-3 < A < -1 \tag{3.56}$$

の関係があるとこれらは反対の関係になる。

### 3.5.3 ガウス曲率

曲面上の点  $P$  において曲面の法線ベクトル  $\mathbf{n}$  を含む平面を  $\Pi$  とし、平面  $\Pi$  と曲面の点  $p$  での交線の曲率を  $\kappa$  とする。

主曲率は  $\Pi$  が  $\mathbf{n}$  の周りを回るときの最大値  $\kappa_{max}$  と最小値  $\kappa_{min}$  である。この2つの主曲率を決める交線は互いに直交している。

この時、ガウス曲率  $k(p)$  を次のように定義する。

$$k(p) = \kappa_{min}\kappa_{max} \quad (3.57)$$

このガウス曲率は曲げても変わらない。また、この値が負であることはその点が鞍点であることを意味する。この曲率は内在的といわれることもある。

任意の三角形を  $T$  として内角の和が  $\pi$  からどれだけずれるかを超過角といい角超過  $E$  で表す。

$$E(T) \equiv (T \text{ の内角の和}) - \pi$$

内在的であるとは無限小三角形  $\Delta$  の点  $p$  での面積  $dA$  として

$$E(\Delta) = k(p)dA \quad (3.58)$$

が微分幾何からも求まる。 $E, dA$  は局所的に観測できる内在的な値なので  $k$  も内在的に決まる。この式を足しあわせれば

$$E(T) = \int \int_T k(p)dA$$

が成り立つ。さらに  $k$  が定曲率であれば

$$E(T) = \int \int_T k(p)dA = kA(T)$$

For なり、これは非ユークリッド幾何の基本式である。ユークリッド幾何であればこの値は0であるし、球面幾何であれば正、双曲線幾何であれば負になる。

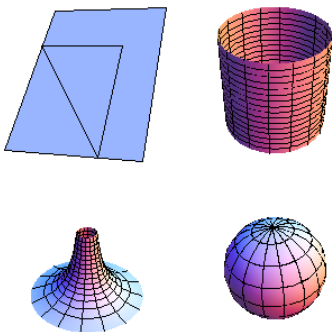


図 3.34: 多様な曲率をもつ図形

つまり上図左のユークリッド平面の直角三角形はその右の円柱の表面にはそのまま角度を変えずに貼ることができるが下段の双曲線立体や球には貼り付けることができない。

これは曲率が基本的に2次元の構成をしていることを示す。物理的にはこの曲率が運動と関係しているため内在的であることは図上段の平面と円柱面が運動的にも区別できないことを示す。さらにこのことと式 3.58 からこれは面積変化に関係してくる。

これから逆に空間の構成についても考えることができる。

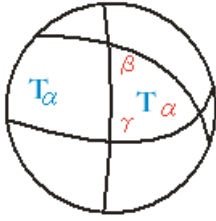


図 3.35: 内角の和は  $\pi$  にならない

球面の測地線は大円、つまり球面の中心を通る平面と球面の交線になる。球面の曲率は一定であることを大域的な幾何から次のように Thomas Harriot が考えた。

球面上の任意の三角形  $T$  の内角を  $\alpha, \beta, \gamma$  とする。この  $T$  の辺を伸ばして図のように構成される閉曲面の面積を  $A(T)$  のように表すと球面上に同じ図形がペアで作らるので

$$A(T) + A(T_\alpha) + A(T_\beta) + A(T_\gamma) = 2\pi R^2$$

となる。さらに3つの角度  $\alpha, \beta, \gamma$  で球面を経度で分割する面積を考えると

$$A(T) + A(T_\alpha) = 2\pi R^2 \frac{\alpha}{2\pi} = 2\alpha R^2$$

$$A(T) + A(T_\beta) = 2\pi R^2 \frac{\beta}{2\pi} = 2\beta R^2$$

$$A(T) + A(T_\gamma) = 2\pi R^2 \frac{\gamma}{2\pi} = 2\gamma R^2$$

が成り立つ。これらを足しあわせると

$$3A(T) + A(T_\alpha) + A(T_\beta) + A(T_\gamma) = 2(\alpha + \beta + \gamma)R^2$$

最初の式を引くと

$$A(T) = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)R^2$$

括弧の中は直線 (180度) 超過角  $E$  であり、今  $k = 1/R^2$  であるから

$$E(T) = kA(T) \tag{3.59}$$

が得られる。

### 3.5.4 複素空間での計量

曲面  $S$  から次  $\hat{z}$  を複素平面  $\mathbb{C}$  上の点  $Z$  に1対1の対応があるとき平面上の  $ds$  を用いて  $\hat{d}s$  を決める規則を計量という。

$dz$  は  $z$  の向きにも依存するのでこの場合の計量は  $z, \phi$  に依存し、

$$\hat{d}s = \Lambda(z, \phi)ds$$

となる。さらに等角であるという条件を課すと、 $\phi$  への依存性がなくなり

$$\hat{d}s = \Lambda(z)ds \tag{3.60}$$

これは  $S$  上の図形が  $\Lambda$  倍される図形が平面  $\mathbb{C}$  に描かれるということである。  
 図のように球面の北極  $N$  から平面  $\mathbb{C}$  へ直線を引く。立体射影  $K\sqrt{2}$  となるので

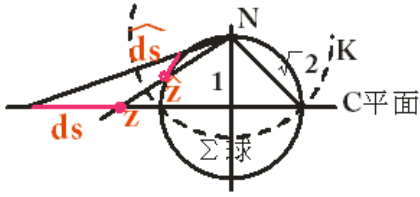


図 3.36: 擬球上の計量

式 3.19 から

$$\hat{d}s = \frac{2}{(Nz)^2} ds$$

が成り立つ。さらに 3 平方の定理から

$$(Nz)^2 = 1 + z^2$$

だから

$$\hat{d}s = \frac{2}{1+z^2} ds \quad (3.61)$$

がこの場合の計量を表すことになる。関数  $f(z)$  が解析的であり、この計量を保つ時、順運動とみなすことができる。

式 3.22 から

$$\Lambda(\tilde{z})d\tilde{s} = \Lambda(z)ds \quad (3.62)$$

ここで  $\tilde{z} = f(z)$  だから

$$d\tilde{z} = f' dz \quad (3.63)$$

よって式 3.62 から

$$|f'(z)| = \frac{\Lambda(z)}{\Lambda(f(z))} \quad (3.64)$$

を満たすことになる。さらにガウス曲率が  $k = -1$  で一定であれば  $S$  はリーマン球  $\Sigma$  であるから式 3.61 から

$$|f'(z)| = \frac{1 + |f'(z)|^2}{1 + z^2} \quad (3.65)$$

を満たす運動でなければならない。

立体射影では等角、であり円は保存されるので次のことがいえる。

直線に関するリーマン球  $\Sigma$  の鏡映は立体射影によるその直線の像にかんする  $\mathbb{C}$  の反転を決める。 $\hat{a}, \hat{b}$  がリーマン球  $\Sigma$  の体積点であり  $\hat{a}$  点まわりの  $\theta$  の回転は 2 つのリーマン球  $\Sigma$  上の 2 点  $\hat{a}, \hat{b}$  を通り、交わる直線  $\hat{L}1, \hat{L}2$  を用いて次のように表すことができる。

$$R_{\hat{a}}^{\theta} = Rf_{\hat{L}2} \circ Rf_{\hat{L}1}$$

従ってこれらのユークリッド空間への像も同じ関係を保ち、次の式が成り立つ。

$$R_a^{\theta} = Rf_{L2} \circ Rf_{L1}$$

ここでの鏡映  $Rf$  は反転  $T$  である。よってこの  $R_a^{\theta}$  はメビウス変換である。式 3.22 から乗法因子  $m$  を次のようにおく。

$$m = e^{-i\theta}$$

すると次の定理が成り立つ

定理：リーマン球  $\Sigma$  上の回転  $R_a^\theta$  は  $\mathbb{R}^3$  立体射影により  $\mathbb{C}$  の楕円型メビウス変換  $R_a^\theta$  を決める。 $R_a^\theta$  の固定点は  $a, -1/\bar{a}$  であり、固定点  $a$  に付随する乗法因子は  $m = e^{-i\theta}$  である。

よって式 3.22、式 3.14 から

$$[R_a^\theta] = m \begin{pmatrix} e^{-i\theta/2}a^2 + e^{i\theta/2} & 2ia\sin(\theta/2) \\ 2i\bar{a}\sin(\theta/2) & e^{i\theta/2}a^2 + e^{-i\theta/2} \end{pmatrix}$$

$$m = \begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$$

である。式 3.14 から一般的な反運動は

$$z \mapsto \frac{a\bar{z} + B}{-\bar{B}\bar{z} + A}$$

となる。 $\hat{a}$  を終点とする単位ベクトル

$$\mathbf{v} = l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}$$

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

をとり、この成分を用いると

この時、 $\mathbf{v}$  が単位ベクトルであることから式 3.31 から

$$|a^2| = \frac{1+n}{1-n}$$

よって

$$[R_v^\theta] = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) + i\sin(\theta/2) & (-m + il)\sin(\theta/2) \\ (m + il)\sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) - i\sin(\theta/2) \end{pmatrix} \quad (3.66)$$

を得る。

### 3.5.5 4元数の導入

前節の結果である式 3.66 は 4元数を用いることにより、簡潔に表現できる。

複素数を拡張し、4つの基底ベクトルを  $1, I, J, K$  とおく。

$$I^2 = J^2 = K^2 = -1 \quad (3.67)$$

$$IJ = K = -JI, JK = I = -KJ, KI = J = -IK \quad (3.68)$$

を満たす時これをハミルトンの 4元数という。。またこれらの基底からベクトル  $V$  を

$$V = v_1I + v_2J + v_3K$$

とおくと  $1$  を単位ベクトルとして 4元ベクトルは

$$\mathcal{V} = v1 + V$$



と表す。もし  $v = 0$  であればこの  $\mathcal{V}$  は純虚数に対し、純 4 元数と呼ぶこともある。もう一つの 4 元数  $\mathcal{W}$  を持ってくると式 3.68 から歴史的初めてドット積とクロス積を共に表した次の関係式が得られる。

$$\mathcal{V} = v1 + V$$

$$\mathcal{W} = w1 + W$$

$$\mathcal{V}\mathcal{W} = vw - V \cdot W + vW + wV + V \times W \quad (3.69)$$

さらに  $\mathcal{V}, \mathcal{W}$  は共に純 4 元数であればこれは次のように単純になる。

$$\mathcal{V}\mathcal{W} = V \times W - V \cdot W$$

ここで、3 つの基底ベクトルを  $I, J, K$  について半回転を考える。式 3.66 から  $\theta = \pi$  を代入すると

$$[R_v^\pi] = \begin{pmatrix} in & -m + il \\ m + il & -in \end{pmatrix} \quad (3.70)$$

$$1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, I = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}, J = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

これは 3.68 の条件を満たす。これを用いると式 3.66 は次のように簡潔に表現できる。

$$\mathcal{R}_V^\theta = 1 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + V \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$V = lI + mJ + nK$$

これによって例えば  $i$  の周りに  $\pi/2$ 、 $j$  の周りに  $\pi/2$ 、の回転は次のようになる。

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_j^{\pi/2} \circ \mathcal{R}_i^{\pi/2} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + J) \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + I) \\ &= \frac{1}{2}(1 + J + I - K) \end{aligned}$$

つまりこの解釈は次の単位ベクトルを軸として  $\theta = 2\pi/3$  の回転である。

$$v = \frac{1}{\sqrt{3}}(i + j - k)$$

以上により 3 次元空間での位置ベクトル  $P$  の回転  $\mathcal{R}_V^\theta$  の結果  $P'$  に移されたとすると

$$P' = \mathcal{R}_V^\theta P \mathcal{R}_V^{-\theta}$$

を考えればよい。

また図のような 3 つの回転は

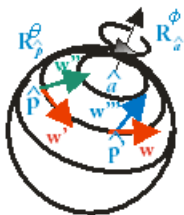


図 3.37: 回転

$$w \rightarrow w' \rightarrow w'' \rightarrow w'''$$

合成の結果  $p'$  まわりの回転

$$w \rightarrow w'''$$

$$R_{p'}^\theta = R_a^\phi \circ R_{p'}^\theta \circ R_a^{-\phi}$$

であり 4 元数では

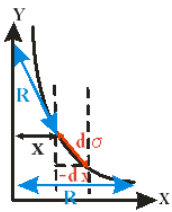
$$\mathcal{R}_{p'}^\theta = \mathcal{R}_V^\phi \mathcal{R}_P^\theta \mathcal{R}_V^{-\phi}$$

と表すことができる。  $\theta = \pi$  の時が半回転は単純に 4 元数を表す。

### 3.5.6 擬球

曲率が負である場合をここでは考察する。曲率が  $-1/R$  になるような曲線は図のようなトラクトリクスという。

これは Y 軸への接線の長さが常に  $R$  になるような曲線である。



$$X = R e^{-\sigma/R} \tag{3.72}$$

図 3.38: tratrix

この時、図の三角形の相似から次の式が成り立つ

$$\frac{d\sigma}{dx} = -\frac{R}{x} \tag{3.73}$$

この曲線トラクトリクスを Y 軸の周りに回転させてできる立体を半径  $R$  の擬球という。そこでこの半径  $R$  の擬球のガウス曲率を求めよう。

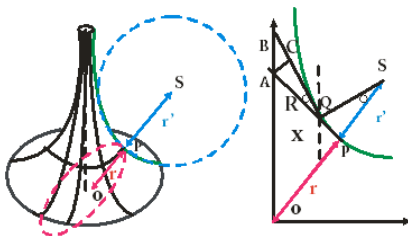


図 3.39: 擬球の曲率

図のように擬球の母線上の点  $P$  での曲率半径を  $r'$  とし、この半径を延長し Y 軸との交点を  $O$  として線分  $OP$  の長さを  $r$  とおく。すると点  $P$  で中心を  $O$  と  $S$  に持つ半径  $r$  と  $r'$  の 2 つの直交する円が図右のようにかける。ガウス曲率  $k$  の定義から

$$k = -\frac{1}{rr'}$$

ところが図の  $\circ$  の角度は等しいので三角形の相似から

$$\frac{AC}{R} = \frac{PQ}{r'}$$

$$\frac{AC}{QP} = \frac{R}{r'}$$

また、無限小の変化を考えれば  $PA = QB = R$  なので  $QP = BC$  である。角  $BCA$  と角  $APO$  がともに直角であるので微小変化では三角形  $ABC$  は三角形  $OAP$  と相似になる。よって

$$\frac{r}{R} = \frac{AC}{BC} = \frac{AC}{QP} = \frac{R}{r'}$$

これから

$$k = -\frac{1}{rr'} = -\frac{1}{R^2}$$

となりガウス曲率の式が得られる。

下図のように擬球の軸周りの角を  $0 \leq x \leq 2\pi$  としてトラクトリクスの母線に沿う弧長を  $\sigma$  とおく。この2つは座標として用いて擬球上の座標  $(x, \sigma)$  をユークリッド平面に写す写像  $y$  を考える。ユークリッド平面の座標  $(x, y)$  を複素数  $z$  とみなす。

座標  $(x, \sigma)$  を通る  $\sigma$  が一定な半径  $X$  は式 3.73 から

$$\frac{dX}{d\sigma} = -\frac{X}{R}$$

$$\log X = -\sigma/R + C$$

底辺では  $\sigma = 0$  で  $X = R$  となるので

$$X = Re^{-\sigma/R}$$

$R = 1$  とすると

$$X = e^{-\sigma}$$

等角な写像であるとするれば  $\sigma = \text{一定}$  と  $x = \text{一定}$  な直線はどちらの地図上でも直交しているので  $\sigma = \text{一定}$  の像は  $y(\sigma) = \text{一定}$  に移ると考えられる。

また擬球上で  $p(x, \sigma), q(x + dx, \sigma)$  を結ぶ曲線の弧の長さは  $dx$  が角度、 $X$  が半径のようにふるまうから  $X dx$  であり、同じ高さにあるので擬球から平面に写すとこの2点は  $dx$  だけ離れているので  $1/X$  倍される。式 3.60 から次のように計量が定まる。

$$\hat{d}s = X ds \tag{3.74}$$

図のように擬球上の高い位置で直径  $\epsilon$  の無限小円板を考える。地図上では直径が  $\epsilon/X$  となるので地図上では図のように  $y$  軸の下に向かうと直径は小さくなる。

$\sigma = 0$  では  $X = 1$  となるので等倍である。よって地図上では

$$d\sigma = X dy$$

$$\frac{dy}{d\sigma} = \frac{1}{X}$$

だから  $\sigma = 0$  で  $y = 1$  として

$$y = e^\sigma \tag{3.75}$$

を得る。よってこの地図では

$$\hat{ds} = X ds = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y}$$

という計量であることがわかる。さらに擬球上での面積  $\hat{S}$  とすると

$$d\hat{S} = \frac{dx dy}{y^2} \tag{3.76}$$

という関係がある。

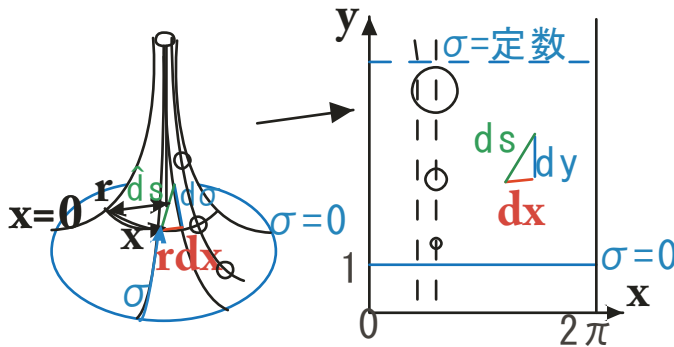


図 3.40: 擬球表面を平面に写す

この計量のもとで擬球上を  $\sigma = 0$  に向かって母線に沿って降りていく。すると擬球上では突然  $\sigma = 0$  で止まることになる。

同じように地図上を  $y$  軸に沿って降りていくとどうだろうか。擬球上と同じ共通したパラメタ  $t$  で降りていくと式 3.75 から

$$y = e^{\sigma(t)}$$

ここで

$$\sigma(t) = t$$

と単純におくと  $y = 0$  をみたら  $t$  は  $-\infty$  になってしまう。つまり擬球上での微小円板は地図に移し、 $\sigma = 0$  に向かって動くとその面積だけではなく、 $t$  についてゆっくりとなる。

擬球は負の定曲率を持つので双曲線幾何の公理の内有限なものについては満足する。例えば三角形の角超過はその面積の負の定数倍になるという定理も成り立つ。しかし、ユークリッド平面と以下の2点において異なっている。

1. 擬球は平面ではなく円筒に似ていて閉曲面は一点に収縮させることができるが擬球上の軸を巻く閉曲線はそうすることができない。
2. ユークリッド平面でも双曲線幾何でも線分は正負、どちらの方向にも無限大に延長することができるが擬球では下方には縁がある。

この解決に Beltrami は次のような方法を与えた。それは特殊相対論のような2つの異なる視点を与えることである。これは内在的幾何と外在的幾何の立場があるということである。

つまり双曲線上の粒子の立場は内在的幾何であり計量がここでは図 3.36 からポアンカレ半球面の計量と呼ばれる

$$\hat{ds} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y} = ds/y \quad (3.77)$$

で与えられているので  $y = 0$  に向かって移動していくと自分自身の大きさが変化しないが、双曲線の外の立場 (外在的幾何) では  $\hat{ds}$  の計量を用いると大きさは小さくなり、さらに移動の速度は小さくなって見えるということである。

つまり  $x + iy$  に中心を持つ無限小円の双曲半径は実軸上から見る無限小円の視野になるのである。これにより  $y = 0$  を外在的に見れば断絶された特別な位置であるが、内在的幾何によれば無限遠方であり決してたどりつくことのできない位置ということになる。

これは水平線と呼ばれる。

### 3.5.7 電磁気への応用

原点に点電荷がある場合の電気力線と等電位面を考えよう。静電ポテンシャルを  $\phi$  とすると

$$\phi = \frac{kq}{r} \quad (3.78)$$

で表される。そこで  $z$  を複素数として次の複素ポテンシャルを考えると

$$z = re^{i\theta}$$

$$f(z) = \frac{kq}{z}$$

この実数部分はまさに式 3.78 である。さらにその虚数部分は常に実数部分と直交するので図のように力線と等電位線が同時に描ける。

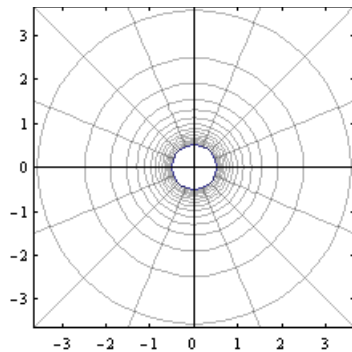


図 3.41:  $\frac{e^{-i\theta}}{r}$  のグラフ、 $r$  は 0 から 2、 $\theta$  は 0 から  $2\pi$  まで変化させてある。

実軸と虚軸が  $\pi/2$  だけ回転しているので複素数では異なる次元のものを同時に扱うことができる。

## 4 解析関数

### 4.1 局所性

前章で複素反転や変換の等角性をみだが、任意の写像の等角性を調べるにはどうしたらよりだろうか。

この方法は図のように交点  $q$  の非常に近くで何が起きているかを調べると判断できる。この局所性が複素関数で重要になる。

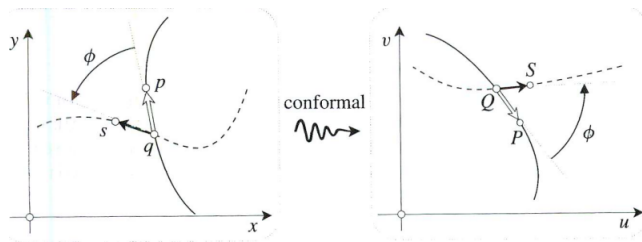


図 4.1: 文献 [4] より：無限小ベクトルの変換

そこで図のように  $p$  点の近傍の  $q$  点を曲線上にとり

$$\vec{qp}$$

が無限小であれば、点  $q$  での接線を表すと考えてよい。

また、写像された  $u-v$  座標でも像  $Q$  や像  $P$  はむしろ重要ではなく  $\vec{QP}$  が重要でこれを  $\vec{qp}$  の像と呼ぶことにする。

まず、点  $q$  をと通る無限小ベクトルを次のように表す。

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

同様に点  $Q$  を通るベクトルは

$$\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$$

となる。この関係を次の図で表す。

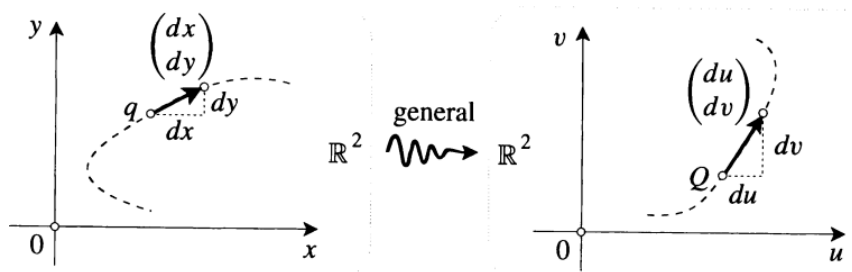


図 4.2: 文献 [4] より：無限小ベクトルの成分表示

ここで、この写像が  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  だから

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

と表すことができ、これをヤコビ行列  $J$  で表すと

$$\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix}$$

となる。例えば

$$z \rightarrow z^2$$

の場合は

$$z = x + iy$$

$$w = u + iv$$

とすると

$$u + iv = w = z^2 = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i2xy$$

だから

$$u = x^2 - y^2$$

$$v = 2xy$$

となるので

$$J = \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

極座標で表すために  $z = re^{i\theta}$  とすれば  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$  とできるので

$$J = 2r \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

となる。これは  $2r$  の引き伸ばしと、 $\theta$  の回転を表しているので2つの変換によるベクトル間の角度は等角になる。

## 4.2 微分可能性 [91]

複素平面での微分をどう考えていけばよいだろうか。実平面ではなめらかな関数であれば微分係数を一意にきめることができたが、複素平面では問題がある。

$$z = x + iy$$

と  $z$  は2変数をもっているので、 $z$  の関数  $f(z)$  は独立変数を2つもつことになる。

実数の場合と同様に微分係数を次のように定義する。 $\Delta z \in \mathbb{C}$  として

$$df' = \frac{df}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

この極限の取り方は実数の場合は直線上で考えればよかったが、複素数では次の図のように平面上で

$$\Delta z \rightarrow 0$$

を考えるわけである。

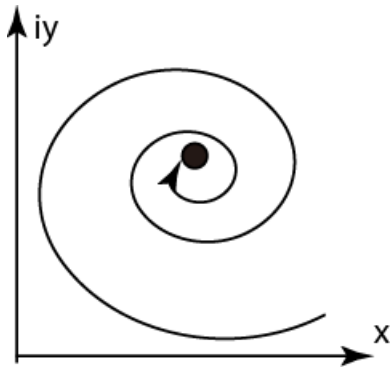


図 4.3: 複素平面ではある点への近づき方は多様である

従って微分係数が一意に決まるというのは様々な近づき方に対して同じ極限值をとらないといけない。例えば点  $P$  が  $xy$  平面上を動くとき、 $uv$  平面では  $P'$  が対応するとすると

$$P'(u(x, y), v(x, y))$$

が対応する。

そこで  $xy$  平面上で  $P(x, y)$  が

$$x = k$$

として動く場合を考える。この時、 $y$  は自由に動けるのでこの  $k$  を変化させることで次の図左のように直線群を表す。

これが  $uv$  平面にどう変換されるかを考えてみる。

$$u = x^2 - y^2 = k^2 - y^2$$

$$v = 2xy = 2ky$$

だから

$$u = k^2 - \frac{v^2}{4k^2}$$

となる。これは図右のような曲線群である。

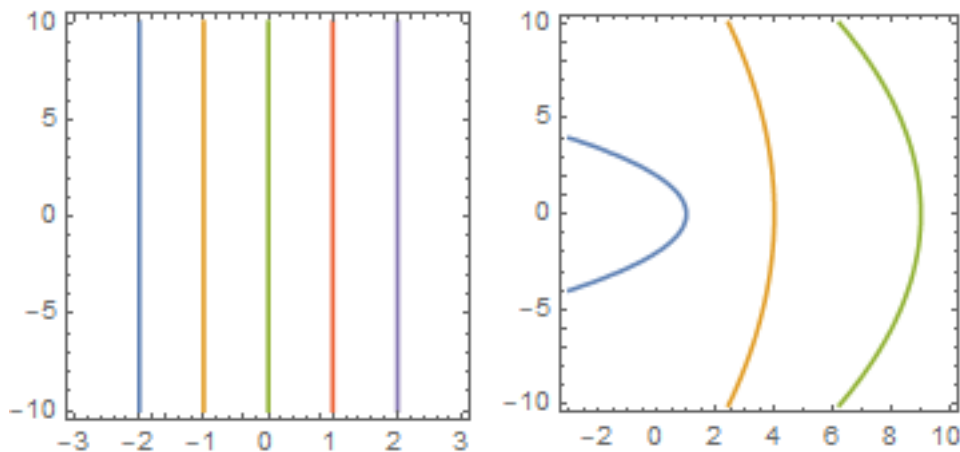


図 4.4: 複素平面への写像

みてわかるように、このグラフの対応は 1 対 1 ではないし、 $k = 0$  の場合は  $uv$  平面では定義できない。



しかし、同じように  $y = k$  から出発すると、 $uv$  平面ではちょうど反対向きに曲がった曲線群が得られる。参考文献 [91] の山本直樹氏は次のようにこの変換を畳んで折るとして視覚的に説明している。

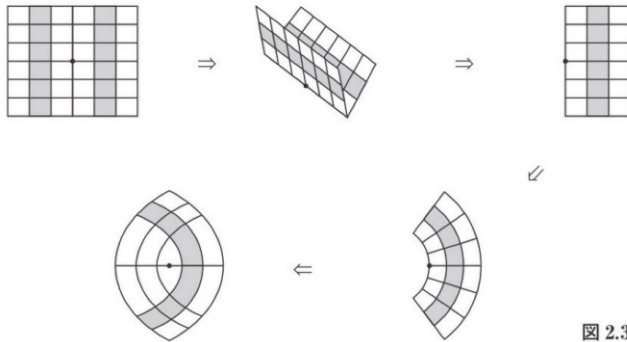


図 2.3

図 4.5: 文献 [91] より：複素平面への変換

全ての  $xy$  平面から  $uv$  平面に 1 対 1 でうつることが微分可能な条件になるのだが、このように微分可能であることはかなり、厳しい条件をパスしないとイケないわけである。

複素数の場合実数の時になれた平面グラフを平面から平面への変換ととらえないとイケないことがわかるがこの 2 変数は

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

とすれば  $f(z, \bar{z})$  と考えることができる。この時の微小変化が  $z, \bar{z}$  が独立変数と考えれば

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \Delta \bar{z}$$

のように全微分でかける。しかし、微分可能性は  $\Delta f$  が  $\Delta z$  に比例することを要求するので

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \tag{4.2}$$

でなければならない。これは重要な条件で複素微分可能性は関数に複素共役が含まれないならばよいわけである。

例えば  $f_1 = z\bar{z}$  は微分不可能であるが、 $f_2 = zz$  は可能である。

$$f_1 = z\bar{z} = x^2 + y^2$$

$$f_2 = zz = x^2 - y^2 + 2ixy$$

これは先の畳んで折ることができるための条件とみなすこともできる。

式 4.2 の条件は  $f$  の虚部と実部の間にある条件があることを意味する。

これを正則条件という。この条件が次節で紹介するコーシー・リーマンの関係である。

### 4.3 正則関数

前節から複素数  $z$  の導関数は次の極限值から次のように定義する。

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = f'(z) \tag{4.3}$$

この時  $h$  も複素数で

$$h = |h|e^{i\phi} \tag{4.4}$$

とおいたとき  $h \rightarrow 0$  はあらゆる  $\phi$  の方向から 0 にしても同じ極限值をとることを意味する。  
 この条件は前節でもみたように極めて厳しい。  
 これは複素平面を全体あるスカラー値と対応させることを意味することをみて見よう。  
 つまり、任意の正の数  $\varepsilon$  に対し、ある正の数  $\delta$

$$\delta = |z_1 - z| \tag{4.5}$$

となる全ての  $z_1$  に対して

$$\left| f'(z) - \frac{f(z_1) - f(z)}{z_1 - z} \right| < \varepsilon \tag{4.6}$$

を満たす  $f'(z)$  が存在すればこの  $f'(z)$  が導関数となる。  
 これは  $\varepsilon$  が次の図のように

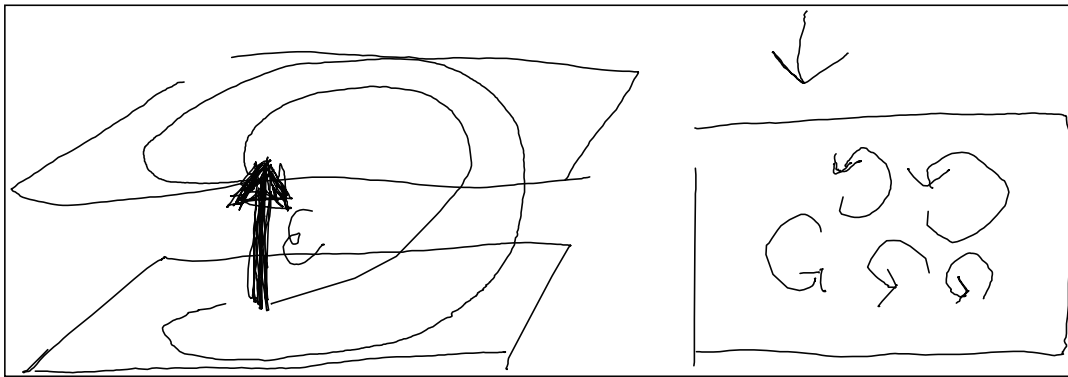


図 4.6: 一斉に向きを決めるためには共通した数が必要になる

曲線の種類に関係なく図上方から眺めた時に同じ回転であれば 1 自由度の  $\varepsilon$  が決まることである。  
 この  $\varepsilon$  が全ての平面で決まればこれを 0 と見なせることにする

$$d\Omega = \varepsilon \rightarrow 0 \tag{4.7}$$

これから複素平面での導関数を式 4.3 のように決めることができる。  
 したがって、留意点として我々はある複素平面の上に直線を引き、その偏角を固定してスカラー値  $\varepsilon$  を正值としてとるわけである。

複素平面の実軸の選び方がこの任意性にあることが実平面と決定的に異なるわけである。

このように複素平面上の 2 つの変数から  $z$  が決定される自由度があるために、**正則関数 (holomorphic function)** というのを定義しないといけない。

これは次のような実数の組を 2 つ考え、連続的に変化させる関数を 2 組用意しよう。

$$u = \phi(x, y), \quad v = \psi(x, y)$$

この時、2 組の関数を  $(\phi, \psi)$  としてしまえば新たに複素関数をつくることができる。  
 しかし、どんな関数でもいいというわけではなく、

$$\phi(x, y) + i\psi(x, y) = F(x + iy) = F(z)$$

の形にならないといけない。これを満たすのが**正則関数**である。

第 8 部では共形場を扱うが、その時にここでの考え方を発展させる。

どのような関数が正則関数になるかを次の節で考えよう。

#### 4.4 コーシー・リーマンの関係

前章の 4.8 で見たように関数が正則性を保ち連続していくためには正則であることが必要であった。これは基本図形の変換が大きさや、長さが変化しても角度が保存されるようになることでもあった。先の複素平面での導関数の条件は別側面からコーシー・リーマンの関係を導く。ここではこれを見ておこう。領域  $D$  で微分可能な  $z$  の関数

$$\omega = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

とおく、さらに次のように複素数の変化量を定義する。

$$\Delta z \equiv h = \Delta x + i\Delta y$$

これから

$$\Delta \omega \equiv f(z+h) - f(z) = \Delta u + i\Delta v$$

とおく、導関数  $f'(z)$  を

$$f'(z) = a + ib$$

とすると

$$\Delta u + i\Delta v = f'(z)\Delta z + O(h)$$

となり直接計算した値と実部と虚部を比べると

$$\Delta u = u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) = a\Delta x - b\Delta y + O(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})$$

$$\Delta v = v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y) = b\Delta x + a\Delta y + O(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}) \quad (4.8)$$

となる。これは  $(x, y)$  での連続の条件を満たすので全微分可能の条件も満たす。従って偏微分可能であり、

$$\begin{aligned} u_x &= v_y = a \\ -u_y &= v_x = b \end{aligned}$$

が成り立つ。

これをコーシー・リーマンの関係式 (Cauchy-Riemann's relation) という。

このように複素関数では微分関係に制約がつく。

この関係が回転を示していることから前章の基本図形の保存とつながる。

この式は次のようにも表現できる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

逆にこの関係があれば  $h = \Delta x + i\Delta y$  に対し

$$f(z+h) - f(z) = \Delta u + i\Delta v = (a + ib)(\Delta x + i\Delta y) + O(|k|)$$

となり、

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = a + ib \quad (4.10)$$

である。従って  $f(z)$  が領域  $D$  で正則であるためには全微分可能でコーシー・リーマンの関係を満たすことである。

#### 4.5 解析写像

$z$  を複素数とする。解析写像とは複素空間で局所的な作用が伸縮と回転のみで表されるものとしよう。このイメージについて参考文献 [4] は非常にわかりやすい解説があるので以下、図とともにいくつか引用する。例えば次の図のように複素平面  $(x, y)$  上で

$$z = re^{i\theta}$$

として、この位置での微小ベクトルの大きさを  $\epsilon$  倍して、図左のように  $\phi$  だけ回転させることを考える。この操作を

$$f(z) = z^2$$

で変換した複素平面  $(u, v)$  上でみると前節の 4.1 結果から図右のように大きさは  $2r$  倍で回転は同じ  $\phi$  になる。

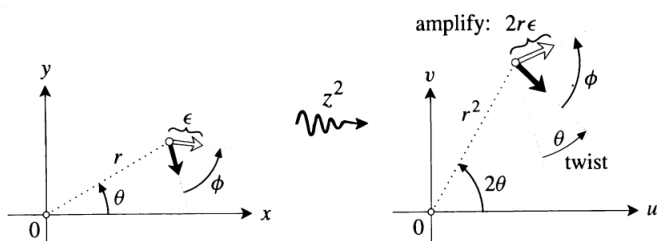


図 4.7: 文献 [4] より：複素平面上の伸縮・回転の変換、回転角は保たれる

そこで複素平面上で微分することを考えることにする。一般的な実空間では微分を考えると関数  $f$  の傾きとして表現できる。これを複素数に拡張することは簡単ではない。しかし、実軸上で  $dx$  は

$$df = f' dx \quad (4.11)$$

となる。

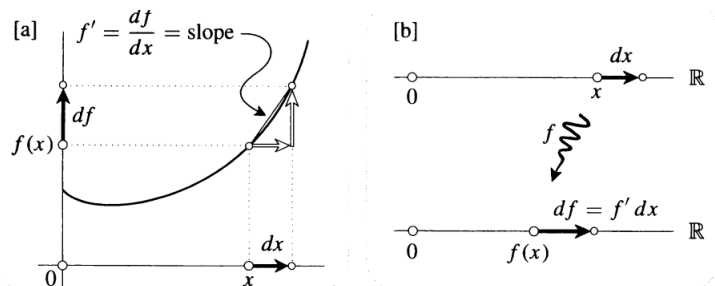


図 4.8: 文献 [4] より：実平面での微分の意味

もし、 $f'(x) < 0$  であれば次の図のように実軸上で向きが反転する。前節から実軸上での移動は伸縮に相当していたからこの時の回転は  $0$  or  $\pi$  ということになる。

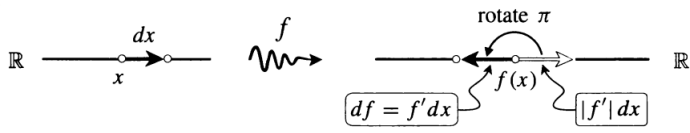


図 4.9: 文献 [4] より：微分が負になる場合は  $\pi$  の回転と考える

しかし、複素数ではこれを 0 から  $2\pi$  の角度まで拡張できると考えればよい。  
 前節から引き延ばすことと、回転することは複素数をかけることで表すことができた。  
 従って複素数の微分係数  $f'(z)$  は  $z$  を始点とする無限小数に  $f'(z)$

を掛けると  $f(z)$  における像ベクトルができるような複素数である。例えば次の図では約 2 倍に引き延ばし、 $3\pi/4$  回転させているので

$$f'(z) = 2e^{i3\pi/4}$$

とすることができる。こ

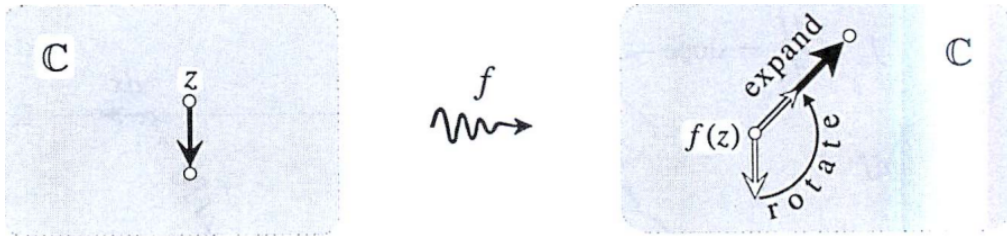


図 4.10: 文献 [4] より：複素平面では回転の自由度が無限になる

このように矢印の向きが複素数の微分の場合は無限にあることになる。従って次の図のようにある複素数  $z$  から無限小の移動は円周上の任意の点になる。しかし、その写像は同じ円周には写るとは限らない。  
 これは  $z$  における微分係数  $f'(z)$  は無限に存在してしまう。

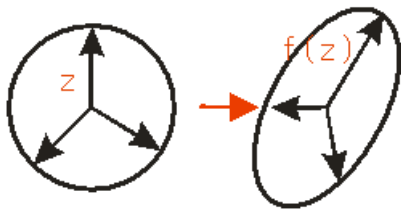


図 4.11: 解析的ではない写像

これを回避するためにこのようなゆがんだものは捨ててしまっても全ての無限小の変化は同じ円に写るとするのである。

これが解析的な写像である。  
 つまり次のように複素微分係数を定義する。

$$f'(z) = |f'(z)| \exp(i \arg[f'(z)])$$

よって

$$df(z) = f'(z) dz$$

と表すとこれは無限小ベクトル  $dz$  が伸縮度  $|f'(z)|$ 、回転角  $\arg f'(z)$  で  $f$  によって写されることを示す。つまり関数  $f$  により

$$\text{伸縮度} = |f'(z)| \tag{4.12}$$

$$\text{回転角} = \arg f'(z) \tag{4.13}$$

に写されると考えることによって複素空間での微分は幾何的に表現できることになる。

これにより任意の無限小円は解析写像により無限小円に移る。これは図のように局所的に無限小であればよい。

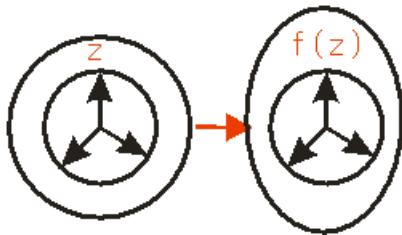


図 4.12: 無限小円の解析写像

#### 4.6 具体例

複素平面  $\mathbb{C}$  で変換をするときの微分の具体例をみていこう

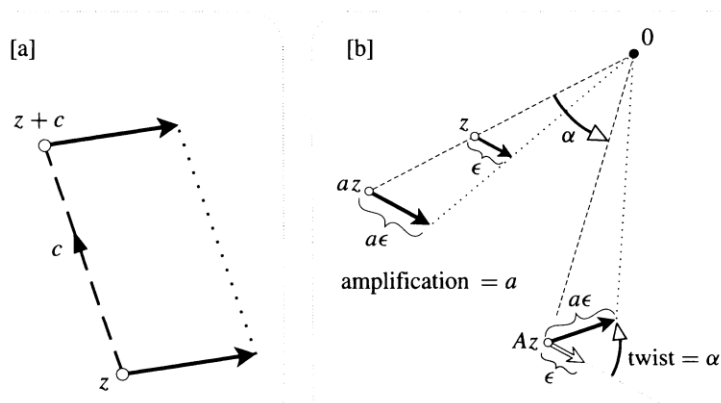


図 4.13: 文献 [4] より：複素平面での微分の幾何的な関係

- $z \rightarrow z + c$

この場合は伸張はないので  $r = 1$  である。また、図 (a) のように平行移動なので  $\phi = 0$  によって

$$\frac{d}{dz} (z + c) = 1e^{i0} = 1$$

であり、これは通常の実数

$$\frac{d}{dx} (x + c) = 1$$

と同じ形になる。

- $z \rightarrow Az$

この場合は伸張と回転が共にあるので

$$A = ae^{i\alpha}$$

とおくと図 (b) のように点  $z$  におけるベクトルも全く同じ伸張と回転を受けうることがわかる。よって

$$\frac{d(Az)}{dz} \rightarrow ae^{i\alpha} = A$$

となる。これも通常の実数

$$\frac{d}{dx}(Ax) = A$$

と同じである。

- $z \rightarrow z^2$

この場合は点  $z$  におけるベクトルは前節でみたように  $2r$  の伸張と  $\theta$  の回転があるから

$$\frac{d(z^2)}{dz} \rightarrow 2re^{i\theta} = 2z$$

となり、これも通常の実数

$$\frac{d}{dx}(x^2) = 2x$$

と同じである。

- $z \rightarrow \bar{z}$

リーマン球面において写像が解析的であることは等角写像であることと同値である。従って次のような複素共役をとる写像考えると

$$f: z \rightarrow \bar{z} \tag{4.14}$$

この写像は同じように伸縮であるので無限小円を円に写すが等角ではない。よって解析的ではない。しかし反等角である。これは実軸に対して鏡像関係にある。

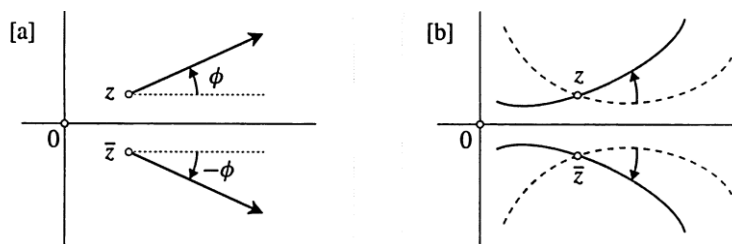


図 4.14: 文献 [4] より:  $z \rightarrow \bar{z}$  の変換は実軸鏡像になる

ある領域全体で等角性を保証すると解析的な写像となり得るだろうか。答えはイエスである。しかし、伸縮性だけでは3辺が同じ比率で伸縮しても図右のように角度の向きに任意性が残る。しかし、上下の図形は実軸に対して鏡像関係になるので  $f(z)$  が点  $p$  の無限小近傍において伸縮であれば  $f(z)$  が解析的であるか、そうでなければ  $f(\bar{z})$  が解析的である。

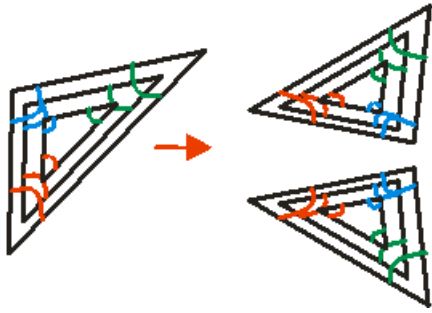


図 4.15: 鏡像変換

## 4.7 等角性

複素数  $z$  による微分が  $z = p$  で 0 になるような  $f(z)$  は臨界点と呼ばれ  $f(p)$  で等角性を失う。

これは微分が伸縮を表していたので伸縮度が 0 であり、無限小の円盤がその 1 点につめこまれるイメージである。

たとえば  $z^m$  は  $z = 0$  において位数  $(m - 1)$  の臨界点を持つという。

一般的な関数でも  $f'(p) = 0$  ならば点  $p$  の付近でこの関数は  $f = z^m$  のようにふるまう。

したがって臨界点付近では回転の速さが  $m$  倍されることになる。従って次のようにおくと

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= 0 \\ w &= f(z) \\ w_0 &= f(z_0) \end{aligned}$$

$z$  が  $z_0$  のまわりを 1 の速さで回れば  $w$  は  $w_0$  の周りを  $m$  の速さで回ることになる。

一方で問題点は無限遠での写像の作用と無限に写す写像の作用の視覚化である。

これは複素平面の定義域と値域をリーマン球面に取り換えると解決できる。

そのために前章で扱った立体射影の等角性をみておこう。

次の図のようにリーマン球面間の写像が解析的であることは、等角であることと同値である。

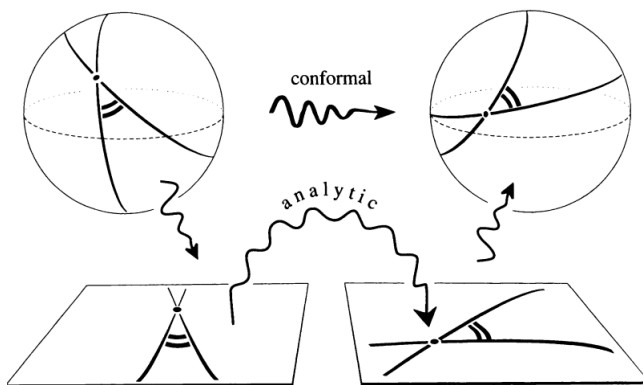


図 4.16: 解析的に移す



## 4.8 解析関数の例

### 4.8.1 対数関数

解析的であれば局所的にある点のふるまいがきまると全空間も同じようにふるまうことが決まる。この様子をもてみる。極座標において  $d\theta$  と  $dr$  の変化は図のように反時計回りの回転と拡大を表す。これを  $u, v$  空間において平行移動と対応するような変換は何か考えてみる。

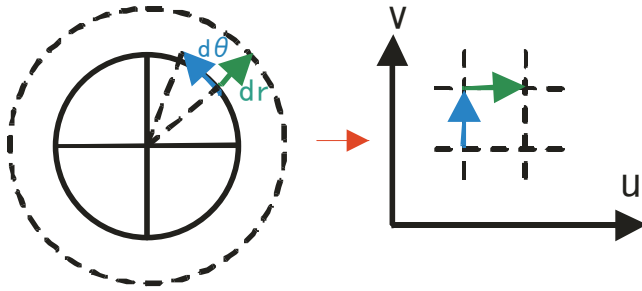


図 4.17: 回転と拡大を水平、垂直移動に対応させる。

この時  $\Delta v$  は  $\Delta r$  に  $\Delta u$  は  $\Delta\theta$  に 無関係なので

$$\frac{\partial v}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0 \quad (4.15)$$

が成り立つから  $v(\theta)$ ,  $u(r)$  に依存した関数となる。よって式??は

$$\partial_\theta v(\theta) = r \partial_r u(r) \quad (4.16)$$

となるが。この式が成立するのは定数のみ場合であるからこの定数を  $C$  とおくと

$$\begin{aligned} \partial_\theta v(\theta) &= C \\ r \partial_r u(r) &= C \end{aligned}$$

という方程式を得る。これを解くと

$$v(\theta) = C\theta + C'$$

$$u(r) = C \log r + C''$$

となるからあらためて定数を  $C'$  とおいて

$$u + iv = C(\log r + i\theta) + C'$$

となるがこの括弧の中は複素数  $z = e^{i\theta}$  とおけば

$$f(z) = C \log z + C'$$

を得る。つまり局所的な解析性を要求すると連続した関数が全領域で決まるわけである。次に対数関数の微分について見てみよう。

$$f = \log z = \log r + i(\theta + 2n\pi)$$

については

$$f' = e^{-i\theta} \partial_r f = e^{-i\theta} \frac{1}{r} = \frac{1}{z}$$

$$f' = -\frac{i}{z} \partial_\theta f = \frac{1}{z}$$

であり解析的である。さらにこれは下図のように複素空間で  $1/r$  に伸縮され、 $-\theta$  だけ回転している。従って  $\log$  により無限小  $d\theta$  の回転を表すベクトルは常に虚軸上を図のように上向のベクトルとして変換される。そのために無限個の分岐はベクトルとして全て同一視できるのである。

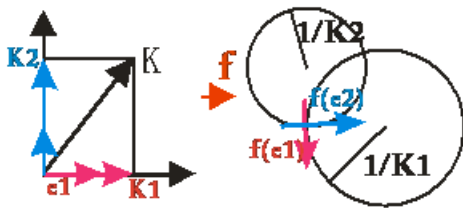


図 4.18: 無限小回転  $d\theta$  の  $\text{Log}$  による写像

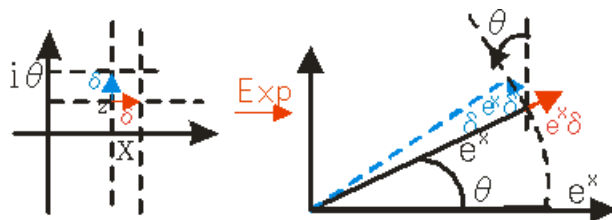
$\theta \pm 2m\pi$  だけ平行移動したところにこのベクトルが無数個できる。しかしベクトルとしては同一とみなせる。

#### 4.8.2 指数関数

対数関数に続いてべき関数、指数関数も解析的である。 $e^z$  は  $x, y$  を実数として

$$e^z = e^x e^{i\theta} \tag{4.17}$$

と書けるので次の図のように  $e^x$  で伸縮され、 $\theta$  だけ回転する。



青のベクトルが虚軸、赤が実軸上に微小移動  $\delta$  だけ移動した場合を示す。実軸移動は伸縮、虚軸移動は回転を表す。

図 4.19:  $e^z$  の解析写像

## 5 複素関数 [89, 90]

乗根の中の世界は正に限られるというのは、どんな実数も例えば2乗してしまえば正の値をとるから日常の物理にとってはあたりまえのことではない。さもないと負のエネルギー見たいな概念が登場し、混乱する。物理を学ぶ途上にあるものはそんな混乱はできたら避けたいと思うだろう。

しかし、2乗して負になる世界はどうも自然界に必須であるらしい。虚数の存在は我々が観測し得るものが全てではないことを意味し、同時に観測することの意味を掘り下げる。我々が通常、想像する平面は虚数を許すと多葉にくっついていたり、折れ曲がったりしている。前章でそのいったんを除き、極限の世界をイメージしてきた。ここではその通常ではない複素数の平面に展開される方程式を扱えるような基礎を学ぶ。頭を柔らかく、これまでの平面が多層な構造を持ち得て、自由に切り込みを入れた時に見える本質を見抜いてほしい。

## 5.1 基礎定義

- 近傍

一般に点  $z$  を含む開集合を  $z$  の近傍という。1つの集合  $A$  が与えられたとしよう。この時、次の図のように外点と内点、と境界線上にある境界点にわけることができる。開集合な内点のみの集合と考えることができる。

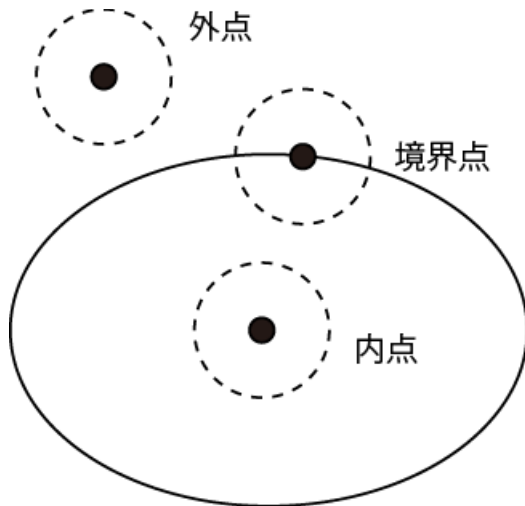


図 5.1: 外点、内点、境界点

- コンパクト

$A$  が  $U$  に属する有限個の開集合で覆われるならこの集合をコンパクトと呼ぶ。よって、コンパクトな集合は閉集合であるとも言える。数列  $\{z_n\}$  が与えられた時、全ての番号  $n$  に対して

$$|z_n| < K$$

が成り立つような正の整数  $K$  が存在すれば  $\{a_n\}$  は有界であるという。

- 集積点

また、任意の  $\epsilon > 0$  に対して  $\omega \neq \infty$  が存在し、無限個の  $n$  に対して

$$|a_n - \omega| < \epsilon$$

とできれば  $\omega$  は  $\{a_n\}$  の集積点という。ここで集積点を  $A$  の内点、または境界点となる点とする。 $A$  の集積点ではない点  $z_0$  は孤立点という。孤立点の集合が離散集合と呼ばれる。

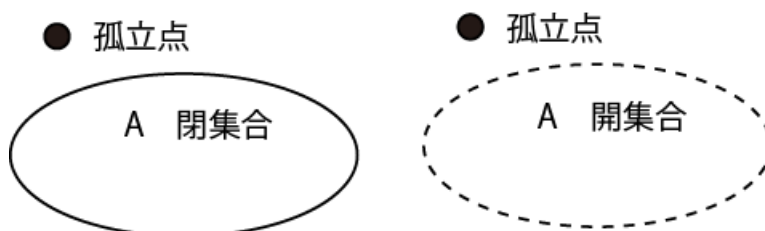


図 5.2: 集積点  $A$  と孤立点

拡張された複素空間は無限遠点を含むので複素平面空間では有界でなくても、任意の閉集合は全てコンパクトである。

無限か有限かが単に数の多さの問題ではないことを理解していく必要がある。

**定理. ボルツァーワイエルストラスの定理**

その例の1つとして ボルツァーワイエルストラスの定理がある。

これは無限遠点を加えて拡張された複素平面上的無限点集合  $A$  は少なくとも1つの集積点を持つことをいう。

*Proof.* 拡張された無限点集合を  $A$  とし、複素平面上的任意の点  $z$  に対して適当な近傍  $U(z)$  を次の図のようにとる。

もし、 $A$  が集積点を持たないなら、 $U(z)$  はたかだか1つしか  $A$  の点を含まない。この時、拡張された複素平面は

$$|z| \leq \infty$$

を満たす閉集合であるのでハイネ-ボレルの定理から  $U(z)$  の全体は有限な  $\{U(z_1), U(z_1), \dots, U(z_n)\}$  で覆われる。

従って  $A$  はたかだか  $n$  個の有限な点になることになる。無限点集合と矛盾してしまう。

従って、 $A$  は必ず集積点を持つ必要がある。 □

例えば、任意の正の整数  $n$  に対して複素数  $z_n$  の数列を  $\{z_n\}$  とする。今後この数列が収束するか、発散するかは重要になるのでここで定義しておく。複素数列が複素数  $z$  に収束するとは

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$$

が成り立つことをいう。

この時、任意の小さな実数  $\epsilon > 0$  に対して適当な自然数  $n_0 = n_0(\epsilon)$  をとると  $n \geq n_0$  となる全ての  $n$  に対して

$$|z_n - z| < \epsilon \quad (n \geq n_0)$$

となることである。これは次の図のようにいくつかの点が半径  $\epsilon$  の円の外にあっても、無限個の点は円内にあるということである。

一方で  $z = \infty$  の時、任意の大きな  $M$  に対して適当な自然数  $m_0 = m_0(M)$  をとると

$$|z_n| > M \quad (n \geq m_0)$$

とあうことができる。ボルツァーワイエルストラスの定理から無限個ある複素数列  $\{z_n\}$  は必ず集積点をも持たないといけない。

## 5.2 平面 Green の定理

### 5.2.1 複素共役独立依存性

コーシー・リーマンの関係が符号に対し、非対称な形になることから複素共役  $\bar{z}$  を用いて興味ある内容が導ける。

ストークスの定理は沸きだしの量は沸きだしのある場所を全て覆い、その覆いの面に垂直な沸きだしの流れを考えれば次のように表現できた。

$$\iint_S \nabla \times A dS = \oint_l A \cdot dl \quad (5.1)$$

定理. Green の定理

実関数  $X(x, y), Y(x, y)$  が  $C$  上とその内部  $D$  で連続な偏導関数を持てばストークスの定理から

$$\oint_C (Xdx + Ydy) = \int \int_D \left[ -\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial x} \right] dxdy \quad (5.2)$$

が成り立つ、これを平面上の **Green** の定理という。

有界な領域  $D$  において  $u(x, y), v(x, y)$  からなる関数

$$f(z) = F(z, \bar{z}) = u(x, y) + iv(x, y)$$

この関数の周積分は

$$\oint_C F(z, \bar{z})dz = \oint_C (udx - vdy) + i \oint_C (vdx + udy)$$

となることに注目しよう。

平面 Green の定理からこの関数の周積分は

$$\begin{aligned} \oint_C F(z, \bar{z})dz &= \int \int_D (-u_y - v_x) dxdy + i \int \int_D (-v_y + u_x) dxdy \\ &= i \int \int_D (u_x + iv_x) dxdy - \int \int_D (u_y + iv_y) dxdy \\ &= i \int \int_D \left( \frac{\partial}{\partial x} F + i \frac{\partial}{\partial y} F \right) dxdy \end{aligned}$$

ここで今後有用な次の関係

$$2 \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y}, \quad 2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \quad (5.3)$$

を用いるとストークスの定理の拡張として

$$\begin{aligned} \oint_C F(z, \bar{z})dz &= \oint_C F(z, \bar{z})(idy + dx) \\ &= i \int \int_D \frac{\partial}{\partial x} F(z, \bar{z})dxdy - \int \int_D \frac{\partial}{\partial y} F(z, \bar{z})dxdy \\ &= i \int \int_D \left\{ \frac{\partial}{\partial x} F(z, \bar{z}) + i \frac{\partial}{\partial y} F(z, \bar{z}) \right\} dxdy \\ &= 2i \int \int_D \frac{\partial}{\partial \bar{z}} F(z, \bar{z})dxdy \end{aligned} \quad (5.4)$$

となることがわかる。つまり、複素共役にしか依存しない。これは物理的に興味ある内容である。

### 5.2.2 面積と重心

初等物理の重心に応用してみよう。そのためにまず領域の面積を求める。先の結果をつかうと領域  $D$  の平面図形の面積  $S = \int \int_D dxdy$  は  $F(z, \bar{z})dz = \bar{z}$  とおけば、左辺が  $2iS$  となることから

$$S = \int \int_D dxdy = \frac{1}{2i} \oint_C \bar{z}dz \quad (5.5)$$

となり、これは一般に領域  $D$  の面積を出す複素面積公式として利用できる。例えば実平面で

$$x^2 + y^2 = 1$$

の円の面積は

$$\begin{aligned} z &= e^{i\theta} \\ \bar{z} &= e^{-i\theta} \\ dz &= ie^{i\theta} d\theta \end{aligned}$$

を用いて

$$S = \frac{1}{2i} \oint_C \bar{z} dz = \frac{1}{2i} \oint_C i d\theta = \pi$$

である。

一般に次のような写像

$$\omega = u(x, y) + iv(x, y)$$

によりうつされた領域の面積を  $S'$  とすると式 5.4 より

$$\begin{aligned} S' &= \iint_{D'} du dv = \frac{1}{2i} \oint_C \bar{\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2i} \oint_C \bar{\omega} \frac{d\omega}{dz} dz \\ &= \iint_D \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( \bar{\omega} \frac{d\omega}{dz} \right) dx dy \\ &= \iint_D \frac{d\bar{\omega}}{d\bar{z}} \frac{d\omega}{dz} dx dy = \iint_D |\omega'(z)|^2 dx dy \end{aligned}$$

という変換則が簡単に導ける。

これを用いて平面図形の重心を考えよう。複素重心を次で定義する。

複素平面は直交したユークリッド平面とみなして  $z$  で重みをかけた面積を重みをかけない面積で割ればよいから

$$z_G = x_G + iy_G = \frac{1}{S} \iint_D z dx dy \quad (5.6)$$

となる。式 5.5 から複素重心の公式が次のように表現できる。

$$z_G = \frac{1}{2iS} \iint_D z \bar{z} dx dy \quad (5.7)$$

$$= \frac{\oint_C z \bar{z} dz}{\oint_C \bar{z} dz} \quad (5.8)$$

複素数と実空間の関係を見るおもしろい式だ。

例えば半径  $a$  の半円の重心を求めてみよう。

$$x^2 + y^2 = a^2$$

が成り立つ。積分路は複素平面の半円と実軸に分けて

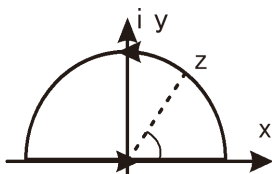


図 5.3: 複素平面に閉じた閉回路をつくる。

次のように積分すればよい。

$$\begin{aligned} z &= ae^{i\theta} \\ \bar{z} &= ae^{-i\theta} \\ dz &= iae^{i\theta}d\theta \end{aligned}$$

となるから円弧の部分は

$$\int_{C_1} z\bar{z}dz = ia^3 \int_0^\pi e^{i\theta}d\theta = -2a^3$$

また、実軸の部分は  $z = \bar{z} = x$  とおけるから

$$\int_{C_2} z\bar{z}dz = \int_{-a}^a x^2dx = \frac{2}{3}a^3$$

よって

$$\oint_{C_1+C_2} z\bar{z}dz = -\frac{4}{3}a^3$$

を得る。また、半円の面積  $S$  も

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2i} \oint_C \bar{z}dz \\ &= \frac{1}{2i} \left\{ i \int_0^\pi a^2d\theta + 0 \right\} \\ &= \frac{1}{2i} \{ i\pi a^2 \} = \frac{\pi a^2}{2} \end{aligned}$$

となるので重心

$$\begin{aligned} z_G &= \frac{1}{2iS} \iint_D z\bar{z}dxdy \\ &= \frac{4ai}{3\pi} \end{aligned}$$

となる。これは  $i$  軸を実  $y$  軸とみなせば半円剛体の重心である。

### 5.3 コーシーの積分定理

さて、複素積分が正則性を持つと奥深い広がりが生じる基本がこのコーシーの積分定理にある。実関数の微分積分は面積と傾きの関係を発展させたものだが、複素数を考えると連結性、連続性や  $0, \infty$  について多くの示唆を与えてくれる。

実関数では見えなかった広がりを見ていこう。

#### 5.3.1 多重連結

単純閉曲線  $C$  で囲まれた有界な領域  $D$  において  $f(z)$  が  $D$  の閉領域で  $D \cap C$  で正則である時、

$$\oint_C f(z)dz = 0 \tag{5.9}$$

となることをコーシーの積分定理という。

これは次のように簡単に証明することができる。  $P$  の  $r$  近傍を  $r(P)$  として

$$\hat{D} = D \cup r(P) \quad (5.10)$$

という領域を考えるとこの領域  $\hat{D}$  で正則であることから複素共役に依存しないので

$$\frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}} = 0 \quad (5.11)$$

式 5.4 から

$$\oint_C f(z) dz = 2i \iint_D \frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}} = 0 \quad (5.12)$$

となる。このコーシーの積分定理から閉曲線を図左のように  $C_1, C_2$  に分割したときに領域  $D$  内で正則であれば

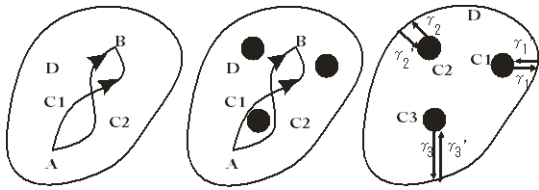


図 5.4: 中央は単連結にならない、しかし右図のように切り込みを入れて単連結領域をつくれる。

$$\oint_{C_1} f(z) dz = \oint_{C_2} f(z) dz \quad (5.13)$$

が成り立つ。このような領域は単連結である、しかし、図中央のように領域内で正則ではない部分があると積分値は異なる。

$$\oint_{C_1} f(z) dz \neq \oint_{C_2} f(z) dz \quad (5.14)$$

このような領域は単連結ではない。

しかし、図右のように  $\gamma_n$  の切れ込みを入れると  $D$  の内部は穴が取り除かれ  $A$  と  $B$  は単連結になる。

このような領域は  $n + 1$  重の多重連結領域という。

つまり  $n$  個の切れ込みで外の領域（これを  $C_0$  としよう）が結ばれるので  $n + 1$  個が繋がったと考えるわけである。

ここで次のような疑問が出る「外部領域  $C_0$  がなかったらどうか」ということである。

球面のように完全に閉じてしまって外のない世界でればどうなるかということである。

この時

$$C_0 \rightarrow \infty$$

として立体射影の極のように考えることに対応する。次節の留数の図 6.2 で見ると無限遠とは向きが反対のループがあることに対応する。つまり無限遠点があればこの点からは  $D$  のループは反対向きになる 2 重連結として考えればよい。無限遠点が  $D$  の内部にあれば単連結なので式 5.9 が成り立ち、多重連結であればかわりに式 5.13 が成り立つ。

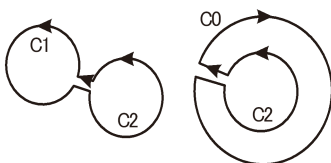


図 5.5:  $C_2$  に対して  $C_1$  は同じ向きだが  $C_0$  は反対向きになる。



従って多重連結を  $C_0$  を含めて

$$D \cup \sum_{j=0}^n C_j \quad (5.15)$$

で表現し、この領域で正則であれば次が成り立つ。逆回転を  $C^{-1}$  として

$$\oint_{C_0} f(z) dz = \sum_{j=1}^n \oint_{C_j^{-1}} f(z) dz$$

が成り立つ。よってコーシーの積分定理は領域の連結性に注意しないとイケない。式 5.9

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

は有界な単連結領域でないと成立しない。しかし式 5.13

$$\oint_{C_1} f(z) dz = \oint_{C_2} f(z) dz$$

は式 5.15 を考慮した多重連結領域でも成立する。連結性こそカギである。

これから有界な単連結領域  $D$  において  $z_0$  から  $z$  に至る経路  $C$  において積分の結果は経路の取り方に無関係で

$$F(z) = \int_C f(\xi) d\xi = \int_{z_0}^z f(\xi) d\xi$$

が成り立つ。これから不定積分

$$\int f(z) dz = F(z)$$

は領域  $D$  内で正則である。

### 5.3.2 積分経路

このように複素空間での積分は連結性に依存し、興味ある結果を引き起こす。

まず、経路が閉じている場合を考える。複素数  $z$  について関数  $f(z) = (z - a)^n$  を中心が  $a$ 、半径  $r$  の円周  $C$  に沿って積分する。

$$\begin{aligned} z - a &= r e^{i\theta} \\ f(z) &= r^n e^{in\theta} \end{aligned}$$

とおくと

$$dz = i r e^{i\theta} d\theta \quad (5.16)$$

だから  $n \neq -1$  の時

$$\begin{aligned} \int_C (z - a)^n dz &= \int_0^{2\pi} i r^{n+1} e^{i(n+1)\theta} d\theta \\ &= i r^{n+1} \int_0^{2\pi} [\cos((n+1)\theta) + i \sin((n+1)\theta)] d\theta \\ &= i r^{n+1} \left[ \frac{\sin((n+1)\theta)}{n+1} + i \frac{\cos((n+1)\theta)}{n+1} \right]_0^{2\pi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となるから  $n = -1$  の時のみ値を持ち、

$$\begin{aligned}
\int_C (z-a)^n dz &= \int_C \frac{1}{z-a} dz \\
&= i \int_0^{2\pi} d\theta \\
&= 2\pi i
\end{aligned}$$

となる。

では次に経路がとじてない場合を考える。 $C$  は  $\alpha$  から  $\beta$  までの任意の曲線とし、 $\gamma$  を定数としてこれを積分する。区分求積に書き換えて

$$\begin{aligned}
\int_C \gamma dz &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \gamma (z_k - z_{k-1}) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma (z_k - z_{k-1} + z_{k-1} - z_k + \cdots - z_0) \\
&= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \gamma (z_n - z_0) \\
&= \gamma(\beta - \alpha)
\end{aligned}$$

と  $n$  を無限大に広げても端点だけで決まることになる。

次に  $z$  を  $re^{i\theta}$  に置き換えて

$$z = re^{i\theta} \tag{5.17}$$

$$\alpha = r_1 e^{i\theta_1} \tag{5.18}$$

$$\beta = r_2 e^{i\theta_2} \tag{5.19}$$

とすると

$$dz = \frac{\partial z}{\partial r} dr + \frac{\partial z}{\partial \theta} d\theta = ire^{i\theta} d\theta + e^{i\theta} dr \tag{5.20}$$

を用いて

$$\begin{aligned}
\int_C \gamma dz &= i\gamma \int_{\theta_1}^{\theta_2} re^{i\theta} d\theta + \gamma \int_{r_1}^{r_2} e^{i\theta} dr \\
&= \gamma r [e^{i\theta_2} - e^{i\theta_1}] + \gamma e^{i\theta} (r_2 - r_1)
\end{aligned}$$

この時、次のように  $r, \theta$  を固定すると

$$\begin{aligned}
\int_{C_1} \gamma dz &= \gamma r [e^{i\theta_2} - e^{i\theta_1}] + \gamma e^{i\theta} (r_2 - r_1) \\
&= \gamma r|_{r=r_1} [e^{i\theta_2} - e^{i\theta_1}] + \gamma e^{i\theta}|_{\theta=\theta_2} (r_2 - r_1) \\
&= \gamma(\beta - \alpha)
\end{aligned}$$

または

$$\begin{aligned}
\int_{C_2} \gamma dz &= \gamma r [e^{i\theta_2} - e^{i\theta_1}] + \gamma e^{i\theta} (r_2 - r_1) \\
&= \gamma r|_{r=r_2} [e^{i\theta_2} - e^{i\theta_1}] + \gamma e^{i\theta}|_{\theta=\theta_1} (r_2 - r_1) \\
&= \gamma(\beta - \alpha)
\end{aligned}$$

としても変わりはない。これは図のような  $r, \theta$  空間において複素積分の結果は経路に依存していないことを示す。

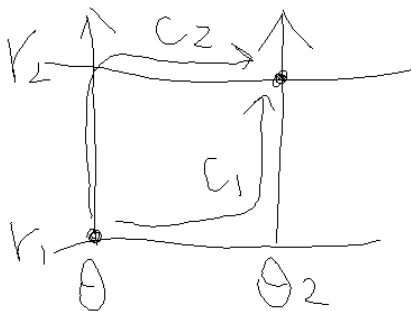


図 5.6: 2つの積分路

次に閉じていない経路でも  $\gamma$  が定数ではない場合を考えると各中点を  $\xi_k$  として

$$\begin{aligned} \int_C z dz &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \xi_k (z_k - z_{k-1}) \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \frac{z_k + z_{k-1}}{2} (z_k - z_{k-1}) \\ &= \frac{1}{2} \{z_k^2 - z_{k-1}^2 + z_{k-1}^2 - z_{k-2}^2 + \cdots - z_0^2\} \\ &= \frac{1}{2} (\beta^2 - \alpha^2) \end{aligned}$$

となりやはり端点のみで決定され、積分の結果も実数の場合と同様になる。  
また、先と同様に

$$\begin{aligned} \int_C z dz &= i \int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2 e^{2i\theta} d\theta + \gamma \int_{r_1}^{r_2} r e^{2i\theta} dr \\ &= \frac{r^2}{2} \Big|_{r=r_1} [e^{2i\theta_2} - e^{2i\theta_1}] + e^{2i\theta} \Big|_{\theta=\theta_1} \left( \frac{r_2^2}{2} - \frac{r_1^2}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} (\beta^2 - \alpha^2) \end{aligned}$$

となる。

### 5.3.3 連結領域

有界な領域  $D$  内で正則であれば積分は経路に依存することなく端点  $[z_0, z]$  で決定できる。  
これはハミルトンの原理につながる重要な内容である。そこで次で不定積分  $F(z)$  を定義する。

$$F(z) = \int_C f(\xi) d\xi = \int_{z_0}^z f(\xi) d\xi$$

これは領域  $D$  で定義された 1 価関数であり実関数の時のように

$$\frac{dF(z)}{dz} = f(z) \tag{5.21}$$

を満たす原始関数の 1 つと考えることができるか見ていこう。

これは  $D$  内の任意の 2 点  $z, z + \Delta z$  として次が無限小にもっていければよい

$$\frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) = \frac{1}{\Delta z} \left( \int_{z_0}^{z+\Delta z} - \int_{z_0}^z \right) f(\xi) d\xi - f(z)$$

2 点が  $D$  内にあれば

$$f(z) = \frac{1}{\Delta z} \int_{z_0}^{z+\Delta z} f(z) d\xi$$

とすることができるので右辺は大きさを考えれば

$$\begin{aligned} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) &= \frac{1}{\Delta z} \left( \int_{z_0}^{z+\Delta z} - \int_{z_0}^z \right) f(\xi) d\xi - f(z) \\ &= \frac{1}{\Delta z} \int_{z_0}^{z+\Delta z} \{f(\xi) - f(z)\} d\xi \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

とすることができる。よって 5.21 が成り立つので  $F(z)$  は原始関数の 1 つである。

重要な例を 1 つ示そう。  $f(z) = 1/z$  は原点で正則ではない。

従って、ここを除く方法をとると、先の議論から有界な正則領域は 2 重連結になる。

次の図のように複素平面の負の実軸に沿って原点から無限遠まで切れ目をいれる。すると単連結領域  $-\pi < \arg z < +\pi$  において正則になる。

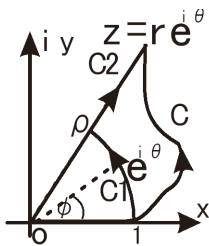


図 5.7: 原点から負方向に切れ目を入れると単連結領域  $-\pi < \arg z < +\pi$  において正則になる

この積分路に従い次の不定積分を求める。この積分は閉じていない。

$$F(z) = \int_C \frac{1}{\xi} d\xi = \int_{C_1+C_2} \frac{1}{\xi} d\xi = \int_1^z \frac{1}{\xi} d\xi$$

ここで次のように角度と半径を別々に固定できるように、  $z = re^{i\theta}$  とおく。

$C_1$  に沿っては  $r = 1$  を固定し  $\xi = e^{i\phi}$  とおき、  $C_2$  に沿っては  $\theta$  を固定するので  $z = \rho e^{i\theta}$  として

$$\begin{aligned} d\xi &= i\xi d\phi \\ dz &= e^{i\theta} d\rho \end{aligned}$$

とすると

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_0^\theta i d\phi + \int_1^r \frac{d\rho}{\rho} \\ &= i\theta + \log r \\ &= i \arg z + \log |z| \\ &= \log z \end{aligned}$$

となり、対数が複素平面で自然に定義できる。  $F(z)$  は原点  $z = 0$  と負の実軸上を除いた領域で正則になる。

### 5.3.4 コーシーの積分公式

連結という性質から複素関数は面白いことに積分や級数で表したほうが本質を見やすい。  
 $f(z)$  が単連結領域  $D$  で正則であれば  $D$  内に点  $z$  を囲む任意の閉曲線を  $C_z$  とすると

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_z} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (5.22)$$

が成り立つ。これをコーシーの積分公式という。これは次のように示すことができる。  
 図のように  $C_z$  の内部に点  $z$  を中心とする小さな円周  $\gamma_z : |\zeta - z| = r$  をとる。

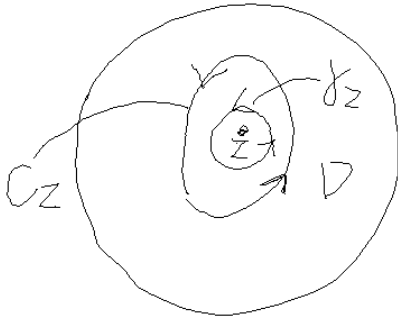


図 5.8: 2重連結領域

$\zeta$  の関数  $f(\zeta)/(\zeta - z)$  は  $D$  から  $\zeta = z$  を除いた 2重連結領域で正則になる。従って次のように各和をとることができる。

$$\oint_{C_z} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \oint_{\gamma_z} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f(z) \oint_{\gamma_z} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta + \oint_{\gamma_z} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta$$

円周  $\gamma_z$  上の点を

$$\zeta = z + re^{i\theta}$$

とすると

$$d\zeta = ire^{i\theta} d\theta = (\zeta - z)id\theta$$

とおけるので第 1 項について

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma_z} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta &= \oint_{\gamma_z} \frac{1}{\zeta - z} (\zeta - z)id\theta \\ &= \oint_{\gamma_z} id\theta \\ &= 2\pi i \end{aligned}$$

また  $f(z)$  の連続性から半径  $r$  を小さくしていくと  $|\zeta - z| = r \rightarrow |f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$  だから

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_z} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) \right| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_z} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_z} \left| \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} \right| |d\zeta| = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_z} \left| \frac{f(\zeta) - f(z)}{r} \right| r d\theta \\ &< \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta = \varepsilon \end{aligned}$$

とすることができる従って式 4.7 から

$$\varepsilon \rightarrow 0$$

とみなせて式 5.22 が成り立つ。さらに高次導関数もまた、次のように積分表示できる。

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f(z)}{dz^n} = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{C_z} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \quad (5.23)$$

### 5.3.5 リュウビルの定理

コーシーの積分定理の逆を考えると重要な定理がいくつか導ける。

#### 定理. モレラの定理

$f(z)$  は有界な領域  $D$  において連続とする。  $D$  内の単純閉曲線  $C$  について常に

$$\oint_C f(z) dz = 0 \quad (5.24)$$

が成り立てば  $f(z)$  は領域  $D$  で正則になる。これをモレラの定理 (*Morera's law*) という。

また、次の関係をコーシーの評価式という。

$f(z)$  が  $|z - z_0|$  で正則でかつ正の定数  $M$  に対し、  $|f(z)| \leq M$  である時、

$$\left| f^{(n)}(z_0) \right| \leq \frac{n! M}{R^n} \quad (5.25)$$

が成り立つ。

#### 定理. リュウビルの定理

これは式 5.23 から次のように示すことができる。大きさをとり、円周  $C_z : |z - z_0| = R$  とすると

$$\begin{aligned} \left| f^{(n)}(z_0) \right| &\leq \frac{n!}{2\pi} \oint_{C_z} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z_0|^{n+1}} |d\zeta| \\ &\leq \frac{n!}{2\pi} \frac{M}{|R|^{n+1}} \oint_{C_z} |d\zeta| = \frac{n!}{2\pi} \frac{M}{|R|^{n+1}} \int_0^{2\pi} R d\theta = \frac{n! M}{R^n} \end{aligned}$$

となる。これから有界な関数は定数になる。これをリュウビルの定理 (*Liouville's law*) という。

特に式において  $n = 1$  とおくと

$$\left| f'(z_0) \right| \leq M/R$$

ここで  $R \rightarrow \infty$  とすると

$$f'(z) = 0 \quad (5.26)$$

すなわち  $f(z)$  は定数になる。

#### 定理. 一致の定理

$f(z)$  が  $D$  内で正則であるとする。  $D$  内の 1 点  $z_0$  に収束する無限点列を  $\{z_n\}$  とする。

$f(z_n) = 0$  であるならば  $D$  において

$$f(z) \equiv 0 \quad (5.27)$$

となる。これを一致の定理という。

### 定理 1. 最大値の原理

ま恒等的に定数ではない正則関数  $f(z)$  に対して  $|f(z)|$  は  $D$  の内部で最大値に達することはない。特に  $D$  が有界で  $f(z)$  が  $D$  の境界  $B$  を含む有界閉領域  $\bar{D} = D \cup B$  で連続ならば  $|f(z)|$  の最大値は境界  $B$  上でとる。

$$\text{Max}[|f(z)|] \text{ on } \partial D \quad (5.28)$$

これを最大値の原理という。

*Proof.* この内容は次のように背理法で示すことができる。  $D$  の 1 点  $a$  で  $|f(z)|$  は最大値  $M$  をとったとする。  
 $a$  と  $D$  の境界  $B$  との距離を  $d$  とするとコーシーの積分公式から次の平均値の定理が示される。 $z - a = re^{i\theta}$  とおけば

$$\begin{aligned} f(a) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z-a} dz \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta \quad (0 < r < d) \end{aligned} \quad (5.29)$$

両辺の絶対値をとれば

$$M = |f(a)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + re^{i\theta})| d\theta \leq M \quad (5.30)$$

この式が成り立つためには  $|z-a| = r$  の円周上で常に  $|f(a + re^{i\theta})| = M$  でなければならないが  $r : 0 < r < d$  は任意であるので  $|z-a| < d$  において  $|f(z)| = M$  となる。

これはリュウビルの定理によれば  $f(z)$  は定数でなければならない。しかし、これは仮定に反する。

次に  $f(z)$  は有界閉領域  $\bar{D}$  で連続だからどこかで最大値をとらなくてはならないが上記の結果から境界  $B$  上でしかとれないことになる。  $\square$

## 5.4 級数展開

### 5.4.1 ワイエルシュトラスの 2 重級数定理

正則関数列について領域  $D$  内で正則な関数を  $\{f_n(z)\}$  として、 $D$  で広義一様に収束すれば、極限関数  $f(z)$  は  $D$  で正則であってかつ、 $k$  階導関数列  $\{f_n^{(k)}(z)\}$  が  $D$  で  $f^{(k)}$  に広義一様収束する。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n^{(k)}(z) = f^{(k)}(z) \quad (k = 1, 2, \dots)$$

また、領域  $D$  で級数  $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(z)$  が広義一様収束すれば次の極限関数

$$g(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n g_k(z)$$

は  $D$  で正則であって、その導関数級数の項別微分で表すことができる。

$$g^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n^{(k)}(z) \quad (k = 1, 2, \dots)$$

この無限級数は  $D$  で広義一様収束する。

### 5.4.2 ローラン展開

複素数の展開は実数の展開より豊富な内容を含み、物理的にも頻繁に利用される。まず基本の展開をみておこう。 $f(z)$  が同心円環  $0 \leq r < |z - a| < R \leq \infty$  で 1 価であれば次のローラン展開 (Laurent) が成り立つ。

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - a)^n, \quad r < |z - a| < R \quad (5.31)$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - a| = \rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta, \quad n = 0, \pm 1, \dots, \quad r < \rho < R \quad (5.32)$$

この証明を考えてみよう。

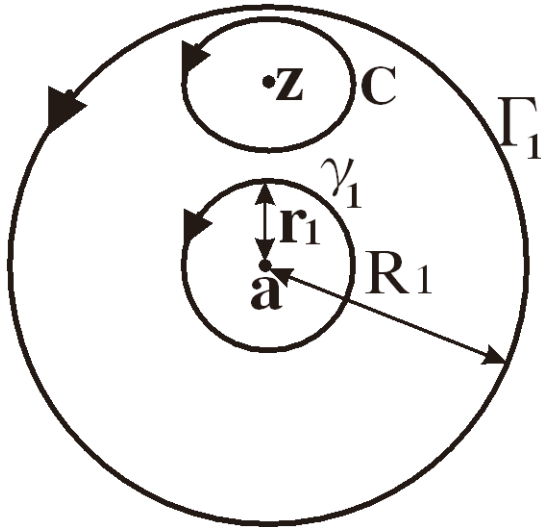


図 5.9: 極を含む積分路

$r_1 < |z| < R_1 < R$  なる定数  $r_1, R_1$  を半径として上図のような閉曲線  $\gamma_1, \Gamma_1$  とするとコーシーの積分公式から

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

ここで次の境界上の展開がカギになる。

$\Gamma_1$  上の  $\zeta$  に対しては  $|z - a|$  が  $|\zeta - a|$  より小さいことを利用するため、次のように無限級数に展開し、

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{\zeta - a} \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta-a}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\zeta - a} \left( \frac{z - a}{\zeta - a} \right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}} \end{aligned}$$

公比は次を満たす。

$$\left| \frac{z - a}{\zeta - a} \right| < 1$$

同様に  $\gamma_1$  上の  $\zeta$  に対しては  $|z - a|$  が  $|\zeta - a|$  より大きいことを利用するため



$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{z - a} \frac{1}{1 - \frac{\zeta - a}{z - a}} \\ &= - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z - a} \left( \frac{\zeta - a}{z - a} \right)^n \\ &= - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta - a)^n}{(z - a)^{n+1}} \end{aligned}$$

と、展開すれば公比は次を満たす。

$$\left| \frac{\zeta - a}{z - a} \right| < 1$$

従って各級数は各閉曲線上で収束し、次のように項別積分ができる。

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z - a)^n \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta + \sum_{n=-\infty}^{-1} (z - a)^n \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta$$

よってローラン展開の公式が得られた。

$r < |\zeta - a| < R$  において次の被積分関数は 1 価正則であるから

$$\frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}}$$

積分路  $\gamma_1, \Gamma_1$  は共通の円

$$|\zeta - a| = \rho \quad r < \rho < R$$

で置き換えることができる。

### 5.4.3 指数関数と三角関数

実数関数の展開と同じように次の展開式で関数を定義する。

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \cdots$$

これらは  $z \in \mathbb{R}$  と選べば実数の場合を含む。

## 6 留数

### 6.1 特異点と零点

一般に点  $a$  の近く ( $0 < |z - a| < R$ ) で  $f(z)$  が 1 価正則であっても  $a$  で正則ではないならば  $a$  を  $f(z)$  の孤立特異点 (isolated singularity) という。

前節の展開式について

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} \quad (0 < |z-a| < R)$$

と表すと第1項は  $|z-a| < R$  で収束するから、特異性は第2項に起因する。

そこでこの第2項を  $f(z)$  の特異部 (singular part) という。(主要部ともいう)

主要部がない場合は正則であるということもできる。正則であって次の条件が成り立てば  $z = \infty$  を  $k$  位の零点 (zero\_point) という。

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n} = b_k z^{-k} + b_{k+1} z^{-(k+1)} + \dots = \frac{g_k(z)}{z^k} \quad (k \geq 1, b_k = g_k(\infty) \neq 0) \quad (6.1)$$

- 例えば  $a_{-n} = 0$  とできて主要部を消すことができる場合は  $a$  を除去可能な特異点 (removable singularity) という。

この場合、

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n \quad (0 < |z-a| < R)$$

とおける。この時は改めて  $f(a) = a_0$  と定義すれば  $f(z)$  は  $a$  で正則になる。例えば

$$g(z) = \frac{\sin z}{z}$$

は  $z = 0$  が一見すると特異点に見えるが展開すれば  $g(0) = 1$  とおくことで除去可能な特異点である。

- 次に主要部が有限項の和となる場合、 $a$  を極 (pole) という。

この時、ある整数  $k$  に対して  $a_{-k} \neq 0, a_{-n} = 0 (n = k+1, k+2, \dots)$  であるとき

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n + \sum_{n=1}^k \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} = \frac{g_k(z)}{(z-a)^k}, \quad g_k(a) = a_{-k} \neq 0$$

を  $k$  位の極 (pole) という。この時、

$$g_k(z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-k}(z-a)^n$$

は  $|z-a| < R$  で正則な関数である。

- 最後に主要部が有限では表すことができず無限級数になる場合を真性特異点 (essential singularity) という。

この時は特異点で  $a$  での関数  $f(a)$  の値が決まらないことになる。それは  $a$  に近づく、点列  $\{z_n\}$  の取り方で関数列  $\{f(z_n)\}$  の極限值が変わる。例えば関数

$$f(z) = \exp(1/z_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n}$$

は  $z = a = 0$  に真正特異点を持つ。例えば、点列  $\{z_n = 1/(\alpha + 2n\pi i)\}$  をとると

$$\exp(1/z_n) = \exp(\alpha + 2n\pi i) = \exp(\alpha) = Const$$

となり、最初の  $\alpha$  の値で収束先の定数  $Const$  が異なるおとなる。

領域  $D$  で真性特異点を持たない1価正則な関数を有理型 (meromorphic) である。

有理型の商で新しい関数を作ってもやはり複素平面全体で有理型になる。

境界が見えるか見えないかが除去可能な特異点がどうかの決めてになる。  
 $(0 < |z - a| < R)$  において  $a$  の近くで除去可能な特異点は先の定義から

$$f(z) = a_0 + a_1(z - a) + a_2(z - a)^2 + \dots$$

と表されていれば  $z \rightarrow a$  の時  $f(z) \rightarrow a_0$  となり、有界である。  
 逆にこの時、 $|z - a| = r$  において

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_r \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{-n+1}} d\zeta \quad (0 < r < R, n = 1, 2, \dots)$$

は  $|f(z)| \leq M$  とすると変数変換は  $r$  が一定であることが利用できて

$$\zeta - a = re^{i\theta}, d\zeta = ire^{i\theta} d\theta$$

として

$$|a_{-n}| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta-a|=r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{-n+1}} d\zeta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + re^{i\theta}) r^n d\theta| \leq Mr^n$$

となるので  $r \rightarrow 0$  とすれば主要部を 0 とすることができる。  
 これから重要な次のリーマンの定理がいえることになる。

$(0 < |z - a| < R)$  において 1 価正則な  $f(z)$  が有界であれば  $a$  は  $f(z)$  の正則点である。

注意すべきは有理型の関数が  $0 < |z - a| < R$  で有理型でも  $|z - a| > R$  で有理型ではない時、 $z = a$  は真性特異点である。これは逆に  $a$  が真性特異点であれば、ある点列  $\{z_n\}$  をとれば

$$f(z_n) \rightarrow \lambda (n \rightarrow \infty)$$

なる任意の  $\lambda$  が存在できることになる。つまり、 $f(z)$  はどんな値にも近づくことができる。これは例えば  $\lambda = \infty$  であってもいい、もし、このような点列が存在しなかったら、ある  $R_1 > 0$  をとると、 $0 < |z - a| < R_1$  で  $f(z)$  が有界になってしまい、除去可能となる。

### 6.1.1 ピカールの定理

これから次の重要なピカールの定理 (Picard theory) がいえる。

$(0 < |z - a| < R)$  において有理型の関数  $w = f(z)$  が  $a$  を真性特異点にもつならば  $a$  の近くで  $f(z)$  はたかだか 1 つの ( $\infty$  を含めれば 2 つ) の値を除き、他の全ての値を無限回とる。

この定理の応用例として  $z = a = 0$  で真性特異点とする関数

$$w = f(z) = e^{1/z}$$

を考える。任意の値を  $w_0$  として

$$w_0 = re^{i\theta}$$

とすると

$$e^{1/z} = re^{i\theta} = e^{\log r + i\theta}$$

だから

$$z_n = \frac{1}{\log r + i(\theta + 2n\pi)} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

とすると、これは確かに  $f(z_n) = w_0$  である。しかも  $n \rightarrow \infty$  で  $z_n \rightarrow 0$  となる。よって  $a = 0$  の近くで  $f(z)$  は値  $w_0$  を無限回とることになる。また  $w_0 \rightarrow 0 (r \rightarrow 0)$  または  $w_0 \rightarrow \infty (r \rightarrow \infty)$  に対して  $z_n \rightarrow 0$  となるから  $0 < |z| < \infty$  で  $w_0 = 0$  と  $w_0 = \infty$  は  $f(z)$  の2つの除外点である。

ところが

$$w = f(z) = \frac{1}{z} + e^{1/z}$$

とすると  $z = a = 0$  が真性特異点であるから除外点ではない。よってこの場合は  $w = \infty$  のみが除外点である。

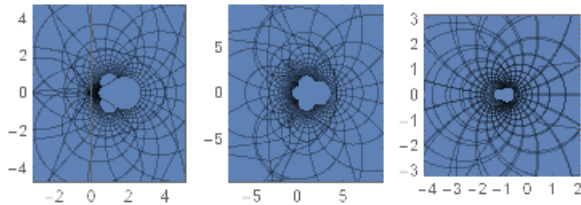


図 6.1: 左が  $f(z) = e^{1/z}$ , 中が  $f(z) = \frac{1}{z} + e^{1/z}$ , 右が  $f(z) = \frac{1}{z} - e^{1/z}$ , のグラフ

### 6.1.2 一致の定理

まず、孤立点をどう探るか考えてみよう。

複素関数  $\phi(z)$  が  $z = b$  付近で正則で  $\phi(b) = 0$  を満たし、かつ、 $\phi(z)$  が恒等的に  $0$  でない場合  $b$  は孤立零点になる。

つまり、 $b$  の任意の近傍の点  $z \neq b$  では  $\phi(z) \neq 0$  になる。(定理1)

これは  $\phi(z)$  が  $z = b$  付近で正則だから次のようにべき展開できる

$$\phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - b)^n$$

従って、 $\phi(z)$  が恒等的に  $0$  でない場合は  $a_k \neq 0, k \neq 0$  として

$$\phi(z) = a_k (z - b)^k + a_{k+1} (z - b)^{k+1} + \dots$$

と表すことができる。よって  $\phi(b) = 0$  となるが任意の微小な  $\epsilon$  について  $z = b + \epsilon$  としたときは  $\phi(z) \neq 0$  となるので  $z = b$  は孤立零点である。

この内容は単純であるが興味深い。つまり、

$$\phi_1 = (z + \bar{z})^2 + (z + \bar{z})$$

は正則関数ではないので零点は  $z + \bar{z} = 0$  または  $z + \bar{z} = -1$  を満たす点の集合である。よって孤立していない。

ところが

$$\phi_2 = z^2 + z$$

の零点は  $z = 0, -1$  であり、孤立している。

量子力学では観測が点を決めるが、非正則な状態では零点は点にならないわけである。非観測状態を考える示唆がある。

いったん観測が成立すると、大局的に物体の運動が決まるように、正則である時、次のように複素平面全体に条件式を拡張することができる。これを一致の定理という。

複素平面上の領域  $D$  で関数  $f(z), g(z)$  が正則、かつ  $D$  内の微小領域  $D_0$  で  $f(z) = g(z)$  であるとする。

このとき全  $D$  で  $f(z) = g(z)$  が成立する。

または

$f(z)$  は領域  $D$  で正則とする。  $D$  内の点  $z_0$  に収束する無限点列  $\{z_n\}$  に対して  $f(z_n) = 0$ ,  $(n = 1, 2, \dots)$  ならば、  $D$  において

恒等的に  $f(z) \equiv 0$  になる。

これを示すにはまず、次を定義する。

$$\phi(z) = f(z) - g(z)$$

図のように  $D_0$  内に  $z_0$  をとり、  $D$  から  $D_0$  を除いた領域内に  $z_1$  をとり、経路  $C$  で結ぶ。

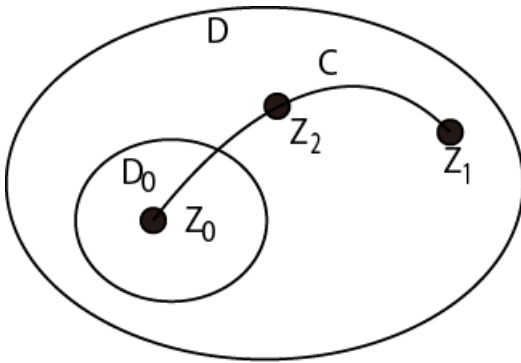


図 6.2: 解析接続

ここで  $\phi(z_0) = 0$  で  $\phi(z_1) \neq 0$  と仮定する。この時、  $z_0$  と  $z_2$  の間で常に  $\phi(z) = 0$  であるが、  $z_2$  の任意の近傍に  $\phi(z) \neq 0$

とできる  $z$  をとれる  $z_2$  をつくることができる。これは最初の定理 1 に矛盾する。よって  $D$  から  $D_0$  を除いた領域内の任意の点で  $\phi(z) = 0$  が成り立つ。つまり、全領域で

$$f(z) = g(z)$$

が成り立つことになる。

これは限定領域  $D_0$  において正則関数が与えられた時、これをより広い領域  $D$  に延長していく場合、その延長のしかたは 1 つしかないことを示す。それが次章で紹介する解析接続になる。

従って実数の領域  $x \in \mathbb{R}$  で

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

を定義しておいて、複素数全体で  $\bar{z}$  を含まない  $z \in \mathbb{C}$  に拡張するのは、正則であるので解析接続として成り立つわけである。

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

次にみるように解析接続をすることで定義域を拡大することができる。

## 6.2 留数

複素関数の展開は実関数に比べて多くの条件が成立している。その 1 つが留数の存在で積分計算を簡単に対数に置き換えることができてしまう。

有限領域環  $0 < |z - a| < R$  で 1 価正則な関数  $f(z)$  に対して次の  $Res(a)$  を  $a$  における留数 (residue) という。

これを次のように  $a$  点まわりの周積分で定義する。

$$Res(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-a|=r} f(z) dz \quad (6.2)$$

これは先のローラン展開を用いれば次のように定義できる。

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n, \quad r < |z-a| < R$$

ただし、

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta-a|=\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta \quad (6.3)$$

から  $n = -1$  の時の係数は

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta-a|=\rho} f(\zeta) d\zeta$$

となるからこの係数が留数そのものである。

$n = -1$  という選択が式 6.3 の分母を変数に関係なく 1 にしてしまう特別な役割を果たすことがわかる。

また無限遠での留数は原点について正の向きの周回路が正の無限遠に対して  $R$  をどんなに大きくとっても原点側と周回路の外側に無限点があるので無限点から見れば回転が反対になる。

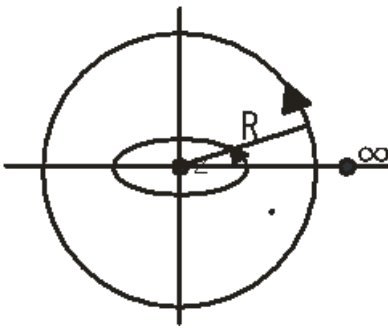


図 6.3: 無限遠での留数は原点の正の向きの周回と反対向きになる。いいかえるとどんな経路の外側に無限点はとることができる。

いわばこのどんな領域に対しても回転の向きを反対にとれるのが無限遠の定義であるともいえる。よって

$$Res(\infty) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=R} f(z) dz \quad (6.4)$$

となるが、次のように特異部にかけてローラン展開すると

$$f(z) = f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{z^n}$$

なので第 2 項の特異部は  $1/z$  の  $n = 1$  の場合のみ有効で

$$Res(\infty) = -b_1 \quad (6.5)$$

である。これはローラン展開の正則部分  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n/z^n$  の項  $b_1/z$  の係数に  $-1$  をかけたものであるのに対し次のように  $z = a$  で展開すると

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$$

$$Res(a) = a_{-1} \tag{6.6}$$

は主要部の係数になる。つまり有限で正則ならば  $Res(a)$  は必ず 0 になるが  $Res(\infty)$  は 0 になるとは限らない。

つまり有限から連続的に無限までの変化をとることができない。ことがわかる。  
 例えば  $0 < |z-a| < \infty$  で正則な関数

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n \tag{6.7}$$

とすると

$$Res(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-a|=r} f(z) dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} c_{-1} \int_0^{2\pi} i d\theta$$

$$= c_{-1}$$

となるが

$$Res(\infty) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-a|=R \rightarrow \infty} f(z) dz$$

は  $n = -1$  より  $n$  が小さいと分母が大きいので 0 になり、 $n$  が大きいと  $0 < |z-a| < \infty$  で正則な関数なので 0 になる。

従って積分に効くのは有限の場合と同様に  $dz = iRe^{i\theta} d\theta$  の  $R$  を打ち消す  $n = -1$  の場合のみであるから符号に注意し、

$$Res(\infty) = -\frac{1}{2\pi i} c_{-1} \int_0^{2\pi} i d\theta = -c_{-1}$$

である。よって別な視点で見れば境界があるということが特異点の符号を変える。

正則であることで、複素平面のある一点が決めれば、どこまでも解析接続で領域内は埋めることができる。しかし、無限遠については慎重にならないといけない。

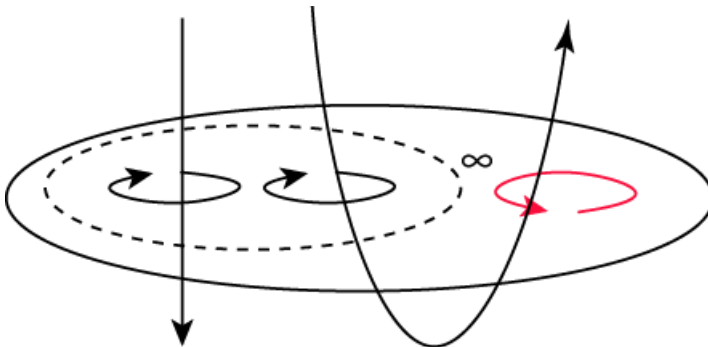


図 6.4: 境界があれば無限遠で向きが変わる

### 6.2.1 偏角の定理

以上から極の数を  $p$ 、零点の数を  $N$  として次の偏角の原理が成り立つ。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C d \arg f(z) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C d \log f(z) \\ &= N - P \end{aligned} \tag{6.8}$$

これは次のように示すことができる。

もし  $z$  が  $f(z)$  の  $k$  位の零点であるとすれば  $a$  の近傍で 0 にならない正則な関数  $g(z)$  が存在できて

$$f(z) = (z - a)^k g(z)$$

とおけるので

$$\begin{aligned} f'(z) &= k(z - a)^{k-1} g(z) + (z - a)^k g'(z) \\ \frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{k}{z - a} + \frac{g'(z)}{g(z)} \end{aligned}$$

第 2 項は  $a$  の近傍で正則である。よって  $a$  は  $\frac{f'(z)}{f(z)}$  の 1 位の極であり、零点  $k$  に等しい。よって

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N$$

次に  $b$  が  $f(z)$  が  $k$  位の極であるとすれば  $b$  の近傍で 0 にならない正則な関数  $h(z)$  が存在できて

$$f(z) = h(z)/(z - b)^k$$

とおけるので

$$\begin{aligned} f'(z) &= -k(z - b)^{-k-1} h(z) + (z - b)^{-k} h'(z) \\ \frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{-k}{z - b} + \frac{h'(z)}{h(z)} \end{aligned}$$

第 2 項は  $b$  の近傍で正則である。よって  $b$  は  $\frac{f'(z)}{f(z)}$  の 1 位の極であり、位数  $k$  にマイナスをかけたものに等しい。よって

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = -P$$

であることから結局

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P \tag{6.9}$$

が成り立つ。また  $\log|f(z)|$  が  $C$  上で 1 価の関数だから

$$f(z) = |f(z)| \exp[i \arg f(z)]$$

の両辺の対数を取り積分すると下の第 2 式の第 1 項は積分すると 0 だから

$$\begin{aligned} \oint \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \oint d \log f(z) \\ &= \oint d \log |f(z)| + i \oint \arg f(z) \end{aligned}$$



結局

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_C d \log f(z)$$

である。またこれから

$$\frac{1}{2\pi} \oint d \arg f(z)$$

は回転数を表すので  $w$  平面上において  $w = f(z)$  によって次の関数が  $w = 0$  の周りの閉曲線  $\Gamma$  の回転数である。

$$N = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} d \arg w = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{dw}{w} \quad (6.10)$$

ここまでみたように無限級数の結果を逆に用いることがよく使われる。さし以下のように部分分数分解がよく利用される。

また、単純閉曲線  $C$  の内部を  $D$  とし、 $\bar{D} \cap C$  で  $f(z), g(z)$  は正則とする。 $C$  上で、 $|f(z)| > |g(z)|$  が成り立てば、 $C$  の内部で  $f(z), f(z) + g(z)$  は同じ個数の 0 点を持つ。

これをルーシェ(Rouche')の定理という。

これは次のように簡単に示すことができる。

$$|f(z) + g(z)| \geq ||f(z)| - |g(z)|| > 0$$

だから

$$f(z) \neq 0 \wedge f(z) + g(z) \neq 0$$

であり、 $f(z), f(z) + g(z)$  共に  $\bar{D}$  で正則であるから極を持たない。従って  $f(z) + g(z)$  と  $f(z)$  との  $C$  内部の零点の個数の差は、偏角の定理より

$$\frac{1}{2\pi} \oint_C d \arg(f(z) + g(z)) - \frac{1}{2\pi} \oint_C d \arg f(z) = \frac{1}{2\pi} \oint_C d \arg \left( 1 + \frac{g(z)}{f(z)} \right) \quad (6.11)$$

となる。 $C$  上では  $|g(z)/f(z)| < 1$  だから  $w = 1 + g(z)/f(z)$  の  $C$  の像は原点を含まない円板

$$|w - 1| < 1$$

に図のように含まれる。

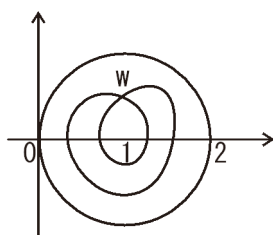


図 6.5:  $w = 1 + g(z)/f(z)$  は原点回りを周回しない

よって  $z$  が  $C$  を 1 周する間に  $w$  は 0 を回ることはないので式 6.11 は 0 になる。  
原点以外で順序つけられた点列

$$z_n (n = 1, 2, \dots : |z_n| < |z_{n+1}|) \quad (6.12)$$

における極を考える。各点  $z_k (k = 0, 1, 2, \dots)$  の周りのローラン展開を考え、その主要部を  $p_k(z)$  とする。

ここでもし、原点が正則点であれば  $p_0(z) \equiv 0$  とおく。原点を囲む単一閉曲線を  $C_n$  として

$$R_n : |z_n| < R_n < |z_{n+1}| \quad (6.13)$$

となる半径の円を考えると順序つけられているので  $C_n$  の内部に含まれる極が  $z_0 \cdots z_n$  のみになる。そこで次の関数

$$f(\zeta) \frac{1 - (z/\zeta)^n}{\zeta - z} = f(\zeta) \sum_{j=0}^{n-1} \frac{z^j}{\zeta^{j+1}}$$

の  $\zeta = z_k$  のまわりのローラン展開の  $(\zeta - z_k)^{-1}$  の係数を  $h_k(z)$  とすると次が成り立つ。

$$f(z) = \sum_{k=0}^n (p_k(z) - h_k(z)) + \frac{z^n}{2\pi i} \oint_{C_n} \frac{f(\zeta)}{\zeta^n(\zeta - z)} d\zeta \quad (6.14)$$

これも次のように証明できる。右辺第 2 項から

$$R(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_n} \frac{f(\zeta)}{\zeta^n(\zeta - z)} d\zeta$$

の積分路  $C_n$  内に持つ極は

$$z, z_0, z_1, \dots, z_n$$

の高々  $n+2$  個である。 $\zeta = z$  での留数は  $f(z)$  になる。また  $\zeta = z_k$  の近傍で部分分数展開をして

$$\begin{aligned} \frac{z^n f(\zeta)}{\zeta^n(\zeta - z)} d\zeta &= f(\zeta) \left( \frac{1}{\zeta - z} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{z^j}{\zeta^{j+1}} \right) \\ &= f(\zeta) \left( - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\zeta - z_k)^{m+1}}{(\zeta - z_k)(z - z_k)^{m+1}} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{z^j}{\zeta^{j+1}} \right) \\ &= f(\zeta) \left( - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\zeta - z_k)^m}{(z - z_k)^{m+1}} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{z^j}{\zeta^{j+1}} \right) \end{aligned}$$

となる。主要部を

$$p_k(\zeta) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_{-i}}{(\zeta - z_k)^i} \quad (6.15)$$

と置けば、 $\zeta = z_k$  における留数が  $-p_k(z) + h_k(z)$  に等しい。よって

$$R(z) = f(z) + \sum_{k=0}^n (-p_k(z) + h_k(z)) \quad (6.16)$$

が成り立ち、式 6.14 がいえた。

### 6.2.2 ジョルダンの補助定理

次に留数定理を実際の積分に応用してみよう。はじめによく利用することになるジョルダンの補助定理を示す。

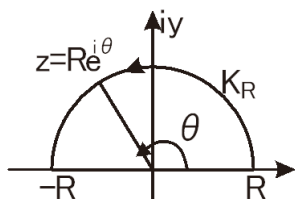


図 6.6: 複素平面上での積分経路

図のように上半球面  $Im z \geq 0$  で有理型の関数  $f(z)$  は  $0 \leq \theta \leq \pi$  について

$$f(Re^{i\theta}) \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty)$$

を満たす時、任意の正の数  $m > 0$  とすると、閉曲線  $K_R : z = Re^{i\theta} (0 \leq \theta \leq \pi)$  として

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{K_R} e^{imz} f(z) dz = 0 \quad (m > 0)$$

これを示すのに式 5.28 で示したように  $f(z)$  の最大値  $M(R)$  を用いて

$$\begin{aligned} \left| \int_{K_R} e^{imz} f(z) dz \right| &\leq \int_0^\pi e^{-mR \sin \theta} M(R) R d\theta = 2RM(R) \int_0^{\pi/2} e^{-mR \sin \theta} d\theta \\ &\leq 2RM(R) \int_0^{\pi/2} e^{-2mR\theta/\pi} d\theta = 2RM(R) \frac{\pi}{2mR} (1 - e^{-mR}) < \frac{\pi}{m} M(R) \end{aligned}$$

よって、仮定から  $M \rightarrow 0$  だからこの積分は 0 に収束する。

次に、1 周しない角度  $\alpha$  の場合の留数について考えてみよう。図のように中心  $a$  で半径  $\rho$  の円周上に弧  $K$  に対応した角度を  $\alpha_\rho (0 \leq \alpha \leq 2\pi)$  とする。

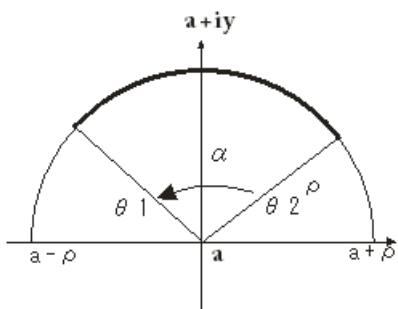


図 6.7: 1 周すると  $2\pi i Res(a)$  だが図では  $\alpha$  の角をなす、この時経路  $K$  に沿った積分は  $-\alpha i Res(a)$  になる。

$f(z)$  が  $a$  を 1 位の極として

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \alpha_\rho = \alpha \tag{6.17}$$

が成り立てば留数が次のように角度  $\alpha$  に依存し

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_K f(z) dz = -\alpha i Res(a) \tag{6.18}$$

が成り立つ。これは次のように簡単に示すことができる。

$$\text{Res}(a) = a_{-1} \quad (6.19)$$

として

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z-a} + g(z) \quad (6.20)$$

とおけば関数  $g(z)$  は有界であり  $|z-a| \leq \rho_0$  で

$$|g(z)| \leq M \quad (6.21)$$

とおける。したがって  $0 < \rho < \rho_0$  に対して

$$\left| \int_K g(z) dz \right| \leq 2\pi\rho M \quad (6.22)$$

が成り立つので

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_K g(z) dz = 0 \quad (6.23)$$

が成り立つので  $K$  の始点と終点を

$$a + \rho e^{i\theta_1}, \quad a + \rho e^{i\theta_2}$$

とすると

$$\int_K \frac{a_{-1}}{z-a} dz = \int_{\theta_1}^{\theta_2} a_{-1} d\theta = a_{-1} i(\theta_2 - \theta_1) = -i\alpha a_{-1} \quad (\rho \rightarrow 0) \quad (6.24)$$

となり式 6.18 が示された。

### 6.2.3 コーシーの主値

物理の実観測にかかる世界では実数が基本になる。そこで実軸上で定義された有界な関数  $f(x)$  に対して、無限区間の積分

$$J = \int_{-\infty}^{\varepsilon} f(x) dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} f(x) dx \quad (6.25)$$

を考えると  $J$  は広義の積分 (improper Riemann integral) として次のように有限値をとってから極限をとる手法を用いて定義される。

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \equiv \lim_{X_1 \rightarrow -\infty} \int_{-X_1}^{\varepsilon} f(x) dx + \lim_{X_2 \rightarrow \infty} \int_{\varepsilon}^{X_2} f(x) dx \quad (6.26)$$

この式の 2 つの積分が発散する場合でも次の極限が有限になる時、その極限值をコーシーの主値 (principal value) という。

$$p.v.J = p.v. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \equiv \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx \quad (6.27)$$

例えば  $f(x) = x$  の時は  $J$  は無限大の定義域では発散する。しかし、

$$p.v.J = p.v. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx$$

のように極限をとることに順番をつけることを許すと

$$p.v. \int_{-\infty}^{\infty} x dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R x dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \left( \frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{2} \right) = 0$$

となり収束する。有限区間の場合にも次のように定義できる。

$$p.v. J = p.v. \int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \int_a^{a-\epsilon} f(x) dx + \int_{a+\epsilon}^b f(x) dx \right)$$

例えば  $f(x) = 1/x$  の時、2つの積分区間  $[-1, 0)$ ,  $(0, 2]$  に対して  $f(x)$  は発散するから広義の積分は存在しない。しかし、

$$\begin{aligned} p.v. J &= p.v. \int_{-1}^2 \frac{dx}{x} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \int_{-1}^{-\epsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\epsilon}^2 \frac{dx}{x} \right) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \log \epsilon + \log \frac{2}{\epsilon} \right) = \log 2 \end{aligned}$$

と求まる。

これから  $f(z)$  が実軸上に複数の1位の極をもつような場合には次のように書き換えることができる。

ただし  $f(z)$  は一般に次のような有理関数とする。 $P, Q$  を多項式として  $m > 0$  とし、

$$f(z) = e^{imz} \frac{P(z)}{Q(z)} \quad (6.28)$$

原点中心の上半円を考えれば式 6.24 より上半平面内の極の和と実軸上の極の和で次のように決まる。

$$\begin{aligned} p.v. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \left( \int_{-\infty}^{-\rho} f(x) dx + \int_{\rho}^{\infty} f(x) dx \right) \\ &= 2\pi i \left( \sum_{z>0} Res(z) + \frac{1}{2} \sum_{z=0} Res(0) \right) \end{aligned} \quad (6.29)$$

もし、 $m < 0$  であれば下半平面内の極の和と実軸上の極の和で次のように決まる。

$$\begin{aligned} p.v. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \left( \int_{-\infty}^{-\rho} f(x) dx + \int_{\rho}^{\infty} f(x) dx \right) \\ &= -2\pi i \left( \sum_{z<0} Res(z) + \frac{1}{2} \sum_{z=0} Res(0) \right) \end{aligned}$$

### 6.3 複素積分例

いくつかの複素積分の例をみていこう。まず  $P(x), Q(x)$  を多項式とし、有理関数

$$R(x) = P(x)/Q(x)$$

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx$$

を考える。 $Q(x)$  が実根をもたないで  $q \geq p + 2$  を満たすことより複素関数  $R(z)$  に留数定理を用いれば

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} R(z) dz = 2\pi i \sum_{y>0} Res R(x) \quad (6.30)$$

このような積分は上半面半円周  $K_R$  と実軸区間  $[-R, R]$  からなるがこの円周上の  $|z^2 R(z)|$  の最大値を  $M$  とすると

すくなくとも円周上の  $R(z)$  の積分の大きさは  $\pi|z^2 R(z)|$  の最大値を超えることはないから

$$\left| \int_{K_R} R(z) dz \right| \leq \pi M/R \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty)$$

が成り立つ。よって留数定理から 6.30 から

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx = 2\pi i \sum_{y>0} \text{Res } R(x)$$

である。これをジョルダンの補助定理という。

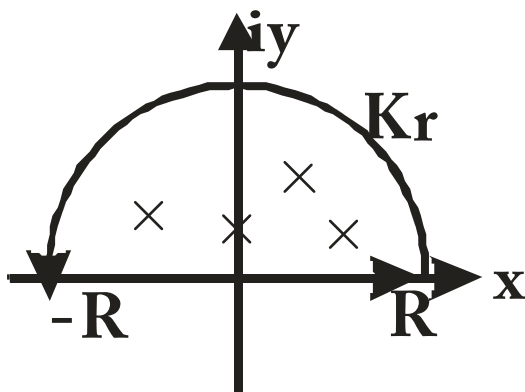


図 6.8: 全実空間を複素空間の閉曲線の積分に置き換える。

### 6.3.1 偶関数の例

例えば

$$I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + a^2} \quad (a > 0)$$

を求めてみよう。偶関数だから次のようにして全実軸上に拡大する。

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + a^2} \quad (a > 0)$$

はまず

$$R(x) = \frac{1}{z^2 + a^2} = \frac{1}{(z + ia)(z - ia)}$$

となり上半面の極は  $\text{Res}(ia) = 1/2ia$  だから留数定理より

$$I = \frac{1}{2} 2\pi i \frac{1}{2ia} = \frac{\pi}{2a}$$

を得る。

### 6.3.2 実部分を後からとる例

もう一つ、実数部分を後からとる例を紹介する。

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\cos t}{t^2 + a^2} dt \quad (a > 0)$$

の積分方法を見てみよう。

$t = ax$  で変数変換し、

$$I = \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2 + 1} dx$$

とすると

$$f(z) = \frac{e^{iax}}{z^2 + 1} = \frac{e^{iax}}{(z+i)(z-i)}$$

よって留数定理から

$$\frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2a} 2\pi i \frac{e^{-a}}{2i} = \frac{\pi e^{-a}}{2a}$$

両辺の実数をとれば

$$I = \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi e^{-a}}{2a}$$

を得る。

### 6.3.3 両半球に極がある例

次に

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{imx}}{x^2 + 1} dx \tag{6.31}$$

を求めたい時には

$$f(z) = \frac{e^{imz}}{z^2 + 1} = \frac{e^{imz}}{(z+i)(z-i)}$$

とおけば上半平面において

$$\text{Res}(+i) = \frac{e^{-m}}{2i}$$

のみが留数だから

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{imx}}{x^2 + 1} dx = 2\pi i \frac{e^{-m}}{2i} = \pi e^{-m}$$

となる。

### 6.3.4 階段関数の例

これから階段関数 (Step function) を次のように定義できる。

$$\theta(m) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{imz}}{x - i\varepsilon} dx = \begin{cases} 1 & (m > 0) \\ 0 & (m < 0) \end{cases} \quad (6.32)$$

この証明もまず

$$f(z) = \frac{e^{imz}}{z - i\varepsilon}$$

とおけば上半平面のみに極を持つので

$$\theta(m) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} 2\pi i \operatorname{Res}(i\varepsilon) = \begin{cases} e^{-m\varepsilon} = 1 & m > 0 \\ 0 & m < 0 \end{cases} \quad (6.33)$$

となり  $\varepsilon \rightarrow 0$  の極限をとると求まる。

またよく出てくる

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

も原点に 1 位の極を持つ関数

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$$

とおいて

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_C f(z) dz = 0 \quad (6.34)$$

であるので式 6.29 から

$$\begin{aligned} p.v. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx &= 2\pi i \frac{1}{2} \operatorname{Res}(0) \\ &= \pi i \end{aligned}$$

となるので両辺の虚部をとると

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

となる。

### 6.3.5 多価関数の積分

実定積分を行う場合、コーシーの積分定理は被積分関数が 1 価正則であることを条件としているので多価関数の場合はその分岐に注意がいる。

例えば関数  $G(z)$  が 1 価有理型で無限大に少なくとも 2 位の零点をもち、 $z = 0$  で 1 位の極を持つ他は実軸上で正則であるとする。

次のようなメラン変換型 (Mellin) の定積分

$$I = \int_0^{\infty} x^{\alpha} G(x) dx \quad (0 < \alpha < 1) \quad (6.35)$$



を求めてみる。  $z^\alpha$  の分岐を  $0 < \arg z^\alpha < 2\pi\alpha$  となるようにとると

$$f(z) = z^\alpha G(z)$$

は極を全て含む次の閉領域  $D$  において 1 価正則である。  $0 < \rho < 1 < R$ ,  $0 < \epsilon < \pi/2$  として

$$D : \rho \leq r \leq R, \epsilon \leq \theta \leq 2\pi - \epsilon$$

正の実軸上で  $\alpha$  の分岐があるので次の図左のように切れ込まれた図形領域  $D$  の境界を積分領域とすると

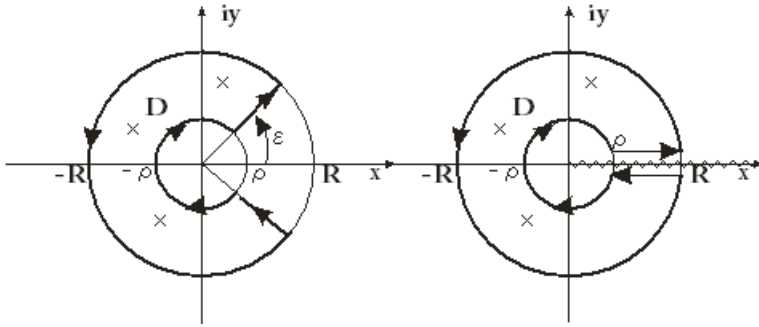


図 6.9: 積分路の変更

$D$  の境界で正則であるから留数の定理から各領域について

$$\begin{aligned} \int_{\rho}^R f(re^{i\epsilon})e^{iz} dr + \int_{\epsilon}^{2\pi-\epsilon} f(Re^{i\theta})iRe^{i\theta} d\theta + \int_R^{\rho} f(re^{i(2\pi-\epsilon)})e^{i(2\pi-\epsilon)} dr + \int_{2\pi-\epsilon}^{\epsilon} f(\rho e^{i\theta})i\rho e^{i\theta} d\theta \\ = 2\pi i \sum_{x \leq D} \text{Res}(z) \end{aligned} \quad (6.36)$$

が成り立つ。ここで  $z \rightarrow 0$  とすると

$$\begin{aligned} \int_{\rho}^R r^\alpha G(r) dr + \int_{\epsilon}^{2\pi-\epsilon} R^{\alpha+1} G(Re^{i\theta})ie^{i(\alpha+1)\theta} d\theta + \int_R^{\rho} r^\alpha G(re^{2\pi i})e^{2\pi i(\alpha+1)} dr + \int_{2\pi-\epsilon}^{\epsilon} \rho^{\alpha+1} G(\rho e^{i\theta})ie^{i(\alpha+1)\theta} d\theta \\ = 2\pi i \sum_{x \leq D} \text{Res}(z) \end{aligned} \quad (6.37)$$

ところが  $|z^\alpha G(z) \leq M| (z \rightarrow \infty)$ ,  $|zG(z)| \leq N (z \rightarrow 0)$  で上限を決められるので  $\epsilon \rightarrow 0$  とすると

$$\left| \int_0^{2\pi} R^{\alpha+1} G(Re^{i\theta})ie^{i(\alpha+1)\theta} d\theta \right| \leq \frac{2\pi M}{R^{1-\alpha}} \left| \int_{2\pi}^0 \rho^{\alpha+1} G(\rho e^{i\theta})ie^{i(\alpha+1)\theta} d\theta \right| < 2\pi N \rho^\alpha \quad (6.38)$$

従って  $R \rightarrow \infty, \rho \rightarrow 0$  で角度積分の第 2, 4 項は 0 に収束する。

よって

$$(1 - e^{2\pi i \alpha}) \int_0^\infty r^\alpha G(r) dr = 2\pi i \sum_{x \leq D} \text{Res}(z) \quad (6.39)$$

この結果は先の図右のように分岐点となる正の実軸上を避けて積分路を決めた結果に等しい。

このように実積分に因子  $(1 - e^{2\pi i \alpha})$  を掛けることで留数定理が使えるようになる。

しかし、厳密には  $x$  軸の正の領域での切断の両側で正則である必要がある。つまり、

$z^\alpha$  の分岐  $0 \leq \arg z^\alpha \leq 2\pi\alpha$  を含むようにうまく解析接続された関数  $f(z) = z^\alpha G(z)$  が定義できないといけない。この問題を解決するためには積分路を上半球のみで閉じれば、切断軸を回避できる。

例 2. 簡単な応用例として次の実積分を求めてみる。

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\rho-1}}{x+1} dx \quad (0 < \rho < 1) \quad (6.40)$$

これはまず

$$f(z) = \frac{z^{\rho-1}}{z+1} \quad (6.41)$$

とおくと領域 D の点  $z = e^{i\pi} = -1$  に極をもち

$$\text{Res}(e^{i\pi}) = e^{i\pi(\rho-1)} = e^{i\pi\rho} \cdot (-1) = -e^{i\pi\rho} \quad (6.42)$$

となるので式 6.39 より

$$\begin{aligned} (1 - e^{2\pi i\rho}) \int_0^{\infty} \frac{x^{\rho-1}}{x+1} dx &= 2\pi i \text{Res}(z) \\ &= -2\pi i e^{i\pi\rho} \end{aligned}$$

従って実部分をとると

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\rho-1}}{x+1} dx = \text{Real} \left[ \frac{2\pi i e^{i\pi\rho}}{1 - e^{2\pi i\rho}} \right] = \frac{2\pi \sin \rho\pi}{1 - \cos 2\rho\pi} = \frac{2\pi \sin \rho\pi}{2 \sin^2 \rho\pi} = \frac{\pi}{\sin \rho\pi}$$

となる。

さらに

例 3. もう一つ同じような次の実積分を考える。

$$I = \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}} \quad (a < b) \quad (6.43)$$

これもまず図のような閉曲線  $C_1$  に沿っての積分

$$J = \oint_{C_1} \frac{dz}{\sqrt{(z-a)(z-b)}} \quad (a < b) \quad (6.44)$$

を考える。

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{(z-a)(z-b)}} \quad (6.45)$$

はローラン展開をすると

$$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{a+b}{2z^2} + \dots \quad (6.46)$$

となるので無限遠に 1 位の零点を持つことになるから留数定理から

$$J = \oint_{C_1} \frac{dz}{\sqrt{(z-a)(z-b)}} = -2\pi i \text{Res}(\infty) \quad (6.47)$$

$$= 2\pi i \quad (6.48)$$

となる。次の図のように積分路を上半面の  $C_u$  と下半面  $C_d$  に分ける。

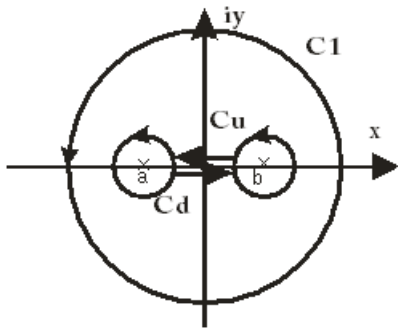


図 6.10: 積分路の分解

上半面について切断面が  $x$  軸の正の領域にあるとして

$$\sqrt{z-a} = \sqrt{x-a}$$

$$\sqrt{z-b} = e^{-i\pi/2} \sqrt{b-x}$$

下半面について切断面が  $x$  軸の負の領域にあるとして

$$\sqrt{z-a} = e^{-i3\pi/2} \sqrt{x-a}$$

$$\sqrt{z-b} = \sqrt{b-x}$$

のように位相変化する。よって

$$\begin{aligned} J &= \int_b^a \frac{e^{-\pi/2} dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}} + \int_a^b \frac{e^{-i3\pi/2} dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}} \\ &= 2i \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}} \end{aligned}$$

となる。これと式 6.48 から

$$I = \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}} = \pi \quad (6.49)$$

が求まる。

つぎに

例 4. 次のようなフレネル積分についても求めることができる。

$$I_x = \int_0^\infty e^{-x^2} dx \quad (6.50)$$

として積をつくり面積分になおすと強引に極座標での面積分になる

$$\begin{aligned}
I_x I_y &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \\
&= 4 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr \\
&= 2\pi \frac{1}{2} = \pi
\end{aligned}$$

であるから

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \quad (6.51)$$

となる。

最後に

例 5. 次のような特殊な積分の例も考えよう。

$$I = \int_0^{\pi} \log(\sin \theta) d\theta$$

ここで

$$z = x + iy$$

の関数として

$$F(z) = 1 - e^{2iz} = -2ie^{iz} \sin z = 1 - e^{-2y}(\cos 2x + i \sin 2x)$$

を定義する。\$F(z)\$ が負の実数になるのは \$y < 0\$ かつ \$x = n\pi\$ (\$n = 0, \pm\pi, \pm 2\pi \dots\$) の時である。これから半直線を除いた領域において

$$f(z) = \log F(z) = \log(-2ie^{iz} \sin z)$$

は主値をとれば、1 価正則で、かつ \$\pi\$ を 1 周期とする周期関数である。

$$f(z + \pi) = f(z)$$

## 7 解析接続

物理学において情報の伝達は近接作用で伝播していくことが普通である。どのようにその伝播がおこなわれ、ネットワークができていくかは重要な課題である。基礎的な数学においてもいかに広がりをつくるかは多くの方法があるが、ここでは複素関数の解析接続を考察していく。

### 7.1 直接接続

複素関数の正則性は広がりを持つ。その出発点を次のような整級数にとる。

$$P(z; a) \equiv c_0 + c_1(z - a) + c_2(z - a)^2 + \dots \quad (|z - a| < R) \quad (7.1)$$

これを、関数要素 (function\_element) と呼ぶ。

つまりここでは  $a$  の近傍でべき級数に関数を展開し、その振る舞いをみてきたが、展開した関数というより、正級数で表される関数要素そのものを中心に考えようというわけである。そこでまず、このやり方で定義域をどう広げていくかを見てみよう。

級数が収束したとして、収束円  $K: |z - a| < R$  の内側の任意の点を  $b$  とすると  $P(z; a)$  は点  $z = b$  で正則であるからその近傍でテーラー展開ができて

$$P(z; a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P^{(n)}(b; a)}{n!} (z - b)^n \quad (|z - a| < R) \quad (7.2)$$

$$= c_0 + c_1(b - a)(z - b) + \frac{c_2}{2}(b - a)^2(z - b)^2 + \dots \quad (7.3)$$

このテーラー展開式は  $K$  内で収束するのでその収束半径を下図のように  $R'$  とおく。 $R'$  は点  $b$  から領域  $K$  の境界円周上までの距離  $l$  として

$$l = R - |b - a|$$

とおくと  $R'$  はこれより大きいから

$$R' \geq l > 0$$

が図のように成り立つ。これにより最初の半径  $R$  の外に拡大していけるようになる。さらに、この新たな収束円  $K': |z - b| < R'$  について  $b$  は収束範囲  $K$  の内部だから

$$P(z; b) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P^{(n)}(b; a)}{n!} (z - b)^n \quad (|z - b| < R')$$

と関数要素をとれる。この  $P(z; b)$  を  $P(z; a)$  の直接接続という。

この関数要素の収束円を  $K'$  とする。同様にこのやり方で図のように  $K'$  内に点  $c$  をとり、ここを中心に新たに関数要素をつくれれば  $K''$  に広げられ、領域をどんどん増やしていけるわけである。

展開の中心は収束半径内であれば任意とることができる。

整級数の収束半径が展開している中心の外側になっても例えば図のように  $K$  が  $K'$  をはみ出す時、すなわち  $R' > l$  の場合は  $P(z; b)$  は収束しても  $P(z; a)$  が発散することもあるので関数の正則性を保つためには次のような場合分けして定義できる関数を用意する。

$$F(z) \equiv \begin{cases} P(z; a) & z \in K \\ P(z; b) & z \in K' \end{cases}$$

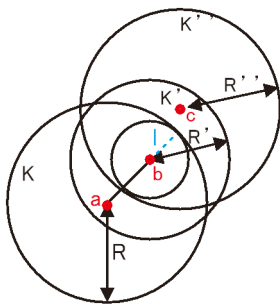


図 7.1: 直接接続

これにより  $F(z)$  は  $K \cup K'$  の領域において正則関数とすることができる。さらに

$$P(z; a), P(z; b), P(z; c) \cdots$$

のように連鎖させることができる。

このように一般に領域  $K$  で正則な  $f(z)$  に対して  $K$  を含む拡大された領域  $K'$  で正則な関数  $F(z)$  が  $K$  の領域で

$$F(z) = f(z)$$

となっている時、 $F(z)$  は  $f(z)$  の解析接続 (analytic continuation) という。

## 7.2 解析接続

同じ複素平面上的の値であっても解析接続の方法  $P$  が異なる場合がある。

これは級数への展開を考えて、同値の概念を考え直すことである。

まず、解析接続された関数要素の定義域の総和を  $D$  とする。 $D$  で定義された1つの正則関数  $F(z)$  が定まる。

この関数を解析関数 (analytic function) という。

解析接続の一意性から2つの解析関数は1つの関数要素が共有されれば同じといえる。

図のように1つの関数要素  $P(z; a)$  の収束円内  $K$  の2点  $a_1, b_1$  から出発し、直接接続  $P(z; a_i), P(z; b_j)$  をそれぞれ、 $m, n$  回繰り返して得られる関数要素の列

$$P(z; a), P(z; a_1), \cdots P(z; a_m); P(z; a), P(z; b_1), \cdots P(z; b_n)$$

があり、 $P(z; a_m), P(z; b_n)$  の収束円領域を  $K_m, L_n$  が共有部分  $\Omega$  を持つと解析関数  $F(z)$  の多価性が発生する。

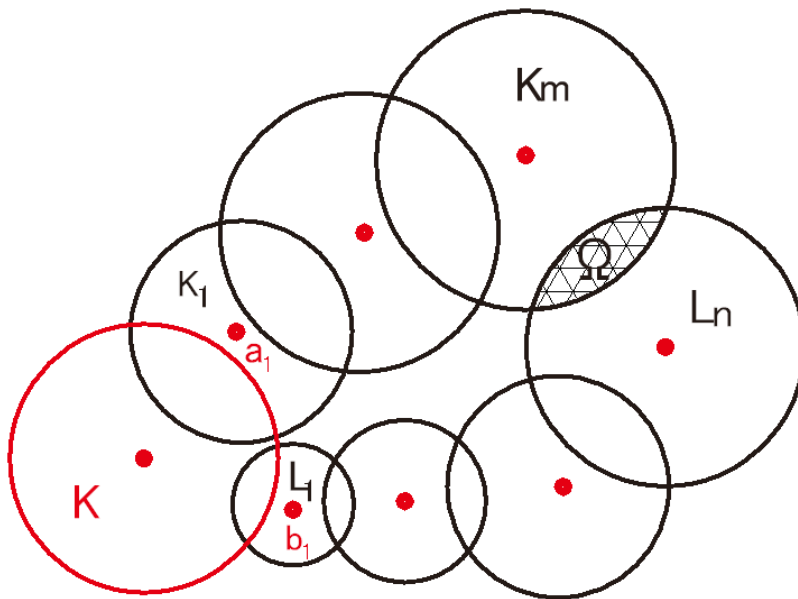


図 7.2: 解析接続の2価性

共有集合の数だけ重なりあったリーマン面が存在し、もし、 $\Omega$  で  $P(z; a_m) = P(z; b_n)$  ならばここで  $K_m, L_n$  を接合する。

そうでなければ接合しないというリーマン葉の接続規則を決める。

$z = a$  を中心として正の収束半径  $R$  を持つ整級数を  $|z - a| < R$  として

$$P(z; a) = c_0 + c_1(z - a) + c_2(z - a)^2 + \cdots$$

として、関数要素 (function element) を先と同様に定義しておく。  
 整級数  $P(z; a)$  の収束円内  $K : |z - a| < R$  の任意の 1 点を  $b$  とする。  
 $P(z; a)$  は  $z = b$  で正則だから、その近傍で次のようにテーラー展開できる。

$$P(z; a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P^{(n)}(b; a)}{n!} (z - b)^n \quad (7.4)$$

$n > 0$  だから、この展開は  $z = b$  を中心とする整級数で  $K$  内で収束する。  
 この収束半径を  $R'$  とすると、次の図のように点  $b$  から領域  $K$  の境界円周上までの距離  $l$

$$l = R - |b - a|$$

とすると、式 7.4 から、この収束半径  $R'$  は少なくとも  $l$  より大きい。

$$R' \geq l > 0$$

という関係が成り立つ。

従って新たに式 7.4 は収束半径

$$K' : |z - b| < R'$$

で収束する関数要素がとれる。

$$P(z; b) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P^{(n)}(b; a)}{n!} (z - b)^n, \quad (|z - b| < R') \quad (7.5)$$

この時が、 $P(z; b)$  は  $P(z; a)$  の直接接続である。

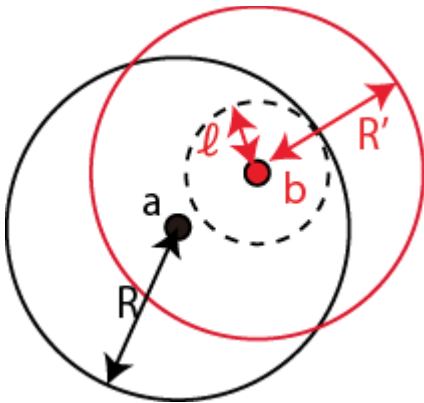


図 7.3: 直接接続 : 点  $a$  中心で収束半径  $R$  から出発し、定義域を広げる

このように長さ  $l$  に対して、およそ、新しい収束半径となる  $R'$  は  $a, b$  間の距離程度あるので、はじめの収束半径より外に出ることができるわけである。これを繰り返せば次のような関数要素の列ができる。

$$P(z; a), P(z; b), P(z; c) \cdots$$

また、領域も

$$K, K', K'' \cdots$$

のように拡大されていく。

この時、 $K$  で正則な関数  $f_0(z)$  に対して、 $K'$  で正則な関数  $f_1(z)$ 、 $K''$  で正則な関数  $f_2(z)$ 、 $\cdots$  とする。  
 前節の一致の定理を使えば

$$f_0 = f_1 = f_2 = \cdots$$

であり、この時の正則関数は 1 つに決まる。このように定義域を拡大していく方法が解析接続である。

### 7.3 多価関数

さらにおもしろいことに次の図のように領域  $K$  内の異なる 2 点  $a_1, b_1$  から 2 つのルート  $A, B$  で解析接続し、共通の点を含む領域  $A_m, B_n$  に至ったとしよう。

$$A : P(z; a), P(z; a_1), P(z; a_2) \cdots$$

$$B : P(z; a), P(z; b_1), P(z; b_2) \cdots$$

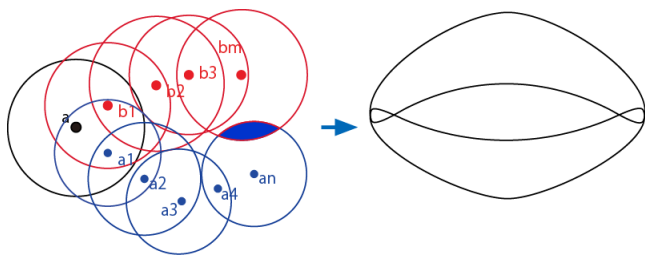


図 7.4: 同一点からの 2 つのルートの解析接続

A については  $n$  回の接続で、B については  $m$  回の接続で上図の塗りつぶされている共有の領域を持ったとする。

一致の原理から同一点  $a$  から  $a_n, b_m$  にいたる経路は一意に決まるまずである。

ここで、もし、関数要素が共通領域で

$$P(z; a_n) = P(z; b_m)$$

を満たすなら領域  $A_n, B_m$  を接合してしまう。ただし、一致の原理があるので一意性を維持するためには図右のように 2 葉

の面を考えないといけない。この関係は 3 葉、4 葉と増やしていくことが可能になる。

### 7.4 リーマン面

このような関数の一意性を維持できるように考えられたのがリーマン面である。

複数のリーマン面を持つ関数が多価関数になる。

空間の広がりが無制限でないならば、必ずどこかで接合がおきる。

いや無限であっても領域の広がりや接続の広がりやの速さが問題になる。よって、関数要素の数  $n$  が問題になる。

複素平面のどの点をとってもその点を中心とした関数要素が  $n$  を越えず（あるいはちょうど  $n$  個）であればこの解析関数  $F(z)$  は  $n$  価であるという。

つまり、 $F(z)$  は  $n$  個の分岐を持ち、 $n$  葉のリーマン面を持つ。例えば 2 価の関数

$$w = \sqrt{z}$$

を考えてみよう。これは 2 つの分岐をもち  $z = re^{i\phi}$  とすると、

$$w_0 = \sqrt{r}e^{i\phi/2}, \quad w_1 = \sqrt{r}e^{i(\phi \pm 2\pi)/2} = -w_0$$

である。つまり  $\theta$  の不定性  $\pm 2n\pi$  が根をとったせいで、 $\pm\pi$  の 2 価が平面内に出現した。

対応するリーマン葉を  $\Pi_0, \Pi_1$  とするとリーマン面  $D$  を変域とする解析接続関数  $F(z)$  が



$$z = re^{i\phi} \in D \tag{7.6}$$

に対して

$$F(z) = \sqrt{z} = \sqrt{r}e^{i\phi/2} (-\pi < \phi \leq 3\pi; \text{mod } 4\pi)$$

であり階微分係数は

$$\begin{aligned} F^{(n)}(z) &:= \frac{(-1)^n(-1) \cdot 1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{2^n} z^{-\frac{2n-1}{2}} \quad (n \geq 1) \\ &= k_n z^{-\frac{2n-1}{2}} \quad k_n = \frac{(-1)^n}{2^n} \prod_{j=2}^n (2j-3) \end{aligned} \tag{7.7}$$

である。実数の  $\sqrt{x}$  の  $x=1$  での展開は

$$\sqrt{x} = 1 + \frac{(x-1)}{1!2^1} - \frac{1}{2!2^2}(x-1)^2 + \frac{1 \cdot 3}{3!2^3}(x-1)^3 - \frac{3 \cdot 5}{4!2^4}(x-1)^4 + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{5!2^5}(x-1)^5 + \dots$$

であるから、 $z=1$  を中心として収束半径  $R=1$  の整関数が次のように定義できる。

$$\begin{aligned} P(z; 1) &= 1 + \frac{1}{2}(z-1) - \frac{1}{2!2^2}(z-1)^2 + \frac{1 \cdot 3}{3!2^3}(z-1)^3 \cdots \frac{k_n}{n!}(z-1)^n \\ &= 1 - \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^j(z-1)^j}{j!2^j} \prod_{i=2}^j (2i-3) \\ &= 1 - \sum_{j=1}^n \frac{(z-1)^j}{j!} F^{(n)}(z) \end{aligned} \tag{7.8}$$

この整関数は  $|z-1| < 1$  の収束円内で収束し、 $n$  が十分大きければ

$$P(z; 1) = w_0 = \sqrt{z}$$

とみなすことができる。そこで図のように実軸の負の部分に切れこみを入れることを考える。

$\Pi_0$  上の単位円 (実線) と  $\Pi_1$  上の単位円 (点線) はともに同一点  $1$  を中心としている。

つまり、2点  $0, 1$  と  $0', 1'$  は重ね合うことができる。

これに対し同一点  $0'$  を中心として下半円の経路  $\gamma$  は  $\Pi_0$  上にあり、上半円の経路  $\gamma'$  は  $\Pi_1$  上にある。

複素平面が元々紙面垂直方向の層をもっていて  $\sqrt{z}$  関数は半直線でこれを接続するわけである。

リーマン葉といういささか奇妙な構造を取り入れなくても例えば1周が  $2\pi$  であることを柔軟に考えると一価である正則性は保てるだろうというわけである。少々都合良すぎる気はするが、ここでは空間は自由度に関係ないとして良しとする。

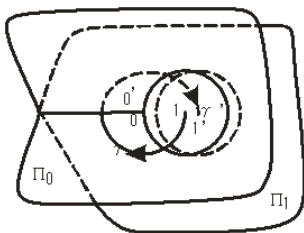


図 7.5:  $\sqrt{z}$  のリーマン葉

この解析接続を数列的に見てみよう。

まず  $\Pi_0$  上で 1 から出発し、半径 1 の円周  $\gamma$  に沿って関数要素の列をつくり、 $\Pi_1$  上の  $1' = e^{-2i\pi} = e^{2i\pi}$  に到達する。

これを関数要素の列として  $F^{(n)}(1')$  の値を用いて表すと関数要素は式 7.8 より

$$\begin{aligned} P(z; 1') &= \sqrt{1'} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F^{(n)}(1')}{n!} (z-1')^n \\ &= \sqrt{e^{2i\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F^{(n)}(e^{2i\pi})}{n!} (z - e^{2i\pi})^n \\ &= -1 - \frac{1}{2}(z-1) + \frac{1}{2!2^2}(z-1)^2 - \frac{3}{3!2^3}(z-1)^3 + \cdots - \frac{k_n}{n!}(z-1)^n \\ &= -1 - \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^j (z-1)^j}{j!2^j} \prod_{i=2}^j (2i-3) \\ &= -P(z; 1) \end{aligned}$$

であり、これは符号が反対の  $z=1$  を中心として収束半径  $R=1$  のテーラー級数である。よって

$$w_0 = P(z; 1) = -w_1 = -P(z; 1')$$

であり、 $P(z; 1')$  から解析接続で中心が  $a$  の原点まわりを時計方向に 1 周して  $z=1$  に戻れば  $P(z; 1)$  が得られるわけである。

数列の表現が自然に回転の向きを決めていることは興味深い。

つまり  $F(z)$  は拡大されたリーマン空間においては 1 価正則である。この 2 葉の領域全部がここでの  $D$  となる。

ただし、関数要素の鎖による解析接続で定義域が境界をこえて拡張できない場合があり、これを自然境界 (natural boundary) という。

例えば

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n} = z + z^2 + z^4 + z^8 \cdots$$

は

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n} = z + z^2 + z^4 + \cdots + z^{2^{n-1}} + \sum_{m=0}^{\infty} z^{2^{n+m}}$$

とかけるので

$$f(z) = z + z^2 + z^4 + \cdots + z^{2^{n-1}} + f(z^{2^n})$$

となる。 $f(z)$  は  $z=1$  以外に  $1 = z^{2^n} = e^{2m\pi i}$  の解

$$z_{n,m} = \exp\left[\frac{2m\pi i}{2^n}\right], \quad m = 1, 2, \dots, 2^n - 1; n = 1, 2, \dots$$

の点で発散し、これらは単位円周に稠密に存在するので単位円  $|z|=1$  は自然境界になる。

## 7.5 解析接続の方法

解析接続の方法を先のように関数要素を用いる以外にもある。

実関数での無限級数展開

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots$$

から自然に複素数に拡張すれば

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots$$

となる。これは単純に実変数  $x$  を複素数  $z$  に変換しているだけであるが解析関数を得る方法としては実は有効である。前節の内容から  $e^z$  を定義するのに 2 つの正則関数があり実軸上で

$$f_1(x) = f_2(x)$$

であれば、あらゆる複素平面で一致の定理から

$$f_1(z) = f_2(z)$$

となる。これから次のシュヴァルツの鏡像定理が導ける。

実軸に関して対称な 2 つの領域  $D_1$  と  $D_2$  が図のようにあり、実軸上の線分  $\Gamma$  を境界の一部として共通に持つとする。

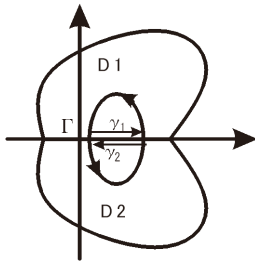


図 7.6: シュヴァルツの鏡像定理

実軸上の線分  $\Gamma$  上で常に実数値をとる関数  $f_1(z)$  が領域  $D_1$  で正則かつ  $D_1 + \Gamma$  で連続ならば  $z \in D$  に対して解析接続された関数  $F(z)$  が

$$F(z) = f_1(z)$$

であるから  $F(z)$  は  $D_1$  で正則である。

実軸上の線分  $\Gamma$  上で常に実数値をとる関数  $f_1(z)$  が領域  $D_1$  で正則かつ  $D_1 + \Gamma$  で連続ならば、点  $z \in D_2 + \Gamma$ , つまり  $\bar{z} \in D_1 + \Gamma$  に対して

$$f_2(z) = \overline{f_1(\bar{z})}$$

とおく、 $z \in D_2$  に対しては  $F(z) = f_2(z)$  かつ、 $\bar{z} \in D_1$  であるので

$$\begin{aligned} \frac{dF(z)}{dz} &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f_2(z + \Delta z) - f_2(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\overline{f_1(\bar{z} + \overline{\Delta z})} - \overline{f_1(\bar{z})}}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left( \frac{f_1(\bar{z} + \overline{\Delta z}) - f_1(\bar{z})}{\overline{\Delta z}} \right) = \overline{f_1'(\bar{z})} \end{aligned}$$

となるので、 $F(z)$  は  $D_2$  でも正則である。後は  $\Gamma$  での正則性が示せばいい。

これは図のように領域  $D_1 + D_2$  内に境界  $\Gamma$  の任意の部分  $\gamma_1 = -\gamma_2$  を囲む任意の閉曲線  $C_1 + C_2$  をとると  $x$  軸上で上下 2 つに分割して

$$\oint_{C_1 + C_2} F(z) dz = \oint_{C_1 + \gamma_1} F(z) dz + \oint_{C_2 + \gamma_2} F(z) dz$$

が一般的に成り立つ。

まず、第 1 項について境界  $\gamma_1$  を領域  $D_1$  内に微小  $\delta$  だけずらし、図のような経路を考えれば

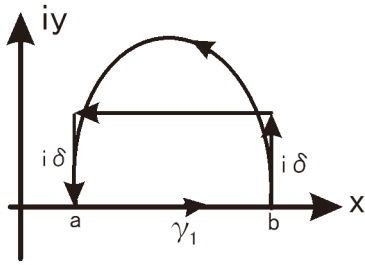


図 7.7: 領域  $D_1$  内へ、 $i\delta$  だけ迂回する。

$$\begin{aligned} \oint_{C_1+\gamma_1} F(z)dz &= \left( \int_b^{b+i\delta} + \int_{b+i\delta}^{a+i\delta} + \int_{a+i\delta}^a + \int_{\gamma_1} \right) F(z)dz \\ &= \int_a^b [f_1(x) - f_1(x+i\delta)] dx + i \int_0^\delta [f_1(b+iy) - f_1(a+iy)] dy \end{aligned}$$

となるが、これで極限  $\delta \rightarrow 0$  をとると第 1、第 2 項共に 0 に近づく。よって

$$\oint_{C_1+\gamma_1} F(z)dz = 0$$

となる。下半分についても同様の操作で

$$\oint_{C_2+\gamma_2} F(z)dz = 0$$

が成り立つ。結局

$$\oint_{C_1+C_2} F(z)dz = 0$$

がかなり、強い意味（虚、実成分共に 0）でいえたことになる。

これからモレラの定理式 5.24 から  $F(z)$  は領域  $D_1 + \Gamma + D_2$  で正則である。

よって実軸上の線分  $\Gamma$  上で常に実数値をとる関数  $f_1(z)$  が領域  $D_1$  で正則かつ  $D_1 + \Gamma$  で連続ならば、点  $z \in D_2 + \Gamma$ , つまり  $\bar{z} \in D_1 + \Gamma$  に対して

$$f_2(z) = \overline{f_1(\bar{z})}$$

とおくことで  $f_1$  は  $\Gamma$  をこえて対称領域  $D_2$  へ解析接続されることになり、鏡像定理が示された。

## 7.6 具体例

例えば次の無限等比級数は  $|z| > 1$  では発散する。

$$P(z; 0) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \dots$$

しかし、 $|z| < 1$  では次の  $F(z)$  に収束する。

$$F(z) = -1/(z-1)$$

よって  $F(z)$  が 1 位の極 1 を除いて全平面で正則なので  $P(z; 0)$  は全平面に解析接続できる。

そこで  $|z| < 1$  では単位円の内側で収束し、正則になるので次の公式

$$\int_0^\infty t^n e^{-t} dt = n!$$

を使うと、

$$P(z;0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int_0^{\infty} t^n e^{-t} dt = G(z)$$

とすると、指数関数の定義から

$$G(z) = \int_0^{\infty} e^z e^{-t} dt = \int_0^{\infty} e^{(z-1)t} dt$$

となり、これは  $Re[z] < 1$  に対して収束するから、単位円内から拡大領域  $D$  への  $P(z;0)$  の解析接続が積分表示の  $G(z)$  で与えられたことになる。これから次節の  $\Gamma$  関数が導ける。

次に 2 価の場合のリーマン葉の例として

$$z = w^{1/2} = \sqrt{w}$$

を考えてみよう。  $w$  の 1 つの値  $\rho e^{i\phi}$  ( $-\pi < \phi \leq \pi$ ) に対しては

$$z_0 = \sqrt{\rho} e^{i\phi/2}, \quad z_1 = \sqrt{\rho} e^{i(\phi/2+\pi)} = -z_0$$

の 2 つがある。これを次のような分岐で考えると、1 価のようにみなすことができる。  
 $w$  平面を主値 ( $-\pi < \phi \leq \pi$ ) を偏角とする  $\Pi_0$  と、同じ偏角を主値とする  $\Pi_1$  を図のように用意する。

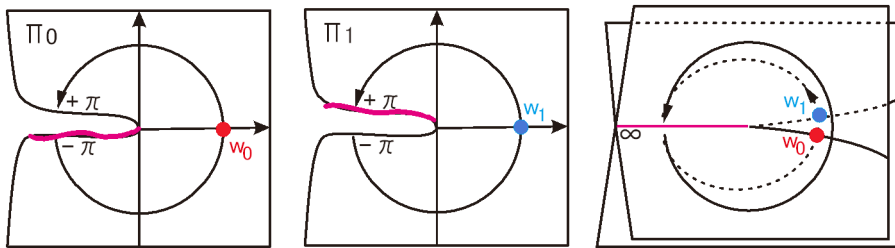


図 7.8:  $z = \sqrt{w}$  のリーマン葉

この 2 枚を実軸の負領域に切れ込みを入れ、図の赤い部分で張り合わせる。

そして規則として偏角が  $+\pi$  まで進むと異なる葉に写るとすればいい。

これにより、2 価であった  $w_1, w_2$  は  $4\pi$  の回転で重なることはない。ただし、 $w$  の偏角について  $\text{mod } 4\pi$  で同値になる。これにより  $w = z^2$  の  $z$  平面について 1 対 1 の対応がつけられた。

ただし、切れ込みをいれる場所は偏角をとる原点から任意の角度  $\alpha$  でかまわない。  $n$  位の分岐であれば

$$\alpha \leq \phi < \alpha + 2n\pi; \quad (\text{mod } 2n\pi)$$

である。

次に

$$w = f(z) = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right) \tag{7.9}$$

のリーマン葉を考えてみよう。変形し、

$$2wz - z^2 - 1 = 0$$

$$(z - w)^2 = w^2 - 1$$

これからまず、逆関数を求めると複素数であるから  $\pm$  はとれて、

$$z = f^{-1}(w) = w + \sqrt{w^2 - 1}$$

よって  $w$  のリーマン面は  $\pm 1$  を 2 位の分岐とする 2 葉構造になる。区間  $[-1, +1]$  に切断が入る。  
この関数は

$$w = f(z) = f(1/z)$$

を満たすから前節 3.18 でみたように単位円の反転になっているから、ここでは単位円の外部のみをみれば十分である。

$$z = re^{i\theta}, w = u + iv$$

とすると 7.9 から

$$u = \frac{1}{2} \left( r + \frac{1}{r} \right) \cos \theta$$

$$v = \frac{1}{2} \left( r - \frac{1}{r} \right) \sin \theta$$

となるので  $z$  平面で  $r = r_0$  の円が  $w$  平面では

$$\frac{u^2}{(r_0 + 1/r_0)^2} + \frac{v^2}{(r_0 - 1/r_0)^2} = \frac{1}{4}$$

に写像され、 $z$  平面で  $\theta = \theta_0$  の直線が  $w$  平面では

$$\frac{u^2}{\cos^2 \theta_0} + \frac{v^2}{\sin^2 \theta_0} = 1$$

に写される。特に興味ある点は  $z$  平面で  $r = 1$  の単位円は  $w$  平面では実軸上の点

$$(u, v) = (\cos \theta, 0) \quad |u| \leq 1$$

に写されることである。この写された直線と円は位相同型ではない。

複素平面上の回転が実軸に移されるこの変換は物理上重要な役割をする可能性がある。

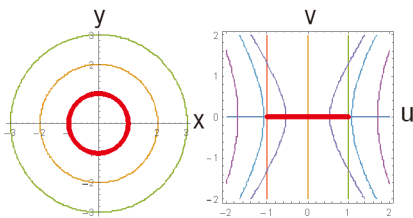


図 7.9: 円周を実軸に写す

## 7.7 ガンマ関数

次を解析接続して得られる関数  $\Gamma(z)$  をガンマ関数という。

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \quad (\operatorname{Re}[z] > 0) \quad (7.10)$$

定義は

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^z n!}{\prod_{k=0}^n (z+k)} \quad (7.11)$$

である。  $Re[z] = a > 0$  の時、

$$\left| \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \right| \leq \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt < \infty \quad (7.12)$$

だから領域  $D_0 : Re[z] > 0$  で収束し、

$$\Gamma(z)' = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} \log t dt \quad (7.13)$$

も領域  $D_0 : Re[z] > 0$  で収束するから  $\Gamma(z)$  は  $D_0$  で正則である。よって部分積分をすると

$$\Gamma(z) = \left[ \frac{1}{z} t^z e^{-t} \right]_0^\infty + \frac{1}{z} \int_0^\infty t^z e^{-t} dt \quad (7.14)$$

$$= \frac{1}{z} \int_0^\infty t^z e^{-t} dt \quad (7.15)$$

となることから次のガンマ関数の公式が得られる。

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad (7.16)$$

となるからこれを繰り返し作用させて

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n-1)} \Gamma(z+n) \quad (7.17)$$

を得る。よって  $\Gamma(z)$  は次の図のように  $z = 0, -1, -2, \dots$  に 1 位の極を持ち、それ以外で正則な関数である。

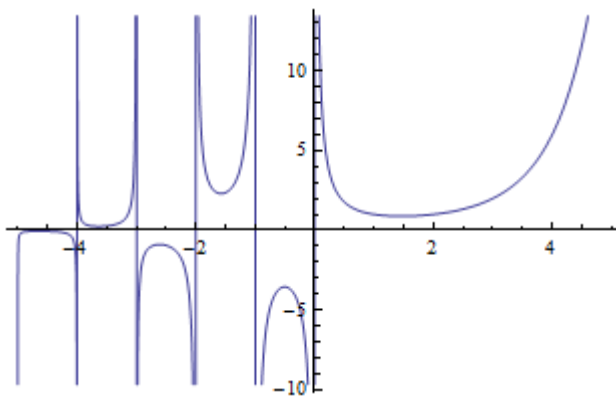


図 7.10: ガンマ関数  $z=-5$  から 5 を描いている。

特に  $z = 1$  とすると次のように階乗の定義式が得られる。

$$\Gamma(n+1) = n! \quad (7.18)$$

次に  $C$  を考えてみよう。改めて積分路を  $L$  として

$$\Gamma(z) = \int_L t^{z-1} e^{-t} dt \quad (7.19)$$

を考える。被積分関数は  $z$  の 1 価正則関数でかつ積分  $\Gamma(z)$  は一様に収束する。よって  $\Gamma(z)$  は全ての  $z$  に対して 1 価正則な関数である。  $t = re^{i\phi}$  とおくと

$$t^{z-1} = r^{z-1} e^{i\phi(z-1)} = e^{(z-1)(\log r + i\phi)} \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi \quad (7.20)$$

なので被積分関数を

$$\begin{aligned} F(t) &= e^{-t} t^{z-1} \\ &= e^{-r e^{i\phi}} e^{(z-1)(\log r + i\phi)} \end{aligned} \quad (7.21)$$

とおくと例えば  $\phi = 0$  では

$$F(r) = e^{-r} r^{z-1} \quad (7.22)$$

となることから図のように正の実軸上で切断を持つ。

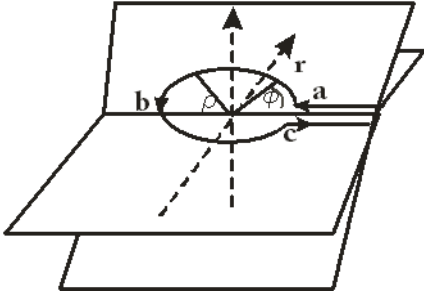


図 7.11: 実軸の正の部分に切り込みを入れて複素面をつなぐ

そこで積分路  $L$  を半径  $\rho$  の円周路と直線路にわけ次のように積分する

$$I(z) = \left( \int_{\infty}^a + \int_{abc} + \int_c^{\infty} \right) F(t) dt \quad (7.23)$$

この積分をまず、 $Re[z] > 0$  として計算すると第 1 項については

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\infty}^a F(t) dt = \int_{\infty}^0 e^{-r} r^{z-1} dr = -\Gamma(z) \quad (7.24)$$

である。第 3 項については  $\phi = 2\pi$  なので式 7.21 から

$$F(r) = e^{-r e^{i\phi}} e^{(z-1)(\log r + i\phi)} = e^{2\pi iz} e^{-r} r^{(z-1) \log r} \quad (7.25)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_c^{\infty} F(t) dt = e^{2\pi iz} \int_0^{\infty} e^{-r} r^{z-1} dr = e^{2\pi iz} \Gamma(z) \quad (7.26)$$

第 2 項については  $\rho$  は定数なので式 7.21 から  $dt = -i\rho e^{i\phi} d\phi$  といけるから

$$\begin{aligned} \int_{abc} F(t) dt &= i\rho e^{(z-1) \log \rho} \int_0^{2\pi} e^{-\rho e^{i\phi}} e^{i\phi} d\phi \\ &= i\rho^z \int_0^{2\pi} e^{-\rho e^{i\phi}} e^{i\phi} d\phi \end{aligned}$$

$Re[z] > 0$  としてるからこの値は  $\rho \rightarrow 0$  で 0 に近づく。よって

$$\begin{aligned} F(z) &= (e^{2\pi iz} - 1) \Gamma(z) \\ &= (i \sin 2\pi z - \cos 2\pi z - 1) \Gamma(z) \\ &= (2i \sin \pi z \cos \pi z - 2 \sin^2 \pi z) \Gamma(z) \\ &= 2i e^{i\pi z} \sin \pi z \Gamma(z) \end{aligned}$$



を得る。これからガンマ関数の複素積分表示として

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-i\pi z}}{2i \sin \pi z} \int_L t^{z-1} e^{-t} dt \quad (7.27)$$

となる。これから

$$t = \frac{x}{1+x} \quad (7.28)$$

で変数変換するとベータ関数である  $B$  が得られる。

$$\begin{aligned} B(\alpha, \beta) &= \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt \\ &= \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^{\alpha-1}} \frac{1}{(1+x)^{\beta-1}} dx \\ &= \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}} dx \end{aligned}$$

この積分は  $Re[\alpha] > 1, Re[\beta] > 1$  で意味をもつ。

## 7.8 誤差関数

確率関数で登場したガウス関数は次のように表すことができた。標準偏差を  $\sigma$ 、平均値を  $\mu$  として

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

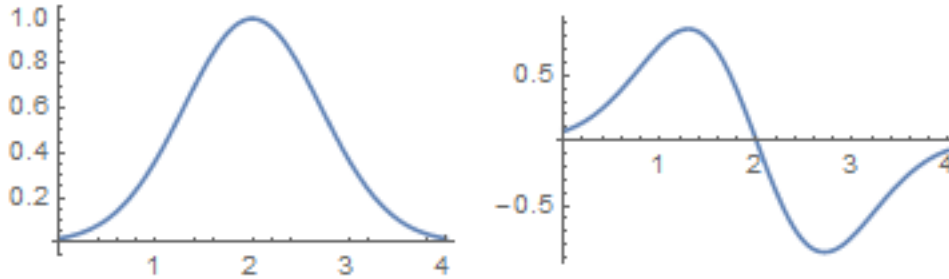


図 7.12: ガウス分布とその微分

この関数はよく知られている正規分布を表し、 $-\infty \leq x \leq +\infty$  で 1 になるように規格化する。特に  $\mu = 0, \sigma = 1$  とすると次のように規格化された関数が定義できる。

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

この関数を区間  $[0, x]$  で積分したものを次のように定義する。

$$Ef(x) = \int_0^x N(t) dt$$

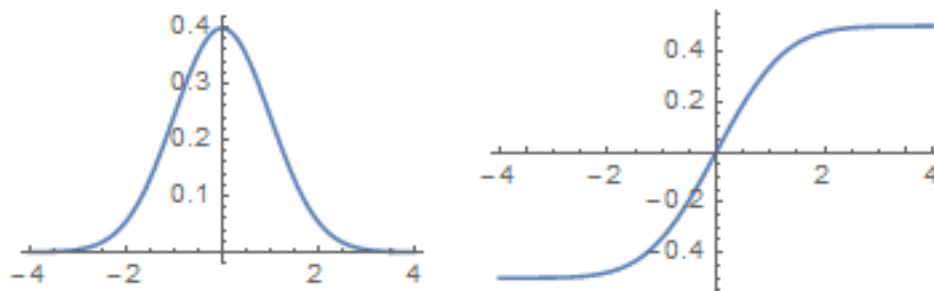


図 7.13: 規格化されたガウス分布関数とその積分

誤差関数 (error function) は次のように定義すると

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

先の積分は

$$E f(x) = \frac{1}{2} \operatorname{erf}(x/\sqrt{2})$$

で表すことができる。

さらに相補誤差関数を次のように定義する。

$$\begin{aligned} \operatorname{erfc}(x) &= 1 - \operatorname{erf}(x) \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt = e^{-x^2} \operatorname{erfc}(x) \end{aligned}$$

次のように誤差関数は奇関数である。

$$\operatorname{erf}(-z) = -\operatorname{erf}(z)$$

また、複素共役について

$$\operatorname{erf}(z^*) = \operatorname{erf}(z)^*$$

が成り立つ。

前節で紹介したガンマ関数を用いても誤差関数は表すことができる。

$$\begin{aligned} \operatorname{erf}(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}, x^2\right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)} \end{aligned}$$

具体的に 2 価の場合を見てみよう。

$$w = \sqrt{z}$$

を考えると、複素平面上で

$$\begin{aligned} z &= \rho e^{i\phi} \\ (-\pi < \phi \leq \pi) \end{aligned}$$

に対して次の 2 つの分岐をする。2 つの葉を  $\Pi_0, \Pi_1$  として

$$\Pi_0 : w_0 = \sqrt{\rho} e^{i\phi/2}$$

$$\Pi_1 : -w_0 = \sqrt{\rho} e^{i\phi/2 \pm i\pi}$$

## 8 フーリエ解析

物理学で、フーリエ解析は古くから基礎、応用面で共に最も多く利用されている。

ここでは文献 [123] の黒田氏の関数解析の立場からの導入を紹介する。

古い文献であるが、基本的なところからフーリエ解析の重要点をおさえていく切り口は今も尚、貴重な教育内容をもっている。

### 8.1 フーリエ級数 [123]

まず閉区間  $[-\pi, \pi]$  上の関数  $f(\theta)$  を複素形三角級数

$$f(\theta) \sim \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in\theta} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\phi) e^{-in\phi} d\phi$$

に展開するのが Fourier 級数の問題である。これは

$$\theta \rightarrow e^{i\theta}$$

という対応によって  $[-\pi, \pi]$  を複素平面の単位円に対応させ、 $f$  を単位円上の関数とみることでもある。

そこで右辺を見ると、この積分は  $f$  が  $[-\pi, \pi]$  上の可積分関数であれば収束する。

任意の  $f \in L^1(-\pi, \pi)$  に対して

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$$

とにおいて、この  $a_n$  を  $f$  の Fourier 係数という。

#### 8.1.1 正規直交関数系 [57]

ある関数  $f(x), g(x)$  がある区間  $[a, b]$  で定義されて、複素共役を  $\overline{g(x)}$  とすると

$$(f, g) \equiv \int_a^b f(x) \overline{g(x)} \rho(x) dx = 0$$

が成り立つ時、関数  $f(x), g(x)$  は重み  $\rho(x)$  に関して直交するという。また、 $(f, g)$  は内積という。

ただし、 $\rho(x)$  は重み関数である。

これから区間  $[a, b]$  で定義された関数形

$$\{u_j(x)\}, (j = 1, 2 \dots)$$

に対して、2つの関数は自分以外どれとも直交するとき、

$$(u_j, u_k) = \int_a^b u_j(x) \overline{u_k(x)} \rho(x) dx = 0, (j \neq k)$$

関数系  $\{u_j(x)\}$  は重み  $\rho(x)$  に関して直交関数形 (orthogonal system functions) であるという。

この時、次のように  $u_j$  のノルム (norm) を定義できる。

$$\|u_j\| = \sqrt{(u_j, u_j)} = \sqrt{\int_a^b |u_j(x)|^2 \rho(x) dx}$$

また、 $\rho(x) = 1$  ととればこれを正規直交系 (orthonormal system functions) といい、

$$(u_j, u_k) = \delta_{jk}$$

これは例えば3次元のベクトル

$$\mathbf{a} = c_1 \mathbf{e}_1 + c_2 \mathbf{e}_2 + c_3 \mathbf{e}_3$$

と正規直行基底  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  で表せば

$$|\mathbf{a}|^2 = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2$$

が得られることを意味する。この値はスカラーであり、基底に依存しない点が重要で、直交関数系はこれを無限次元まで拡張できるピタゴラスの定理の無限版ともおいえる。また、正規直交系であればそれらの関数を足し合わせて、様々な関数をつくることができる。

そして、エントロピーが一定の場合のように合成関数から、直交関数の係数を逆に求めることができる。

### 8.1.2 三角関数展開

フーリエ級数はまず、はじめに有限区間の周期関数を考える。これを次のように奇関数、偶関数の和で表す。周期区間を  $-\pi < x < \pi$  とし、 $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  とし

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (8.1)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (8.2)$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (8.3)$$

で表す。これは複素数を用いることで

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \quad (8.4)$$

$$f(x) = \sum_{n=0, \pm 1, \dots} c_n e^{inx}$$

と簡単に表すことができる。周期区間を  $-L < x < L$  とした場合は周期を  $2L$  にするために次のように置き換える。

$$x \rightarrow \frac{\pi}{L} x$$

これにより位相部分が

$$nx \rightarrow \frac{2n\pi}{2L} x$$

となるので波長（周期）が

$$\lambda = 2L$$

となる

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-in\pi x/L} dx \quad (8.5)$$

であり、 $f(x)$  が実数であれば係数  $a_n, b_n$  が実数なので

$$c_n^* = c_{-n}$$

の関係があり、次の直交条件を満たす。 $f(x) = e^{im\pi x/L}$

$$\frac{1}{2L} \int_{-L}^L e^{im\pi x/L} e^{-in\pi x/L} dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ 1 & (m = n) \end{cases} \quad (8.6)$$

従って、この周期性を部分的に見ることを許せば、フーリエ級数はほぼ関数の完全性を持つので関数を再現できる。

例えば次のように定義域を開区間に限定して、単純な1次関数を考えよう。

$$f(x) = x \quad (-\pi < x < \pi)$$

これは奇関数であるので式 8.1 を用いて部分積分を使うと、 $n = 1, 2, \dots$  として

$$\begin{aligned} b^n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \sin(nx) dx \\ &= -\frac{2}{\pi} \left[ \frac{x \cos(nx)}{n} \right]_0^\pi + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos(nx)}{n} dx \\ &= -\frac{2}{\pi} \left( \frac{\pi \cos(n\pi)}{n} - \frac{0}{n} \right) \\ &= \frac{2}{n} (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

となるので式 8.3 より、 $a_0 = 0$  だから

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \sin nx) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2}{n} (-1)^{n+1} \sin nx \right)$$

となる。これを  $n = 50$  で図示すると次のようになる。

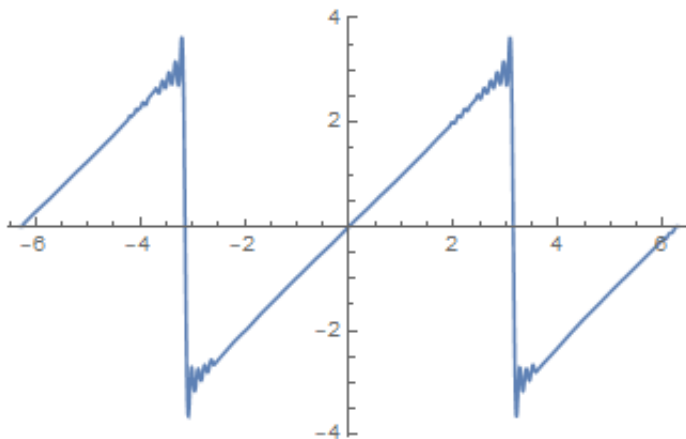


図 8.1:  $f(x) = x$  のフーリエ級数

周期関数であるが、 $-\pi < x < \pi$  の区間で  $f(x) = x$  を再現している。 $n \rightarrow \infty$  とすれば

$$f(x) = x$$

に近づくだろう。しかし、よくみると定義域の両端では激しい振動がみられ、これを Gibbs 現象という。次で考察する。

## 8.2 Gibbs 現象

フーリエ級数がどれくらいもとの関数を再現するかを見るために次のような不連続の関数を考えよう。元の関数がなめらかな連続関数であれば足し合わせを多くとればフーリエ級数は元の関数を再現していくことができる。

そこで境界付近に注目し、次のような不連続な関数を考える。

$$g(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -0} g(x) = g(-0) = -\frac{\pi}{4} & (-\pi < x < 0) \\ \lim_{x \rightarrow +0} g(x) = g(+0) = \frac{\pi}{4} & (0 < x < \pi) \end{cases} \quad (8.7)$$

この時不連続点の相加平均をとると

$$(g(+0) + g(-0)) / 2 = 0$$

である。一般に不連続点上のフーリエ級数の値は+, -側から近づけた極限値の相加平均になる。級数は奇関数なので  $a_n = 0$  とできるので

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\pi}{4} dx - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \frac{\pi}{4} dx = 0$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g(x) \sin nx dx = \frac{1}{2} \frac{1 - (-1)^n}{n}$$

$$\begin{aligned} g_n(x) &= 0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n} \sin nx \\ &= \frac{2}{2} \left( \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \dots \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} \end{aligned} \quad (8.8)$$

と奇数を用いて表すことができる。下図に  $n = 3, n = 10$  の場合のグラフを示す。

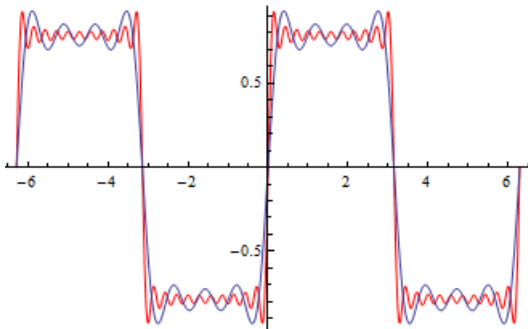


図 8.2:  $g_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$  のグラフ赤は  $n=10$ 、青は  $n=3$

グラフを見ると不連続点の付近にこのようなものが  $n$  を大きくしても残ることがわかる。これは仮に  $N \rightarrow \infty$  としても消えない。

この現象が **Gibbs 現象** である。この不連続点をのぞけばフーリエ級数は区間内の  $x$  の値に無関係で

$$|g(x) - g_n(x)| < \epsilon$$

とする正の定数  $\epsilon$  を  $n > N$  でとることができ、この時、フーリエ級数は区間内で一様収束する。

さらにこれを解析的に考えると興味ある結果が得られる。 $z = re^{i\theta}$  を複素数として

$$\log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots$$

と展開できたから

$$\log(1 + e^{i\theta}) = e^{i\theta} - \frac{e^{2i\theta}}{2} + \frac{e^{3i\theta}}{3} - \dots$$

さらにド・モアブルの公式  $e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$  だから虚数部分は

$$\operatorname{Im} \log(1 + e^{i\theta}) = \sin \theta - \frac{\sin 2\theta}{2} + \frac{\sin 3\theta}{3} - \dots$$

よって、式 8.8 を用いて

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \frac{1}{2} \{ \log(1 + e^{i\theta}) - \log(1 - e^{i\theta}) \} &= \sin \theta + \frac{\sin 3\theta}{3} + \frac{\sin 5\theta}{5} + \dots \\ &= g_\infty(\theta) \end{aligned} \quad (8.9)$$

と表すことができる。さらに、次のように複素数の対数をとると虚成分が偏角、実成分が大きさになる。

$$\begin{aligned} \log r e^{i\theta} &= \log r + \log e^{i\theta} \\ &= \log r + i\theta \\ &= \log |z| + i \arg z \end{aligned}$$

ただし、

$$\arg z = \theta$$

である。よって、8.9 から極限值  $g_\infty(\theta)$  は虚成分のみだから次の偏角で与えられる。

$$\begin{aligned} g_\infty(\theta) &= \operatorname{Im} \frac{1}{2} \{ \log(1 + e^{i\theta}) - \log(1 - e^{i\theta}) \} \\ &= \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{2} \log \frac{1 + e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}} \right\} \\ &= \arg \left( \frac{1}{2} \log \frac{1 + e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}} \right) \end{aligned}$$

これは実際に次の図のようにガウス平面をつくれば  $e^{i\theta}$  は単位円上の点だから  $(1 + e^{i\theta})$  の偏角は図のように  $e^{i\theta}$  の対蹠点から

$(1, 0)$  へ向かうベクトルの偏角に等しい。従って図から

$$\arg \log(1 + e^{i\theta}) = \alpha$$

$$\arg \log(1 - e^{i\theta}) = \beta$$

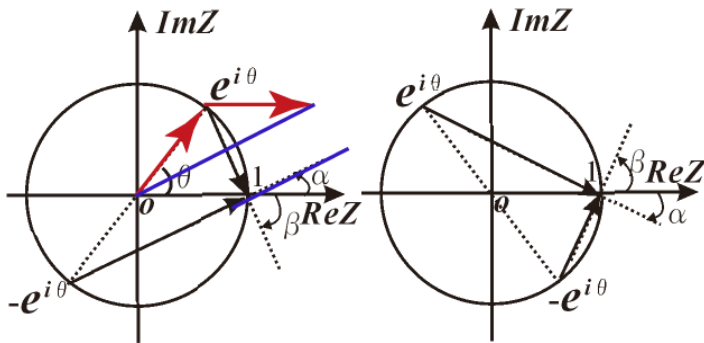


図 8.3: 複素平面上で、 $1 + e^{i\theta}$  の偏角の作図

また、直径に対する円周角が  $\pi/2$  だから

$$\begin{cases} \alpha - \beta = \frac{\pi}{2} & (0 < \theta < \pi) \\ \alpha - \beta = -\frac{\pi}{2} & (-\pi < \theta < 0) \end{cases}$$

式 8.9 から

$$g_{\infty}(\theta) = \begin{cases} \frac{\pi}{4} & (0 < \theta < \pi) \\ -\frac{\pi}{4} & (-\pi < \theta < 0) \end{cases}$$

となるので式 8.7 を再現している。ただし、 $\theta = \pi, 0$  のところでは図の三角形そのものがつくれないことがわかる。

この境界付近の不連続性（角部分と呼ぶことにする）を考えるために式 8.8 を次のように書き換える。

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}g(x) \\ g(x) &= \lim_{N \rightarrow \infty} g_N(x) \end{aligned} \tag{8.10}$$

つまり、

$$g_N(x) = \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots + \frac{\sin(2N-1)x}{2N-1}$$

とおく、この最大値を知るために微分すると

$$g'_N(x) = \cos x + \cos 3x + \cdots + \cos(2N-1)x$$

となる。複素数を用いて等比数列の和の公式から

$$\begin{aligned} g'_N(x) &= \operatorname{Re} \left[ e^{ix} + e^{3ix} + \cdots + e^{(2N-1)ix} \right] = \operatorname{Re} \left[ e^{ix} \left( 1 + e^{2ix} + \cdots + e^{2(N-1)ix} \right) \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[ e^{ix} \frac{1 - e^{2Nix}}{1 - e^{2ix}} \right] = \operatorname{Re} \left[ \frac{e^{ix}(1 - e^{2Nix})(1 - e^{-2ix})}{(1 - e^{2ix})(1 - e^{-2ix})} \right] \\ &= \frac{-2 \sin x}{(1 - e^{2ix})(1 - e^{-2ix})} \operatorname{Im} (1 - e^{2Nix}) \\ &= \frac{-2 \sin x}{(1 - e^{2ix})(1 - e^{-2ix})} \sin 2Nx \end{aligned}$$

よって  $g'_N(x) = 0$  となるのは

$$x = n\pi, \frac{n\pi}{2N}$$

である。そこで  $x = 0$  の両側の角部分の大きさを求めると

$$0 = \sin 2Nx$$

において  $x = 0$  以外の最小の  $x$  は  $n = \pm 1$  の時で、

$$x = \pm \frac{\pi}{2N}$$

この時の  $g_N(x)$  の最大、最小を  $g_N^{\pm}$  として

$$\begin{aligned} g_N^{\pm} &= \pm \left( \sin \frac{\pi}{2N} + \frac{\sin \frac{3\pi}{2N}}{3} + \cdots + \frac{\sin \frac{(2N-1)\pi}{2N}}{2N-1} \right) \\ &= \pm \frac{\pi}{2N} \left( \frac{\sin \frac{\pi}{2N}}{\frac{\pi}{2N}} + \frac{\sin \frac{3\pi}{2N}}{\frac{3\pi}{2N}} + \cdots + \frac{\sin \frac{(2N-1)\pi}{2N}}{\frac{(2N-1)\pi}{2N}} \right) \end{aligned}$$



と変形して、

$$\Delta = \frac{\pi}{2N}, \quad sh(y) = \frac{\sin y}{y}$$

とおくと

$$g_N^\pm = \pm \Delta \sum_{k=1}^N sh((2k-1)\Delta) = \pm \frac{1}{2} 2\Delta \sum_{k=1}^N sh((2k-1)\Delta)$$

よって式 8.10 から次を定義する。

$$g_\infty^\pm \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} g_N^\pm = \pm \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{\sin y}{y} dy \simeq \pm \frac{1}{2} \times 1.85$$

$$f_{max} = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} g_\infty^+ \simeq 1.09$$

$$f_{min} = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} g_\infty^- \simeq -0.09$$

$n$ を増やした時は下図のように角部分が直線的にのびる。この大きさは不連続の大きさで決まる。

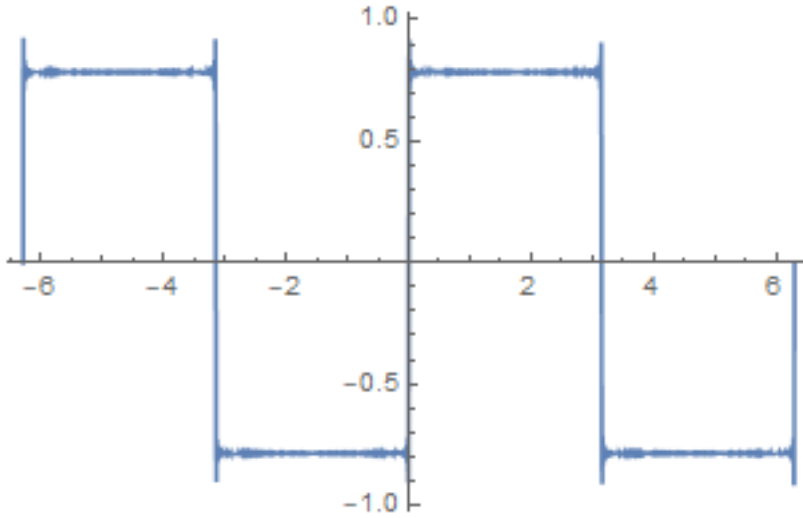


図 8.4:  $g_n = \sum_{n=1}^{nmax} \frac{\sin((2n-1)x)}{2n-1}$  のグラフ  $n = 200$

そこで、角部分の大きさを  $\beta$  とおくと、一般に

$$\begin{aligned} g_\infty^\pm &= \pm \frac{1}{2} \left\{ \int_0^\infty \frac{\sin y}{y} dy - \int_\pi^\infty \frac{\sin y}{y} dy \right\} \\ &= \pm \frac{1}{2} \left\{ \frac{\pi}{2} - \int_\pi^\infty \frac{\sin y}{y} dy \right\} \end{aligned}$$

として、不連続点の飛びの大きさを  $d$  として、

$$\begin{aligned} \beta &\equiv d(f_{max} - 1) = \frac{d}{2} + \frac{d}{\pi} \left( \frac{\pi}{2} - \int_\pi^\infty \frac{\sin y}{y} dy \right) - d \\ &= -\frac{d}{\pi} \int_\pi^\infty \frac{\sin y}{y} dy \end{aligned}$$

となる。今の場合は

$$\beta = 0.09$$

である。

この境界付近の考察は観測の問題としても第7部のスリット回折の時に考察をする。

### 8.3 留数定理

フーリエ級数に前節の留数の定理を使うと、無限和の計算が簡単にできる。  
例えば、次のように正負の領域にわけた奇数分数列を考える。

$$\sum_{m=0,1,2,\dots} \frac{(-1)^m}{2m+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots$$

$$\sum_{m=-1,-2,\dots} \frac{(-1)^m}{2m+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots$$

両者を加えて2で割ると

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots = \frac{1}{2} \sum_{m=0,\pm 1,\pm 2,\dots} \frac{(-1)^m}{2m+1}$$

となる。そこで  $z$  を複素数として、

$$\frac{1}{e^{i\pi z} + 1}$$

を考えると。これは  $z = n (n = \pm 1, \pm 3, \dots)$  のところで1位の極があるからド・ロピタルの定理から1階の微分をとり、留数は

$$\text{Res} \left[ \frac{1}{e^{i\pi z} + 1} \right] = \lim_{z \rightarrow n} \frac{z - n}{e^{i\pi z} + 1} = \lim_{z \rightarrow n} \frac{\frac{d}{dz}(z - n)}{\frac{d}{dz}(e^{i\pi z} + 1)} = \frac{1}{i\pi} \frac{1}{e^{in\pi}} = \frac{i}{\pi} \quad (8.11)$$

となる。この結果を利用する。さらに  $e^{i\pi m}$  の  $m$  に  $0, 1, 2, \dots$  を入れると、 $1, -1$  をくりかえし、 $e^{i\frac{\pi}{2}m}$  に入れると  $1, i, -1, -i$  を繰り返す。

0を通らない閉曲線、周期関数である。

留数定理を使うと任意の関数は式 6.3 から次のように展開できる。

$$f(z) = \frac{\text{Res}_m}{(z-a)^m} + \frac{\text{Res}_{m-1}}{(z-a)^{m-1}} + \dots + \frac{\text{Res}_2}{(z-a)^2} + \frac{\text{Res}_1}{z-a} + \tilde{f}(z)$$

ここで  $\tilde{f}(z)$  は  $m+n$  が正で極をもたない。  $z = a$  で正則であれば

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz = \text{Res}_1$$

となり、 $\text{Res}_1$  の項だけが積分で残る。

よって  $z = a$  のみを内部に含む閉曲線を  $C$  として下図のように  $z = \pm 1, \pm 3, \dots, \pm 2n - 1$  周りの反時計まわりの  $n$  個の閉曲線  $C_n$  を考える。

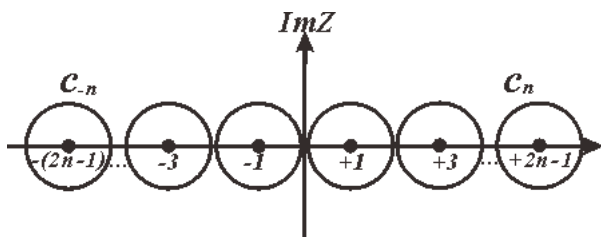


図 8.5: 連続した極のまわりの積分回路

ある関数が次のような級数に展開できる複素関数を作成してみよう。

$z = \pm 1, \pm 3, \dots, \pm 2n - 1$  のみが拾えるように  $i/z$  に先の  $\frac{1}{e^{i\pi z} + 1}$  をかけ、符号変化を考え、 $e^{i\frac{\pi}{2}z}$  をかけて次のようにおく。式 8.11 から  $i/\pi$  が留数なので  $2\pi i$  をかけて消せるようにさらに2で割っておく。

また、実数軸の正の領域さけの和になるように全体を2で割る。こうしておいてまず  $N$  を有限にして和をつくり、

最後に無限大にしていけばいい。

$$\begin{aligned}
 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots &= \frac{1}{2} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \int_{C_n} \frac{1}{2} \frac{i e^{i\frac{\pi}{2}z}}{z e^{i\pi z} + 1} dz \\
 &= \frac{1}{2} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \int_{C_n} \frac{1}{2} \frac{i e^{i\frac{\pi}{2}z}}{z e^{i\pi z} + 1} dz
 \end{aligned}$$

次にこの積分を考える。そのために上図の小円を次の図のように経路をつなげて大きな半円 2 つにわけると原点以外の特異点を積分路の外に出す。原点は上半円  $C_+$  に含ませる。

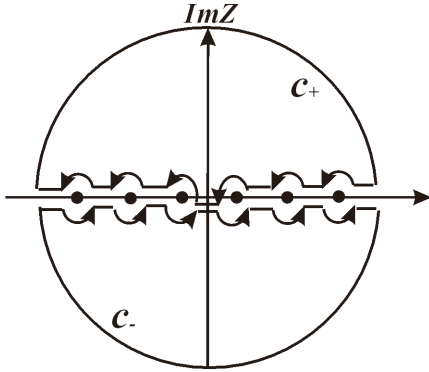


図 8.6: 上半円に原点を含ませる

したがって、周積分は上半円のみ値を持つ。しかし、小円の向きを反時計回りで維持させるためには上大円の向きが時計回りであることに注意して

$$\int_{C_+} \frac{1}{4} \frac{i e^{i\frac{\pi}{2}z}}{z e^{i\pi z} + 1} dz = \frac{i}{4} \frac{1}{2} 2\pi i [-e^{i \cdot 0}] = \frac{\pi}{4}$$

となる。

## 9 フーリエ変換 [115]

### 9.1 粗視化の作業

複素数に拡張し、指数関数を用いて、フーリエ級数は一般に  $2L$  の周期条件があれば係数を  $c_n$  として、

$$f(x) = \sum_{n=0, \pm 1, \pm 2, \dots} c_n e^{i \frac{n\pi}{L} x} \tag{9.1}$$

と表すことができた。この時の係数は

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L dy f(y) e^{-i \frac{n\pi}{L} y} \tag{9.2}$$

と自身の関数の周期内の積分で表すことができる。従って周期を  $2\pi$  とすると

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sum_{n=0, \pm 1, \pm 2, \dots} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dy f(y) e^{-iny} \right) e^{inx} \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} dy f(y) \left\{ \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0, \pm 1, \pm 2, \dots} e^{in(x-y)} \right\} \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} dy f(y) \Delta(x-y)
 \end{aligned}$$

となる。ただし、

$$\Delta(x-y) \equiv \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0, \pm 1, \pm 2, \dots} e^{in(x-y)}$$

である。これを粗視化区間として定義する。この区間を  $\Delta_{ij}$  として関数を

$$f_i = \sum_j \Delta_{ij} f_j$$

とかけば、 $\Delta_{ij} = \delta_{ij}$  のクロネッカーのデルタのようにふるまっていることがわかる。さらにパラメーター  $x, y$  を行列要素のように考えれば

$$\Delta(x-y) = \delta(x-y)$$

としてディラックのデルタ関数として扱うことができる。

つまり、次の図のように関数の区間をフラットな値でならしている。これが粗視化の作業に値する。

$$f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} dy \delta(x-y) f(y)$$

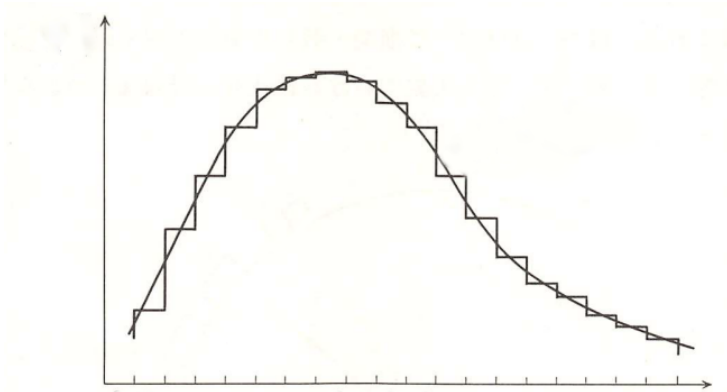


図 9.1: 区分局積の逆で、関数を粗視化区分にわけ

これは  $f(y) = 1$  として、まず次の有限領域を考える。

$$1 = \int_{-\pi}^{\pi} dy \delta(x-y)$$

これは次の図のように面積が 1 となる図形があればその形は問わない。この図形を  $\delta_R(x-y)$  としてここでは矩形を考える。

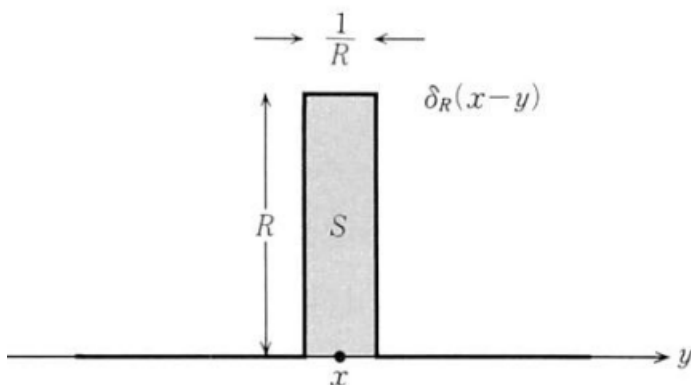


図 9.2: 文献 [115] より：面積 1 の矩形領域

しかし、ディラック  $\delta$  関数との間に次の関係があるとする。

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \delta_R(x - y) = \delta(x - y) \quad (9.3)$$

そこで  $\Delta(x)$  が偶関数であることから、次の級数で表す。

$$\Delta(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0, \pm 1, \pm 2, \dots} \cos nx = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} (\cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx) \quad (9.4)$$

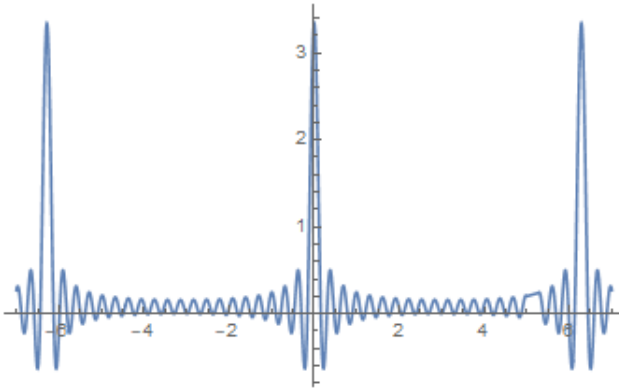


図 9.3:  $\Delta(x)$  のグラフ  $n = 20$  の場合

これにフーリエ級数展開を用いる。

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \Delta_R(x) \cos nx dx = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \frac{\sin(n/2R)}{n/2R} & (n \neq 0) \\ \frac{1}{\pi} & (n = 0) \end{cases}$$

となるので式 8.3 から、偶関数であるから  $b_n = 0$  として

$$\Delta_R(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n/2R)}{n/2R} \cos nx \quad (9.5)$$

となる。式 9.4 と異なって  $R$  が変数として残るが

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\sin(n/2R)}{n/2R} = 1$$

なので、 $R \rightarrow \infty$  とすれば式 9.3 から

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \Delta_R(x) = \sum_{n=0, \pm 1, \pm 2, \dots} \delta(x - 2n\pi) \quad (9.6)$$

となる。これは下図のように周期  $2\pi$  をもつデルタ関数になる。

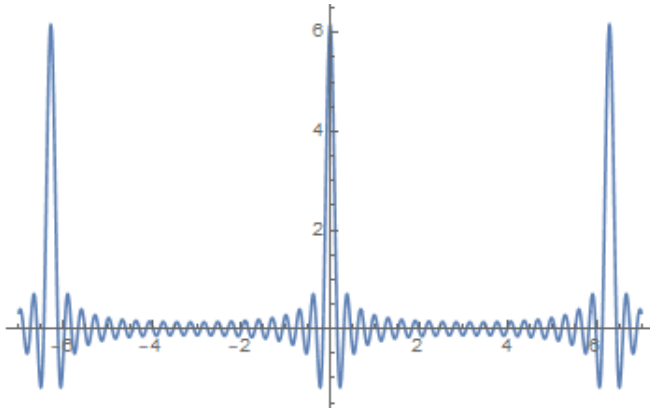


図 9.4:  $\Delta_R(x) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{n_{\max}} \frac{\sin(\frac{n}{2R})}{n/2R} \text{Cos}[nx]$  のグラフ  $n = 20, R = 10$  の場合

これは無限大まで足し合わせると次のような矩形型の連続周期関数になる。

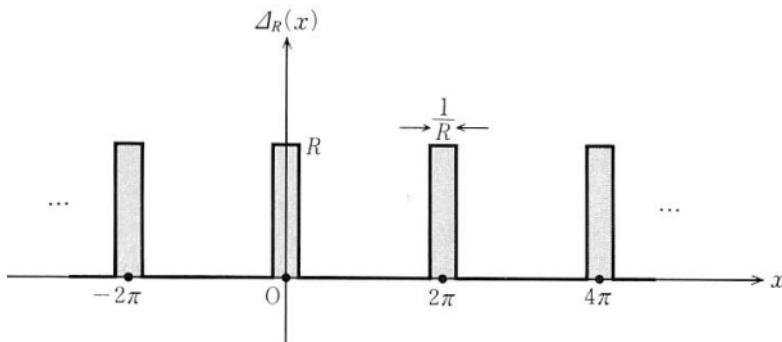


図 9.5: 文献 [115] より：矩形領域の周期関数

## 9.2 有限フーリエ変換

第 7 部でスリット解析として詳しく考察するが、式 9.2 は物理的に見ると反射平面波との合成による定常波の振幅を得ることとなり、観測の効果を考えることに等しくなる。

この意味でもフーリエ変換は物理の本質と深くかかわる内容が豊富にある。

ここで、式 9.1 と 9.2 を用いて、

$$\Delta\omega \equiv \frac{\pi}{L}, \omega_n = n\Delta\omega \quad (9.7)$$

とする。注意すべきは

$$\pi = L\Delta\omega \quad (9.8)$$

であり、 $\Delta\omega$  を回転とみると、回転を並進に変換させている。

フーリエ変換で、何を共通に相互変換させているかは重要だが、

この  $\pi$  という長さが重要な意味を持つ。 $L \rightarrow \infty$  の極限では

$$\lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \sum_{n=0, \pm 1, \pm 2, \dots} \Delta\omega e^{i\omega_n(x-y)} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega f(y) e^{i\omega(x-y)}$$

のように積分に変えることができるので

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega f(y) e^{i\omega(x-y)} \quad (9.9)$$

となる。そこで

$$F(\omega) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{-i\omega y} dy$$

を定義して、この  $F(\omega)$  を  $f(y)$  のフーリエ変換 (**Fourier transformation**) と呼ぶ。

また、 $F(\omega)$  は物理ではスペクトル関数と呼ぶこともある。

また、フーリエ逆変換 (**Fourier inverse transformation**) を次で定義する。

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{+i\omega x} d\omega$$

式 9.9 は積分値から元の関数を得る  $\delta$  関数の定義

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-y)f(y)dy$$

になっているので

$$\delta(x-y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(x-y)} d\omega$$

と逆に  $\delta$  関数が定義できる。

1 周期を  $-L \sim L$  に変換することも見ておこう。式 9.6 を次のように変形し

$$\Delta(x-y) = \sum_{n=0, \pm 2, \pm 4, \dots} \delta(x-y-nx) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0, \pm 2, \pm 4, \dots} e^{in(x-y)}$$

さらに変数変換を

$$x = \frac{\pi}{L}x', y = \frac{\pi}{L}y'$$

とすると、前節から周期性をもったフーリエ級数でおけて、

$$\begin{aligned} \sum_{n=0, \pm 2, \pm 4, \dots} \delta\left(\frac{\pi}{L}(x'-y') - n\pi\right) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0, \pm 2, \pm 4, \dots} e^{i\frac{n\pi}{L}(x'-y')} \\ &= \frac{L}{2\pi^2} \frac{\pi}{L} \sum_{n=0, \pm 2, \pm 4, \dots} e^{i\frac{n\pi}{L}(x'-y')} \end{aligned}$$

これで 1 周期は  $-L < x' < L$  ととれた、ここで  $L/\pi$  で割り、その後で  $L \rightarrow \infty$  とすると式 9.7 が使える形式にできて、

$$\begin{aligned} \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\pi}{L} \sum_{n=0, \pm 2, \pm 4, \dots} \delta\left(\frac{\pi}{L}(x'-y') - n\pi\right) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(x'-y')} d\omega \\ &= D(x'-y') \end{aligned}$$

である。左辺の  $L \rightarrow \infty$  は  $n \neq 0$  の時では値をもたない。  $n = 0$  の時に有効になる。

これはディラックのデルタ関数の持つ性質で、  $n = 0$  以外では何をかけても 0 である。

さらに  $n = 0$  の場合は  $\pi/L = a$  とすれば

$$a\delta(ax) = \delta(x)$$

が成り立つ。これは例えば次のように  $g(x)$  掛けて積分すると  $ax = y$  で変数変換し、左辺から

$$\int_{-\infty}^{\infty} a\delta(ax)g(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y)g\left(\frac{y}{a}\right)dy = g(0)$$

右辺は

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)g(x)dx = g(0)$$

になる。

よって、左辺は

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\pi}{L} \sum_{n=0, \pm 2, \pm 4, \dots} \delta \left( \frac{\pi}{L} (x' - y') - n\pi \right) \Big|_{n=0} = \delta(x' - y') \quad (9.10)$$

である。結局

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} d\omega \quad (9.11)$$

となる。つまり、フーリエ変換はフーリエ級数の1周期を無限化する。 $-L < x' < L$ を

$$L \rightarrow \infty$$

に拡大し、1周期以外の部分は潰れてしまってみえない。

第7部で有限フーリエ変換を考えるがここで9.11を $d$ まででカットオフした次を定義する。

$$D_d(x) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-d}^d e^{i\omega x} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^d \cos \omega x d\omega = \frac{1}{\pi} \frac{\sin dx}{x} \quad (9.12)$$

積分変数が変換され残っている。これは関数1を有限区間でフーリエ変換したことに等しい。

これを有限フーリエ変換と呼ぶことにする。

後の第7部で重要な役割をする。第7部でのスリット回折で見ると有限スリットでの強度分布に対応している。

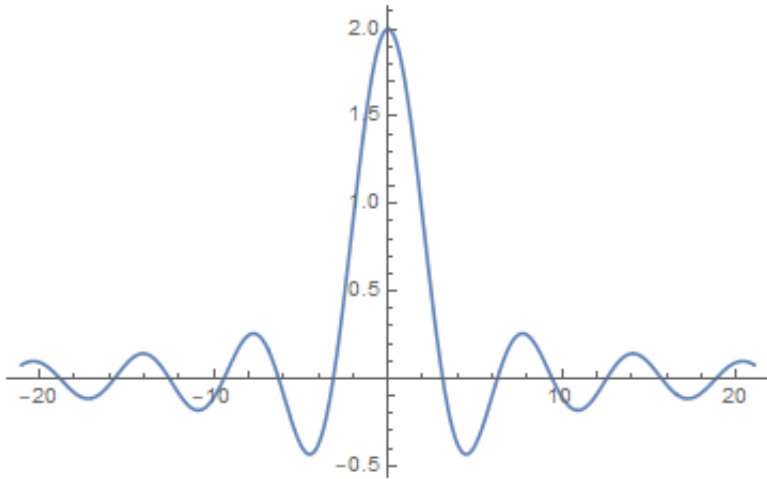


図 9.6:  $\frac{2 \sin x}{x}$  のグラフ

有限のフーリエ変換はこの結果のように  $x = 0$  に波源を持つ球面波とみることができる。

これに適当な関数を掛けて  $x = 0$  を迂回して次のように  $d \rightarrow \infty$  で積分する。

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin dx}{x} g(x) dx = \int_{-\infty}^{-\delta} \sin dx \frac{g(x)}{\pi x} dx + \int_{-\delta}^{\delta} \sin dx \frac{g(x)}{\pi x} dx + \int_{\delta}^{\infty} \sin dx \frac{g(x)}{\pi x} dx$$

この収束性を調べるために  $M$  を十分大きな正の数とする。

$$\left| \int_M^{\infty} \sin dx \frac{g(x)}{\pi x} dx \right| \leq \int_M^{\infty} \frac{|g(x)|}{\pi x} dx < \epsilon$$

$$\left| \int_{-\infty}^{-M} \sin dx \frac{g(x)}{\pi x} dx \right| \leq \int_{-\infty}^{-M} \frac{|g(x)|}{\pi |x|} dx < \epsilon$$



とできるので左辺第1項、第3項の大きさの和は

$$\left| \int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\infty} \right| \leq \left| \int_{\delta}^M \sin dx \frac{g(x)}{\pi x} \right| + \left| \int_{-M}^{-\delta} \sin dx \frac{g(x)}{\pi x} \right| + 2\epsilon$$

で抑えられる。ここでと有限区間のリーマンの補助定理は閉区間  $[a, b]$  で区分的に連続な関数  $f(x)$  であれば

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin Nxdx = 0$$

となる。これを利用し、右辺の2項の和は  $d \rightarrow \infty$  とすると0とすることができる。また、 $\epsilon$  は任意に選べるので

結局0にできる。従って

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \frac{\sin dx}{\pi x} = 0$$

と結論できる。一方で  $d$  を固定して、

$$\left. \frac{\sin dx}{\pi x} \right|_{x=0} = \frac{d}{\pi}$$

だから、ここで  $d \rightarrow \infty$  とすればこの値は収束せず、 $\infty$  に発散する。

しかし、これを無限遠を許して積分すると

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin dx}{\pi x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin y}{\pi y} dy = 1$$

のように収束する。無限大を足し合わせたら有限になったように見える。しかし、そうではない。

この関数が積分に効くのが原点付近に集中し、その周辺は無限に足し合わせても効かないのである。

そして、重要なのは面積値が1になるように関数値が決まることである。 $x$  の原点により迫っていくほど  $f(x)$  は大きくなる。

これは原点に近づく一方で、ある領域を記憶しておかないといけない。詳しくは第7部で考察しよう。

式9.12から

$$\lim_{d \rightarrow \infty} D_N(x) = \lim_{d \rightarrow \infty} \frac{\sin dx}{\pi x} = \delta(x)$$

とできるので式9.12を

$$\delta(x) \equiv \lim_{d \rightarrow \infty} D_N(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega x d\omega$$

とすることができる。留意すべきはこの極限の性質について、都合良く受け取らないことである。

ディラックのデルタ関数は超関数と呼ばれ、極限の散り方に手続きが必要になる。

第7部で扱うが、このあいまいな面は逆に物理にとって解釈をつけやすい場面が多々出てくる。

## 9.3 特徴と課題

### 9.3.1 線形性

フーリエ変換  $\mathcal{F}$  とその逆関数を  $\mathcal{F}^{-1}$  として次のように定義する。 $a, b$  は定数、 $f, g$  は  $x$  の関数であるとする。また、普通は  $F(k)$  を  $f(x)$  をフーリエ変換したものとす。

$$\mathcal{F}[f] \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

$$\mathcal{F}^{-1}[F] \equiv \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{ikx} dx$$

このとき、次のような性質がある。

$$\mathcal{F}[af + bg] = a\mathcal{F}[f] + b\mathcal{F}[g]$$

k 空間でのスケールは逆数になる。

$$\mathcal{F}[f(ax)](k) = \frac{1}{a}\mathcal{F}[f(x)]\left(\frac{k}{a}\right)$$

k 空間では変位は位相変化になる。

$$\mathcal{F}[f(x-a)](k) = e^{-ika}\mathcal{F}[f(x)](k)$$

微分のフーリエ変換は k 空間で ik 倍することと等しい

$$\mathcal{F}[f'(x)](k) = ik\mathcal{F}[f(x)](k)$$

$$\mathcal{F}[f^{(n)}(x)](k) = (ik)^n \mathcal{F}[f(x)](k)$$

フーリエ変換の微分は関数を  $-ix$  倍することと等しい

$$(\mathcal{F}[f(x)])'(k) = \mathcal{F}[-ixf(x)](k)$$

2 回フーリエ変換すると反転し、 $2\pi$  倍される。

$$\mathcal{F}[\mathcal{F}[f(x)]] = 2\pi f(-x)$$

これは変数の反転  $t \rightarrow -t$  のようなことをすると

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k)e^{ikx} dk$$

だから  $x \rightarrow -x$  で

$$f(-x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k)e^{-ikx} dk$$

となる。これは見方によっては逆変換で

$$2\pi f(-x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(k)e^{-ikx} dk = \mathcal{F}[\mathcal{F}[f(x)]]$$

である。

### 9.3.2 逆変換存在条件

例えばディラックデルタ関数のような超関数が積分可能性や、逆変換を持つかどうかは未だ課題となることが多い。

フーリエ変換にはどちらも必要な要素なのでここでみておく。

不連続点を含むフーリエ変換を考えるために次のように原点を除いて定義できるようにする。

$$\frac{1}{2} \{f(x+0) + f(x-0)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x} d\omega \quad (9.13)$$

フーリエ変換は複素数を用いて、複素共役をとると

$$F(\omega)^* = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{i\omega y} dy = F(-\omega)$$

となる。複素共役は  $\omega$  を反転することに等しい。波の考え方では反対向きの進行波をとることになる。これも詳しくは第7部で触れるが、2つの波から作られる合成波は面白い性質をもつ。ここで、次のように虚部、実部を考えると

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[F(-\omega)] &= \operatorname{Re}[F(\omega)] \\ \operatorname{Im}[F(-\omega)] &= -\operatorname{Im}[F(\omega)] \end{aligned}$$

であることがわかる。これからも  $\operatorname{Re}[F(\omega)]$  は偶関数で、 $\operatorname{Im}[F(\omega)]$  は奇関数だとわかる。奇関数の場合は次のようにフーリエサイン変換をしたほうが便利の場合がある。

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin \omega x dx \\ f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \sin \omega x d\omega \end{aligned}$$

同様に偶関数の場合は次のようにフーリエコサイン変換をすることもある。

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos \omega x dx \\ f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \cos \omega x d\omega \end{aligned}$$

また、収束性について次の関係がある。

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \right| < \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx \quad (9.14)$$

よって、 $F(\omega)$  の存在は上式の右辺が収束しないといけない。しかし、 $\delta(x)$  関数を  $f(x)$  に選ぶと  $\delta(\omega)$  がとれない。

例えば  $f(x) = 1$  の時は

$$F(\omega) = 2\pi\delta(\omega)$$

となるが、式 9.14 の右辺は存在しない。つまり、条件式 9.14 は厳しすぎる。超関数まで含んだ条件を考える必要があるが、文献 [115] には触れられていない。

### 9.3.3 周期関数のフーリエ変換

フーリエ変換は周期関数の周期  $L$  を

$$L \rightarrow \infty$$

として定義した。よって、周期関数ではない関数になる。

しかし、周期性にはあいまいなところがあるので周期関数のフーリエ変換を考えてみよう。ここに超関数の意味も少し、明らかにできる。

$f(y)$  の周期を  $2L$  とすると  $e^{-i\omega y}$  の  $y$  についての周期性は  $2\pi/\omega$  だから、 $n$  を整数として、

$$2L = n \frac{2\pi}{\omega}$$

つまり、

$$\omega = n \frac{\pi}{L}$$

であれば

$$f(y)e^{-i\omega y}$$

は  $y$  の周期  $2L$  の周期関数である。この時、次の積分をすると

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-i\omega y} dy$$

有限な値を周期的に無限に加えるので結果、無限大になる。

しかし、この無限大が超関数で表すことのできる無限大であることがわかる。

つまり、以下で示すようにスペクトル関数  $F(\omega)$  は  $\omega$  が各  $\pi/L$  の整数倍のところで  $\delta$  関数のようにふるまい、

$$\delta\left(\omega - n\frac{\pi}{L}\right)$$

になることが予想される。そこで  $f(y)$  は周期  $2L$  の関数だからフーリエ級数の式から

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{-i\omega y} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \sum_{n=0, \pm 1, \pm 2, \dots} c_n e^{i\frac{n\pi}{L}y} \right) dy$$

とできたから和記号の中に積分記号を入れれば  $\delta$  関数の定義から

$$F(\omega) = \sum_{n=0, \pm 1, \pm 2, \dots} 2\pi c_n \delta\left(\omega - \frac{n\pi}{L}\right) \quad (9.15)$$

となる。つまり  $F(\omega)$  は重みをつけた  $\delta$  関数の和である。これは離散的な値でのみゼロ以外の値を持つ。

ピーク値は

$$\omega = \frac{n\pi}{L}$$

の所に周期的に現れる。そこで  $L \rightarrow \infty$  の極限を考える。普通これは 0 になりそうであるが整数  $n$  も無限に大きくとれるので

ある値を持つと仮定し、

$$\omega_n^0 = \frac{n\pi}{L}$$

とする。この時、9.15 を次のように変形し、

$$F(\omega) = \frac{\pi}{L} \sum_{n=0, \pm 1, \pm 2, \dots} 2Lc_n \delta(\omega - \omega_n^0)$$

$L \rightarrow \infty$  としたときに係数も変化して

$$2Lc_n \rightarrow c(\omega^0)$$

になったとすると  $L \rightarrow \infty$  の時に、デルタ関数の性質から

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega^0 c(\omega^0) \delta(\omega - \omega^0) = c(\omega)$$

となる。これは有限の場合の式 8.6 から

$$2Lc_n = \int_{-L}^L f(x) e^{-\frac{n\pi}{L}x} dx \quad (9.16)$$

において  $L \rightarrow \infty$  の時に次のように連続関数に移項する。

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$$

つまり、スペクトル関数の間にはスリット干渉の条件のように

$$\omega = \frac{n\pi}{L} \quad (9.17)$$

があり、 $L$  が小さいと  $\omega$  はどんどん大きくなる。

これを抑えるためには  $n$  を小さくすればよいのだが、これは離散値で限界がある。

逆に、 $L$  が大きいと  $\omega$  はどんどん小さくなる。

これは  $n$  を大きくしていけば抑えることができる。この式は

$$n = \frac{\omega L}{\pi}$$

と表すこともできる。前節式 9.8 でフーリエ変換の  $\pi$  の役割を考えた。

この式の  $\omega$  が回転、 $L$  が並進として、 $L\omega$  が基本的な位相空間の体積を表すとすると  $\pi$  はその基本単位となる。

第 7 部で詳しく考察をしたいがボーアの古典的な量子条件が

$$2L = n\lambda$$

であったが、今は波長を周期としてみているので  $\omega = 2\pi/\lambda$  から、式 9.17 は量子条件そのものである。

式 9.16 の  $\omega$  を固定して  $L$  を広げていくと次のように  $F(\omega)$  が包絡線関数として連続関数にできあがっていく。

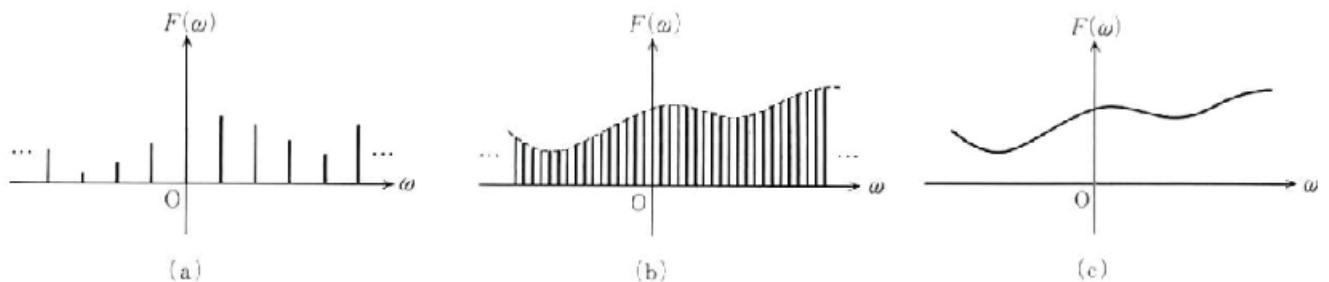


図 9.7: [115] より : a, b, c と  $L$  を広げていく

離散化していたものが上図の (b) のように密集してくると  $F(\omega)$  が連続値となるわけだが、上図 (a) の棒グラフはそれぞれの区間での  $\delta$  関数に対応していて、それぞれの周期区間を持つことに留意する必要がある。

これは今後多次元化して考察する必要がある。

詳しくは第 7 部で考察をしたいが、粗視化の原理と関わりが深い。

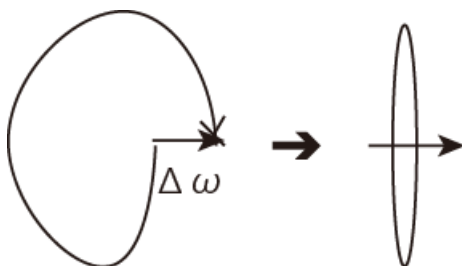


図 9.8: 広がりがあった周期  $\Delta\omega$  を圧縮する

つまり、連続関数  $F(\omega)$  を得るためには上図のように周期区間を圧縮してして、同一位相のところを結べるようにしている。これはまさにホイヘンスの原理で、素元波から波面をつくることを表している。

粗視化では観測の視点の変化があり、離散化が密になることで、振幅強度を連続した関数としてみることをしている。

### 9.3.4 有用例

ここで重要な示唆に富むいくつかの例をみておく。これは単なる例題ではない。今後の物理を考える上で非常に重要な基本原理の要因を含んでいる。

例 6.  $f(x) = 1$

単位元のフーリエ変換で当然次のように  $\delta$  関数の定義にもなる。

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{-i\omega x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{+i\omega x} dx = 2\pi\delta(\omega) \quad (9.18)$$

これから逆関数を無限区間で積分しても同じデルタ関数になることがわかる。

これは位相を  $\pi$  ずらしてみても、端点が無限大であれば積分に影響しないことを表す。しかし、有限領域では

$$\begin{aligned} F_d(\omega) &= \int_{-d}^d e^{+i\omega x} dx = \int_{-d}^d e^{-i\omega x} dx \\ &= \frac{2 \sin d\omega}{\omega} \end{aligned}$$

となり、これは有限フーリエ変換であった。

このあとで  $\omega \rightarrow \infty$  とすれば  $F_d(\omega) \rightarrow 0$  である。一方で  $\omega \rightarrow 0$  で  $2d$  になるから従って定数関数のスペクトルは

$$\omega = 0$$

に集中していることになる。

$F_d(\omega)$  は  $\omega$  の符号に関係ない結果になったが、次のように積分区間を正負に分けたものをみると

$$F_{d+}^+(\omega) = \int_0^d e^{+i\omega x} dx = \frac{i(1 - e^{idk})}{k}$$

$$F_{d-}^+(\omega) = \int_{-d}^0 e^{+i\omega x} dx = \frac{i(-1 + e^{-idk})}{k}$$

$$F_{d+}^-(\omega) = \int_0^d e^{-i\omega x} dx = \frac{i(-1 + e^{-idk})}{k}$$

$$F_{d-}^-(\omega) = \int_{-d}^0 e^{-i\omega x} dx = \frac{i(1 - e^{idk})}{k}$$

これらの値は全てことなる。

$$F_{d+}^+(\omega) + F_{d-}^+(\omega) = F_{d+}^-(\omega) + F_{d-}^-(\omega) = \frac{2 \sin d\omega}{\omega}$$

$$F_{d-}^+(\omega) + F_{d-}^-(\omega) = F_{d+}^+(\omega) + F_{d+}^-(\omega) = \frac{2 \sin d\omega}{\omega}$$

である。積分区間と指数符号とが入れ替わる。次章で触れるが、これらは内向き、外向きの球面波に関係している。

つまり、内向きの波を外方向と内方向で加えたものは外向きの波を外方向と内方向で加えたものに等しく、さらに

外方向に内向きと外向きを加えたものは、内方向に外向きと内向きを加えたものに等しい。

このように有限フーリエ変換が外と内という領域をつくることをしている。

同時干渉性を伴うので、これは量子論の原理に非常に重要である。第7部で考察していく。

例 7. デルタ関数

次に  $f(x) = \delta(x)$  とすると

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) e^{-i\omega x} dx = 1$$

であるので逆変換は

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} d\omega = \delta(x)$$

であり、デルタ関数の定義そのものである。従って、スペクトルは  $\omega$  の関数として定数で、定関数の場合と対照的で

全てのスペクトルが一様に分布している。これは全ての角振動数を持つことになるでの白色スペクトルという。これは回折解析と同様に狭いレンジでの変換先は広がりが大きくなり、 $\delta$  関数のように絞る場合は  $\omega$  空間では一様分布になる。

### 例 8. 矩形関数

例えば次のようにある領域のみ値を持ち、面積が一定になる。関数を考える。

$$f(x) = \begin{cases} R & (-\frac{1}{2R} \leq x \leq \frac{1}{2R}) \\ 0 & \text{other} \end{cases} \quad (9.19)$$

明らかに面積は 1 なので  $R \rightarrow \infty$  とすれば、これは  $\delta(x)$  関数である。前節でも登場したが

$$\begin{aligned} F(\omega) &= R \int_{-1/2R}^{1/2R} e^{-i\omega x} dx \\ &= R \frac{e^{-i\omega/2R} - e^{+i\omega/2R}}{-i\omega} = 2 \frac{R}{\omega} \sin\left(\frac{\omega}{2R}\right) \\ &= \frac{\sin(\omega/2R)}{\omega/2R} \end{aligned}$$

となる。これは有限フーリエ変換である。逆変換は

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\omega/2R)}{\omega/2R} e^{i\omega x} d\omega$$

になるはずである。この再現性をみるために、 $F(\omega)$  が偶関数であったから和積公式から

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\omega/2R)}{\omega/2R} e^{i\omega x} d\omega &= \frac{R}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega} \sin \frac{\omega}{2R} \cos \omega x \\ &= \frac{R}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega} \left\{ \sin\left(\frac{1}{2R} + x\right) \omega + \sin\left(\frac{1}{2R} - x\right) \omega \right\} \\ &= \frac{R}{2} \left\{ \epsilon\left(\frac{1}{2R} + x\right) + \epsilon\left(\frac{1}{2R} - x\right) \right\} \end{aligned}$$

となり、式 9.19 を再現している。ただし、符号関数  $\epsilon(a)$  を用いて積分公式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{\omega} \sin a\omega = \epsilon(a) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{\omega} \sin \omega = \epsilon(a)\pi$$

$$\epsilon(a) = \begin{cases} +1 & (a > 0) \\ -1 & (a < 0) \end{cases}$$

符号関数についてはステップ関数  $\theta$  を用いて

$$\epsilon(a) = \theta(a) - \theta(-a)$$

である。従って  $x = 0$  の時

$$\frac{R}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega} \sin \frac{\omega}{2R} = \frac{R}{2}$$

この結果は不連続点があるときの式 9.13 に一致していて  $x = 0$  として

$$\frac{1}{2} \{f(0+0) + f(0-0)\} = \frac{R}{2}$$

である。従って矩形に対しては式 9.12 のグラフのように広がりを持ち、第 7 部のスリット回折と同じように球面波が生じている。

ここで用いた次の関数はステップ関数のように不連続関数を表す 1 つとしてディリクレ (Dirichlet) 不連続因子と呼ばれる。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega \cos \omega x}{\omega} d\omega = \begin{cases} \pi & (|x| < 1) \\ \pi/2 & (|x| = 1) \\ 0 & (|x| > 1) \end{cases}$$

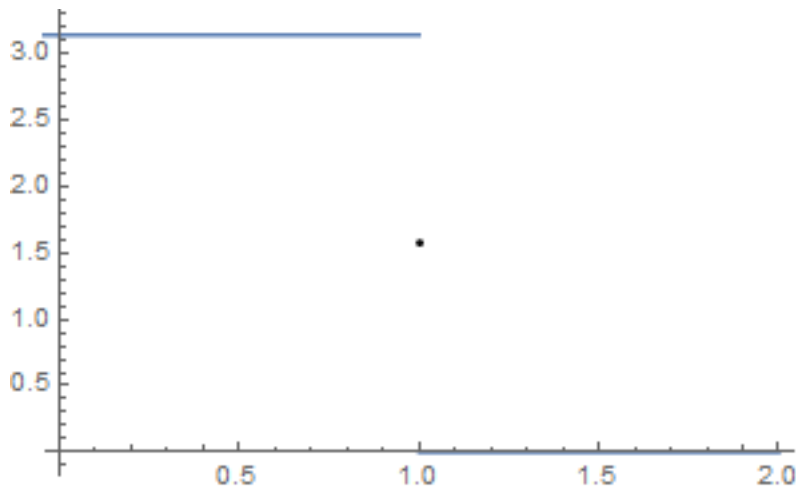


図 9.9:  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega \cos \omega x}{\omega} d\omega$  のグラフ

### 例 9. ガウス型

次に物理では非常に多く登場するガウス型関数

$$f(x) = e^{-ax^2} (a > 0)$$

を考える。正規分布がこれに従う。



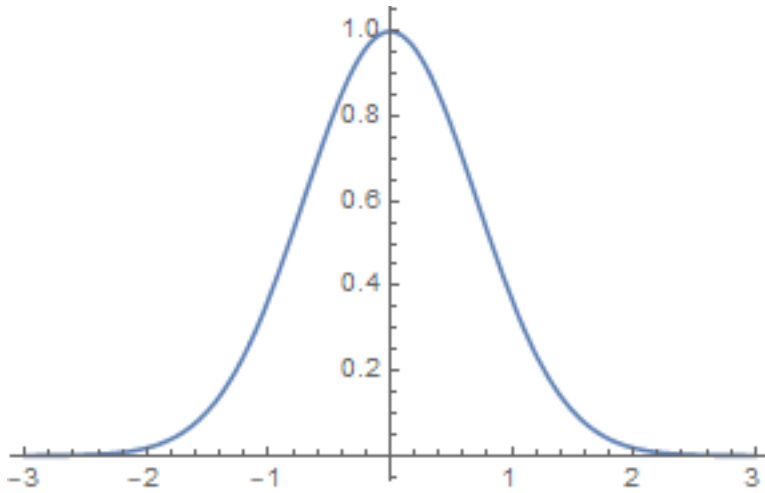


図 9.10:  $f(x) = e^{-x^2}$  のグラフ

フーリエ変換は次のように変形できる。 $y = x + i\theta, \theta = \omega/2a$  として積分経路をずらせば

$$dy = dx$$

だから、ガウス積分になり、

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

を利用し、

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} e^{-i\omega x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(x+i\omega/2a)^2} e^{-\omega^2/4a} dx \\ &= e^{-\omega^2/4a} \int_{-\infty+i\theta}^{+\infty+i\theta} e^{-ay^2} dy \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\omega^2/4a} \end{aligned}$$

となる。従って、変換後も同じガウス型になることがわかる。相関に関して最小になり、これが統計的な関数に多くなる理由でもある。

よって、逆変換は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2/4a} e^{i\omega x} d\omega &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot e^{-ax^2} \int_{-\infty-i2ax}^{\infty-i2ax} e^{-\frac{1}{4a}(\omega-i2ax)^2} d\omega \\ &= \sqrt{4\pi a} \cdot \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot e^{-ax^2} \\ &= e^{-ax^2} \end{aligned}$$

となり、再現される。このようにフーリエ変換は元の関数を再現する有効な道具である。

多様な物理情報の保存と関係することが示唆されるだろう。

この関数は導関数も滑らかなので先の矩形関数と対照的に  $F(\omega)$  も激しく振動させることはない。

$f(x)$  の不連続の強さと、 $F(\omega)$  の振動の強さが関係していることは重要になる。

さらに、この結果を得るために元の関数が実数型であるにも関わらず、複素空間に広げて積分していることに留意する。

つまり、完全に実軸上で積分をするのではなく

$$-\infty - i2ax$$

$$+\infty - i2ax$$

にずらして積分している。明らかに原点をふくむところでは無限大の発散が出てしまうのでそれを避けるためである。

これは空間の外、つまり、立体的な経路を考え、時空間の位相を考える必要がある。これについても第7部で考察したい。

### 例 10. 指数型

次に速さが位置に比例するような場合によく登場する

$$f(x) = e^{-a|x|}, (a > 0)$$

を考える。次のように原点に鋭いピークを持つ。原点から遠いところでは先の関数と同じように滑らかに減少する。

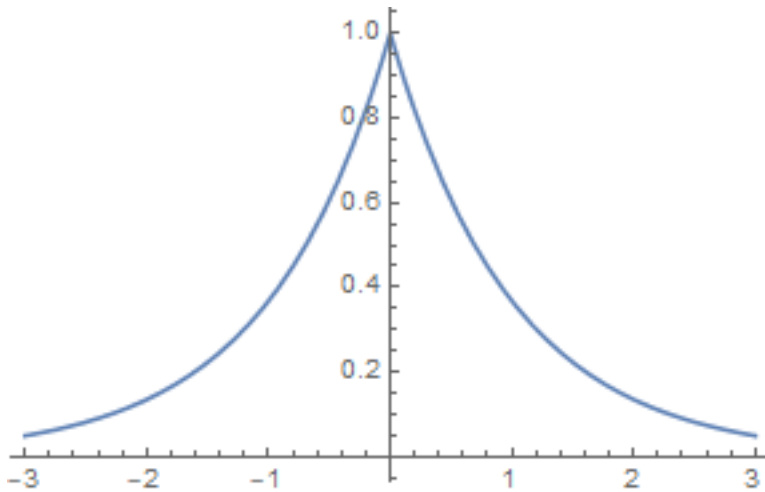


図 9.11:  $f(x) = e^{-|x|}$  のグラフ

このフーリエ変換は次のように原点を除いて次のように考える。

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_0^{\infty} e^{-ax} e^{-i\omega x} dx + \int_{-\infty}^0 e^{ax} e^{-i\omega x} dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(i\omega+a)x} dx + \int_{-\infty}^0 e^{-(i\omega-a)x} dx \\ &= \left[ \frac{-1}{i\omega+a} e^{-(i\omega+a)x} \right]_0^{\infty} + \left[ \frac{-1}{i\omega-a} e^{-(i\omega-a)x} \right]_{-\infty}^0 \\ &= \frac{1}{i\omega+a} - \frac{1}{i\omega-a} \\ &= \frac{2a}{a^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

となる。面白いことに結果には虚数は出てこない。

従って逆変換の場合は前節の留数定理が利用できる。下図のように上半球の積分経路を考えて実軸上で十分  $-\infty \rightarrow +\infty$  を考えると部分分数分解で虚数を出させて、

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{\omega - ia} - \frac{1}{\omega + ia} \right) e^{i\omega x} d\omega \quad (9.20)$$

を考えればよい。

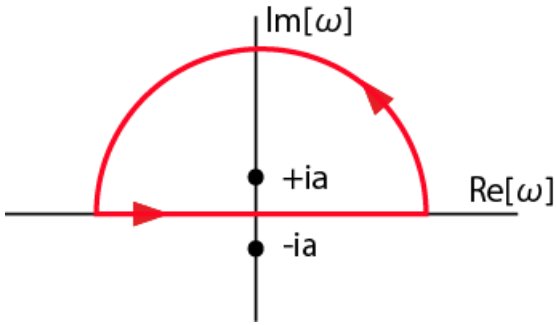


図 9.12: 複素平面に拡大して積分する。

この積分は前章でも見たように実軸上部の部分の積分は  $Im[\omega]$  が十分遠方で大きくなるので 0 と見なせた。よって式 9.20 は次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{\omega - ia} - \frac{1}{\omega + ia} \right) e^{i\omega x} d\omega &= \frac{1}{2\pi i} 2\pi i \text{Res}[+ia] \\ &= e^{-ax} \quad (x > 0) \end{aligned} \quad (9.21)$$

となる。逆に下半球の経路を考えた時も同様にして

$$e^{ax} \quad (x < 0)$$

を得る。この積分がローレンツ型と呼ばれている。

過程からわかるようにこの結果は  $Im[\omega]$  が重要な役割を演じている。

式 9.20 は  $\omega = \pm ia$  に波源のある波の合成と見なすことができる。

これは虚軸上あるのでこれを時間軸に対応させると粒子の生成と消滅を表すことになる。詳しくは第 7 部で考察する。

#### 例 11. べき乗型

次に一般的な

$$f(x) = x^n, (n \geq 1)$$

を考える。既に  $n = 1$  の場合ははじめに見ている。この場合のフーリエ変換は高校で見た積分公式になる。つまり、

はじめに  $n = 1$  の時、は  $f(x) = 1$  の場合の結果を利用して、式 9.18 から

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-i\omega x} dx = i \frac{d}{d\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} dx = 2\pi i \frac{d\delta(\omega)}{d\omega}$$

デルタ関数の性質から、一般に

$$x\delta(x) = 0$$

だから両辺を微分すると次の公式が得られる。

$$\delta(x) = -x \frac{d\delta(x)}{dx} \quad (9.22)$$

さらに

$$\int \frac{d\delta(x-y)}{dx} f(y) dy = -f'(x) \quad (9.23)$$

が成り立つ。 $d\delta(\omega)/d\omega = \delta'(\omega)$  として

$$\omega \delta'(\omega) = -\delta(\omega)$$

だから微分をそのまま使って式 9.23 からは

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi i \frac{d\delta(\omega)}{d\omega} e^{i\omega x} d\omega &= -i \left. \frac{de^{i\omega x}}{d\omega} \right|_{\omega=0} \\ &= x \end{aligned}$$

である。

式 9.23 から次の有用な公式が導ける

$$\int \delta^{(n)}(x-y) f(y) dy = (-1)^n f^{(n)}(x) \quad (9.24)$$

$$\delta^{(n)}(x-y) \equiv \frac{d^n \delta(x-y)}{dx^n}$$

この公式を使うとすぐに  $n$  乗に拡張できる。

$f(x) = x^n$  の場合は

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-i\omega x} dx = 2\pi \left( i \frac{d}{d\omega} \right)^n \delta(\omega)$$

とかけるから、逆変換は部分積分を繰り返せば式 9.24 より、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi \left( i \frac{d}{d\omega} \right)^n \delta(\omega) e^{i\omega x} d\omega &= (-i)^n \left. \frac{d^n e^{i\omega x}}{d\omega^n} \right|_{\omega=0} \\ &= (-i)^n (ix)^n \\ &= x^n \end{aligned}$$

となり、再現される。

## 例 12. 周期関数

次に式 9.5 で見たような連続矩形の周期関数を考える。

$$\Delta_R(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n/2R)}{n/2R} \cos nx$$

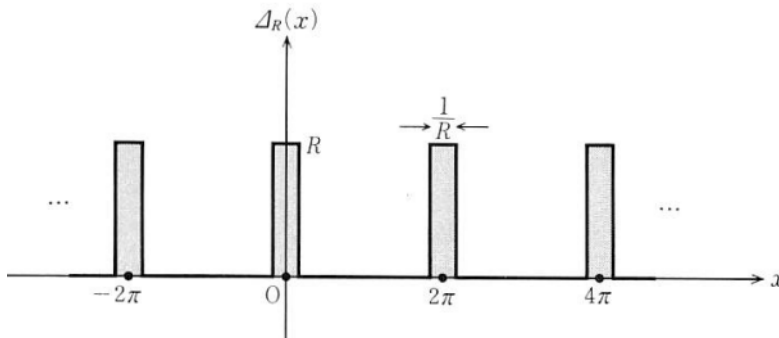


図 9.13: 文献 [115] より：矩形領域の周期関数

はじめに有限周期関数としてフーリエ級数を求めよう。  
ここで周期を  $2L$  にするために次のように置き換える。

$$x \rightarrow \frac{\pi}{L}x$$

これにより位相部分が

$$nx \rightarrow \frac{2n\pi}{2L}x$$

となるので波長が

$$\lambda = 2L$$

となる。偶関数であるから  $b_n = 0$  である。よってフーリエ係数が

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \Delta_R(x) \cos \frac{n\pi}{L}x dx = \begin{cases} \frac{2R}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2RL} & (n \neq 0) \\ \frac{1}{L} & (n = 0) \end{cases}$$

よってフーリエ級数は

$$\Delta_R(x) = \frac{1}{2L} + \frac{1}{2} \sum_{n=\pm 1, \pm 2, \dots}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/2RL)}{n\pi/2RL} \cos \frac{n\pi}{L}x$$

となる。ここでデルタ関数の定義から

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos \frac{n\pi}{L}x \cdot e^{-i\omega x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\frac{n\pi}{L}x} e^{-i\omega x} dx = 2\pi \delta\left(\omega - \frac{n\pi}{L}\right)$$

を用いて  $\Delta_R(x)$  の場合のフーリエ変換は、スペクトル関数といったから

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_R(x) \cdot e^{-i\omega x} dx \\ &= \frac{\pi}{L} \delta(\omega) + \pi \sum_{n=1, \dots}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/2RL)}{n\pi/2RL} \delta\left(\omega - \frac{n\pi}{L}\right) \end{aligned}$$

となる。次に  $L \rightarrow \infty$  とすれば式 9.17 から

$$\frac{n\pi}{L} \rightarrow \omega_0$$

だったから

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega_0 \frac{\sin(\omega_0/2R)}{\omega_0/2R} \delta(\omega - \omega_0) \\ &= \frac{\sin(\omega/2R)}{\omega/2R} \end{aligned}$$

を得る。従って、式 8.5 からフーリエ係数が

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-in\pi x/L} dx$$

とおけたので

$$2Lc_n = \begin{cases} \frac{\sin(n\pi/2RL)}{n\pi/2RL} & (n \neq 0) \\ 1 & (n = 0) \end{cases}$$

が得られる。これは前節に既にみいた次の関数である。

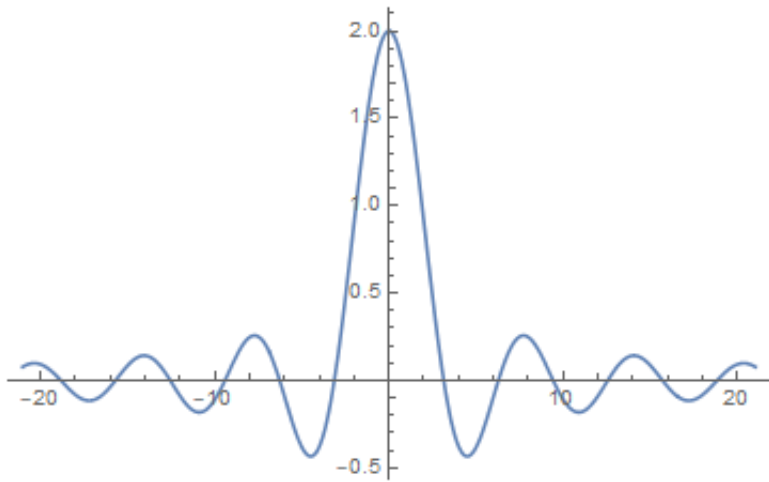


図 9.14:  $\frac{2 \sin x}{x}$  のグラフ

### 例 13. ステップ関数

次にデルタ関数を積分した、ステップ関数を周期的にもつ関数を考えよう。

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (0 < x < \pi) \\ 0 & (-\pi < x < 0) \end{cases}$$

$L \rightarrow \infty$  ではステップ関数になる。この時もまず、有限を考え、フーリエ展開の係数は

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L dx = 1, \quad a_n = \frac{1}{L} \int_0^L \cos \frac{n\pi x}{L} dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_0^L \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{-1}{n\pi} \{(-1)^n - 1\}$$

従って、フーリエ展開が式 8.3 から

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1,3,\dots} \frac{\sin(n\pi/L \cdot x)}{n}$$

次に和積公式からデルタ関数の定義を用いて

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin \frac{n\pi}{L} x \cdot e^{-i\omega x} dx &= -i \int_{-\infty}^{+\infty} \sin \frac{n\pi}{L} x \sin \omega x dx \\ &= -\frac{-i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \cos \left( \omega - \frac{n\pi}{L} \right) - \cos \left( \omega + \frac{n\pi}{L} \right) \right\} dx \\ &= -\frac{-i}{2} 2\pi \left\{ \delta \left( \omega - \frac{n\pi}{L} \right) - \delta \left( \omega + \frac{n\pi}{L} \right) \right\} \end{aligned}$$

となるのでフーリエ級数は

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int f(x) e^{-i\omega x} dx \\ &= \pi \delta(\omega) - i \sum_{n=\pm 1, \pm 3, \dots} \frac{1}{n} \left\{ \delta \left( \omega - \frac{n\pi}{L} \right) - \delta \left( \omega + \frac{n\pi}{L} \right) \right\} \\ &= \pi \delta(\omega) - i \frac{1}{2} \frac{2\pi}{L} \sum_{n=\pm 1, \pm 3, \dots} \frac{1}{n\pi/L} \left\{ \delta \left( \omega - \frac{n\pi}{L} \right) - \delta \left( \omega + \frac{n\pi}{L} \right) \right\} \end{aligned}$$

として、無限化をすると  $L \rightarrow \infty$  から、

$$\frac{n\pi}{L} \rightarrow \omega_0$$

に注意して

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \pi\delta(\omega) - i\frac{1}{2} \int d\omega_0 \frac{1}{\omega_0} \{\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)\} \\ &= \pi\delta(\omega) - i\frac{1}{\omega} \end{aligned}$$

となる。しかし、デルタ関数の場合と同様に  $\omega = 0$  の場合には留意がいる。この時のスペクトルは

$$-\infty < \omega < \infty$$

まで、スペクトルは並んでいるが無限大を抑えていた  $n$  の重みは  $\omega = 0$  の場合には消えて、無限大に飛ぶ。従って、 $\omega = 0$  の場合を除く手立てが必要になる。

この方法は既に複素化した、対数関数を考える時に登場していて、コーシーの主値 (principal value) という。これがデルタ関数とセットで超関数として定義しておく必要がある。これを

$$P\frac{1}{\omega}$$

と書き、微分可能な関数  $g(x)$  を用意して次でコーシーの主値積分を定義する。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left( P\frac{1}{\omega} \right) g(\omega) d\omega = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^{-\delta} \frac{1}{\omega} g(\omega) d\omega + \int_{\delta}^{+\infty} \frac{1}{\omega} g(\omega) d\omega \right\} \quad (9.25)$$

従って、一般にステップ関数  $\theta(x)$  のフーリエ変換が次のように表される。

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x) e^{-i\omega x} dx = \pi\delta(\omega) - iP\frac{1}{\omega} \quad (9.26)$$

これは式 9.20 の時のように複素平面に拡大し、指数関数の時のように虚軸移動をして次のように計算する。まず、

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} dx$$

を実行するために  $+\infty$  側で確実に収束するためには  $e^{-\epsilon x}$  因子を挿入する。  $\epsilon > 0$  の微小量とする。すると式 9.21 と同様にして

$$F(\omega)_+ = \int_0^{\infty} e^{-i\omega x - \epsilon x} dx = \frac{1}{i\omega + \epsilon} = \frac{1}{i(\omega - i\epsilon)} \quad (9.27)$$

従って、 $\omega = i\epsilon$  で 1 位の極を持つ。よってこの時も微分可能な  $g(x)$  を用いて、次の図のように積分を 3 つに分ける。

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)g(\omega)d\omega &= \frac{1}{i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(\omega)}{\omega - i\epsilon} d\omega \\ &= \frac{1}{i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(\omega)}{\omega - i\epsilon} d\omega \\ &= \frac{1}{i} \int_{-\infty}^{-\delta} \frac{g(\omega)}{\omega - i\epsilon} d\omega + \frac{1}{i} \int_{-\delta}^{+\delta} \frac{g(\omega)}{\omega - i\epsilon} d\omega + \frac{1}{i} \int_{+\delta}^{+\infty} \frac{g(\omega)}{\omega - i\epsilon} d\omega \end{aligned} \quad (9.28)$$

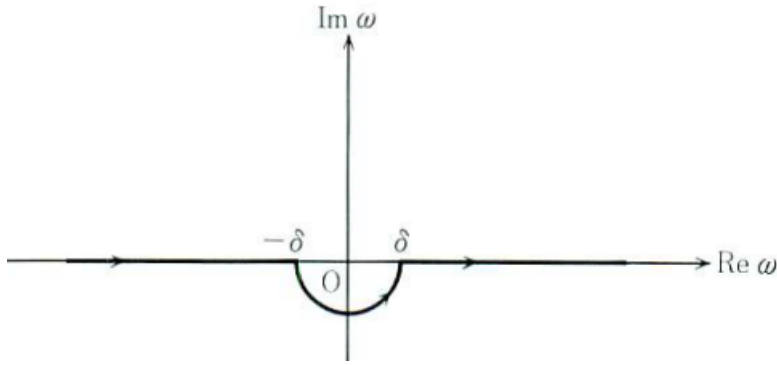


図 9.15: 文献 [115] より：原点を迂回させた経路

式 9.28 の第 1, 3 項は原点を含まないので  $\epsilon \rightarrow 0$  とすることができ、さらに  $\delta \rightarrow 0$  とすると、これはまさに式 9.28 のコーシーの主値で

$$\int_{-\infty}^{-\delta} \frac{g(\omega)}{\omega - i\epsilon} d\omega + \int_{+\delta}^{+\infty} \frac{g(\omega)}{\omega - i\epsilon} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( P \frac{1}{\omega} \right) g(\omega) d\omega$$

になる。従って第 2 項を考えればよい。

図の半径  $\delta$  の半円が下側にある。

$$x = \delta e^{i\theta}, \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

とすると

$$dx = i\delta e^{i\theta} d\theta$$

となるので  $\delta \rightarrow 0$  とすると下半円の回転を  $\pi \rightarrow 2\pi$  として

$$\int_{\pi}^{2\pi} \frac{g(\delta e^{i\theta})}{\delta e^{i\theta}} i\delta e^{i\theta} d\theta \rightarrow i\pi f(0)$$

となる。これらから

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(\omega)}{\omega - i\epsilon} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ P \frac{1}{\omega} + i\pi\delta(\omega) \right\} g(\omega) d\omega$$

となる。よって

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\omega - i\epsilon} = P \frac{1}{\omega} + i\pi\delta(\omega)$$

これは式 9.26 を表している。次に逆変換を考えよう。

次に逆変換を考えよう。式 9.20 から式 9.27 の方を用いて、

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega x}}{\omega - i\epsilon} d\omega$$

を求めればよい。この積分もまず、有限領域  $-R \rightarrow R$  を考え、次の図のように上半球で反時計回りの積分をおこなう。

被積分関数を

$$H(\omega) = \frac{e^{i\omega x}}{\omega - i\epsilon}$$

として、まず有限区間

$$\int_{-R}^R H(\omega) d\omega$$

この時図のように  $x > 0$  では上半球面での積分では半径を大きくすると  $Im[\omega]$  が大きくなるので  $R \rightarrow \infty$  で



$$e^{i\omega x} \rightarrow 0$$

とできる。

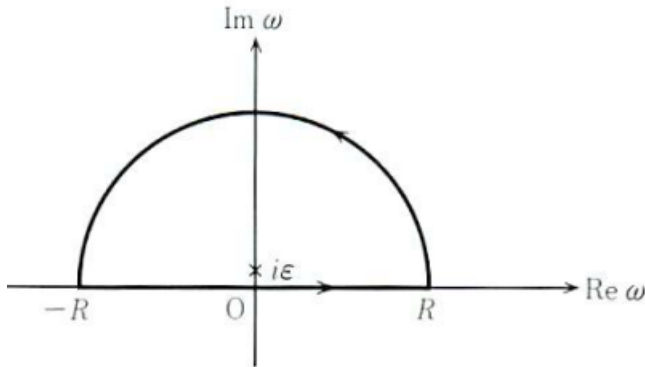


図 9.16: 文献 [115] より: 極を 1 つ含む積分領域  $x > 0$  の場合

したがって、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega) d\omega &= \text{Res}\left[\frac{e^{i\omega x}}{\omega - i\epsilon}\right] \\ &= e^{i\omega i\epsilon} = e^{-\omega\epsilon} \end{aligned}$$

さらにこれまでの手続きに従い、ここで  $\epsilon \rightarrow 0$  とすれば結局  $x > 0$  の場合に

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega = 1$$

を得る。  $x < 0$  の場合は領域内に極がないので

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega = 0$$

となる。従って両方をまとめれば、ステップ関数になる。

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega = \theta(x)$$

ステップ関数は次のようにデルタ関数の積分である。つまり、

$$\theta(x) = \int_{-\infty}^x \delta(y) dy$$

であるが、もう一度積分することで

$$\int_{-\infty}^x \theta(x') dx' = \begin{cases} x & (x > 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

となる。

フーリエ変換がデルタ関数に対し  $F(\omega) = 1$ 、ステップ関数に対しては式から

$$F(\omega)_+ = \int_0^{\infty} e^{-i\omega x - \epsilon x} dx = \frac{1}{i\omega + \epsilon}$$

、 $1/(i\omega + \epsilon)$  の因子がかかったので

$$\int_{-\infty}^x dx \rightarrow \frac{1}{i\omega + \epsilon}$$

という対応があることがわかる。これから

$$\int_{-\infty}^x \theta(x') dx' = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{x'} \delta(x) dx dx' \rightarrow F(\omega) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{x'} dx dx'$$

これから

$$F(\omega) = \frac{1}{(i\omega + \epsilon)^2}$$

さらにこれらは一般化できて

$$\begin{cases} \frac{1}{n!} x^n & (x > 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases} \rightarrow F(\omega) = \frac{1}{(i\omega + \epsilon)^{n+1}}$$

となる。

このように単純な関数のフーリエ変換には面白い関係が見られる。ステップ関数は後に時間の不可逆性に用いるが、そのフーリエ変換は多重極になる。粒子の生成や時空間との関係で多くの示唆を含んでいるだろう。これについては第7部でさらに考察を深めたい。

### 9.3.5 有用公式

この節の最後にフーリエ変換の有用公式をまとめておく。文献 [115] の表をはじめに引用する。

$f(x)$	$F(\omega)$
1	$2\pi\delta(\omega)$
$\delta(x)$	1
$\frac{d^n \delta(x)}{dx^n}$	$i^n \omega^n$
$x$	$2\pi i \delta'(\omega)$
$x^n$	$2\pi i^n \frac{d^n}{d\omega^n} \delta(\omega)$
$e^{-ax^2} \quad (a>0)$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\omega^2/4a}$
$e^{-a x } \quad (a>0)$	$\frac{2a}{\omega^2 + a^2}$
$\begin{cases} R & ( x  < 1/2R) \\ 0 & ( x  > 1/2R) \end{cases}$	$\frac{2R}{\omega} \sin \frac{\omega}{2R}$
$\theta(x)$	$\frac{1}{i\omega + \epsilon}$
$\begin{cases} \frac{1}{n!} x^n & (x > 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$	$\frac{1}{(i\omega + \epsilon)^{n+1}}$

図 9.17: フーリエ変換公式文献 [115] より

## 9.4 高速フーリエ変換

第 10 部で量子コンピューターを扱うが、その時に有用なのはフーリエ変換をコンピューターで使う時のアルゴリズムの効率化である。これは離散フーリエ変換を高速に行うことを考慮したもので、その技術的な側面だけでなく、理論的にも今後応用していくことが多いので、ここで取り上げる。

この高速フーリエ変換を今後 **FFT**(Fast Fourier Transform) と呼ぶ。

さらに以下で扱う離散化されたものは **DFT**(Discrete Fourier Transform) と呼ぶ。

はじめに次のような 2 つの多項式を用意します。最高次  $N$  は共通している。

$$f(x) = \sum_{i=0}^N A_i x^i$$

$$g(x) = \sum_{i=0}^N B_i x^i$$

これは関数なので積をとると

$$f(x)g(x) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N A_i B_j x^{i+j}$$

となり、情報量は面積的に広がる。

ここで 2 項係数から次のように係数を 1 つにすると便利である。

$$C_k = \sum_{i=0}^k A_i B_{k-i}$$

よって  $h(x) = f(x)g(x)$  とすると

$$h(x) = \sum_{i=0}^{2N} C_i x^i$$

で書き直すことができ

$$C_i (0 \leq i \leq 2N)$$

の係数が求めれば  $h(x)$  を作ることができますが、この数は  $O(N^2)$  だけあるので、 $N$  を大きくすると処理が重くなります。それを高速化するためには全ての数ではなく、精度が落ちないでいどに飛び飛びにして見つけていく補完方法を学ぶ。

#### 9.4.1 1 の $n$ 乗根による多項式補完

i. そこで  $n$  個の点  $x_0, \dots, x_{n-1}$  を選び、これを使って

$$f(x_0), \dots, f(x_{n-1}), g(x_0), \dots, g(x_{n-1}), h(x_0), \dots, h(x_{n-1})$$

を計算させて、 $C_i$  を精度よく再現する方法を選べばよいのです。既に精度という表現を用いているようにFFTでは完全に再現することは原理的に不可能である。

それでは補完を具体的に考えるわけですが、この時、今後の話しにも重要なのは1の  $n$  乗根をつかうことです。前章で複素数を学んで来たのでここでその応用例を見ることになる。

複素数  $z$  に対して複素平面は面白く、位相  $\theta$  を次のように整数  $n$  で離散化しておく

$$\theta = \frac{2\pi}{n}$$

1 の  $n$  乗根全体は

$$\omega_n^i (0 \leq i < n)$$

とおくと

$$\omega_n^i = \omega_n^j \Leftrightarrow i \equiv j \pmod{n}$$

さらに有用な次の性質

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_n^{i(j-k)} = \begin{cases} n & (j = k \pmod{n}) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (9.29)$$

が成り立つ。これは自明ではないので簡単に証明しておく。

$j = k$  の時は偏角の合計が  $2m\pi$  となるので明らか。

$j \neq k$  の時、この和は公比  $\omega_n^{j-k}$  の等比数列の和になるので

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

から1の  $n$  乗根が公比であるので

$$r = \omega_n^{j-k} = 1$$

となるから

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \omega_n^{i(j-k)} = 0$$

である。これで証明ができた。おもしろいことに

$$\omega_n \rightarrow \omega_n^{-1}$$

のように逆数である時もこの関係は

$$1 - r \rightarrow r - 1$$

とすれば同じように成立する。

#### 9.4.2 離散フーリエ変換

多項式を  $f(x)$  を改めて、

$$f(x) \equiv \sum_{j=0}^{n-1} c_j x^j$$

として離散フーリエ変換を

$$\hat{f}(t) \equiv \sum_{i=0}^{n-1} f(\omega_n^i) t^i$$

で定義する。  $x^i = \zeta_n^i$  として代入すると

$$\begin{aligned} \hat{f}(t) &= \sum_{i=0}^{n-1} f(\omega_n^i) t^i \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \left( \sum_{j=0}^{n-1} c_j (\omega_n^i)^j \right) t^i \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} c_j \sum_{i=0}^{n-1} (\omega_n^j t)^i \end{aligned}$$

となる。そこで  $\omega_n \neq 0$  として

$$t = \omega_n^{-k}$$

とすると

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega_n^{-k}) &= \sum_{j=0}^{n-1} c_j \sum_{i=0}^{n-1} (\omega_n^j \omega_n^{-k})^i \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} c_j \sum_{i=0}^{n-1} \omega_n^{i(j-k)} \end{aligned}$$

とまとめることができる。

ここで式 9.8 より  $j = k \pmod n$  であれば

$$\hat{f}(\omega_n^{-k}) = n c_k$$

であり、それ以外であれば

$$\hat{f}(\omega_n^{-k}) = 0$$

となる。従って係数  $c_k$  は

$$c_k = \frac{1}{n} \hat{f}(1/\omega_n^k)$$

で得られた。これを離散フーリエ逆変換という。

### 9.4.3 高速離散フーリエ変換

次にこれを高速化するために処理をする。

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n-1} c_n x^n$$

と多項式展開したときに  $n$  の底を 2 に選び、次のように多項式展開を定義する。

$$f_0(x) \equiv \sum_{i=0}^{n/2-1} c_{2i} x^i$$

$$f_1(x) \equiv \sum_{i=0}^{n/2-1} c_{2i+1} x^i$$

この時、

$$f_0(x^2) = \sum_{i=0}^{n/2-1} c_{2i} x^{2i}$$

$$f_1(x^2) = \sum_{i=0}^{n/2-1} c_{2i+1} x^{2i+1} \tag{9.30}$$

となるので、偶奇に分けて全体では

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n/2-1} c_{2i} x^{2i} + \sum_{i=0}^{n/2-1} c_{2i+1} x^{2i+1}$$

$$= f_0(x^2) + x f_1(x^2)$$

とすることができる。よって式 9.30 の指数はどちらも偶数であることに留意し、

$$f_0(\omega_n^0), f_0(\omega_n^2), \dots, f_0(\omega_n^{2(n-1)}), f_1(\omega_n^0), f_1(\omega_n^2), \dots, f_1(\omega_n^{2(n-1)})$$

が求められれば

$$\omega_n^2 = \omega_{n/2}$$

だから全体

$$f(\omega_n^0), f(\omega_n^1), \dots, f(\omega_n^{n-1})$$

を求めることができる。さらに端点では 1 の累乗は周期性から 1 になるので

結局

$$f_0(\omega_{n/2}^0), f_0(\omega_{n/2}^1), \dots, f_0(\omega_{n/2}^{n/2-1}), f_1(\omega_{n/2}^0), f_1(\omega_{n/2}^1), \dots, f_1(\omega_{n/2}^{n/2-1})$$

を求めればよいことになり、これは元の半分のサイズを 2 つ連立すれば解けることを意味する。

したがって再帰的にプログラムを組めば

$$O(n \log n)$$

程度の計算で済むことになる。

## 10 波動現象 [57]

量子論は波動関数に代表されるように粒子の存在を波として扱う。高校物理で学習したように、波は発生源を持ち、2つの進行波があればそれらは干渉して、定常波を作る場合もある。量子論でも進行波としてみるか、定常波としてみるかは重要な視点になる。

量子力学でも基本原理となる重ね合わせの原理により、多くは波を合成波として扱うことになる。高校で学習したように定常波の節、腹は連続した双曲線をつくり、合成波の速度はこの曲線群で表すことができる次の図で見るように2つの波源がある場合、この直線を結ぶ線は特別な線になる。

2点の内側では定在波ができ、節腹を半波長ごとに形成し、ここから垂直に節線、腹線がのびる。この線は2点を結ぶ直線上は速度0になるが、この直線から離れるほど速くなり、無限遠では単独の進行波と同じ速さになる。

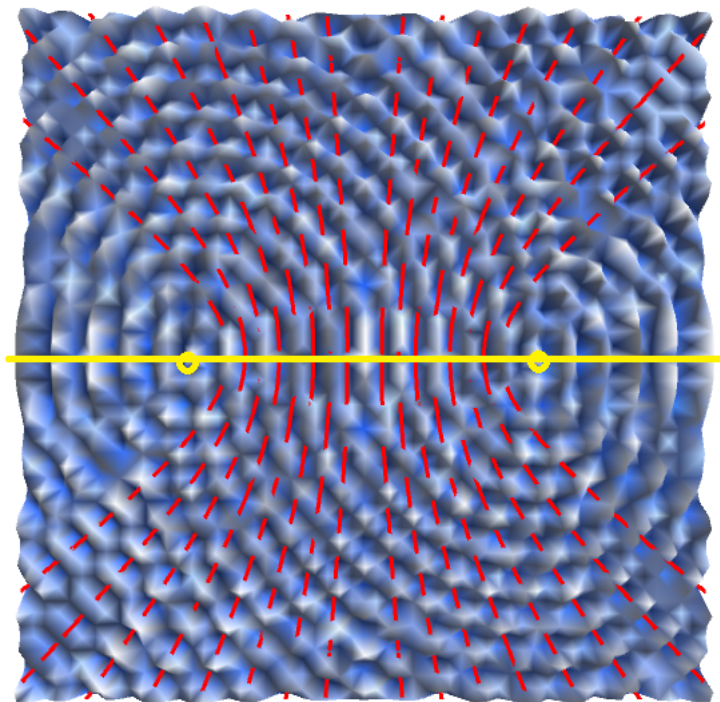


図 10.1: 波源を2つとして合成波を作成し節線を表示した

しかし、波源2点を結ぶ直線の外側は進行波が同じ進行方向に重ね合わせるために、合成波の速さは0から一気に単独の速さに上げる。

このために上図でも波に乱れが生じる。単独の進行波には見られなかった「特別な直線」が合成波には存在するのである。

実際に観測されるのは進行波ではない。合成波のみを観測者はみることしかできない。

量子論においても1つの波動関数は光速程度で伝播するだろう。しかし、これに質量や情報を載せようとする合成波をつくらないといけない。この速さは一般には遅くなる。

粒子であればAからBを見ることができ、BからAを見ることができ。しかし、波の場合合成波ができてしまえばAかBかを判別できなくなる。位相速度と群速度の関係は後の第5部の電磁気で考察を深める。

量子論に関する基礎的な考察は第7部でおこなう。

さらに群速度が位相速度より速くなる場合も含めて量子論的な考察は第9部でおこなう。

## 10.1 ダランベールの解

はじめに簡単のために 1 次元の波動方程式

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \quad (10.1)$$

を考えよう。下添え字はこの節では微分を表すとする。

これは 2 階偏微分方程式の中の双曲線型で前節の式 2.26 に相当する。

伝達速度は  $c$  の有限速度であることがわかる。

前節の偏微分方程式の解法としてこの特性方程式を

$$dx^2 - c^2 dt^2 = 0$$

が得られる。明らかに次の 2 つの式

$$dx - c dt = 0, \quad dx + c dt = 0$$

が得られ、これから特性曲線が

$$\xi = x - ct = \text{Const.}$$

$$\eta = x + ct = \text{Const.}$$

が得られる。この新しい座標を用いると式 10.1 は

$$u_{\xi\eta} = 0$$

と書き換えることができる。この  $\xi, \eta$  を引数にして

$$u = F(x - ct) + G(x + ct) \quad (10.2)$$

とすると、 $F, G$  は  $x$  軸の正、負方向に進む進行波である。単独でも足しても式 10.1 を満足する。

そこでこれをダランベールの解という。

$u$  は  $F, G$  の合成波である。従ってこの時の波の速さ  $c$  は合成波の速さではない。

波は  $c$  の速さ伝播し、空間を満たしていくが、合成波の山や谷の部分はこの速さよりゆっくりと伝わることになる。

波動方程式は境界条件と初期条件で解を決める。

例として無限に長い弦を考えよう。

時刻  $t = 0$  での初期条件を次のように表す。波動方程式は時間に関して 2 階の場合次のように 2 つの条件が必要になる。

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x)$$

単純に  $\phi(x), \psi(x)$  は変位と速度を  $x$  軸上で表している。また、無限に長い弦としたので、ここでは境界条件は課さない。

式 10.2 から  $t = 0$  とすると

$$F(x) + G(x) = \phi(x) \quad (10.3)$$

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \left[ \frac{\partial F}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} \right]_{t=0} \\ &= -c \frac{\partial F}{\partial x} + c \frac{\partial G}{\partial x} \end{aligned} \quad (10.4)$$



となる。この背景には位相速度が一定であること

$$c = \frac{dx}{dt}$$

がある。従って時間微分が空間 ( $x$ ) 勾配に書き換えられる。式 10.4 は  $x$  の勾配になったので次のように積分が可能になる。

$$F(x) - G(x) = -\frac{1}{c} \int_0^x \psi(z) dz + K$$

$K$  は任意定数として残る。これと 10.3 を用いると次のように  $F(x), G(x)$  が求まる。

$$F(x) = \frac{1}{2} \phi(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x \psi(z) dz + \frac{1}{2} K$$

$$G(x) = \frac{1}{2} \phi(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x \psi(z) dz - \frac{1}{2} K$$

前節のフーリエ係数 8.1, 8.2 と比べると興味深い。

これから  $u(x)$  の一般解が次のように求まる。

$$\begin{aligned} u(x, t) &= F(x - ct) + G(x + ct) \\ &= \frac{1}{2} \phi(x - ct) - \frac{1}{2c} \int_0^{x-ct} \psi(z) dz + \frac{1}{2} K + \frac{1}{2} \phi(x + ct) + \frac{1}{2c} \int_0^{x+ct} \psi(z) dz + \frac{1}{2} K \\ &= \frac{\phi(x - ct) + \phi(x + ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi dz \end{aligned} \quad (10.5)$$

これをストークスの公式という。

留意すべきはまず、積分区間が原点から  $x$  ではなく  $x$  での両側になっており合成波が時間が経過しないときできないことを表す。

また、合成波  $u(x, t)$  では積分定数が見えなくなっていることは後に重要になる。

この解が初期値に依存していることをみておこう。解の組を

$$A : \{\phi_1(x), \psi_1(x)\}$$

$$B : \{\phi_2(x), \psi_2(x)\}$$

として、 $A$  と  $B$  が十分に近く

$$|\phi_1(x) - \phi_2(x)| < \delta$$

$$|\psi_1(x) - \psi_2(x)| < \delta$$

とする。この時式 10.5 から第 2 項の影響で

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| < (1 + t)\delta$$

となることがわかる。これは最初  $\delta$  から  $t$  と共に増加していく。このように波動方程式は相対論的な因果関係の様子をよく表している。

これは縦軸に時間をとり、ある時刻に原点で発生した波が  $x$  軸の正、負に伝播していく次のグラフから読み取れる。

- 初期速度が 0 の場合

式 10.5 で  $\psi(x) = 0$  とすると

$$u(x, t) = \frac{\phi(x - ct) + \phi(x + ct)}{2} \quad (10.6)$$

となるので、グラフが次のようになる。

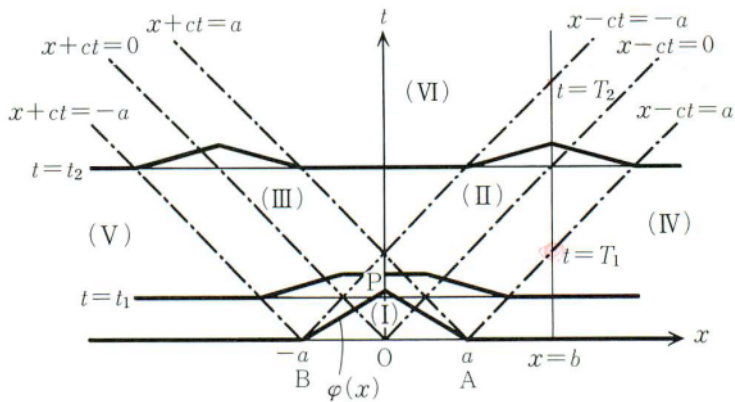


図 10.2: [57] より : 三角波の 1 次元時間経過 : 初速度  $\psi = 0$  の場合

相対論の因果関係で重要になる時間、空間的な領域がこれからもよくわかる。

$x$  軸に加えて  $t$  軸を考えた平面的な領域が図では I から IV に分類されている。

I から発生した波の影響を V、VI、IV の領域では一切影響をうけない。

もし、伝播速度  $c$  が小さくなれば、図の逆三角形はよりスリムになっていくので V の領域はなくなっていく。

しかし、IV、VI の領域は常に影響を受けない。これは次の図のようにスリットを通過する連続波の波の伝播として考えることができる。

ホイヘンスの原理により、スリットには点波源ができて連続波が伝播していく。

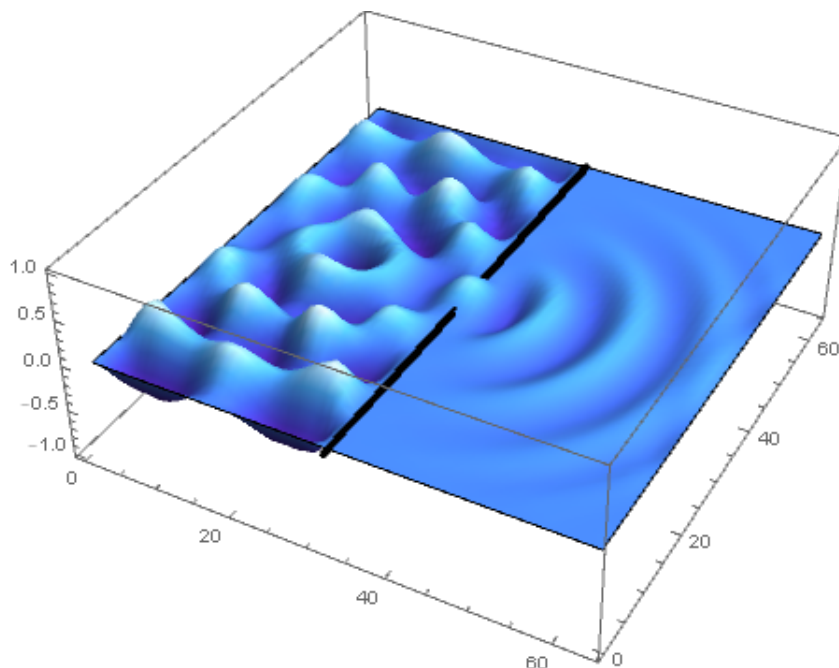


図 10.3: スリットを通過する波

このような初期値の時間依存は双曲線型の特徴で、楕円型に移項すると、境界条件が重要になってくる。

● 初期変位が 0 の場合

この場合は  $\phi(x) = 0$  となるので式 10.5 より

$$u(x, t) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi dz$$

となる。従って

$$\psi(x) = \begin{cases} \alpha(\text{Const.}) & (-a < x < a) \\ 0 & (\text{other}) \end{cases}$$

従ってはじめは変位がない。速度はもっているのが時間経過と共に最大まで変化する。次のように領域を定義しよう。

$$I : (-\infty, -ct - a)$$

$$II : (-ct - a, -ct + a)$$

$$III : (-ct + a, +ct - a)$$

$$IV : (ct - a, ct + a)$$

$$V : (ct + a, \infty)$$

下図のように波の先端は  $x$  軸の正負の方向に一定の速さで変化し、 $(-a, a)$  の範囲は領域 III では

$$u = \alpha \frac{a}{c}$$

の最大値一定になる。しかし、領域 II や IV では例えば II の場合

$$-a < x + ct < a$$

であるので

$$u(x, t) = \frac{\alpha}{2c} \int_{-a}^{x+ct} dz = \frac{\alpha}{2c} (x + ct + a)$$

領域 IV では

$$u(x, t) = \frac{\alpha}{2c} \int_{x-ct}^a dz = \frac{\alpha}{2c} (-x + ct + a)$$

のように  $x$  に依存した形になる。

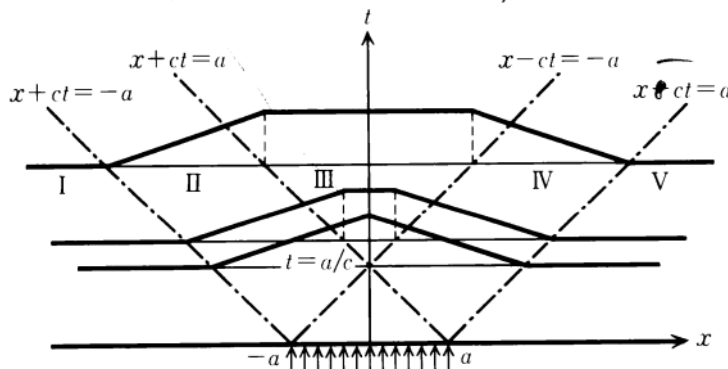


図 10.4: [57] より：初期変位  $\phi = 0$  の場合

特徴的なことは局所的に発生した変位が広がって行くが、先の初速 0 の場合とことなり、領域 III では最大変位がそのまま残る。

上図の領域をつくる直線

$$x \pm ct = \pm a$$

を特性曲線という。双曲線型では両端の特性曲線との交点に囲まれる領域は初期値に影響をうける。

下図の緑から黄色の部分に相当し、これを影響領域 (domain\_of\_influence) という。

しかし、その外側は下図の濃い青の部分に相当し、この領域は初期値に一切影響を受けない。

また、下図の黄色の部分は時間に関係なく初期値のみで決まる。これを依存領域 (domain\_of\_dependence)

3次元でこのグラフを表示させると次のようになる。

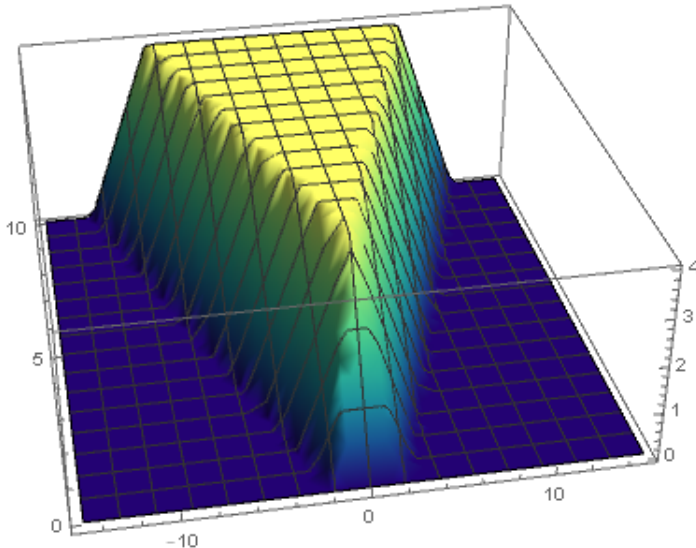


図 10.5:  $(-2, 2)$  に初速を与えた 1 次元波の時間変化

後に紹介する楕円型ではこの事情とは異なることになる。

- 片端固定の場合

これまで無限に長い弦を見てきたが、次に片側を固定する。この場合は境界ができたので反射がおこなわれる。片方で固定端反射がある場合を考えよう。この固定端を  $x$  軸の原点とする。この時の初期条件は

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = 0, \quad (x > 0)$$

今度は境界条件が加わり、

$$u(0, t) = 0, \quad (t > 0)$$

となる。これから、初速が 0 なので

$$\phi(-ct) + \phi(ct) = 0$$

となる。  $x = ct$  で置き換えると任意の時刻に

$$\phi(-x) = -\phi(x)$$

が成り立ち、これは奇関数であることがわかる。

従って  $x \geq 0$  で与えられた初期値  $f(x)$  を用いて

$$\phi(x) = \begin{cases} f(x) & (x \geq 0) \\ -f(-x) & (x < 0) \end{cases}$$

とすればよい。これは高校の物理でも学習した鏡像法である。原点で固定端反射するので、次の図のように三角波は伝播する。

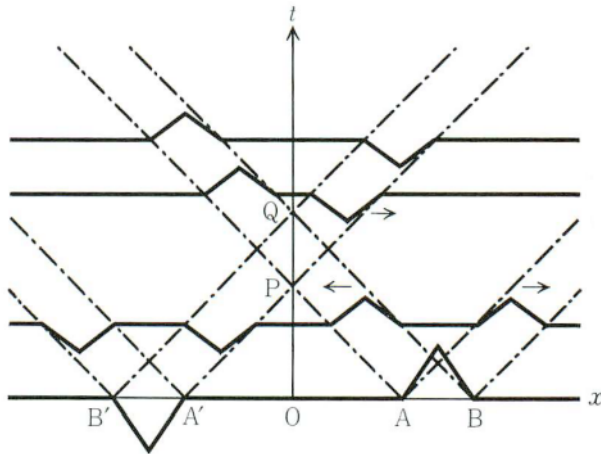


図 10.6: [57] より:  $t$  軸で対称に位置から位相反転した波が発生したと考えればよい。

## 10.2 調和関数

物理学においてある境界で波が連続的につながる必要から波の形を決めるということは Green の定理や後章で登場する cohomology など多くの分野で登場する。ラプラス作用素を

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \quad (10.7)$$

として関数  $f$  に作用させるとラプラスの方程式は

$$\Delta f = 0 \quad (10.8)$$

で与えられる。これを満足すれば調和関数であった。

例えば初等的な波の式として  $x_0 = ict$  とおけば

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} y = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} y \quad (10.9)$$

である。これは前章の 2 階偏微分方程式の楕円型の解となる。

複素関数の式 4.8 から  $u$  または  $v$  のどちらかが決まれば  $\omega = f(z)$  は定数を除いて定まる。

さらにこの関係式をもう一度微分することでラプラスの方程式が得られることがわかる。

$$\Delta u = 0, \quad \Delta v = 0 \quad (10.10)$$

式 4.9 から正則であれば実数部、虚数部で調和関数になる。

物理でよく登場する **Dirichlet 問題**とは領域  $D$  上でラプラスの式

$$\Delta U = 0 \quad (10.11)$$

を満たし、かつ  $D$  の境界上で指定された値をとる関数  $U(x, y)$  を求めることである。

また、境界  $C$  上で内法線微分  $\partial U / \partial n$  を指定するのが **ノイマン問題 (Neumann)** である。

従ってどちらにしても境界があり、 $S$  が有界な単連結の場合をここでは考えると領域  $V$  が  $S$  の内部なら内部問題とよび、外部なら外部問題と呼ぶことにする。

いずれにしても境界をにおいて、周積分をする必要があるので外部と内部をわけると重要な観点が登場する。

これが、常に客観的におこなわれるよう留意する必要がある。

### 10.2.1 ラプラス方程式

第1章のベクトル解析で学習した勾配をとる演算子  $\nabla$  はベクトル量である。

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i}, \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j}, \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right)$$

従ってこの演算子の内積はスカラーであり

$$\nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

となる。これをラプラス演算子といい  $\nabla^2, \Delta$  で表す。

3次元の有界な領域を  $V$  として、これに境界面  $S$  を付け加えた領域を  $\bar{V}$  で表す。  
ラプラス方程式は次のようになる。

$$\nabla^2 u \equiv u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0 \quad (10.12)$$

領域  $V$  においてこの方程式を満たす  $C^2$  関数を調和関数という。  
また、非同次方程式はポアソン方程式という。これは後節で扱う。

$$\nabla^2 u \equiv u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = \phi(x, y, z) \quad (10.13)$$

これらの方程式は物理学において重力場、静電場等に広く登場する重要な式である。  
そこで、次に基本的な解法をおさえておこう。

## 10.3 球面の波 [57]

### 10.3.1 1次元の場合

はじめに1次元の時は  $u(x)$  について

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = 0$$

からすぐに

$$u = c_1 x + c_0$$

となることがわかる。

### 10.3.2 2次元の場合

次に2次元の場合は

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

として

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \\ &= \left( \frac{\partial r}{\partial x} \right) \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial r} + \left( \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} \right) \frac{\partial u}{\partial r} \\ &= \left( \frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \left( \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} \right) \frac{\partial u}{\partial r} \end{aligned}$$

同様に、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \left(\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}\right) \frac{\partial u}{\partial r}$$

となる。また、

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$$

だから

$$\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 = 1$$

となる。さらに

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{r} = \frac{r - x \frac{x}{r}}{r^2} = \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}, \quad \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3}$$

となるので次が得られる。

$$\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 = \frac{x^2 + y^2}{r^2} = 1$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{2}{r} - \frac{1}{r} = \frac{1}{r}$$

よって次のようにまとまる。

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \left( \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 \right) + \frac{\partial u}{\partial r} \left( \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} \right) \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial u}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \right) = 0 \\ &= \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{du}{dr} \right) = 0 \end{aligned} \tag{10.14}$$

となる。これから括弧内は定数になるので

$$r \frac{du}{dr} = C$$

$$\frac{du}{dr} = \frac{C}{r}$$

を解けばよく、3次元では逆2乗が出たが2次元ではlog関数が出てくることが重要になる。

$$u(r) = c_0 + c_1 \log \frac{1}{r} \tag{10.15}$$

この時も係数を次のように選んだ時、基本解という。

$$u(r) = -\frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{r}$$

### 10.3.3 膜の振動

具体的に  $(x, y)$  平面の固定された円形枠に膜を張った場合の膜の振動を考える。  
 $w(x, y, t)$  を膜の  $(x, y)$  平面に垂直な方向の変位とすると、運動方程式は

$$w_{tt} - c^2 \nabla^2 w = 0, \quad \nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

とし、境界条件は円形枠  $C$  上で

$$w = 0$$

とする。ただし波の速さ  $c$  は面密度  $\sigma$  と張力  $\tau$  を用いて

$$c = \sqrt{\frac{\tau}{\sigma}}$$

とする。ここで次のように  $w$  を時間、空間に分離できるとして

$$w = u(x, y)T(t)$$

とすると固有値  $\lambda$  として

$$\begin{aligned} \frac{d^2 T}{dt^2} + c^2 \lambda T &= 0 \\ \nabla^2 u + \lambda u &= 0 \end{aligned} \tag{10.16}$$

境界条件は

$$u(x, y)|_C = 0$$

となるが、この条件ではなくて、法線ベクトルを  $n$  として

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_C = 0, \quad \left[ \frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u \right]_C = 0$$

としてもよい。式 10.16 はヘルムホルツ方程式と呼ばれる。  
 これを解くには次のように極座標表示にしたほうが便利である。

$$x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi$$

$\lambda = k^2$  として演算子を極座標に書き換えると式 10.14 から円  $C$  の半径を  $a$  として

$$\nabla^2 u + k^2 u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + k^2 u = 0$$

$$u(r, \phi)|_{r=a} = 0$$

ここで次のように変数分離して

$$u = R(r)\Phi(\phi)$$

10.16 は次のようになる。

$$\frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + \nu^2 \Phi = 0 \tag{10.17}$$

$$r \frac{d}{dr} \left( r \frac{dR}{dr} \right) + (k^2 r^2 - \nu^2) R = 0 \tag{10.18}$$

よって一般解は式 10.17 からは

$$\Phi = A \cos \nu \phi + B \sin \nu \phi$$

となる。 $w$  が 1 価であることを要求すると  $\nu$  は非負の整数  $n$  である。



### 10.3.4 3次元の場合

次に3次元の場合は次の球座標

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

を用いて式 10.12 は次の関係式を代入すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \\ &= \left( \frac{\partial r}{\partial x} \right) \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial r} + \left( \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} \right) \frac{\partial u}{\partial r} \\ &= \left( \frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \left( \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} \right) \frac{\partial u}{\partial r} \end{aligned}$$

以下同様に、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left( \frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \left( \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} \right) \frac{\partial u}{\partial r}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \left( \frac{\partial r}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \left( \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} \right) \frac{\partial u}{\partial r}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r} \\ \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} &= \frac{z^2 + y^2}{r^3}, \quad \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{z^2 + x^2}{r^3}, \quad \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = \frac{x^2 + y^2}{r^3} \end{aligned}$$

$$\left( \frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial r}{\partial z} \right)^2 = 1$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = \frac{2}{r}$$

だから

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \left( \left( \frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial r}{\partial z} \right)^2 \right) + \frac{\partial u}{\partial r} \left( \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} \right) \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial u}{\partial r} \left( \frac{2}{r} \right) \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{du}{dr} \right) = 0 \end{aligned} \tag{10.19}$$

と単純になるので、この解は一般に定数を  $c$  として  $r$  で積分し、

$$r^2 \frac{du}{dr} = c$$

となるから

$$\frac{du}{dr} = c_0 + \frac{c_1}{r^2} \tag{10.20}$$

が一般解である、  
 $c = 1/4\pi$  と選び、もういちど積分すると

$$u(r) = -\frac{1}{4\pi r} \quad (10.21)$$

とかける。これを 3 次元の場合の基本解という。これは  $r$  を下図の PQ の長さ

$$r = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}$$

としても式 10.12 が成り立つことに注目し、

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{x - x_1}{r^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial y} = -\frac{y - y_1}{r^3}$$

k

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial z} = -\frac{z - z_1}{r^3}$$

が成り立つので各式を足し合わせると位置ベクトル  $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_1$  として

$$\nabla \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (10.22)$$

特に電荷  $q$  の静電ポテンシャルが

$$u(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

とすると

$$E(r) = -\nabla u(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

となり電場の式を表している。定数を  $GM$  に書き換えれば万有引力の式にもなる。

つまり式 10.22 の式は  $\mathbf{r} = 0$  の位置に湧き出し口があることを表すベクトル場の式になっている。

分子のベクトルは

$$\frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{e}_r$$

とすれば単位ベクトルでかけて、この式は次と等価である。

$$\nabla u(r) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \mathbf{e}_r$$

逆に我々の実空間が 3 次元になっているのは、重力や電磁力はこの逆 2 乗則になっていることからいえる。

## 10.4 極座標ラプラス方程式

極座標系でラプラス方程式を考える。球座標を使うと

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$x = r \sin \theta \cos \phi$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi$$

$$z = r \cos \theta$$

として

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \sin \theta \cos \phi$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin \theta \sin \phi$$

$$\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r} = \cos \theta$$

となる。さらに次が成り立つ

$$\tan \phi = \frac{y}{x}$$

$$\tan^2 \theta = \frac{x^2 + y^2}{z^2}$$

が成り立つのでこれを  $x, y, z$  でさらに微分すると

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{1}{\tan \theta \sec^2 \theta} \frac{x}{z^2} = \frac{1}{r} \cos \theta \cos \phi$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{\tan \theta \sec^2 \theta} \frac{y}{z^2} = \frac{1}{r} \cos \theta \sin \phi$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{1}{\tan \theta \sec^2 \theta} \frac{x^2 + y^2}{z^3} = -\frac{1}{r} \sin \theta$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{1}{\sec^2 \phi} \frac{y}{x^2} = -\frac{1}{r} \frac{\sin \phi}{\sin \theta}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{1}{\sec^2 \phi} \frac{1}{x} = \frac{1}{r} \frac{\cos \phi}{\sin \theta}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$$

を用いて書き換えると、

$$\nabla^2 u \equiv \frac{1}{r^2} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \right] = 0 \quad (10.23)$$

を得る。そこで変数分離

$$u = R(r)Y(\theta, \phi)$$

として、代入し、移項すると定数でおけるはずで、

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) = -\frac{1}{Y} \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} \right\} = \lambda$$

とおく。両辺から次の2組の微分方程式ができる。

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} - \lambda R = 0 \quad (10.24)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} + \lambda Y = 0 \quad (10.25)$$

興味あることに、この第2式は第2部で扱う角運動量の  $L^2$  演算子と同型である。

つまり、ラプラス方程式を満たす極座標をとっただけで角運動量のエネルギーが自然に出てくる背景があることになる。

第2式をさらに変数分離し、

$$Y(\theta, \phi) = \Theta(\theta)\Phi(\phi)$$

とすることで

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \sin\theta \frac{\partial\Theta}{\partial\theta} \right) \Phi(\phi) + \frac{\Theta(\theta)}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} + \lambda\Theta(\theta)\Phi(\phi) = 0$$

となるが、 $m^2$  を定数として調和振動の類推から

$$\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + m^2\Phi = 0 \quad (10.26)$$

とすれば各項に  $\Phi$  を出せるので、

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \sin\theta \frac{\partial\Theta}{\partial\theta} \right) + \frac{m^2}{\sin^2\theta} \Theta(\theta) + \lambda\Theta(\theta) = 0 \quad (10.27)$$

を得る。

## 10.5 ルジャンドル多項式

ルジャンドルの多項式は自由粒子のシュレディンガー方程式の解、ラプラス方程式の解、等物理学でよく登場する。まず、この母関数を見つけることでその性質をみていこう。そのために分数関数を近似的に展開するが原点で特異点をもってしまふこの形式から特異点に物理的な意味をもたせて近似展開することで物理的に有用な解釈ができるようになることは注目すべきである。

さらにこの多項式から直交関数系がつくられ、境界条件のもとで完全系をつくる。これはまさに量子論の背景であり、古典的な前提だけで角運動量の量子化条件が出てくることは次節の球面調和関数を含めて、興味ある内容である。よって多角的に、この多項式と調和関数の持つ性質をここでみておこう。

### 10.5.1 ルジャンドルの多項式

次のような位置ベクトル  $r$  と  $r'$  のなす角を  $\theta$  として、逆数の展開を考える。ただし、 $0 < r < r'$  とする。

$$\frac{1}{|r - r'|} = \frac{1}{\sqrt{|r|^2 + |r'|^2 - 2|r||r'| \cos\theta}}$$

$r/r'$  で展開すると  $x$  が小さければ  $(1+x)^n = 1 + nx + n(n-1)x/2 + \dots$  を用いて

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{|r|^2 + |r'|^2 - 2|r||r'| \cos\theta}} &= \frac{1}{r' \sqrt{1 - 2r/r' \cos\theta + (r/r')^2}} \\ &= \frac{1}{r'} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left( -2r/r' \cos\theta + (r/r')^2 \right) + \frac{3}{2} \left( 2r/r' \cos\theta \right)^2 + \dots \right\} \\ &= \frac{1}{r'} \left\{ 1 + \cos\theta \left( r/r' \right) + \frac{1}{2} \left( 3 \cos^2\theta - 1 \right) \left( r/r' \right)^2 + \dots \right\} \end{aligned}$$

となり  $\cos\theta$  の関数になるのでこれをルジャンドル多項式として

$$\begin{aligned} \frac{1}{r' \sqrt{1 - 2r/r' \cos\theta + (r/r')^2}} &\equiv \frac{1}{r'} \sum_{l=0}^{\infty} \left( \frac{r}{r'} \right)^l P_l(\cos\theta) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^l}{r'^{l+1}} P_l(\cos\theta) \end{aligned} \quad (10.28)$$

と定義する。  $\cos \theta = x$ ,  $r/r' = t$  と置き換えると次のように各微分の足し合わせが元の関数になる関係式が成り立つ。

$$(1 - 2xt + t^2)^{-1/2} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \frac{\partial}{\partial t^l} (1 - 2xt + t^2)^{-1/2} \Big|_{t=0} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x) t^l$$

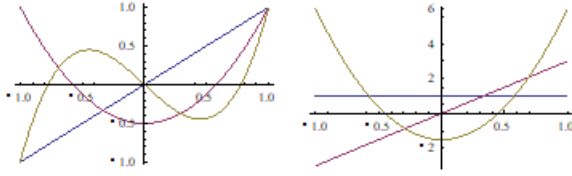


図 10.7: 3 次までの Legendre 関数 (左) とその微分

そこで  $(1 - 2xt + t^2)^{-1/2}$  を母関数として次のように和を使わずに公式化でき、これを Rodrigues formula という。

$$P_l(x) \equiv \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l \quad (10.29)$$

これを確かめるために次のように Legendre 関数の母関数を定義する。

$$F(t, x) \equiv (1 - 2xt + t^2)^{-1/2} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x) t^l$$

これを  $t$  について微分すると元の関数が現れるので、漸化式を求められそうである。

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{x - t}{(1 - 2xt + t^2)^{3/2}} = \frac{x - t}{1 - 2xt + t^2} F$$

そこで、これに展開式を代入し、

$$(1 - 2xt + t^2) \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x) l t^{l-1} = (x - t) \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x) t^l$$

$t^l$  の係数を比較することで次の漸化式を得る。

$$(l + 1)P_{l+1} - (2l + 1)xP_{l-1}'(x) + lP_{l-1} = 0 \quad (10.30)$$

$P_0 = 1, P_1 = x$  を初期条件に選べばこの式は Legendre 多項式の定義になる。  
また母関数を  $x$  で微分すると

$$P_{l+1}' - 2xP_{l-1}'(x) + P_{l-2}'(x) = P_{l-1}'(x) \quad (10.31)$$

が得られる。この関係から後に示すルジャンドルの微分方程式が導かれる。  
Legendre 多項式は次のような直交関係の性質がある。

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = \frac{2}{2n + 1} \delta_{mn} \quad (10.32)$$

これはフーリエ級数のように  $-1 \leq x \leq 1$  の範囲の連続で有界な関数は全て次のように和の形で表現できることを表している。

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x)$$

これから次のような積分値は  $m$  のみで決まる。

$$\int_{-1}^1 P_m(x)f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{2}{2n+1} \delta_{mn} = c_m \frac{2}{2m+1}$$

よってフーリエ変換のように係数が求まり、式 10.29 から

$$c_m = \frac{2m+1}{2} \int_{-1}^1 P_m(x)f(x)dx = \frac{(2m+1)}{2^{m+1}m!} \int_{-1}^1 \left( \frac{d^m}{dx^m} (x^2-1)^m \right) f(x)dx$$

となるが部分積分から  $f(x)$  が  $m$  回以上微分が可能であるとして

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \left( \frac{d^m}{dx^m} (x^2-1)^m \right) f(x)dx &= \left[ (x^2-1)^m f(x) \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 (x^2-1)^m \frac{d^m}{dx^m} f(x)dx \\ &= (-1)^m \int_{-1}^1 (x^2-1)^m \frac{d^m}{dx^m} f(x)dx \end{aligned}$$

となるので

$$c_m = \frac{(2m+1)}{2^{m+1}m!} (-1)^m \int_{-1}^1 (x^2-1)^m \frac{d^m}{dx^m} f(x)dx$$

を得る。これから興味ある例としてディラックのデルタ関数が次のようにルジャンドル多項式で展開される。

$$\delta(x-x') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 P_n(x')P_n(x)dx \quad (10.33)$$

量子力学では内積を定義するヒルベルト空間において無限の基底ベクトルが必要としている。

このルジャンドルの多項式を 1 つのベクトルみなせば条件付きではあるが基底として選ぶことができる。

ルジャンドルの多項式に変数を 1 つ追加したルジャンドルの陪多項式  $P_l^m(x)$  も物理と非常に関係深い。

これは次のルジャンドルの陪微分方程式から求めることができる。

$$(1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} P(x) - 2x \frac{d}{dx} P(x) + \left[ l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] P(x) = 0 \quad (10.34)$$

この式において  $m=0$  とするとこれはルジャンドルの微分方程式になる。そこで  $m=0$  から  $m$  を 1 つずつ増やしていくと

$$\begin{aligned} \left[ (1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} - 2x \frac{d}{dx} + l(l+1) \right] P_l^{m=0} &= 0 \\ \left[ (1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} - 2x \frac{d}{dx} + l(l+1) \right] P_l^1 &= \frac{1^2}{1-x^2} P_l^1(x) \\ \left[ (1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} - 2x \frac{d}{dx} + l(l+1) \right] P_l^2 &= \frac{2^2}{1-x^2} P_l^2(x) \end{aligned}$$

↓...

$$\left[ (1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} - 2x \frac{d}{dx} + l(l+1) \right] P_l^m(x) = \frac{m^2}{1-x^2} P_l^m(x)$$

よってルジャンドルの陪多項式がルジャンドル多項式を用いて

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x)$$

式 10.29 から

$$P_l^m(x) = \frac{1}{2^l l!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l$$

となることがわかる。ただし、被微分項は  $x$  の  $2l$  次しかないので

$$m \leq l \quad (10.35)$$

を満たす整数でなくてはならない。

角運動量に類似して  $m \rightarrow -m$  の場合を考えると  $P_l^{-m}$  も一般解とみなすことが式 10.34 の対称性からわかる。しかし、既に  $\{P_l^m | 0 \leq m \leq l\}$  は完備系をなしているので独立な解はこれ以上存在できず、定数を  $c$  として

$$P_l^{-m}(x) = c P_l^m$$

が成り立つとする。両辺を  $(1-x^2)^{m/2}$  で割り、その後  $x=1$  とすると

$$\begin{aligned} (1-x^2)^{m/2} P_l^{-m}(x)|_{x=1} &= c (1-x^2)^{m/2} P_l^m(x)|_{x=1} \\ \frac{(-1)^m}{(x^2-1)^m} \frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}} (x^2-1)^l|_{x=1} &= c \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l|_{x=1} \end{aligned}$$

この両辺を微分することから

$$c = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \quad (10.36)$$

となることがわかる。よってルジャンドルの陪多項式は

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x) \quad (10.37)$$

となる。

式 10.34 は  $l(l+1)$  を係数にしていることが重要でこれが次に見るように角運動量の量子化と関係している。

### 10.5.2 球面定常波

次に式 10.27 を解くことを考えよう。

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) + \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \Theta(\theta) + \lambda \Theta(\theta) = 0$$

まず式 10.26 は古典的な単振動のように

$$\Phi(\phi) = A \cos m\phi + B \sin m\phi$$

となる。

ここで周期的な境界条件を仮定する。つまり、 $n$  を整数として

$$\phi = 2\pi n \rightarrow \Phi(\phi) = 0$$

を仮定すると重要な条件として  $m$  は整数でないといけなくなる。古典的な角振動数との相違があることに留意する。

次に式、10.27 は次の変数変換

$$\xi = \cos \theta$$

とすると

$$\frac{d}{d\xi} \left( (1-\xi^2) \frac{d\Theta}{d\xi} \right) + \left( \lambda - \frac{m^2}{1-\xi^2} \right) \Theta = 0, \quad -1 \leq \xi \leq 1 \quad (10.38)$$

とまとめることができる。しかし、この式が  $\xi = \pm 1$  で特異点を持つことに留意する。これを回避するために、まず  $m = 0$  として、ここでは天下一的に  $\lambda = l(l+1)$  とおくと

$$\frac{d}{d\xi} \left( (1 - \xi^2) \frac{d\Theta}{d\xi} \right) + l(l+1)\Theta = 0 \quad (10.39)$$

とかける。

一般に  $m \neq 0$  の場合は

$$\frac{d}{d\xi} \left( (1 - \xi^2) \frac{d\Theta}{d\xi} \right) + \left( l(l+1) - \frac{m^2}{1 - \xi^2} \right) \Theta = 0 \quad (10.40)$$

であり、これをルジャンドルの微分方程式 (**Legendre's differential equation**) という。これを解くために次のようにベキ展開する。

$$\Theta = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \xi^j = a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + \dots$$

を代入すると次の係数の関係が得られる。

$$a_{j+2} = -\frac{l(l+1) - j(j+1)}{(j+1)(j+2)} a_j, \quad (j = 0, 1, 2, \dots) \quad (10.41)$$

これは  $a_0 \neq 0, a_1 = 0$  または  $a_0 = 0, a_1 \neq 0$  とすると、次の解が級数の形で得られる。

$$S_{\text{even}} = a_0 + a_2 \xi^2 + a_4 \xi^4 + \dots$$

$$S_{\text{odd}} = a_1 + a_3 \xi^3 + a_5 \xi^5 + \dots$$

しかし、一般的な  $l$  をとるとこれらの解は発散することが知られていて、収束条件が

$$l = 0, 1, 2, 3, \dots$$

の整数をとる場合のみである。先の  $m$  に加えて、ここでも整数条件が出てきたことに留意する。

これはラプラス方程式、球面上での波動方程式から自然に量子化が得られることを示唆する。

この考察は第7部でおこなう。ここではルジャンドルの1次多項式を  $P_l(\xi)$  とする。

式 10.41 から

$$a_j = -\frac{(j+1)(j+2)}{l(l+1) - j(j+1)} a_{j+2}$$

となるので  $j = l-2$  とすると

$$\begin{aligned} a_{l-2} &= -\frac{(l-1)l}{l(l+1) - (l-2)(l-1)} a_l \\ &= -\frac{(l-1)l}{2(2l-1)} a_l \end{aligned}$$

となる。さらに  $l$  から偶数を引いていくと

$$\begin{aligned} a_{l-4} &= (-1)^2 \frac{(l-3)(l-2)(l-1)l}{4 \cdot 2 \cdot (2l-3)(2l-1)} a_l, \dots \\ a_{l-2k} &= (-1)^k \frac{(l-2k+1)(l-2k+2) \dots (l-1)l}{2k \cdot 2(k-1) \dots 2 \cdot (2l-2k+1)(2l-2k+3) \dots (2l-1)} a_l \\ &= (-1)^k \frac{l!}{(l-2k)!} \cdot \frac{1}{2^k k!} \cdot \frac{(2l-2k)!}{(2l)!} \cdot \frac{l! 2^k}{(l-k)!} a_l \end{aligned}$$

となる。  $a_l$  は任意に選べるので

$$a_l = \frac{(2l)!}{2^l (l!)^2}$$



と選ぶとこれが

$$P_l(1) = 1$$

と規格化することになる。このとき

$$P_l(\xi) = \frac{1}{2^l} \sum_{k=0}^K \frac{(-1)^k}{k!} \frac{(2l-2k)!}{(l-k)!(l-2k)!} \xi^{l-2k} \quad (10.42)$$

ただし、

$$K = \begin{cases} \frac{l}{2} & (l: \text{even}) \\ \frac{l-1}{2} & (l: \text{odd}) \end{cases} \quad (10.43)$$

である。これを  $l$  次ルジャンドル多項式 (**Legendre polynomial**) という。

この式の中には 2 項展開の公式がみてとれるので

$$(1 - \xi^2)^l = \sum_{k=0}^l (-1)^k \frac{l!}{k!(l-k)!} \xi^{2k} = \sum_{k=0}^l (-1)^{l-k} \frac{l!}{k!(l-k)!} \xi^{2l-2k}$$

であり、式 10.43 から

$$\frac{d^l}{d\xi^l} \left( \sum_{k=K+1}^l \dots \right) = 0$$

をつかうと、次のように簡単になる。

$$P_l(\xi) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{d\xi^l} ((\xi^2 - 1)^l) \quad (10.44)$$

これをロドリゲスの公式 (Rodrigue's formula) という。

これは単純に 10.42 を書き換えたことだけでなく、物理的には動的な関係を表す微分方程式に変化したことは重要である。

これから、次が確認できる。

$$P_l(1) = 1$$

$$P_l(-1) = (-1)^l$$

重要なのは次の関数系としての直交性だろう。

$$\int_{-1}^1 P_l(\xi) P_{l'}(\xi) d\xi = \begin{cases} \frac{2}{2l+1} & (l = l') \\ 0 & (l \neq l') \end{cases}$$

この関数は  $n = 5$  までを図にすると次のようになる。

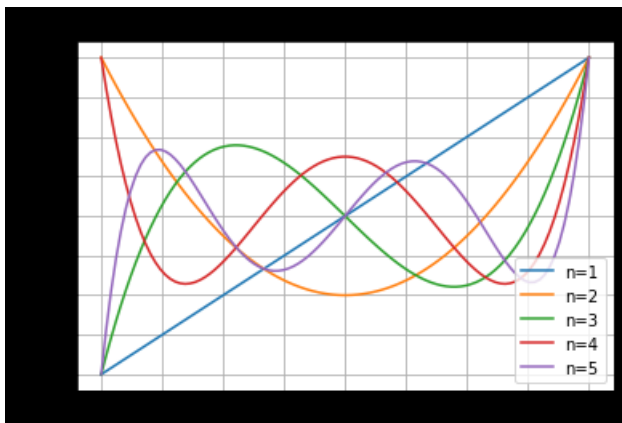


図 10.8: ルジャンドルの多項式

さらに、この関数形は完全系をなす。面白いことに関数は多様につくることができるが、全てルジャンドル多項式の1次結合で表されるのである。フーリエ級数の三角関数のような直交性を多項式にも与えることが興味深い。

ワイエルシュトラス (Weierstrass) の定理は

定理 14. 閉区間上の任意の連続関数は多項式によって一様に近似できる。

があるのでこの多項式がまるで基底のようにふるまうことが関数空間で可能になる。

ここで作られる空間が物理の角運動量や量子論に関係している。

### 10.5.3 ルジャンドル倍関数

次に  $m = 0$  の場合を考える。 $\lambda = l(l+1)$  とおく。このとき、 $m$  を整数として、

$$\Theta(\xi) = (1 - \xi^2)^{m/2} P(\xi) \quad (10.45)$$

と置き、10.40 に入れると

$$\frac{d}{d\xi} \left( (1 - \xi^2) \frac{d\Theta}{d\xi} \right) + \left( l(l+1) - \frac{m^2}{1 - \xi^2} \right) \Theta = 0$$

は次のように変形できる。

$$\begin{aligned} 0 &= -2\xi \left( (-\xi m)(1 - \xi^2)^{m/2-1} P(\xi) + (1 - \xi^2)^{m/2} \frac{dP(\xi)}{d\xi} \right) \\ &+ (1 - \xi^2) \frac{d}{d\xi} \left( -\xi m(1 - \xi^2)^{m/2-1} P(\xi) + (1 - \xi^2)^{m/2} \frac{dP(\xi)}{d\xi} \right) \\ &+ \left( l(l+1) - \frac{m^2}{1 - \xi^2} \right) (1 - \xi^2)^{m/2} P(\xi) \\ &= 2\xi^2 m P(\xi) (1 - \xi^2)^{m/2-1} - 2\xi (1 - \xi^2)^{m/2} \frac{dP(\xi)}{d\xi} \\ &- m(1 - \xi^2)^{m/2} P(\xi) + \xi^2 m(m-2)(1 - \xi^2)^{m/2-1} P(\xi) - \xi m(1 - \xi^2)^{m/2} \frac{dP(\xi)}{d\xi} \\ &- \xi m(1 - \xi^2)^{m/2} \frac{dP(\xi)}{d\xi} - (1 - \xi^2)^{m/2+1} \frac{d^2 P(\xi)}{d\xi^2} + l(l+1)(1 - \xi^2)^{m/2} P(\xi) - \frac{m^2}{1 - \xi^2} (1 - \xi^2)^{m/2} P(\xi) \\ &= (1 - \xi^2)^{m/2} \left( l(l+1) - \frac{m + \xi^2 m - \xi^2 m^2 + m^2}{1 - \xi^2} \right) P(\xi) \\ &+ (1 - \xi^2)^{m/2} (-2\xi(m+1)) \frac{dP(\xi)}{d\xi} \\ &+ (1 - \xi^2)^{m/2} (1 - \xi^2) \frac{d^2 P(\xi)}{d\xi^2} \end{aligned}$$

を得るが、最後の第1項について

$$\frac{m - \xi^2 m - \xi^2 m^2 + m^2}{1 - \xi^2} = \frac{(1 - \xi^2)(m^2 + m)}{1 - \xi^2} = m(m+1)$$

となるから両辺  $\xi \neq \pm 1$  として  $(1 - \xi^2)^{m/2}$  で割れば

$$(1 - \xi^2) \frac{d^2 P}{d\xi^2} - 2(m+1)\xi \frac{dP}{d\xi} + [l(l+1) - m(m+1)] P = 0 \quad (10.46)$$

という、2階までの微分方程式が得られる。ただし、

$$\xi = \pm 1$$

の場合は留意がいる。

さらに、この時の多項式  $P(\xi)$  は式 10.44 から微分をした形にしても成り立つ。

そこで、この式は  $l, m$  の整数を変数に持つので改めて、 $P$  の  $m$  回微分に対して、次のように定義する。

$$\begin{aligned}\Theta(\xi) &= P_l^m(\xi) \equiv (1 - \xi^2)^{m/2} P_l^{(m)} \\ &= \frac{(1 - \xi^2)^{m/2}}{2^l l!} \frac{d^{l+m}}{d\xi^{l+m}} ((\xi^2 - 1)^l), \quad (m = 0, 1, 2, \dots, l)\end{aligned}\quad (10.47)$$

これをルジャンドルの倍関数 (**associated Legendre polynomials**) と定義すると

これは  $\xi = \pm 1$  でも有限な解と見なすことができる。

従って次のように 10.46 を拡張する。

$$(1 - \xi^2) \frac{d^2 P_l^{(m)}}{d\xi^2} - 2(m+1)\xi \frac{dP_l^{(m)}}{d\xi} + [l(l+1) - m(m+1)] P_l^{(m)} = 0 \quad (10.48)$$

この解が一般に式 10.47 になる。さらに

$$-1 \leq \xi \leq 1$$

において有限な解は他にないことが示されている。

さらにこの場合の関数直交性は  $m$  を固定したときに次のように拡張される。

$$\int_{-1}^1 P_l^m(\xi) P_{l'}^m(\xi) d\xi = \begin{cases} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{2}{2l+1} & (l = l') \\ 0 & (l \neq l') \end{cases}$$

さらに、直交系  $\{P_l^m(\xi), l = m, m+1, m+2, \dots\}$  が完全系をつくることも知られている。

$$\sum_m^{\text{All}} |m\rangle \langle m| = 1$$

従って直交関数系においては有限な境界の存在が重要になる。

これらは第 7 部の基礎的な場の理論で再び考察する。

/////

さらに微分してから 10.45 を代入すると

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \left( (1 - \xi^2) \frac{d\Theta}{d\xi} \right) + l(l+1) \left( \frac{d}{d\xi} \Theta \right) = 0$$

$$\frac{d}{d\xi} \left( -2\xi \frac{d[(1 - \xi^2)^{m/2} P(\xi)]}{d\xi} \right) + \frac{d}{d\xi} \left( (1 - \xi^2) \frac{d}{d\xi} \frac{d[(1 - \xi^2)^{m/2} P(\xi)]}{d\xi} \right) + l(l+1) \left( \frac{d}{d\xi} \right) (1 - \xi^2)^{m/2} P(\xi) = 0$$

よって、まず第 1 項を  $A$  として

$$\begin{aligned}
A &= \frac{d}{d\xi} \left( -2\xi \left( (-2)(\xi m)(1 - \xi^2)^{m/2-1} P(\xi) + (1 - \xi^2)^{m/2} \frac{dP(\xi)}{d\xi} \right) \right) \\
&= -2 \left( (-2)(\xi m)(1 - \xi^2)^{m/2-1} P(\xi) + (1 - \xi^2)^{m/2} \frac{dP(\xi)}{d\xi} \right) - 2\xi \frac{d}{d\xi} \left( (-2)(\xi m)(1 - \xi^2)^{m/2-1} P(\xi) + (1 - \xi^2)^{m/2} \frac{dP(\xi)}{d\xi} \right) \\
&= 4\xi m(1 - \xi^2)^{m/2-1} P(\xi) - 2(1 - \xi^2)^{m/2} \frac{dP(\xi)}{d\xi} \\
&\quad - 2\xi \left( -2m(1 - \xi^2)^{m/2-1} P(\xi) - 2(\xi^2 m(m-2))(1 - \xi^2)^{m/2-2} P(\xi) - 2\xi m(1 - \xi^2)^{m/2-1} \frac{dP(\xi)}{d\xi} \right) \\
&\quad - 2\xi \left( -2\xi m(1 - \xi^2)^{m/2-1} \frac{dP(\xi)}{d\xi} + (1 - \xi^2)^{m/2} \frac{d^2 P(\xi)}{d\xi^2} \right) \\
&= \left( 4\xi m(1 - \xi^2)^{m/2-1} + 4\xi m(1 - \xi^2)^{m/2-1} - 2\xi^2 m(m-2)(1 - \xi^2)^{m/2-2} \right) P(\xi) \\
&\quad + \left( -2(1 - \xi^2)^{m/2} + 2\xi^2 m(1 - \xi^2)^{m/2-1} + -2\xi^2 m(1 - \xi^2)^{m/2-1} \right) \frac{dP(\xi)}{d\xi} \\
&\quad + \left( -2\xi(1 - \xi^2)^{m/2} \right) \frac{d^2 P(\xi)}{d\xi^2}
\end{aligned}$$

同様に第2項を  $B$  として

$$\begin{aligned}
B &= \frac{d}{d\xi} \left( (1 - \xi^2) \left( -\xi m(1 - \xi^2)^{m/2-1} \frac{dP(\xi)}{d\xi} + (1 - \xi^2)^{m/2} \frac{d^2 P(\xi)}{d\xi^2} \right) \right) \\
&= -2\xi \left( -\xi m(1 - \xi^2)^{m/2-1} \frac{dP(\xi)}{d\xi} + (1 - \xi^2)^{m/2} \frac{d^2 P(\xi)}{d\xi^2} \right) \\
&\quad + (1 - \xi^2) \left( -m(1 - \xi^2)^{m/2-1} \frac{dP(\xi)}{d\xi} + \xi^2 m(m-2)(1 - \xi^2)^{m/2-2} \frac{dP(\xi)}{d\xi} - \xi m(1 - \xi^2)^{m/2-1} \frac{d^2 P(\xi)}{d\xi^2} \right) \\
&\quad + (1 - \xi^2) \left( -\xi m(1 - \xi^2)^{m/2-1} \frac{d^2 P(\xi)}{d\xi^2} + (1 - \xi^2)^{m/2} \frac{d^3 P(\xi)}{d\xi^3} \right) \\
&= \left( 2\xi^2 m(1 - \xi^2)^{m/2-1} - m(1 - \xi^2)^{m/2} + \xi^2 m(m-2)(1 - \xi^2)^{m/2-1} \right) \frac{dP(\xi)}{d\xi} \\
&\quad + \left( -2\xi(1 - \xi^2)^{m/2} - \xi m(1 - \xi^2)^{m/2} - \xi m(1 - \xi^2)^{m/2} \right) \frac{d^2 P(\xi)}{d\xi^2}
\end{aligned}$$

同様に第3項を  $C$  として

$$\begin{aligned}
C &= l(l+1) \left( \frac{d}{d\xi} \right) \left( (1 - \xi^2)^{m/2} P(\xi) \right) \\
&= l(l+1) \left( -\xi m(1 - \xi^2)^{m/2-1} P(\xi) + (1 - \xi^2)^{m/2} \frac{dP(\xi)}{d\xi} \right)
\end{aligned}$$

/////

## 10.6 球面調和関数

空間をどのように波が満たすかは、平面と違ってイメージしにくい。ラプラス方程式という指針をつかって、このイメージを求めていこう。

物理学にとって、どのように波生まれて、どう伝播し、そして重なりあうかといったことは特に後部の量子論になると重要な内容になる。

### 10.6.1 球面調和関数

例えば3次元空間に電荷分布があり、その外側でのクーロンポテンシャルを  $U$  とすると次のラプラス方程式を満たす。

$$\Delta U = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) U(x, y, z) = 0$$

極座標への変換として

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta$$

するとラプラス方程式が

$$\left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right\} U(r, \theta, \phi) = 0 \quad (10.49)$$

のように変形される。これは動径部分と角度部分に変数分離でき

$$\hat{\mathbf{L}}^2 = - \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right\} \quad (10.50)$$

とおくと

$$\left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r - \frac{\hat{\mathbf{L}}^2}{r^2} \right\} U(r, \theta, \phi) = 0 \quad (10.51)$$

と表される。さらにこの  $\hat{\mathbf{L}}$  はに  $\hbar$  をかければそのまま角運動量の演算子である。よって

$$\hat{\mathbf{L}} = -i(\mathbf{r} \times \nabla)$$

である。各成分を極座標で表しておく。

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{L}}_x &= -i \left( y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) = i \left( \sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \\ \hat{\mathbf{L}}_y &= -i \left( z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) = i \left( -\cos \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \\ \hat{\mathbf{L}}_z &= -i \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) = -i \frac{\partial}{\partial \phi} \end{aligned}$$

これらは次を満たす。

$$\hat{\mathbf{L}}^2 = \hat{\mathbf{L}}_x^2 + \hat{\mathbf{L}}_y^2 + \hat{\mathbf{L}}_z^2$$

ラプラス方程式はまず次のように変数分離をして 10.51 に代入する。

$$U(r, \theta, \phi) = R(r)\Theta(\theta, \phi)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rR(r)) \Theta(\theta, \phi) - \left( \frac{\hat{\mathbf{L}}^2}{r^2} \Theta(\theta, \phi) \right) R(r) = 0$$

両辺に  $r^2/(R\Theta)$  をかけて整理すると

$$\frac{r}{R(r)} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rR(r)) = \frac{(\hat{\mathbf{L}}^2 \Theta(\theta, \phi))}{\Theta(\theta, \phi)} = \text{Const} = l(l+1)$$

となる。定数は何でもいいが後のために  $l(l+1)$  とおく。するとこの式は次の2つの微分方程式になる。

$$r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} R(r) + 2r \frac{\partial}{\partial r} R(r) = l(l+1)R(r) \quad (10.52)$$

$$\hat{L}^2 \Theta(\theta, \phi) = l(l+1)\Theta(\theta, \phi) \quad (10.53)$$

動径方向の解は単純に次のようにおけば満足する。

$$R(r) = c_1 r^l + c_2 r^{-(l+1)} \quad (10.54)$$

角度のほうを解くにはさらに次のように変数分離する必要がある。

$$\Theta(\theta, \phi) = P(\theta)E(\phi)$$

これを代入し、 $\sin^2 \theta / PE$  を両辺にかけると式 10.50 がわかっているの

$$-\frac{\sin \theta}{P} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{E} \frac{\partial^2 E}{\partial \phi^2} = l(l+1) \sin^2 \theta$$

となる。これも定数になるので後のために  $m^2$  とおき整理すると

$$\frac{\sin \theta}{P} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) + l(l+1) \sin^2 \theta = -\frac{1}{E} \frac{\partial^2 E}{\partial \phi^2} = m^2$$

さらに次の2つの微分方程式に分けられる。

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} P(\theta) = -l(l+1)P(\theta) \quad (10.55)$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \phi^2} = -m^2 E(\phi) \quad (10.56)$$

後者の式からは簡単に解が

$$E(\phi) = c \text{Exp}[im\phi] \quad m \in \mathbf{Z} \quad (10.57)$$

となるがさらに周期的な境界条件

$$E(\phi + 2\pi) = E(\phi)$$

を課すと  $m$  は整数でなくてはならない。後は式 10.55 が残るがこれは次のように変数変換すると

$$\cos \theta = x$$

$$\sin \theta = \sqrt{1-x^2}$$

次のようになるから

$$\frac{dx}{d\theta} = -\sin \theta = -\sqrt{1-x^2}$$

$$\frac{d}{d\theta} = -\sqrt{1-x^2} \frac{d}{dx}$$

さらに

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\theta^2} &= -\sqrt{1-x^2} \frac{d}{dx} \left( -\sqrt{1-x^2} \frac{d}{dx} \right) \\ &= (1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} - \frac{1}{2} 2x \frac{(1-x^2)^{1/2}}{(1-x^2)^{1/2}} \frac{d}{dx} \\ &= (1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} - x \frac{d}{dx} \end{aligned}$$

を用いて変数変換すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2} \frac{d}{dx} \left( \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-x^2} \frac{d}{dx} P \right) - \frac{m^2}{1-x^2} P &= -l(l+1)P \\ \frac{d}{dx} \left( (1-x^2) \frac{d}{dx} P \right) - \frac{m^2}{1-x^2} P &= -l(l+1)P \\ (1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} P(x) - 2x \frac{d}{dx} P(x) + \left[ l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] P(x) &= 0 \end{aligned}$$

となりこれは式のルジャンドルの陪微分方程式 10.34 そのものになる。

2つの角度方向の解をまとめて

$$\Theta(\theta, \phi) = Y_l^m(\theta, \phi) \equiv C_{lm} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l, \quad l \in \mathbf{N} \quad (10.58)$$

とあらわすと  $Y_l^m$  を球面調和関数という。ルジャンドル多項式はこの球面調和関数の  $m = 0$  の場合である。よって式 10.53 の解はこの球面調和関数の線形結合で

$$\Theta = \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_l^m$$

とかける。規格化定数  $C_{lm}$  は次のように決める。まずルジャンドル多項式の直交関係式 10.32 から

$$\int_{-1}^{+1} P_l^m(x) P_l^{m'}(x) dx = \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

が成り立ち、式 10.57 からは

$$\int_0^{2\pi} \text{Exp}[i(m-m')\phi] d\phi = 2\pi \delta_{mm'}$$

があるので位相空間  $\Omega$  に対して、球面調和関数は

$$\int_{\Omega} d\Omega Y_l^{*m'} Y_l^m = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

を満たすためには式 10.58 から

$$|C_{lm}|^2 \frac{4\pi}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} = 1$$

$$C_{lm} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}}$$

と決まることになる。また球面調和関数は負の  $m$  に対するルジャンドル陪多項式の式 10.37 から

$$P_l^{-m}(\cos \theta) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\cos \theta)$$

となったのでこれを用いて次のような  $m$  に対する対称性があることがわかる。

$$Y_l^{-m}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l+m)!}{(l-m)!}} P_l^{-m}(\cos \theta) e^{-im\phi} = (-1)^m Y_l^{*m}(\theta, \phi)$$

また特別な点として

$$Y_l^m(0, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \delta_{m0}$$

$$Y_l^m(\pi, \phi) = (-1)^l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \delta_{m0}$$

がある。また、任意の球面上の関数  $f(\theta, \phi)$  は次のように球面調和関数を用いて展開できる。

$$f(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l d_{lm} Y_l^m(\theta, \phi) \quad (10.59)$$

ルジャンドル多項式の場合と同様に係数  $d_{lm}$  は次のようにして求められる。

$$d_{lm} = \int_{\Omega} d\Omega Y_l^{*m}(\theta, \phi) f(\theta, \phi)$$

### 10.6.2 球面調和関数の性質

球面調和関数の性質として次のような3次元空間上の2つの位置ベクトル  $\mathbf{x}, \mathbf{x}'$  をとる。この2つのベクトルのなす角は図のように

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi')$$

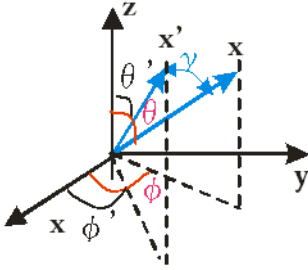


図 10.9: 球面調和関数の加法定理

を満たす。この時、ルジャンドルの多項式にこの  $\cos \gamma$  を用いると

$$P_l(\cos \gamma) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{m=l} Y_l^{*m}(\theta', \phi') Y_l^m(\theta, \phi) \quad (10.60)$$

となることが示せる。そこでベクトル  $\mathbf{x}'$  を固定しておいて  $P_l(\cos \gamma)$  は  $\theta, \phi$  の関数とみなすと一般に

$$P_l(\cos \gamma) = \sum A_{lm} Y_l^m(\theta, \phi)$$

と級数で表すことができる。さらに次の固有方程式が座標系に依存しないことから

$$\hat{L}^2 P_l(\cos \gamma) = l(l+1) P_l(\cos \gamma)$$

式 10.59 から  $l$  は固定できるので

$$P_l(\cos \gamma) = \sum_{m=-l}^l A_{lm}(\theta', \phi') Y_l^m(\theta, \phi)$$

と表される。よってこの係数は  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$  として

$$A_{lm}(\theta', \phi') = \int_{\Omega} Y_l^{*m}(\theta', \phi') P_l(\cos \gamma) d\Omega$$

から求めることができる。これから式 10.60 をルジャンドル多項式を用いて



$$P_l(\cos \gamma) = \sum_{m=-l}^{m=l} P_l^m(\cos \theta') P_l^m(\cos \theta) e^{im(\phi-\phi')}$$

と表すこともできる。具体的に  $Y_l^m$  の実部、虚部を色を変えて図示すると次のようになる。

$$Y_1^0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \cos(\theta)$$

$$Y_1^1 = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} e^{i\phi} \sin(\theta)$$

$$Y_2^1 = -\frac{1}{2} e^{i\phi} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \cos(\theta) \sin(\theta)$$

$$Y_3^1 = -\frac{1}{8} \sqrt{\frac{21}{\pi}} e^{i\phi} \sin(\theta) (5 \cos^2(\theta) - 1)$$

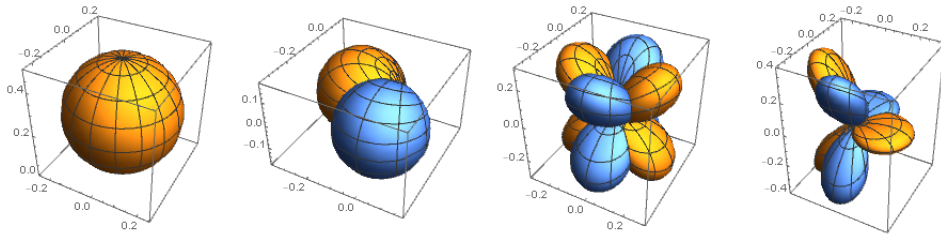


図 10.10: 左から  $Y_1^0, Y_1^1, Y_2^1, Y_3^1$  のグラフ : 実部と虚部を両方色を変えて図示している

$m = 0$  の時は  $\phi$  がなくなり、実部だけになるが  $m \neq 0$  になると図のように  $\pi/2$  だけずれてくる。

### 10.6.3 実部と虚部の境界問題

ここでラプラス方程式にもどる。空間の回転部分を切り出した式 10.25 は次のようになった。

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} + \lambda Y = 0$$

つまり、距離のない 3 次元空間が 2 つのパラメタ  $\theta, \phi$  の回転空間として定義できる。

前節の結果から、解の一価性を保ち、有界であるためには

$$\lambda = l(l+1), \quad (l = 0, 1, 2, \dots)$$

という固有値の満たす式が必要であった。この固有値は実数空間において極めて稀薄な領域をしめ、 $l$  の 2 次関数である。

さらに第 7 部で考察するが、第 9 部で見る PB 演算子

$$|\theta_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{s+1}} \sum_{n=0}^s e^{in\theta} |n\rangle$$

のように  $l+1$  と 1 ずれてかかることに留意する。

これは

$$\sum_{i=1}^l 2i = l(l+1)$$

だから偶数を  $l$  個足し合わせたものに等しい。興味あることに、この関数の定義域には、物理の双対性のよ  
うに

偶数と奇数に 2 分する性質がある。従って、これらの固有値には次の全部で  $2l + 1$  個の 1 次独立な固有関数

$$\{P_l(\cos \theta), P_l^m(\cos \theta) \cos m\phi, P_l^m(\cos \theta) \sin m\phi\}, (m = 1, 2, \dots, l)$$

これは複素数を用いて次のようにも書ける。

$$\{P_l^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi}\}, (m = -l, \dots, +l)$$

がある。そこで

$$P_l^0(\cos \theta) \equiv P_l(\cos \theta)$$

として、改めて球面調和関数 (spherical harmonics) を次で定義する。

$$Y_l^m(\theta, \phi) = \begin{cases} P_l^m(\cos \theta) \cos m\phi & (m = 0, 1, 2, \dots, l) \\ P_l^{|m|}(\cos \theta) \cos |m|\phi & (m = -1, -2, \dots, -l) \end{cases}$$

ただし、

$$l = 0, 1, 2, \dots$$

$$|m| \leq l$$

とする。

従って  $l$  が決まれば  $m$  の範囲が決まる。こうした  $m$  の自由度が登場することが多様性を生んでいる。

この関係は後の角運動量の量子化となっていくが、直交多項式の完全直交化により、

量子化は自然に導かれることは重要である。

天下りの的であったが、これで固有関数形が単位球面

$$S_1 : (0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi)$$

上で完全直交系をつくれるようになった。

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi [Y_l^m(\theta, \phi)]^2 \sin \theta d\theta d\phi = 2\pi \frac{1 + \delta_{0m}}{2l + 1} \frac{(l + |m|)!}{(l - |m|)!} \quad (10.61)$$

動径方向については式 10.24 において  $R = r^n$  とおくと  $\lambda = l(l + 1)$  だったので

$$(n - l)(n + l + 1)r^n = 0$$

を得る。これから式 10.54 のように

$$r^l, r^{-(l+1)}$$

が式 10.24 の解となる。

よって式 10.23 の一般的な解は次の足し合わせでつくることのできる。

$$u(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \left[ \sum_{m=-l}^{m=l} \alpha_{lm} Y_l^m(\theta, \phi) \right] r^l + \sum_{l=0}^{\infty} \left[ \sum_{m=-l}^{m=l} \beta_{lm} Y_l^m(\theta, \phi) \right] r^{-(l+1)} \quad (10.62)$$

これは後に出てくるような内向き、外向きの波ではないが  $m$  の有限性と  $l$  の無限和になっていることに注意  
する。

特に次に見るように  $r \rightarrow 0, r \rightarrow \infty$  の場合を考えて、上記 2 項が必要である。

これは実部と虚部との境界条件になり、次章の境界問題で考察するが簡単に

$$w = f(z) = \frac{1}{z}$$

これは  $z$  平面上の単位円の内部（外部）の点を  $w$  平面の単位円の外部（内部）に移す変換になる。原点  $z = 0$  と、無限遠  $z = \infty$  を除いて等角写像になる。下図のように向きが反対になることに注意する。

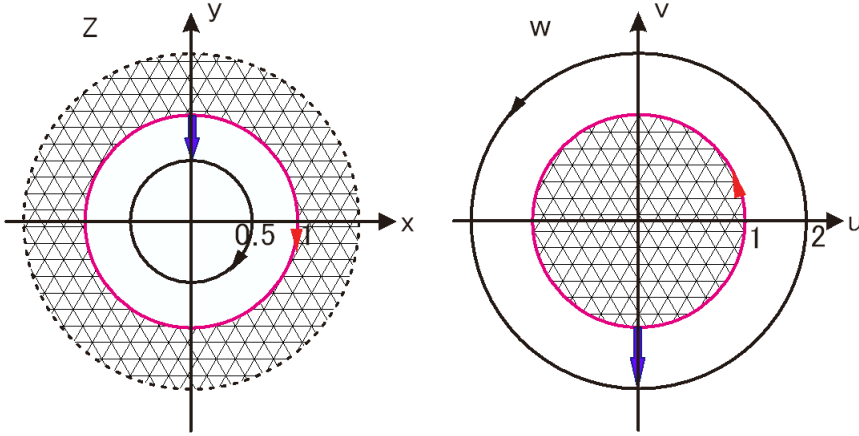


図 10.11: 内側と外側の変換

よって式 10.62 が球の内部と外部を伝播する波であることを示唆する。以下簡単な例をここではみておく。これだけでも十分に物理との重要な関わりが理解できる。

#### 10.6.4 内部ディリクレ問題

調和関数でみたように境界問題にはディリクレ問題とノイマン問題がある。ここではディリクレ問題を考える。

球の半径を  $a$  とすると境界条件を

$$u(r = a, \theta, \phi) = f(\theta, \phi)$$

とおく。内部においては  $u$  が  $r = 0$  で有限であるべきだから式 10.62 の第 2 項の

$$\beta_{lm} = 0$$

とおける。従って、

$$f(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \left[ \sum_{m=-l}^{m=l} \alpha_{lm} Y_l^m(\theta, \phi) \right] a^l$$

である。この時、式 10.61 と直交性からフーリエ変換のように

$$\alpha_{lm} = \frac{1}{2\pi a^l} \frac{2l+1}{1+\delta_{0m}} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\theta, \phi) Y_l^m(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi$$

と求めることができる。これは後で Green 関数を扱うがその解と同じである。

#### 10.6.5 外部ディリクレ問題

次に球の外部ディリクレ問題では球の表面の境界条件は先と同様に

$$u(r = a, \theta, \phi) = f(\theta, \phi)$$

とする。ただし、今度は  $r \rightarrow \infty$  で  $u \rightarrow 0$  となるべきだから、今度は第 1 項の

$$\alpha_{lm} = 0$$

となる。この時

$$u(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \left[ \sum_{m=-l}^{m=l} \beta_{lm} Y_l^m(\theta, \phi) \right] r^{-(l+1)}$$

となる。これは例えば  $l=0$  であれば電荷のポテンシャルの形をとることが見える。つまり、 $l=0$  であれば

$$u = \frac{Y_0^0}{r} = \frac{1}{r}$$

となり、点電荷のポテンシャルである。これが先の図 10.10 の左端の場合である。

さらに  $l=1$  の場合は  $m = -1, 0, 1$  となるので

$$\frac{Y_1^1}{r^2} = \frac{x}{r^3} = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r} \right)$$

$$\frac{Y_1^0}{r^2} = \frac{z}{r^3} = -\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \right)$$

$$\frac{Y_1^{-1}}{r^2} = \frac{y}{r^3} = -\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{r} \right)$$

となるが、これは 2 重極ポテンシャルで先の図 10.10 の左から 2 番目になる。

以下同様に  $l=2$  の時は 4 重極ポテンシャルが得られる。

つまり、調和関数が原点に集中して多重極を表していることになる。

### 10.6.6 一般化

詳しくは次章でみるが、

$$w = e^z$$

の変換を考えると下図に見るように  $w$  平面の 1 点が  $z$  平面上では無限個の横帯に相当する対数関数は無限多価関数である。

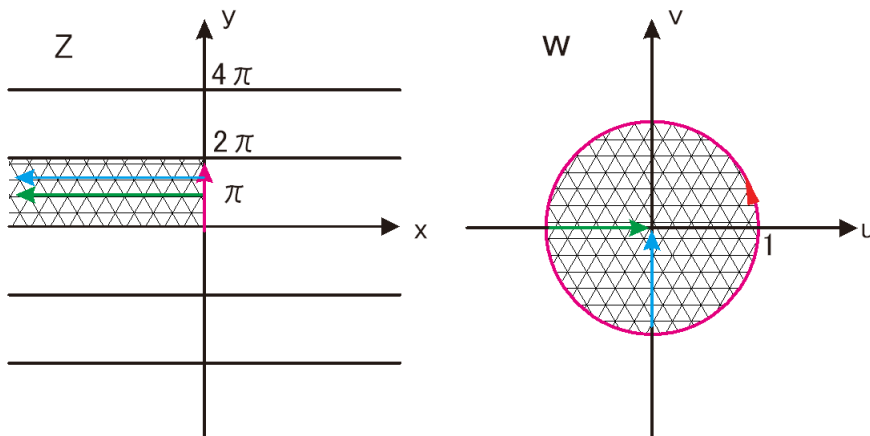


図 10.12:  $w = e^z$  では  $z$  空間の  $2\pi$  までの負領域が  $w$  空間の単位円内部に写る。正領域は外部に写る

そこで次の無限区間における境界値問題を考える。

$$\begin{cases} \frac{d^2 u}{dx^2} + \lambda u = 0 & (-\infty < x < \infty) \\ |x| \rightarrow \infty & u(x) \rightarrow \text{bounded domain} \end{cases}$$

この微分方程式は  $\lambda < 0$  であれば  $u \equiv 0$  のみが解になる。  
 $\lambda \geq 0$  であれば、初等的な単振動であるが、次元を上げて、 $\lambda$  を指数にとると

$$u(x, \lambda) = \begin{cases} A(\lambda)e^{i\sqrt{\lambda}x} + B(\lambda)e^{-i\sqrt{\lambda}x} & (\lambda > 0) \\ \text{Const.} & (\lambda = 0) \end{cases}$$

である。そこで  $\delta$  関数の定義から

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k-k')x} dx = \delta(k - k')$$

が成り立つので

$$u_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}, (-\infty < k < \infty)$$

とおくと、これは次の直交条件を満たす。

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_k(x) \bar{u}_{k'}(x) dx = \delta(k - k')$$

離散固有値をとる場合は

$$\sum_{j=1}^{\infty} u_k(x) \bar{u}_{k'}(x) \rho(x') = \delta(k - k')$$

これはフーリエ変換であり、先の直交性から逆変換ができるので、すぐに  $F(k)$  を決めることができる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} F(k') e^{ik'x} dk' \right) e^{-ikx} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F(k') \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k'-k)x} dx \right) dk' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F(k') \delta(k' - k) dk' = F(k) \end{aligned}$$

逆変換では

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(x') e^{-kx'} dx' \right) e^{ikx} dk \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x') \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(x-x')} dk \right) dx' \end{aligned}$$

つまり、この式が成り立つことは無限領域で境界値問題を考えると、フーリエ変換が登場する。  
 同時にディラックの  $\delta$  関数が、自然に導かれることになる。

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(x-x')} dk = \delta(x - x')$$

あるいは

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_k(x) \bar{u}_k(x') dk = \delta(x - x')$$

離散固有値の時は次のように重み関数  $\rho(x)$  を掛ければよい。

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \bar{u}_k(x') \rho(x') = \delta(x - x')$$

### 10.6.7 エルミート関数

重み関数の例として、無限区間が連続的な固有値を持つとは限らない場合を考える。例えば

$$u''(x) + (\lambda + 1 - x^2)u(x) = 0, \quad (-\infty < x < \infty)$$

これは前章のスツリム-リュービル型の特異境界値問題である。次の変換

$$u(x) = e^{-x^2/2}H(x)$$

として代入すると

$$H''(x) - 2xH'(x) + \lambda H(x) = 0, \quad (-\infty < x < \infty)$$

を得る。これは

$$H(x) \rightarrow H(-x)$$

としても満たす。そこで

$$H(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

とおいて代入すると

$$a_{n+2} = \frac{2n - \lambda}{(n+1)(n+2)} a_n, \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

が得られる。この解は  $a_0 \neq 0, a_1 = 0$  とすると  $a_3$  から 0 になり、 $a_0 = 0, a_1 \neq 0$  とすると  $a_2$  から 0 になる。前者が偶数解、後者は奇数解になる。また、 $|x| \rightarrow \infty$  では  $H(x)$  は多項式程度の増大をみせる。これには級数が有限で終わる必要がある。これらから

$$\lambda = 2n, \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

とこれがエルミート多項式 (Hermite polynomials) という。

これは次のようみ重み  $e^{-x^2}$  をつけた完全直交多項式となる。

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m H_n(x) e^{-x^2} dx = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{mn}$$

$$h_n(x) \equiv \frac{H_n(x) e^{-x^2/2}}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}}$$

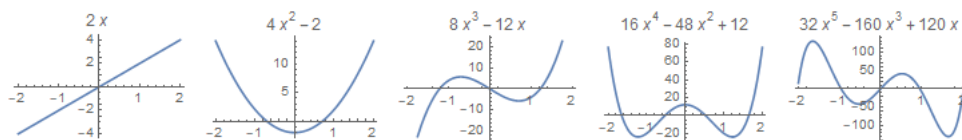


図 10.13: 左から  $H_1(x), H_2(x), H_3(x), H_4(x), H_5(x)$

### 10.6.8 Green 関数と固有関数

次に後章であつかう Green 関数の固有関数と同次境界値問題をみておこう。

## 10.7 ラプラス変換

### 10.7.1 重ね合わせの原理

ラプラス方程式の解は一通りではない。これを先の基本解を利用して3次元、2次元の場合を見ていこう。下図のように動点  $P(x, y, z)$  に対して、定点  $Q(\xi, \eta, \zeta)$  を考える。この時ラプラス方程式は次のような書き換えに対しても成り立つ。

$$r \rightarrow \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}$$

つまり、定数を  $q$  として

$$\nabla \left( \frac{q}{r} \right) = -q \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

となる。そこで電磁気との類推から電場をベクトルとして

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \mathbf{e}_r$$

と、定義すれば、これはベクトル場をつくる。これは  $\nabla$  はベクトルだから

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\nabla \left( \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \right)$$

となることを使うと、新たに電位 (ポテンシャル) としてスカラー量である次が定義できる。

$$u(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

このように基本解は自然に電磁気の単位  $MKSA$  を導くようにしてある。

明らかに点  $Q$  はポテンシャルの特異点になってしまう。これは物性定期にも非圧縮流体の沸きだし、吸込み口をあらわし、この得点を点源 (point\_source) という。速度場  $\mathbf{v}(x)$  を考えて、

$$\mathbf{v} = \nabla u \sim \frac{q}{4\pi r^2}$$

とした時の  $q$  が単位時間当たりの吸い込み量を表すのでこれを吸い込み (沸きだし) の強さという。

$Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  に点電荷  $q_1, q_2, \dots, q_n$  がある場合は重ね合わせの原理が成り立ち3次元では  $r_j = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_j|$  として、

$$u(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^n \frac{q_j}{r_j} \quad (10.63)$$

となり、これもラプラス方程式を満たす。

これは電荷の体積密度を  $\rho$ 、面積密度を  $\sigma$  とすれば体積内、曲面に連続分布している場合はそれぞれ、

$$u(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(x')}{|x - x'|} dV$$

$$u(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\sigma(x')}{|x - x'|} dS$$

と表すことができ、これを1重層分布 (surface\_distribution) という。

次の図において底辺の長さ  $l$ 、電荷  $q$  として  $ql = \text{一定の条件のもとで } l \rightarrow 0, q \rightarrow \infty$  の極限をとったものを電気双極子という。

この電気双極子のポテンシャルも調和関数になる。

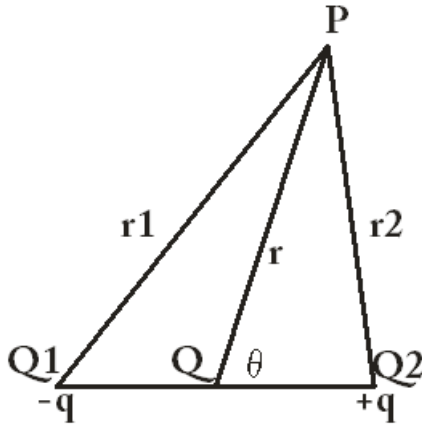


図 10.14: 電気双極子 Q1 と Q2 の間の距離が  $l$  である。

図から

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + (\frac{l}{2})^2 + rl \cos \theta}} \approx \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{l \cos \theta}{2r} \right)$$

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + (\frac{l}{2})^2 - rl \cos \theta}} \approx \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{l \cos \theta}{2r} \right)$$

よって

$$u(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lim_{l \rightarrow 0} \left( \frac{-q}{r_1} + \frac{q}{r_2} \right) = \frac{ql \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

双極子モーメント

$$\mathbf{p} = ql$$

と位置ベクトル  $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_i$  を用いると先の式はベクトル表現で

$$u(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \tag{10.64}$$

と書ける。ここで

$$\nabla_{\mathbf{x}} \left( \frac{1}{r} \right) = \left( -\frac{x - x_1}{r^3}, -\frac{x - y_1}{r^3}, -\frac{x - z_1}{r^3} \right) = -\nabla_{\mathbf{x}_1} \left( \frac{1}{r} \right)$$

だから 10.64 から  $\frac{\partial}{\partial n} \equiv \mathbf{n} \cdot \nabla_{\mathbf{x}_i}$  で法線方向の変化率を定義すると

$$u(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = -\frac{\mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0} \nabla_{\mathbf{x}} \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right)$$

調和関数の導関数もまた、調和関数になるのでこれも調和関数でラプラス方程式を満たす。

そこで薄い導体が帯電体の影響で静電誘導が生じた場合、次の図のように電荷が分布した場合、双極子が連続に分布しているようにみなせる。 $\mathbf{n}$  を法線ベクトルとし、点 P でのポテンシャルを  $u(\mathbf{x})$ 、 $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|$  として  $\theta$  を  $\mathbf{n}$  と  $\mathbf{QP} = \mathbf{r} = \mathbf{x} - \xi$  とのなす角にとる。



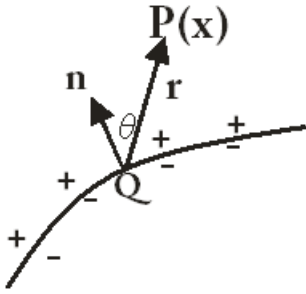


図 10.15: 2 重層分布

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S u(\mathbf{x}_1) \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) dS(\mathbf{x}_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S u(\mathbf{x}_1) \frac{\cos\theta}{r^2} dS(\mathbf{x}_1)$$

で与えられる。点  $\mathbf{P}$  が  $\mathbf{S}$  の外部にあればこのポテンシャルは調和関数になる。これを **2 重層分布** (double\_distribution) という。

ラプラスはある時刻での条件が決まればその後の時刻で関数の値が決まるような変換を考えた。

$$f(x) = 0 \quad x < 0 \quad (10.65)$$

さらにこの関数のフーリエ変換として次のような変換を定義したわけである。この時複素数をもってきて

$$s = a + ib \quad a > 0 \quad (10.66)$$

$$F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(-sx) dx \quad (10.67)$$

積分区間は全領域であるがはじめの式から

$$0 \leq x < \infty \quad (10.68)$$

になるので常に原点からの積分である。この変換をラプラス変換という。

式 10.67 は

$$F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(-ax) \exp(-ibx) dx \quad (10.69)$$

とかけるので

$$f(x) \exp(-ax) \quad (10.70)$$

をフーリエ変換したものであるとみなせる。そこでフーリエ逆変換は

$$f(x) \exp(-ax) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(s) \exp(-ibx) db \quad (10.71)$$

この両辺を  $\exp(-ax)$  で割り、積分変数を  $s$  に換える。変数変換は

$$\frac{db}{ds} = \frac{1}{i}$$

なので結局

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int F(s) \exp(sx) ds \quad (10.72)$$

ただし変数の  $a$  は固定し

$$-\infty < b < \infty \quad (10.73)$$

とする。式 10.72 をラプラス逆変換という。物理では古典的な減衰、強制振動をはじめとして応用例が多い。

### 10.7.2 ラプラス変換の例

ラプラス変換の例として代表的なものを示そう。

#### 1. Dirac デルタ関数 $a > 0$

$$\begin{aligned}f(x) &= \delta(x) \\F(s) &= \int \delta(x) \exp(-sx) dx \\&= 1\end{aligned}$$

#### 2. 定数関数 $a > 0$

$$\begin{aligned}f(x) &= 1 \\F(s) &= \int \exp(-sx) dx \\&= \frac{1}{s}\end{aligned}$$

#### 3.1 次関数 $a > 0$

$$\begin{aligned}f(x) &= x \\F(s) &= \int x \exp(-sx) dx \\&= \frac{1}{s^2}\end{aligned}$$

#### 4. 指数関数 $a > 0$

$$\begin{aligned}f(x) &= \exp(x) \\F(s) &= \int \exp(x - sx) dx \\&= \frac{1}{s - 1}\end{aligned}$$

#### 5. 余弦関数 $a > 0$

$$\begin{aligned}f(x) &= \cos(x) \\F(s) &= \int \cos(x) \exp(-sx) dx \\&= \frac{s}{1 + s^2}\end{aligned}$$

#### 6. 正弦関数 $a > 0$

$$\begin{aligned}f(x) &= \sin(x) \\F(s) &= \int \sin(x) \exp(-sx) dx \\&= \frac{1}{1 + s^2}\end{aligned}$$

### 10.7.3 ラプラス逆変換の例

ラプラス逆変換の例として代表的なものを示そう。

#### 1. 定数関数

$$\begin{aligned}F(s) &= 1 \\f(x) &= \frac{1}{2\pi i} \int \exp(sx) ds \\&= \delta(x)\end{aligned}$$

#### 2. 分数関数

$$\begin{aligned}F(s) &= \frac{1}{s} \\f(x) &= \int \frac{\exp(sx)}{2\pi i s} ds \\&= 1\end{aligned}$$

#### 3. 分数関数 (2 次)

$$\begin{aligned}F(s) &= \frac{1}{s^2} \\f(x) &= \int \frac{\exp(sx)}{2\pi i s^2} ds \\&= x\end{aligned}$$

#### 4. 分数関数

$$\begin{aligned}F(s) &= \frac{1}{s-1} \\f(x) &= \int \frac{\exp(sx)}{2\pi i (s-1)} ds \\&= \exp(x)\end{aligned}$$

#### 5. 分数関数

$$\begin{aligned}F(s) &= \frac{s}{1+s^2} \\f(x) &= \int \frac{\exp(sx)s}{2\pi i (1+s^2)} ds \\&= \cos(x)\end{aligned}$$

#### 6. 分数関数

$$\begin{aligned}F(s) &= \frac{1}{1+s^2} \\f(x) &= \int \frac{\exp(sx)}{2\pi i (1+s^2)} ds \\&= \exp(x)\end{aligned}$$

#### 10.7.4 導関数の変換

関数  $f(x)$  のラプラス変換を  $F(s)$  とする。微分  $f'(x)$  について式 10.67 から部分積分により

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) \exp(-sx) dx &= [f(x) \exp(-sx)]_0^{\infty} + s \int f(x) \exp(-sx) dx \\ &= -f(0) + sF[s] \\ F[f'(x)] &= sF[s] - f(0) \end{aligned}$$

となる。これは線形微分方程式を代数方程式で表しているのだから第2次導関数についても同じように

$$\begin{aligned} F[f''(x)] &= s\{sF[s] - f(0)\} - f'(0) \\ &= sF[f'(x)] - f'(0) \end{aligned}$$

と同じようにかける。

#### 10.7.5 因果律

次節で先進、遅延解についてふれるが電荷による電場の影響は有限の速さで伝播していく。そこで電場の中で絶縁体は分極をして電気双極子モーメントをもった。この単位体積当たりの量を分極  $p$  で表す。

分子が電場を感じて、分極するまでには有限の時間  $\tau$  だけかかるとする。積分範囲を  $0 < \tau < t$  とし、感受率を  $\chi$  とすると電気双極子モーメントは

$$p(t) = \int \chi(t - \tau) E(\tau) d\tau \quad (10.74)$$

のようにかける。ここで時刻  $t$  についてラプラス変換をおこなってみよう。

$$P(s) = \int \exp(-st) \int \chi(t - \tau) E(\tau) d\tau dt \quad (10.75)$$

積分変数を

$$z = t - \tau \quad (10.76)$$

に換えると

$$\begin{aligned} \chi(s) &= \int \exp(-sz) \chi(z) dz \quad (z \geq 0) \\ E(s) &= \int \exp(-s\tau) E(\tau) d\tau \quad (\tau \geq 0) \end{aligned}$$

として次の積の関係が得られる。

$$P(s) = \chi(s)E(s) \quad (10.77)$$

ここで  $s$  が複素数であることに注意すると  $s \neq \omega$  として

$$\begin{aligned} \text{Im}[X(\omega)] &= \int \frac{\text{Re}[X(s)]}{\pi(s - \omega)} ds \\ \text{Re}[X(\omega)] &= \int \frac{\text{Im}[X(s)]}{\pi(s - \omega)} ds \end{aligned} \quad (10.78)$$

これを得るにはクラーマース・クローニヒの関係式が必要である。

簡単にこれを示すと線形応答において  $t = 0$  でのインパルス  $\delta(t)$ 、応答関数のうち奇関数を  $h_o(t)$ 、偶関数  $h_e(t)$  で表すと

$$h(t) = \frac{h(t) + h(-t)}{2} + \frac{h(t) - h(-t)}{2} = h_e(t) + h_o(t) \quad (10.79)$$

因果律から  $t < 0 \rightarrow h(t) = 0$  なので

$$h_o(t) = \text{sign } h_e(t) \quad (10.80)$$

$$h_e(t) = \text{sign } h_o(t) \quad (10.81)$$

と符号関数で表すことができる。また応答関数のフーリエ変換として

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt h_e(t) e^{i\omega t} + \int_{-\infty}^{+\infty} dt h_o(t) e^{i\omega t} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt h_e(t) \cos(\omega t) + i \int_{-\infty}^{+\infty} dt h_o(t) \sin(\omega t) \end{aligned}$$

となり奇関数が虚部、偶関数が実部に対応する。そこで符号関数のフーリエ変換を

$$\mathfrak{F}(\text{sign}(t)) = \hat{\text{sign}}(\omega) \quad (10.82)$$

で表し、次のようにフーリエ変換をする。

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} dt h_o(t) \text{sign}(t) e^{i\omega t} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' i H_I(\omega') \hat{\text{sign}}(\omega - \omega') \\ \int_{-\infty}^{+\infty} dt h_e(t) \text{sign}(t) e^{i\omega t} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' H_R(\omega') \hat{\text{sign}}(\omega - \omega') \end{aligned}$$

コーシーの主値を  $P$  で表すと実部、虚部について

$$\begin{aligned} H_R(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt h_e(t) e^{i\omega t} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt h_o(t) \text{sign}(t) e^{i\omega t} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' i H_I(\omega') \hat{\text{sign}}(\omega - \omega') \\ &= \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{H_I(\omega')}{\omega' - \omega} \\ \\ H_I(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt h_e(t) \text{sign}(t) e^{i\omega t} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' H_R(\omega') \hat{\text{sign}}(\omega - \omega') \\ &= \frac{1}{\pi i} P \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{H_R(\omega')}{\omega' - \omega} \end{aligned} \quad (10.83)$$

これが式 10.78 に対応する。

これは下図のように実軸上の  $\omega$  を迂回した積分経路を考え、大円の半径  $R$  を大きく、小円（迂回路）の円の半径  $r$  することによってコーシーの関係から

$$\lim_{R \rightarrow \infty, r \rightarrow 0} \left\{ \int_{-R}^{\omega-r} \frac{H(z)}{z-\omega} dz + \int_{\omega+r}^R \frac{H(z)}{z-\omega} dz \right\} = P \int_{-\infty}^{+\infty} dz \frac{H(z)}{z-\omega} = i\pi H(\omega) \quad (10.84)$$

となる。この結果の実部と虚部を比較することで式 10.83 が得られる。

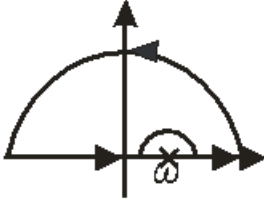


図 10.16: 半円上で特異点を迂回しての積分は 0 になる。

電場の関係式 10.78 に戻ると。これは実軸では光の分散をみることになるが虚軸では光の吸収を見ていることに対応する。分極が電場が与えられてから生じる因果関係を示している。

## 11 境界問題

領域  $V$  において調和であり、その境界を  $S$  としてここで与えられた関数  $u(\mathbf{x})$  の境界とその内部を考え、

$$\nabla^2 u = 0 \quad (\text{in } V)$$

$$u|_S = f \quad (\text{on } S)$$

を満たす問題がディリクレ (**Dirichlet**) 問題であり、第 1 境界問題ともいう。

また、境界  $S$  で次のように法線方向の微分係数が与えられる時

$$\nabla^2 u = 0 \quad (\text{in } V)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_S = g \quad (\text{on } S)$$

この  $u(x)$  を求める問題がノイマン問題、第 2 境界値問題という。さらに  $S$  が有界な単連結領域の境界である時、 $V$  が  $S$  の内部領域であるならば内部問題、外部領域であるならば外部問題と呼ぶ。

はじめに Dirichlet 問題の解の一意性を示すため次の**最大値原理 (maximum principle)**を示す。

$u(\mathbf{x})$  は  $V$  で調和、閉領域  $\bar{V}$  では連続であるとする。この時の境界  $S$  上での  $u$  の最大値を  $M$ 、最小値を  $m$  とすると  $\bar{V}$  の任意の点  $\mathbf{x}$  について

$$m \leq u(\mathbf{x}) \leq M$$

が成り立つ。これを弱い意味での最大値原理という。弱い意味とは必ずしも最大値や最小値が  $S$  上に存在するわけではないということである。

2次元の場合で最大値の場合を証明する。 $V$  は平面上の領域で  $S$  はその領域の境界、さらに  $\bar{V}$  はその両方の閉集合であるとする。

まず、 $u$  は有界閉集合  $\bar{V}$  で連続な関数だから  $\bar{V}$  で最大値も最小値も存在する。また、 $S$  においても最大値を  $M$ 、最小値  $m$  をとる。図のように  $O$  を中心にして  $V$  を内部に取り込む十分大きい半径  $R$  の円をとり、 $\bar{V}$  内部の位置  $\mathbf{r}(\mathbf{x})$  において次の関数考える。 $\epsilon$  は正の定数とする。

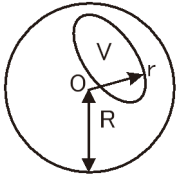


図 11.1: 最大値原理

$$v(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) - M - \epsilon(R^2 - |\mathbf{x}|^2)$$

$\bar{V}$  の範囲内であれば  $R^2 \geq |\mathbf{x}|^2$  であり、 $M$  は  $S$  上の最大値であるからこの  $v(\mathbf{x})$  は  $S$  上で常に負である。さらに内部においても、もし、 $v(\mathbf{x})$  が開領域  $V$  内で正になるとすれば端点が最大ではないので  $u$  は有界だから  $V$  内のある点  $\mathbf{x}_0$  で正の極大値をとることになる。 $\mathbf{x}_0$  で極値をとるとすると

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \leq 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \leq 0$$

が成り立つから

$$\nabla^2 v \leq 0$$

でないといけない。しかし、 $\mathbf{x}_0$  で

$$\nabla^2 u = 0, \quad \nabla^2 r^2 = 4$$

だから

$$\nabla^2 v \geq 4\epsilon > 0$$

であり、矛盾する。よって  $v(\mathbf{x})$  が領域  $V$  内では負である。

$$u(\mathbf{x}) \leq M + \epsilon(R^2 - |\mathbf{x}|^2)$$

となり  $\epsilon \rightarrow 0$  とすれば

$$u(\mathbf{x}) \leq M$$

がいえる。最小値についても同じように証明できる。

この最大値の原理を利用してラプラス方程式のディリクレ問題の解の一意性を考えよう。まず内部については

$$u(\mathbf{x}) = u_1(\mathbf{x}) - u_2(\mathbf{x})$$

とおくと  $u$  は  $V$  で調和かつ  $\bar{V}$  で連続であり、 $S$  上で  $u = 0$  だから最大値の原理から

$$m = M = 0$$

である。よって  $\bar{V}$  において  $u = 0$  である。よって

$$u_1 = u_2$$

であり、解は一意である。

次に外部について次の正則性の条件を付加する。  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$  において

- 3次元の場合 :  $u(\mathbf{x}) \rightarrow 0$
- 2次元の場合 :  $u(\mathbf{x}) \rightarrow \text{Const}$

この条件を付加することは外部ディリクレ問題を内部ディリクレ問題に変換することができる。

## 11.1 複素領域

与えられた関数  $f, g$  は境界  $S$  上で連続である。また、ディリクレ問題に対しては  $u(x)$  が、ノイマン問題に対しては  $\frac{\partial u}{\partial n}$  が境界を含めて連続でなくてはならない。具体的に円  $C$  に対する内部ディリクレ問題は  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$  として次が成り立つことである。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

これは  $u$  を  $r$  と  $\theta$  との関数に分離して解くことが多いが Dirichlet 問題の解法の 1 つは複素数に拡張する方法がある。

複素領域  $D$  で正則な関数  $f(x)$  を実数部  $Re[f(x)]$  が境界  $C$  で与えられた値をとるように決められることができる。

そこで図のように向きを持った境界  $C$  上の点  $P(x, y)$  での接線微分を  $ds$ 、内法線微分を  $dn$  とすると複素表示で直交性から

$$\begin{aligned} n_x + in_y &= i(s_x + is_y) \\ n_x &= -s_y \\ n_y &= s_x \end{aligned}$$

であり、また

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} &= s_x \frac{\partial}{\partial x} + s_y \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial n} &= n_x \frac{\partial}{\partial x} + n_y \frac{\partial}{\partial y} \\ &= -s_y \frac{\partial}{\partial x} + s_x \frac{\partial}{\partial y} \end{aligned} \tag{11.1}$$

が成り立つことになる。

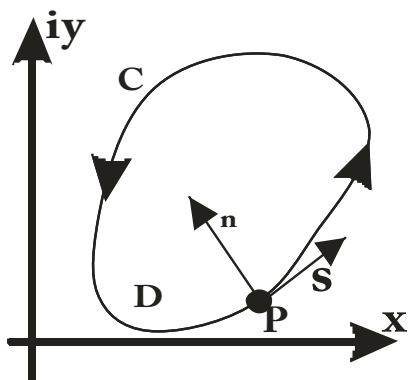


図 11.2: 閉曲線  $C$  上の法線ベクトルと接ベクトル

そこで領域  $D$  内で正則な関数

$$f(x) = U(x, y) + iV(x, y) \tag{11.2}$$

を定義すると  $Im[f(x)]$  は  $U(x, y)$  に共役な調和関数である。よってコーシー・リーマンの関係から正則であ



るためには

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial x} &= \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= -\frac{\partial V}{\partial x}\end{aligned}$$

が成り立つので式 11.1 より

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial s} &= \frac{\partial V}{\partial n} \\ \frac{\partial U}{\partial n} &= -\frac{\partial V}{\partial s}\end{aligned}$$

と書き換えることができる。

領域  $D$  の境界  $C$  上で  $\partial U/\partial n$  が与えられているときに  $U$  に共役な調和関数  $V$  を考えればこの式から  $\partial V/\partial s$  が与えられる。

$C$  上に 1 点  $P_0$  をとり、そこから  $C$  上の任意の点  $P(x,y)$  まで境界  $C$  に沿った積分

$$V(x,y) = \int_{P_0}^P \frac{\partial V}{\partial s} ds \quad (11.3)$$

により  $V$  の値は  $C$  上の各点で決まる。したがって  $D$  内の調和関数  $V$  は  $C$  のディリクレ問題として求まることになる。

ノイマン問題の解  $U$  はこの  $V$  を代入したコーシー・リーマンの方程式を積分すればいい。

よってノイマン問題は結局ディリクレ問題に帰着する結論が得られる。

境界  $C$  で虚数部  $Im[f(x)]$  が指定された値をとるように領域  $D$  で正則な関数  $Re[f(x)]$  を決定するのがノイマン問題であるといえる。

複素関数によりその実部、虚部がディリクレ問題とノイマン問題を定めるわけである。

例として  $z = x + iy$  平面上の有界単連結領域  $D$  で調和な実数関数  $U(x,y)$  が与えられた時、 $D$  で  $U$  に対する 1 価な共役調和関数を求める。

$D$  内の任意な境界  $B$  で囲まれた領域を  $K$  とすると

$$\oint_B (Xdx + Ydy) = 0 \quad (11.4)$$

が成り立つ。そこで

$$X = -\frac{\partial U}{\partial y}$$

$$Y = \frac{\partial U}{\partial x}$$

とおくと式 4.8 から Green の定理 5.2 を用いて

$$\oint_B \left( -\frac{\partial U}{\partial y} dx + \frac{\partial U}{\partial x} dy \right) = \int \int_K \nabla U dx dy = 0 \quad (11.5)$$

が成り立つ。故に  $D$  内に定点  $Q_0$  と任意の点  $Q$  をとると次の積分は途中の経路によらない。よって積分

$$V(x,y) = \int_{Q_0}^{Q(x,y)} \left( \frac{\partial U}{\partial x} dy - \frac{\partial U}{\partial y} dx \right) \quad (11.6)$$

は変数  $(x,y)$  の 1 価連続な関数で例えば  $x$  のみの変分をとると

$$V(x+dx, y) = V(x, y) + \int_x^{x+dx} \left( -\frac{\partial U}{\partial y} \right) dx \quad (11.7)$$

とおける。これから

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{V(x+dx, y) - V(x, y)}{dx} \\ &= \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{1}{dx} \int_x^{x+dx} \left( -\frac{\partial U}{\partial y} \right) dx \\ &= -\frac{\partial U}{\partial y} \end{aligned}$$

が成り立つ。同様に  $y$  のみの変分を考えれば

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial x} \quad (11.8)$$

となる。この結果から  $D$  で  $Re[f(z)] = U(x, y)$  を満たす 1 価正則関数は

$$f(z) = U(x, y) + i \int_{Q_0}^{Q(x, y)} \left( \frac{\partial U}{\partial x} dy - \frac{\partial U}{\partial y} dx \right) \quad (11.9)$$

となる。

## 11.2 等角写像

### 11.2.1 リーマンの写像定理

複素  $z$  平面上  $n$  領域  $D$  の点  $z = x + iy$  を  $w = u + iv$  にうつす次の写像を考える。

物理学では複素数に拡大したこの写像は極めて重要になる。

複素空間に拡大され自由度が増したわけだが、以下にみるように正則性を維持するためには極めて厳しい条件が付加され、それが現実の物理現象と関係している。

さらに位相の連続性を考える上でも今後の基礎になる。

まず、次の複素関数

$$w = f(z) \quad (11.10)$$

を微分すると

$$dw = f'(z) dz$$

であり、両辺の絶対値と偏角をとると

$$\begin{aligned} |dw| &= |f'(z)| |dz| \\ \arg[dw] &= \arg[f'(z)] + \arg[dz] \end{aligned}$$

第 2 章の解析関数でも見たように点  $z$  における微小要素  $dz$  は  $w$  平面では  $|f'(z)|$  倍に拡大され、 $f'(z)$  の偏角だけ反時計回りに回転させた像  $dw$  にうつる。従ってこの変換では角度の差は保存される。

これを等角写像 (conformal mapping) という。

式 11.10 を次の実数値関数で表す。

$$u = u(x, y) \quad v = v(x, y)$$

実部、虚部にわけたが常に

$$u \perp v$$

である。領域  $D$  において正則であるためには、全微分可能である必要があり、これは式 4.9 のコーシー・リーマンの関係を満たすことであった。これから

$$f'(z) = \frac{\partial f(z)}{\partial x} = -i \frac{\partial f(z)}{\partial y}$$

が成り立ち、

$$f'(z) = u_x(x, y) + iv_x(x, y) = v_y(x, y) - iu_x(x, y)$$

である。これだけでもかなり厳しい条件をつけたことになる。

さらに一般に複素関数を共役との対、 $F(z, \bar{z})$  で表すと次の関係が成り立つから

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y}, & 2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} &= \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, & \frac{\partial}{\partial y} &= i \left( \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \end{aligned} \quad (11.11)$$

となる。これから

$$f'(z) = \left( \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) F(z, \bar{z}) = \left( \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) F(z, \bar{z})$$

が成り立つことになる。従って正則である場合は常に

$$\frac{\partial F(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}} = 0$$

であり  $\bar{z} = x - iy$  には依存しないという重要な関係が得られる。

これから一般に

$$F(z, \bar{z}) = f(z) = F(x + iy)$$

としてよいことになる。

また、正則関数  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  は 2 階偏微分関数で 2 次導関数も連続であるから次のように偏微分の順番を変えてもよい。式 4.9 のコーシー・リーマンの関係から

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \end{aligned}$$

である。これはラプラス演算子を用いて

$$\Delta u = 0, \quad \Delta v = 0$$

としてよいことになる。

この  $u$  に対して  $v$  を共役調和関数 (**conjugate harmonic function**) という。

また、なめらかな曲線  $C: z(t) = x(t) + iy(t)$  が  $z_0 = z(t_0)$  において  $x$  軸となす角を  $\theta$  とし、次の変換でうつされるなめらかな曲線を  $\Gamma$  とする。

$$\Gamma: w(t) = u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))$$

この  $\Gamma$  が  $u$  軸となす角を  $\phi$  とする。 $w = f(z)$  は等角写像であるから、曲線に依存しない角  $\alpha$  を用いて

$$\phi = \theta + \alpha$$

と書き表すことができる。従って  $\tan \theta$  の加法定理から

$$\tan(\theta + \alpha) = \frac{\tan \alpha + \tan \theta}{1 - \tan \theta \tan \alpha} = \tan \phi \quad (11.12)$$

であり、さらに  $\tan \phi$  が  $\Delta v / \Delta u$  に対応しているから共通したパラメタ  $t$  のもとで

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} + \frac{dv}{dy} \frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} \left( \frac{dv}{dx} + \frac{dv}{dy} \frac{dy}{dx} \frac{dt}{dx} \right)$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{du}{dx} \frac{dx}{dt} + \frac{du}{dy} \frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} \left( \frac{du}{dx} + \frac{du}{dy} \frac{dy}{dx} \frac{dt}{dx} \right)$$

の関係を用いると

$$\begin{aligned} \tan \phi &= \left. \frac{dv/dt}{du/dt} \right|_{t=t_0} \\ &= \left. \frac{v_x + v_y(\dot{y}/\dot{x})}{u_x + u_y(\dot{y}/\dot{x})} \right|_{t=t_0} \\ &= \frac{v_x + v_y \tan \theta}{u_x + u_y \tan \theta} \end{aligned}$$

従って  $z_0 = z(t_0)$  で 11.12 と比較すれば

$$u_x : u_y : v_x : v_y = 1 : -\tan \alpha : \tan \alpha : 1$$

よってこれからもコーシーリーマンの関係式

$$\begin{aligned} u_x &= v_y \\ -u_y &= v_x \end{aligned}$$

が得られたことになる。そこでリーマンの写像定理 (Riemann) として

$z$  平面の領域  $D$  が単連結で、かつ少なくとも 2 つの境界点を持つならば、

$D$  から  $w$  平面への単位円の内部への 1 対 1 の単葉な等角写像ができる。

すなわちこの等角写像を与える  $D$  における正則関数  $w = f(z)$  が存在する。

が成り立つ。

リーマンの写像定理は  $z$  平面と  $w$  平面の領域の内点同士の対応関係を述べているが境界点どうしの関係は次のカラテオドリの定理で明らかになる。

$z$  平面の領域  $D$  が単連結  $C$  で囲まれていて、この領域  $D$  を  $w$  平面上の単位円に写像する正則関数

$w = f(z)$  は閉領域  $\bar{D} = D \cup C$  で連続である。よって境界  $C$  は単位円周上に 1 対 1 に連続で写像される。

### 11.2.2 具体的な例

例えば次の変換を考えよう。

$$w = f(z) = \frac{1}{z}$$

これは前節でみたように  $z$  平面上の単位円の内部 (外部) の点を  $w$  平面の単位円の外部 (内部) に移す変換である。原点  $z = 0$  と、無限遠  $z = \infty$  を除いて等角写像になる。

下図のように向きが反対になることに注意する。

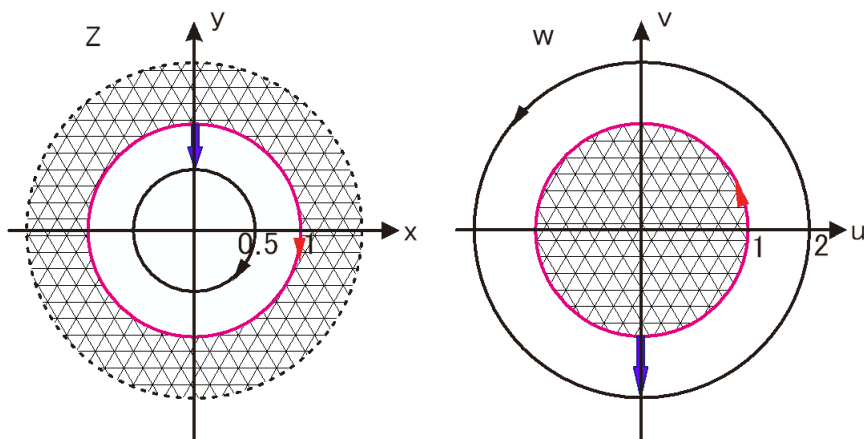


図 11.3: 内側と外側の変換

次に一般化してべき乗

$$w = f_n(z) = z^n$$

を考える。例えば  $n = 2$  の場合は  $z = x + iy$  と  $w = u + iv$  を代入すると

$$x^2 - y^2 = u, \quad 2xy = v$$

という関係式を得られるから  $w$  平面では  $u = \text{Const}, v = \text{Const}$  の直線へ写像される。

この時、 $z$  平面上の点は  $y = \pm x$ , または  $y = 0, x = 0$  を漸近線とする直角双曲線になる。

また、 $x = a, y = b$  の直線は  $w$  平面上で  $v^2 = 4a^2(a^2 - u), v^2 = 4b^2(b^2 + u)$  へ写され、共に等角写像になっている。しかし  $dw/dz = 0$  となる  $z = 0$  は等角にならない。

$n = 2$  の場合は  $z$  平面の 2 点を  $w$  平面の 1 点

$$x + iy, -x - iy \rightarrow u + iv$$

に写す 2 対 1 の写像である。

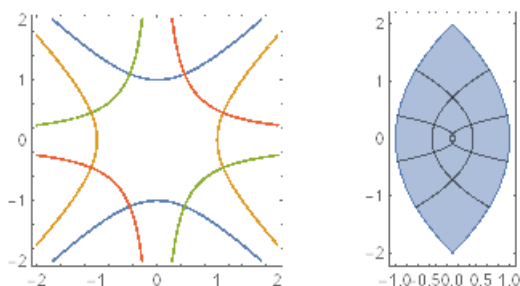


図 11.4: 左は  $u = \pm 1, v = \pm 1$  の  $z$  平面のグラフ。右は  $x = \pm 1, y = \pm 1$  のグラフ

よって一般に  $n$  の場合も

$$z = f_n^{-1}(w) = \sqrt[n]{w}$$

は  $n$  価の関数になる。これらはリーマン葉に分岐させることで解析関数になる。

次に最も単純な指数関数

$$w = e^z$$

を考えよう。 $z = x + iy$  平面上の横幅  $2\pi$  の無限個の横帯状の領域の各点

$$z_n = x + iy + 2in\pi (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

が

$$w_n = e^{x+iy+2in\pi} = e^{x+iy}$$

に等角写像される。ただし  $w = 0$  で

$$\frac{dw}{dz} = e^z = w = 0$$

だから、この点では等角写像にならない。逆関数は対数関数になり、

$$z = \log w$$

である。例えば  $w$  の 1 つの値を  $\rho e^{i\phi}$  とした時、 $e^z = w$  となる  $z = x + iy$  を決める。

$$e^{x+iy} = \rho e^{i\phi}$$

この時の偏角には  $2\pi$  の不定性があるから次のように  $z$  のとりうる値は無限個あることになる。

$$z_N = x + iy_N = \log \rho + i(\phi + 2N\pi) \quad (N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

下図に見るように  $w$  平面の 1 点が  $z$  平面上では無限個の横帯に相当する。対数関数は無限多価関数である。

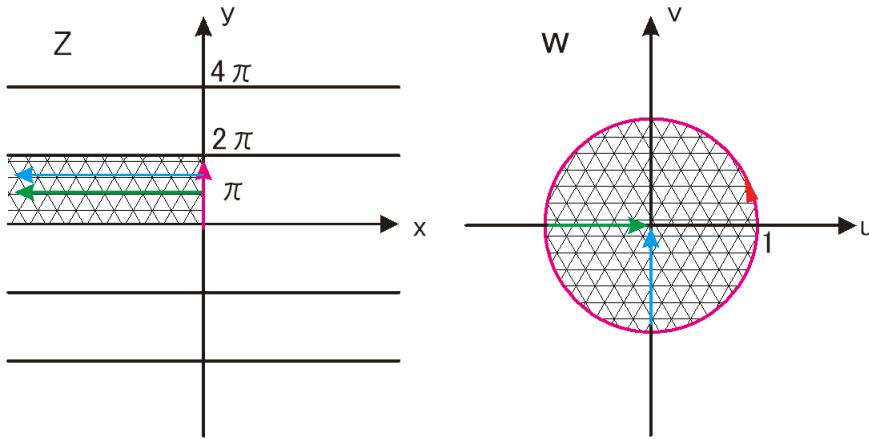


図 11.5:  $w = e^z$  では  $z$  空間の  $2\pi$  までの負領域が  $w$  空間の単位円内部に写る。正領域は外部に写る

### 11.3 内部と外部

外部ディリクレ問題やノイマン問題において解の一意性を保証するためには無限遠で収束条件式 11.36 が必要になった。内部と外部をどう区別するかが問題になる。

既に第 2 章で、円周幾何を扱った時に、この内部外部が、反転により決められることを見た。

そこで図のような半径  $R$  の球  $V$  の内部の点  $Q(x, y, z)$  と、外部の点  $P(x_1, y_2, z_3)$  は原点を  $O$  として

$$(x_1, y_1, z_1) = \left( \frac{R^2}{r^2} x, \frac{R^2}{r^2} y, \frac{R^2}{r^2} z \right), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$(x, y, z) = \left( \frac{R^2}{r_1^2} x_1, \frac{R^2}{r_1^2} y_1, \frac{R^2}{r_1^2} z_1 \right), \quad r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

と表される。

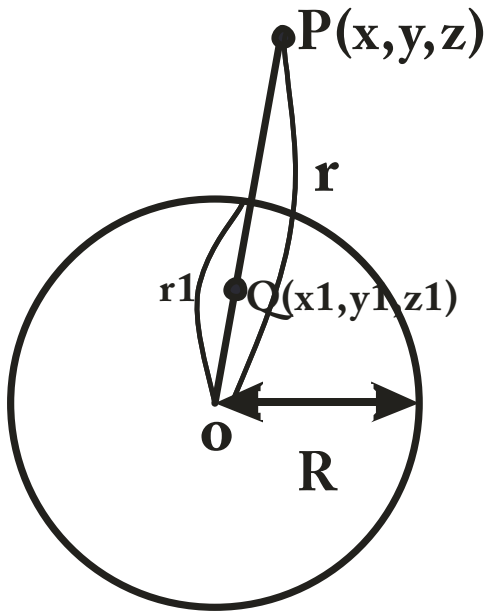


図 11.6: 球 V の外部 P と内部 Q

これは前節 3.19 でみた反転であり

$$rr_1 = R^2$$

という関係が成り立つ。この反転の操作によって原点  $O$  を除く内部の領域と外部の領域を 1 対 1 で結ぶことができる。

今、球の外部で調和関数  $u(x)$  が与えられるとこの反転

$$u_1(x_1, y_1, z_1) = \frac{R}{r_1} u\left(\frac{R^2}{r_1^2}x_1, \frac{R^2}{r_1^2}y_1, \frac{R^2}{r_1^2}z_1\right) = \frac{R}{r} u(x, y, z) \quad (11.13)$$

は  $O$  を除く領域で調和になる。

この変換をケルビン変換 (Kelvin\_transformation) という。

例えば単位球 ( $R = 1$ ) に対して次の関数

$$u(\mathbf{x}) = \frac{a}{r} \quad r = |\mathbf{x}|$$

のケルビン変換を考えると球の内部  $\mathbf{x}_1$  において

$$u_1(\mathbf{x}_1) = \frac{1}{r_1} u(1/r_1) = \frac{1}{r_1} \frac{a}{1/r_1} = a$$

となり定数になる。逆に

$$u(\mathbf{x}) = a$$

とすると

$$u_1(\mathbf{x}_1) = \frac{1}{r_1} u(x_1/r_1^2) = \frac{a}{r_1}$$

になる。また無限遠では正則ではないが

$$u(\mathbf{x}) = ax$$

とすると

$$u_1(\mathbf{x}_1) = \frac{1}{r_1} u(x_1/r_1^2) = \frac{ax_1}{r_1^3}$$

が得られ、これは式 10.64 で見た、双極子ポテンシャルになる。よって逆に

$$u(\mathbf{x}) = \frac{ax}{r^3}$$

を選ぶと

$$u_1(\mathbf{x}_1) = ax_1$$

になる。これらは除去可能な特異点では調和になっていることを表している。

よって関数  $u(\mathbf{x})$  が閉曲面、 $S$  の外部領域  $V_1$  で調和、 $S$  を含めて  $C^1$  関数で無限遠で正則であれば式 11.36, 11.39 に対応して次のように書き換えられる。

$$\int_{V_1} (\nabla u)^2 dV = \int_S u \frac{\partial u}{\partial n} dS \quad (11.14)$$

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) \right) dS$$

ただし、 $\partial/\partial n$  は  $V_1$  から見て外向きである。

2次元の場合にも円  $C$  を考えて反転が定義できる。R を半径とすると

$$u_1(x_1, y_1) = u \left( \frac{R^2}{r_1^2} x_1, \frac{R^2}{r_1^2} y_1 \right) = u(x, y) \quad (11.15)$$

とおくと  $\nabla_1 = \frac{r^2}{R^2} \nabla$  だから

$$\nabla_1^2 u_1(x_1, y_1) = \nabla_1^2 u(x, y) = \frac{r^4}{R^4} \nabla^2 u(x, y)$$

が成り立つ。したがって  $u(\mathbf{x})$  が円  $C$  の外部で調和であれば  $u_1(\mathbf{x}_1)$  は原点  $O$  を除く円の内部で調和である。 $u(\mathbf{x})$  が  $r \rightarrow \infty$  で有界になれば  $u_1(\mathbf{x}_1)$  は原点  $O$  の近傍で有界であり、 $O$  は除去可能な特異点となるので  $u_1(\mathbf{x}_1)$  は円の内部全体で調和になる。よってラプラス方程式から  $u$  が無限遠で定数になるなら

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} = O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

程度の関数であるとみつめられる。従って  $u(\mathbf{x})$  が平面上の閉曲線  $C$  の外部領域  $S_1$  で調和で無限遠で正則であれば式 11.14 の 2次元版として

$$\int_{S_1} (\nabla u)^2 dS = \int_C u \frac{\partial u}{\partial n} dl \quad (11.16)$$

$$\int_C \frac{\partial u}{\partial n} dl = 0$$

が成り立つ。これからも

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_C \left( \left( \log \frac{1}{r} \right) \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \left( \log \frac{1}{r} \right) \right) dl + c$$

$$c = \lim_{r \rightarrow \infty} u$$

となる。外部ディリクレ問題はケルビン変換によって内部ディリクレ問題に変換される。

例えば原点を中心とする半径  $a$  の球の表面において



$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$$

を満たし、無限遠で  $U$  を定数として

$$\phi \rightarrow Ux$$

を満たす調和関数を求めると極座標表示で

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} \Big|_{r=a} = 0$$

$$\phi = Ur \cos \theta \quad (r \rightarrow \infty)$$

となるので

$$\phi = Ux + \psi = Ur \cos \theta + \psi$$

を導入すると  $\psi$  は次を満たす。

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} \Big|_{r=a} = -U \cos \theta$$

$$\psi \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty)$$

極座標でのラプラス方程式は  $r > a$  として

$$\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) = 0$$

となる。次のように変数分離をして

$$\psi(r, \theta) = f(r) \cos \theta$$

代入すると

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{df}{dr} - \frac{2}{r^2} f = 0$$

$$\frac{df}{dr} \Big|_{r=a} = -U$$

ここで  $f(r) = r^n$  とおくと  $n = 1, -2$  を得るが無限遠で 0 になるためには  $n = -2$  となる。よって条件から

$$f(r) = \frac{Ua^3}{2r^2}$$

と決まるので

$$\psi(r, \theta) = \frac{Ua^3}{2r^2} \cos \theta$$

を得る。これは 2 重極ポテンシャルである。よって

$$\phi = U \left( r + \frac{a^3}{2r^2} \right) \cos \theta$$

と決まる。これは  $x$  方向に  $U$  の一様な流れが半径  $a$  の剛体球に入射したときの非圧縮、非粘性の速度ポテンシャルである。

## 11.4 ポアソンの式

ここで  $z = re^{i\theta}$  として  $u(z)$  に共役な調和関数を  $v(z)$  とすると次の関数は  $|z| < R$  で正則である。

$$f(z) = u(z) + iv(z) \quad (11.17)$$

よってコーシーの積分定理を用いると

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi|=\rho} \frac{f(\xi)}{|\xi - z|} d\xi \quad (|z| < \rho < R) \quad (11.18)$$

次に  $z = re^{i\theta}$  の円  $|\xi| = \rho$  に関する鏡像を  $\hat{z} = (\rho^2/r)e^{i\theta}$  で表すと  $f(\xi)/(\xi - \hat{z})$  は  $\xi$  の関数として  $|\xi| \leq \rho$  で正則になる。よって

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi|=\rho} \frac{f(\xi)}{\xi - \hat{z}} d\xi = 0 \quad (11.19)$$

また

$$\xi = \rho e^{i\phi}$$

とおくと

$$d\xi = i\rho e^{i\phi} d\phi \quad (11.20)$$

だから、式 11.18 と 11.19 から次のように積分変数を変換できる

$$\begin{aligned} f(re^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi|=\rho} f(\xi) \left( \frac{1}{\xi - re^{i\theta}} \pm \frac{1}{\xi - (\rho^2/r)e^{i\theta}} \right) d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\rho e^{i\phi}) \left( \frac{1}{1 - \frac{r}{\rho} e^{i(\theta-\phi)}} \pm \frac{1}{1 - \frac{\rho}{r} e^{i(\theta-\phi)}} \right) d\phi \end{aligned} \quad (11.21)$$

負符号に対し、実数部をとると

$$\begin{aligned} u(re^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\rho e^{i\phi}) \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{1 - \frac{r}{\rho} e^{i(\theta-\phi)}} - \frac{1}{1 - \frac{\rho}{r} e^{i(\theta-\phi)}} \right] d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\rho e^{i\phi}) \left( \frac{1}{1 - \frac{r}{\rho} \cos(\phi - \theta)} - \frac{1}{1 - \frac{\rho}{r} \cos(\phi - \theta)} \right) d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\rho e^{i\phi}) \left( \frac{\left( \frac{-\rho^2 + r^2}{r\rho} \right) \cos(\phi - \theta)}{1 - \left( \frac{\rho^2 + r^2}{r\rho} \right) \cos(\phi - \theta) + \cos^2(\phi - \theta)} \right) d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\rho e^{i\phi}) \left( \frac{\rho^2 - r^2}{-\rho r / \cos(\phi - \theta) + (\rho^2 + r^2) - \rho r \cos(\phi - \theta)} \right) d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\rho e^{i\phi}) \left( \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 - 2\rho r \cos(\phi - \theta) + r^2} \right) d\phi \quad (r < \rho < R) \end{aligned}$$

ここで  $u(z)$  は  $|z| \leq R$  で連続だから極限  $\rho \rightarrow R$  とすると

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{i\phi}) \left( \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\phi - \theta) + r^2} \right) d\phi \quad (11.22)$$

が得られ、これをポアソンの公式という。この公式が  $|z| \leq R$  で調和関数のディリクレ問題に対する具体的な解を与えている。また、式 11.21 の + 符号の右辺は

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\rho e^{i\phi}) \left( 1 - i \frac{2\rho r \sin(\phi - \theta)}{\rho^2 - 2\rho r \cos(\phi - \theta) + r^2} \right) d\phi$$

となるので両辺の虚数部をとると

$$v(re^{i\theta}) = v(0) - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(\rho e^{i\phi}) \left( \frac{\rho r \sin(\phi - \theta)}{\rho^2 - 2\rho r \cos(\phi - \theta) + r^2} \right) d\phi$$

$v(0)$  は前節の平均値の定理式 5.29 から求めることができる。ここで極限  $\rho \rightarrow R$  をとると

$$v(re^{i\theta}) = v(0) - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(\rho e^{i\phi}) \left( \frac{Rr \sin(\phi - \theta)}{R^2 - 2Rr \cos(\phi - \theta) + r^2} \right) d\phi \quad (11.23)$$

となる。これは虚成分が実成分に依存しているために両方を同時に決めることができないことを示している。従って式 11.22、11.23 から  $\zeta = Re^{i\phi}$  で変数変換すると  $f(z) = u(z) + iv(z)$  だから

$$f(z) = iv(0) + \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=R} u(\zeta) \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{\zeta} \quad (11.24)$$

とまとめることができる。ここで式 11.22 の括弧内の項について  $z = re^{i\theta}, \zeta = Re^{i\phi}$  で変換すると

$$\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\phi - \theta) + r^2} = \frac{|\zeta|^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2}$$

と簡単に表現できる。さらに

$$\frac{|\zeta|^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} = Re \frac{\zeta + z}{\zeta - z} = 1 + 2Re \frac{z}{\zeta - z} = 1 + Re \frac{z/\zeta}{1 - z/\zeta} \quad (11.25)$$

とかけるので最後の項に無限級数の公式を適用し、結局次のように位相部分を分離できる。

$$\begin{aligned} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\phi - \theta) + r^2} &= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} Re \left( \frac{z}{\zeta} \right)^n \\ &= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{r}{R} \right)^n \cos(n(\phi - \theta)) \\ &= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{r}{R} \right)^n (\cos(n\phi) \cos(n\theta) + \sin(n\phi) \sin(n\theta)) \end{aligned}$$

これをポアソン核と呼ぶ。注目すべきはこれはそのままフーリエ級数になっていることである。式 11.22 は

$$u(re^{i\theta}) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{r}{R} \right)^n (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)) \quad (11.26)$$

ただし、

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{i\phi}) \cos(n\phi) d\phi, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{i\phi}) \sin(n\phi) d\phi \quad (11.27)$$

である。

式 11.22 はフーリエ級数を使うことなく、次のような幾何関係から求めることができる。

円周上の点  $Q(R, \alpha)$  と円内の点  $P(r, \theta)$  を図のように決め、線分 PQ の長さを  $\rho$  とすると余弦定理から分母は

$$\rho^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\alpha - \theta)$$

となり、これは  $r < R$  ならば  $\rho > 0$  だから 0 になることはない。

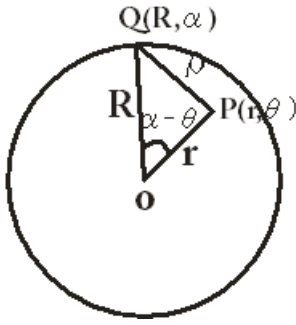


図 11.7: 円内の点 P と円周上の点 Q

ポアソン核の式の  $u(r, \theta)$  は  $C^\infty$  の関数で一般に

$$\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{\rho^2} d\alpha = \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\alpha - \theta)} d\alpha = 2\pi \quad (11.28)$$

が成り立つ。これは  $|z| < 1$  であれば

$$\sum_{k=1}^{\infty} z^k = \frac{z}{1-z}$$

となるので  $z = \frac{r}{R} e^{i(\alpha - \theta)}$  として、この左辺の実部をとると

$$\operatorname{Re} \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{r}{R} \right)^k (\cos k(\alpha - \theta) + i \sin k(\alpha - \theta)) \right] = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{r}{R} \right)^k \cos k(\alpha - \theta)$$

図から余弦定理を用いて

$$\rho^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\alpha - \theta)$$

が成り立つから右辺の実部をとると

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left[ \frac{z}{1-z} \right] &= \frac{r \cos(\alpha - \theta)}{R - r \cos(\alpha - \theta)} \\ &= \frac{1}{2} \frac{R^2 + r^2 - \rho^2}{R^2 - Rr \cos(\alpha - \theta)} \\ &= \frac{1}{2} \frac{R^2 + r^2 - \rho^2}{R^2 - Rr \cos(\alpha - \theta)} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\alpha - \theta)} - 1 \right) \end{aligned}$$

となる。よって次のようになる。

$$\frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\alpha - \theta)} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{r}{R} \right)^k \cos k(\alpha - \theta) + 1$$

これを 0 から  $2\pi$  で積分すると式 11.28 が成り立つ。

従って式 11.22 を次のように

$$(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \left( \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\alpha - \theta) + r^2} \right) d\alpha \quad (11.29)$$

ただし円周上では

$$u(r, \theta) = f(\theta) \quad (r \rightarrow R)$$

になる。この積分をポアソン積分という。これは次のように示すことができる。  
 円内の点  $P(r, \theta)$  として、 $P$  が円周上の点  $M(R, \theta)$  に近づくことを考えると式 11.28 から

$$u(P) - f(\beta) = \frac{R^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\rho^2} d\alpha$$

図のように  $M$  を中心とする  $\delta$  を半径にとる円  $C$  から切り取る部分を  $C_1$  それ以外を  $C_2$  とする。  
 $C_1$  に含まれる点  $Q_1(R, \alpha)$  に対しては  $f$  の連続性から

$$|f(\alpha) - f(\beta)| < \epsilon$$

とすることができる。

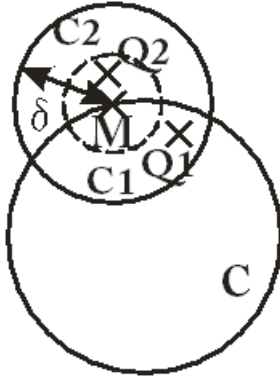


図 11.8:  $C_1$  上の積分は収束する

よって  $C$  上の積分を  $C_1$  と  $C_2$  に分けた時、 $C_1$  上の積分に対しては

$$\left\| \frac{R^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\rho^2} d\alpha \right\| < \epsilon \frac{R^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{\rho^2} = \epsilon$$

である。

点  $P$  が  $M$  を中心とする小さい円、半径  $\delta/2$  の円内の任意の点であれば  $C_2$  上の点  $Q_2$  に対して

$$\rho = \bar{PQ} > \frac{\delta}{2}$$

であるから  $C$  上で  $|f| < K$  (定数) とすると

$$\left\| \frac{R^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\rho^2} d\alpha \right\| < \frac{4K(R^2 - r^2)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{\rho^2} = \frac{8K(R^2 - r^2)}{\delta^2}$$

これは  $P \rightarrow M$  の時、 $r \rightarrow R$  だから  $C_2$  上の積分も  $\epsilon$  より小さいくできる。

よって  $P \rightarrow M$  の時、 $u(P) \rightarrow f(M)$  となりポアソン積分が内部ディリクレ問題の一意的な解になる。  
 さらに境界値  $f(\theta)$  の連続性が内部の  $u(r, \theta)$  に影響する。これは 2 つの境界値が

$$|f(\theta_1) - f(\theta_2)| < \epsilon \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

を満たせば対応する解が

$$\|u_1(r, \theta) - u_2(r, \theta)\| < \epsilon \frac{R^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{\rho^2} = \epsilon$$

を満たすことからわかる。

従って境界値  $f(\theta)$  の値を境界の一部分で変更した影響が円内の解に及ぶ。

これは波動方程式のように双曲線型の解の性質とは対照的である。

## 11.5 平均値の定理

前節の結果から調和関数は次のようないくつかの性質を示す。

平面上の1点Pにおける調和関数の値はPを中心とする。任意の円上での関数の平均値に等しい。つまりPを中心とする半径 $\delta$ の円において開円板上で調和、境界を含めた円板内で連続であれば

$$u(P) = \frac{1}{2\pi\delta} \int_c u ds$$

が成り立つ。これを調和関数に対する平均値の定理という。

3次元の場合は $u(P)$ の値はPを中心として任意の半径上の $u$ の値の平均値になる。

さらに $u$ が領域 $S$ で調和で境界を含めた内部 $\bar{S}$ で連続であれば平均値の定理を使うと関数 $u$ は定数でなければ $S$ の境界上でのみ最大値と最小値をとらないといけない。もし、境界ではない内部で最大値をとったとすると、その点をPにとり適当な円を描けばこの円周上が全て最大値になってしまう。よってこの境界上に最大最小をとる定理を最大値の定理という。

調和関数は第1節の結果から2次元の場合も3次元の場合も孤立特異点を持つ。これらは $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|$ とし $Q(\mathbf{x}_1)$ に線源か双極子がある時のポテンシャルは2次元で

$$u(r) = a \log \frac{1}{r}$$

3次元で

$$u(r) = \frac{a \cos \theta}{r}$$

とおけた。これはそれぞれ $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_1$ において $u(\mathbf{x})$ が $\log r, r^{-1}$ よりゆっくり発散するなら除去できる特異点になる。これから真性特異点となる場合はそこに具体的な電荷があるような場合となる。

## 11.6 グリーンの定理と境界値問題

$u(\mathbf{x}_1)$ は領域 $V$ で $C^2$ 関数、境界と内部を含む領域 $\bar{V}$ で $C^1$ 関数とする。 $V$ 内の定点 $P(\mathbf{x})$ と動点 $Q(\mathbf{x}_1)$ との距離

$$r = |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}|$$

とする。ガウスの定理

$$\int_V \nabla \mathbf{A} dV = \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS$$

において

$$\mathbf{A} = \psi \nabla \phi$$

として外向き法線ベクトルを $\frac{\partial}{\partial n}$ とすると

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\psi \nabla \phi) &= \nabla \psi \cdot \nabla \phi + \psi \nabla^2 \phi \\ \psi (\mathbf{n} \cdot \nabla \phi) &= \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \end{aligned}$$

が成り立つ。これから次のグリーンの定理が成り立つ。

これをGreenの第1定理 (Green's first identity) という。

$$\int_V (\psi \nabla^2 \phi + \nabla \psi \cdot \nabla \phi) dV = \int_S \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} dS \quad (11.30)$$

$\psi, \phi$ を入れ替えて両辺を引けば

$$\int_V (\psi \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \psi) dV = \int_S \left( \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) dS \quad (11.31)$$

が成り立つ。これを **Green の第 2 定理 (Green's second identity)** という内部のノイマン問題では

$$\mathbf{A} = \nabla u, \quad \nabla^2 u = 0$$

として 1 次元、2 次元では

$$\int_C \frac{\partial u}{\partial n} dl = 0, \quad \int_S \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0 \quad (11.32)$$

となる。さらに  $\phi = \psi = u$  とすると式 11.30 から 3 次元、2 次元では

$$\int_V (\nabla^2 u) dV = \int_S u \frac{\partial u}{\partial n} dS, \quad \int_S (\nabla^2 u) dS = \int_C u \frac{\partial u}{\partial n} dl \quad (11.33)$$

が成り立つ。これはさらに S 上であれば

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0$$

なので 3 次元、2 次元では

$$\int_V (\nabla^2 u) dV = 0, \quad \int_S (\nabla^2 u) dS = 0 \quad (11.34)$$

である。従って内部ノイマン問題の場合は任意定数に不定性が残り解が求まる。

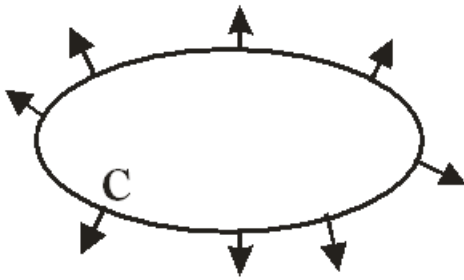


図 11.9: C に沿って法線ベクトルを足し合わせると 0 になる。

しかし、3 次元では

$$u(\mathbf{x}) = \frac{a}{r} \quad r = |\mathbf{x}|$$

とすると

$$\nabla^2 u = 0$$

となるが  $\Omega$  を立体角として法線方向の積分を書き換えると  $\mathbf{n}$  が  $V$  に対して内向きなので

$$\int_S \frac{\partial u}{\partial n} dS = -a \int_{\Omega} \frac{1}{r} rd\Omega = -4\pi a \quad (11.35)$$

となる。これは 0 ではない。しかし、次の正則性の条件

2 次元の場合は

$$u(\mathbf{x}) \rightarrow \text{Const} \quad (|\mathbf{x}| \rightarrow \infty) \quad (11.36)$$

3 次元の場合は

$$u(\mathbf{x}) \rightarrow 0 \quad (|\mathbf{x}| \rightarrow \infty)$$

が成り立つこととする。すると内部領域だけではなく、外部領域についても式 11.33 が成り立つ。従って 2 つの異なる解があるとする

$$u = u_1 - u_2$$

とした時、領域  $\bar{V}$  において

$$\nabla^2 u = 0$$

となるので  $u_1 = u_2$  すなわち解は任意定数を除けば一意となる。

また、ポアソン方程式に対してもポアソン方程式を満たす 1 つの解を  $u_0(x)$  とし、

$$u(x) = u_0(x) + u_1(x)$$

とすれば

$$\nabla^2 u_1 = 0$$

である。従ってポアソン方程式の境界値問題はラプラス法方程式の境界値問題に帰着する。

式 11.31 において  $\phi, \psi \rightarrow u, v$  とすると  $\nabla^2 u = 0$  の時、 $\tau(\mathbf{x})$  が領域  $\bar{V}$  で  $C^1$  関数とするとポアソン方程式

$$\nabla^2 v = -4\pi\tau(\mathbf{x})$$

を満たす  $v(\mathbf{x})$  が  $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|$  として

$$v(\mathbf{x}) = \int_V \frac{\tau(\mathbf{x}_1)}{r} dV(\mathbf{x}_1)$$

と決まる。従ってポアソン方程式 10.13 の 1 つの解として  $\phi(\mathbf{x})$  が  $C^1$  関数であれば

$$u_0(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\phi(\mathbf{x}_1)}{r} dV(\mathbf{x}_1)$$

と求まることになる。

2次元の対数ポテンシャル

$$v(\mathbf{x}) = \int_S \sigma(\mathbf{x}_1) \log \frac{1}{r} dS(\mathbf{x}_1)$$

は  $\sigma(\mathbf{x})$  が  $C^1$  関数であれば

$$\nabla^2 v(\mathbf{x}) = -2\pi\sigma(\mathbf{x})$$

のポアソン方程式を満たす。

## 11.7 ポテンシャル表現

前節に続いて  $u(\mathbf{x}_1)$  は領域  $V$  で  $C^2$  関数、境界と内部を含む領域  $\bar{V}$  で  $C^1$  関数とする。  $V$  内の定点  $P(\mathbf{x})$  と動点  $Q(\mathbf{x}_1)$  との距離

$$r = |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}|$$

とする。グリーンの定理において  $\phi = u, \psi = \frac{1}{r}$  とすると  $Q \rightarrow P$  において  $\psi$  が無限大になるので点  $P$  を中心として半径  $\delta$  の球  $V_\delta$  を  $V$  から取り除いた領域を  $V_1$  とする。また、 $V_\delta$  の境界面を  $S_\delta$  とする。  $V_1$  では

$$\nabla^2 \left( \frac{1}{r} \right) = 0$$

となる。



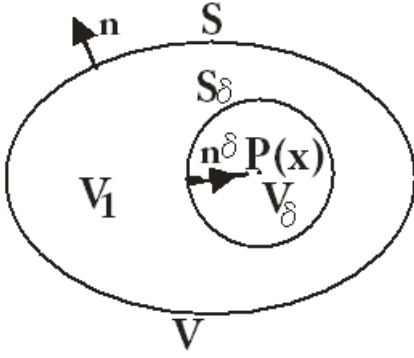


図 11.10: 内側の領域と外側の領域法線ベクトルの向きが異なる。

ここで図のように境界面での法線ベクトル  $\mathbf{n}$  の向き注目する。これは  $V_1$  から見れば外向きなので  $V_\delta$  から見れば内向きになる。

このベクトルの向きにより、内側と外側が区別できる。

$V_1$  においてグリーンの定理の式 11.31 から

$$\begin{aligned} \int_V (\psi \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \psi) dV &= \int_S \left( \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) dS \\ \int_V \left( \frac{1}{r} \nabla^2 u \right) dV &= \int_S \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) \right) dS + \int_{S_\delta} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) \right) dS \quad (11.37) \end{aligned}$$

この時、 $\delta \rightarrow 0$  において

$$\int_V \frac{1}{r} dV = 2\pi\delta^2 \rightarrow 0$$

だから左辺は  $\int_V \left( \frac{1}{r} \nabla^2 u \right) dV$  に収束することがわかる。一方で球面  $S_\delta$  上で法線ベクトル  $\mathbf{n}$  が  $\mathbf{r}$  と反対向きになるので

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\delta}, \quad \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{1}{\delta^2}$$

となるので球面  $S_\delta$  上で前節の平均値の定理をつかうと  $S_\delta$  上の点を  $P', P''$  とすると

$$\begin{aligned} \int_{S_\delta} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) \right) dS &= \frac{1}{\delta} \int_{S_\delta} \frac{\partial u}{\partial n} dS - \frac{1}{\delta^2} \int_{S_\delta} u dS \\ &= 4\pi\delta \frac{\partial u}{\partial n}(P') - 4\pi u(P'') \end{aligned}$$

ここで  $u(P'') \rightarrow u(\mathbf{x})$  だから 11.37 において  $\delta \rightarrow 0$  とすると

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) \right) dS - \frac{1}{4\pi} \int_V \left( \frac{1}{r} \nabla^2 u \right) dV$$

を得る。これは同様にして 2次元の場合についても曲線  $C$  を  $S$  の境界にとれば

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_C \left\{ \left( \log \frac{1}{r} \right) \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \left( \log \frac{1}{r} \right) \right\} dl - \frac{1}{2\pi} \int_S \left( \log \frac{1}{r} \right) \nabla^2 u dS$$

が成り立つ。よって  $u$  が領域  $V, S$  で調和であれば  $\nabla^2 u = 0$  なので次の公式が成り立つ  
3次元では1重層分布に対応し、

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) \right) dS \quad (11.38)$$

2次元では2重層分布に対応し、

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_C \left\{ \left( \log \frac{1}{r} \right) \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \left( \log \frac{1}{r} \right) \right\} dl \quad (11.39)$$

が得られる。逆に調和関数の平均値の定理や最大値の定理もこれから導くことができる。

## 12 Green関数

境界での連続性を問題にしてきたがこれを応用したのがGreen関数である。波動現象を考えるには必須の道具になるだけでなく物理現象の考え方の基本を1つ理解できるようになる。量子力学や、摂動論にも、後の場の理論、経路積分にも応用できる。調和関数を事前に学習し、技巧のみ追うことのないようにすれば有用な道具になる。

### 12.1 ポアソン方程式

はじめに簡単な例を紹介しよう。次章で取り扱う電磁気学においても次のように表されるポアソン方程式は物理でよく登場する。

$$\Delta\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (12.1)$$

ここで $\rho$ は電荷密度、 $\epsilon_0$ は真空の誘電率である。空間にある波源があり、有限の速度で伝達することを示す。さらにその空間に境界があれば発生した波は境界で反射し、有限の時間の中で定常波が出来上がる。これは重ね合わせの原理を採用できるあらゆる場面に共通した現象である。

そこで次の境界条件を付け加えよう。

$$\phi|_S = 0$$

この条件のもとで解 $\phi$ は決めることができる。この時便利であるのがGreen関数である。

次のように定義する。波源を $\mathbf{r}_0$ として、位置 $\mathbf{r}$ において

$$\Delta G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \equiv -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad (12.2)$$

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)|_{\text{ron}S} = 0$$

Green関数はデルタ関数の性質を巧みに利用する。というよりむしろデルタ関数を定義しているともいえるだろう。3次元空間でのこの解は次節で示すようによく知られている

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \quad (12.3)$$

である。境界条件を満たすGreen関数が見つかれば第1部の調和関数で導いたGreenの定理があるので式12.2より

$$\begin{aligned} \int_S (\phi \nabla G - G \nabla \phi) d\mathbf{S} &= \int_V (\phi \Delta G - G \Delta \phi) dV \\ &= \int_V (-\phi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + G \frac{\rho}{\epsilon_0}) dV \\ &= -\phi(\mathbf{r}) + \frac{1}{\epsilon_0} \int_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \rho(\mathbf{r}_0) dV \end{aligned}$$

ここで左辺は非常に大きな領域を考えた場合 $1/r^2$ より早く減少していくと考え、表面積分は0になると考えれば

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{\epsilon_0} \int_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \rho(\mathbf{r}_0) dV \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} dV \end{aligned}$$

である。つまり Green 関数は波源に生じるポテンシャルを離れた位置にどのように伝播していくかを表す伝播関数のようなものだともいえる。

## 12.2 定義

ある線形で逆をもつエルミートな演算子を  $L$  として次のような方程式があるとする。

$$L|a\rangle = |b\rangle$$

この時、

$$|a\rangle = L^{-1}|b\rangle$$

とかくことができる。この  $L^{-1} \equiv G$  と定義し、この  $G$  をグリーン演算子 (Greenian) という。

$$|a\rangle = G|b\rangle$$

ある基底  $\langle l|$  を作用させ、完全系を用いて

$$\langle x'' | l' \rangle \langle l' | x' \rangle = \delta(x'' - x')$$

が成り立つとして

$$\langle l|a\rangle = \langle l|G|b\rangle = \int \langle l|G|l'\rangle \langle l'|b\rangle dl' = \int G(l, l') \phi(l', b) dl'$$

この行列要素  $G(l, l')$  をグリーン関数 (**Green function**) という。この Green 関数は線形常微分方程式を解くことによく使われる。

例えば  $x$  軸上で次のような問題を考える。任意の  $C^2$  関数  $u(x), v(x)$  について

$$Lu(x) = f(x), \quad a < x < b \tag{12.4}$$

ただし、 $L$  は次のような線形微分演算子である。

$$L = p(x) \frac{d^2}{dx^2} + q(x) \frac{d}{dx} + r(x) \tag{12.5}$$

であり、境界条件

$$B_1u = \gamma_1, \quad B_2u = \gamma_2 \tag{12.6}$$

である。ここで次のような関数を用意し、その部分積分を考えると式 12.5 から

$$\begin{aligned} \int_a^b vLudx &= \int_a^b (vpu'' + vqu' + vru) dx \\ &= \left[ p(vu' - v'u) + (q - p')uv \right]_a^b + \int_a^b u (pv'' + 2p'v' - qv' + p''v - q'v + rv) dx \\ &= \left[ p(vu' - v'u) + (q - p')uv \right]_a^b + \int_a^b uL^*vdx \end{aligned} \tag{12.7}$$

ただし、 $L^*$  を  $L$  の形式的随伴微分演算子 (formal adjoint differential operator) として

$$L^* = p \frac{d^2}{dx^2} + (2p' - q) \frac{d}{dx} + p'' - q' + r$$

である。右辺第1項の  $\left[ p(vu' - v'u) + (q - p')uv \right]_a^b$  を境界項という。  
 とくに  $L = L^*$  であれば形式的に自己随伴 (**formally\_self\_adjoint**) であるという。  
 また、式 12.6 の  $\gamma = 0$  として

$$B_1^* u = 0, \quad B_2^* u = 0$$

とすると、これを随伴境界条件 (**adjoint\_boundary\_conditions**) という。

### 12.3 一般解

次に Green 関数を用いた微分方程式の解法を考える。一般的な線形微分演算子  $L$  を考えると  $a < x, \xi < b$  としてグリーン関数と随伴グリーン関数が次のように表現される。 $x$  を座標変数とみなし、 $\xi$  はここでは単にパラメタとして扱う。

$$\begin{cases} LG(x, \xi) = \delta(x - \xi) \\ B_1 G = 0 \quad B_2 G = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} L^* G^*(x, \xi) = \delta(x - \xi) \\ B_1^* G^* = 0 \quad B_2^* G^* = 0 \end{cases}$$

ここで  $G^*(x, \xi)$  が求まると式 12.4 から次のように関数  $u(x)$  を求められる。

$$Lu = f(x)$$

の微分方程式に左から  $G^*(x, \xi)$  をかけて積分すると式 12.20 から  $v = G^*$  とすれば境界項が消えるので

$$\int_a^b G^*(x, \xi) f(x) dx = \int_a^b u L^* G^* dx = \int_a^b u(x) \delta(x - \xi) dx = u(\xi)$$

であり、次のように変数変換すれば

$$u(x) = \int_a^b G^*(\xi, x) f(\xi) d\xi$$

求める関数が得られる。これは  $(L, B_1, B_2)$  に対応した演算子の逆演算子が  $G^*(\xi, x)$  を積分核とした積分演算子で表されることを示す。よって

$$G^*(\xi, \eta) = G(\eta, \xi)$$

という関係があることがわかる。無論、自己随伴になっていれば

$$G(\xi, \eta) = G(\eta, \xi)$$

である。ここで単にはじめはパラメタとして扱った  $\xi$  は随伴関係の中で座標変数と入れ替わる。つまり両者は対等で観測側の立場に依存することになる。

一般化すると微分方程式を解く場合、 $L$  を線形演算子として次のような領域  $D$  の境界条件があれば

$$\begin{cases} Lu(x) = f(x) & x \in D \\ Bu(x) = 0 & x \in \partial D \end{cases}$$

式 12.20 から次の関係があることが基礎になる。

$$\int_D vLudV(x) - \int_D uL^*vdV(x) = [boundary\ term] \quad (12.8)$$

これは第 1 部の調和関数で紹介した次のグリーンの定理の書き換えでもある。

$$\int_V (\psi \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \psi) dV = \int_S \left( \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) dS$$

この時次のようにグリーン関数とその随伴を定義できる。

$$\begin{cases} LG(x, \xi) = \delta(x - \xi) \\ BG = 0 \end{cases} \quad (12.9)$$

$$\begin{cases} L^*G^*(x, \xi) = \delta(x - \xi) \\ B^*G^* = 0 \end{cases}$$

これから関数  $u(x)$  は先のように変数の書き換えを経て

$$u(\mathbf{x}) = \int_D G^*(\xi, \mathbf{x}) f(\xi) dV(\xi)$$

と求まる。さらに  $G$  を明らかにするために  $G^*(\mathbf{x}, \xi)$  を微分方程式の特殊解  $E^*(\mathbf{x}, \xi)$  が既知であるとして次のように分解する。

$$G^*(\mathbf{x}, \xi) = E^*(\mathbf{x}, \xi) + g^*(\mathbf{x}, \xi)$$

$E^*(\mathbf{x}, \xi)$  は特殊解であるが境界条件を満たす必要はない。この境界条件については残りの  $g^*(\mathbf{x}, \xi)$  に任せるわけである。

このような  $E^*(\mathbf{x}, \xi)$  を微分演算子  $L^*$  の基本解という。このときの基本解は一意ではない。 $\mathbf{x} = \xi$  に  $\delta$  関数になることが条件だといえる。

前部でラプラス演算子が自己随伴であることを示したので  $L$  がラプラス演算子であれば  $L = L^*$  となるので 3 次元、2 次元のラプラス演算子に対する基本解は前部の調和関数で紹介したように

$$E(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1) = E^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1) = -\frac{1}{4\pi r} \quad (r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|) \quad 3dimension \quad (12.10)$$

$$E(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1) = E^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1) = -\frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{r} \quad (r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|) \quad 2dimension$$

と決めることができる。物理的にはこれらは点源、線源に対応している。さらにラプラス演算子では  $g^*(\mathbf{x}, \xi), g(\mathbf{x}, \xi)$  共に調和関数になる。境界条件は  $u$  に対して

$$\mathbf{x} \in \partial D$$

として

$$Bu = u = 0$$

であれば

$$B^*v = v = 0$$

であれば境界項が消えた。従って  $(L, B)$  が自己随伴といえる。

グリーンの定理の 2 次元版として

$$\int_S (v \nabla^2 u - u \nabla^2 v) dS = \int_{\partial S} \left( v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) dl$$

を用いて  $u = G(\mathbf{x}, \xi), v = G^*(\mathbf{x}, \eta)$  とおけば境界項が消える。これからも次の対称性

$$G^*(\xi, \eta) = G(\eta, \xi)$$

が成り立つ。

### 12.3.1 鏡像法

境界条件を利用する場合に領域の幾何が単純であれば図のような鏡像法を用いることができる。  
微分方程式

$$Lu(x, y) = \nabla^2 u(x, y) = f(x, y) \quad (x, y) \in D$$

を次の境界条件で解くことを考えよう。

$$\begin{cases} u(x, 0) = \phi(x) & (x > 0) \\ \frac{\partial u}{\partial n}(0, y) = \psi(y) & (y > 0) \\ u \rightarrow 0 & (\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty) \end{cases}$$

ただし  $\partial/\partial n$  は領域  $D$  の境界における外向き法線方向微分である。

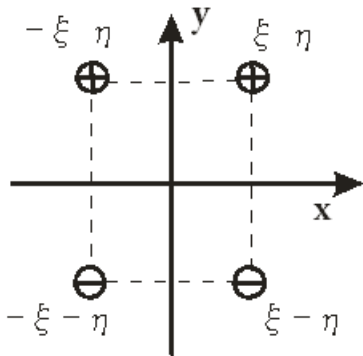


図 12.1:  $(\xi, \eta)$  を線源とした鏡像法

この時グリーン関数は

$$\begin{cases} LG(\mathbf{x}, \xi) = \nabla^2 G(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x} - \xi) & (x \in D, \xi \in D) \\ G(x, 0; \xi, \eta) = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial n}(0, y, \xi, \eta) = 0 & (x > 0, y > 0) \\ G(x, y; \xi, \eta) \rightarrow 0 & (\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty) \end{cases}$$

を満たす。図の反時計回りを正として領域で積分を実行すると

$$\nabla^2 u(x, y) = f(x, y)$$

は次のグリーン関数の定理を用いると境界だけを見れば計算できる。

$$\int_S (v \nabla^2 u - u \nabla^2 v) dS = \int_{\partial S} \left( v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) dl$$

$v = G$  として  $\nabla^2 G(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x} - \xi)$  だから境界条件から  $\frac{\partial u}{\partial n}(0, y) = \psi(y)$  だったから

$$\begin{aligned} \int_D (G(\mathbf{x}, \xi) \nabla^2 u - u \nabla^2 G(\mathbf{x}, \xi)) dV &= \int_D G(\mathbf{x}, \xi) f(x, y) dV - u(\xi) \\ &= \int_{\partial D} \left( \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) dl \end{aligned} \quad (12.11)$$

$$= \int_0^\infty \phi \frac{\partial G(x, 0; \xi, \eta)}{\partial x} dx + \int_0^\infty G(0, y, \xi, \eta) \psi(y) dy \quad (12.12)$$

となる。図の鏡像法から  $G(\mathbf{x}, \xi)$  は点  $(\xi, \eta)$  に次の 2 次元の基本解を満たす線源

$$G(\xi, \eta) = -\frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{r} \quad (12.13)$$

をおいた時の境界条件を満たすポテンシャルである。各鏡像点が境界条件を満たすように調整される。従って、変数の書き換えをすると

$$\begin{aligned} u(x, y) &= -\int_0^\infty \phi(\xi) \frac{\partial G(x, y; \xi, 0)}{\partial \eta} d\xi - \int_0^\infty G(x, y, 0, \eta) \psi(\eta) d\eta \\ &+ \int_0^\infty \int_0^\infty G(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta) d\xi d\eta \end{aligned}$$

であり自己随伴だから

$$G(x, y; \xi, \eta) = G(\xi, \eta; x, y)$$

であり式 12.13 から鏡像法を用いて、各線源を足し合わせ

$$\begin{aligned} G(x, y; \xi, \eta) &= \frac{1}{4\pi} \left( \log \frac{1}{[(x + \xi)^2 + (y + \eta)^2]} + \log \frac{1}{[(x - \xi)^2 + (y + \eta)^2]} \right) \\ &- \frac{1}{4\pi} \left( \log \frac{1}{[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]} + \log \frac{1}{[(x + \xi)^2 + (y - \eta)^2]} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi} \log \frac{[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2] [(x + \xi)^2 + (y - \eta)^2]}{[(x - \xi)^2 + (y + \eta)^2] [(x + \xi)^2 + (y + \eta)^2]} \end{aligned}$$

と求まる。

### 12.3.2 球の場合

第 1 部の調和関数であつた球に対するディリクレ問題を Green 関数で再び考えてみよう。領域  $D$  を半径  $a$  の球の内部、 $\partial D$  はその表面とし次のような境界条件を持つ微分方程式を考える。

$$Lu(\mathbf{x}) = \nabla^2 u = f(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in D) \quad (12.14)$$

$$u(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in \partial D)$$

この時のグリーン関数を次で定義する。

$$\begin{cases} LG(\mathbf{x}, \xi) = \nabla^2 G(\mathbf{x}, \xi) = \delta(\mathbf{x} - \xi) & (\mathbf{x} \in D) \\ G(\mathbf{x}, \xi) = 0 & (\mathbf{x} \in \partial D) \end{cases} \quad (12.15)$$

式 12.12 と同様にグリーンの定理を用いれば境界での  $G(\mathbf{x}, \xi)$  は 0 になるので  $\psi = G$  として

$$\begin{aligned} \int_D (G(\mathbf{x}, \xi) \nabla^2 u - u \nabla^2 G(\mathbf{x}, \xi)) dV &= \int_D G(\mathbf{x}, \xi) f(\mathbf{x}) dV - u(\xi) \\ &= \int_S \left( \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) dS \\ &= - \int_{\partial D} \phi(\mathbf{x}, \xi) \frac{\partial G(\mathbf{x}, \xi)}{\partial x} dS \end{aligned}$$

ただし  $\partial/\partial n$  は領域  $D$  の境界における外向き法線方向微分である。

よって変数変換をすれば

$$u(\mathbf{x}) = \int_D G(\xi, \mathbf{x}) f(\xi) dV - \int_{\partial D} \phi(\xi, \mathbf{x}) \frac{\partial G(\xi, \mathbf{x})}{\partial \xi} dS \quad (12.16)$$

となるので後は境界条件を満たす Green 関数を見つければよい。

ここで図のような半径  $a$  の球を考えると  $G(\mathbf{x}, \xi)$  は境界条件の式 12.15 から、この球を接地し、内部の位置  $\xi$  に点電荷をおいた時の静電ポテンシャルを表している。

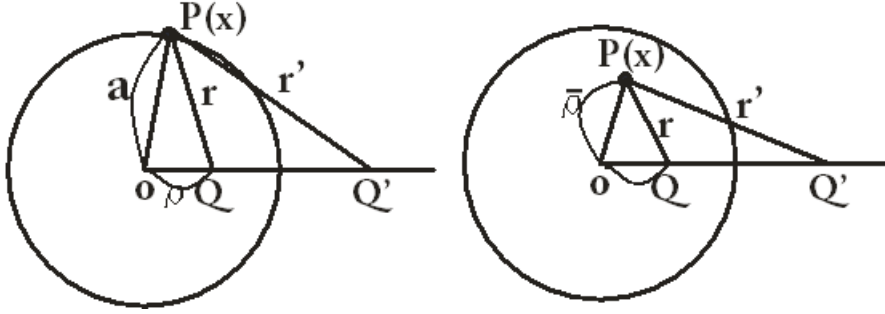


図 12.2: アポロニウスの円  $OQ \cdot OQ' = a^2$

上の図において点  $\xi$  を  $Q$  とする。点  $\mathbf{x}$  を  $P$  とする。次を満たす  $Q'$  を決める。

$$OQ \cdot OQ' = a^2$$

この点  $Q'$  に  $Q$  と異符号の電荷をおいた時、点  $\mathbf{x}$  でのポテンシャル値  $G(\mathbf{x}, \xi)$  は  $PQ = r, PQ' = r'$  として

$$G(\mathbf{x}, \xi) = -\frac{1}{4\pi r} + \frac{q}{4\pi r'}$$

となる。電荷  $q$  は境界条件から決まる。例えば  $P$  が球面上にあれば  $\triangle POQ \sim \triangle Q'OP$  だから

$$r' = \frac{a}{\rho}$$

となるので

$$q = \frac{a}{\rho}$$

と選べば式 12.15 を満たす。これからグリーン関数が次のように求まる。

ただし、 $\angle POQ = \gamma, OP = \bar{\rho}$  である。

$$\begin{cases} G(\mathbf{x}, \xi) = -\frac{1}{4\pi r} + \frac{a/\rho}{4\pi r'} \\ r = PQ = \sqrt{\bar{\rho}^2 + \rho^2 - 2\bar{\rho}\rho \cos \gamma} \\ r' = PQ' = \frac{1}{\rho} \sqrt{\bar{\rho}^2 \rho^2 + a^4 - 2a^2 \bar{\rho}\rho \cos \gamma} \end{cases} \quad (12.17)$$

この時、 $G(\mathbf{x}, \xi) = G(\xi, \mathbf{x})$  も成り立っている。式 12.14 において  $f(\mathbf{x}) = 0$  の時はさらに詳しい解が次のように得られる。

$\xi$  は球内の点として  $\rho < a$  とすると

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial G}{\partial n} \right|_{Surface} &= \left. \frac{\partial G}{\partial \rho} \right|_{\bar{\rho}=a} \\ &= \frac{a^2 - \rho^2}{4\pi a (a^2 + \rho^2 - 2a\rho \cos \gamma)^{3/2}} \end{aligned}$$



球内の点  $\xi$  と球面上の点  $\mathbf{x}$  とすると極座標を用いれば

$$\xi = \rho \sin \theta \cos \alpha, \quad \eta = \rho \sin \theta \sin \alpha, \quad \zeta = \rho \cos \theta$$

$$x = a \sin \bar{\theta} \cos \bar{\alpha}, \quad y = a \sin \bar{\theta} \sin \bar{\alpha}, \quad \zeta = a \cos \bar{\theta}$$

さらに図の余弦定理からと上の式を代入した結果から

$$\begin{aligned} |\mathbf{x} - \xi|^2 &= a^2 + \rho^2 - 2a\rho \cos \gamma \\ &= a^2 + \rho^2 - 2a\rho (\cos \bar{\theta} \cos \theta + \sin \bar{\theta} \sin \theta \cos(\bar{\alpha} - \alpha)) \end{aligned}$$

が成り立つことになるから

$$\cos \gamma = \cos \bar{\theta} \cos \theta + \sin \bar{\theta} \sin \theta \cos(\bar{\alpha} - \alpha)$$

である。これから解として極座標の表現で

$$u(\rho, \theta, \alpha) = \frac{a(a^2 - \rho^2)}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\phi(\bar{\theta}, \bar{\alpha}) \sin \bar{\theta} d\bar{\theta} d\bar{\alpha}}{a^2 + \rho^2 - 2a\rho (\cos \bar{\theta} \cos \theta + \sin \bar{\theta} \sin \theta \cos(\bar{\alpha} - \alpha))^{3/2}}$$

となり、これもポアソン積分という。

### 12.3.3 拡散演算子

ラプラス演算子と異なる次のような 1 次元の拡散方程式を考えよう。  $k$  を定数として

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - k \frac{\partial}{\partial x^2}$$

を拡散演算子として

$$\begin{cases} Lu(x, t) = f(x, t) & (-\infty < x < \infty, t > 0) \\ u(x, 0) = \phi(x) \end{cases} \quad (12.18)$$

$L$  は自己随伴ではないので

$$L^* = -\frac{\partial}{\partial t} - k \frac{\partial}{\partial x^2}$$

とすれば

$$vLu - uL^*v = (u_t - ku_{xx}) + u(v_t + kv_{xx}) = (uv)_t - k(vu_x - uv_x)_x$$

となるので  $(x, t)$  平面の矩形領域を

$$D = (a, b) \times (t_1, t_2)$$

としてこの領域で積分すると

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \int_a^b (vLu - uL^*v) dx dt &= \int_a^b [uv]_{t=t_2} dx - \int_a^b [uv]_{t=t_1} dx \\ &\quad - k \int_{t_1}^{t_2} [vu_x - uv_x]_{x=b} dt + k \int_{t_1}^{t_2} [vu_x - uv_x]_{x=a} dt \end{aligned} \quad (12.19)$$

となる。これが式 12.8 に相当する。

式 12.18 を解くためにまず次の基本解  $E^*(x, t; \xi, \tau)$  に過去への拡散を防ぐために  $t > \tau$  の条件をつける。

$$\begin{cases} L^* E^*(x, t; \xi, \tau) = -E_t^* - kE_{xx}^* = \delta(x - \xi, t - \tau) & (-\infty < x < \infty, t > 0) \\ E^* = 0 & (t > \tau) \end{cases} \quad (12.20)$$

右辺をフーリエ変換すると

$$\mathcal{F}_x [\delta(x - \xi, t - \tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - \xi) \delta(t - \tau) e^{-i\kappa x} dx = e^{-i\kappa \xi} \delta(t - \tau)$$

が成り立つから基本解について

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \hat{E}^*(k, t) - k\kappa^2 \hat{E}^*(k, t) = -e^{-i\kappa \xi} \delta(t - \tau) \\ \hat{E}^*(k, t) = 0 \end{cases} \quad (t > \tau)$$

よって  $t \neq 0$  の時へヴィサイドのステップ関数を  $H(x)$  として

$$H(x) = \int_{-\infty}^x \delta(\xi) d\xi$$

を用いて次のように一つにまとめることができる。

$$\begin{aligned} \hat{E}^*(k, t) &= \begin{cases} ae^{k\kappa^2 t} & (t < \tau) \\ 0 & (t > \tau) \end{cases} \\ &= aH(\tau - t)e^{k\kappa^2 t} \end{aligned}$$

定数  $a$  は元の式に代入して

$$a = e^{k\kappa^2 \tau - ik\xi}$$

が得られるので

$$\hat{E}^*(k, t) = H(\tau - t)e^{-k\kappa^2(\tau - t)} e^{-\kappa \xi}$$

となり、これを逆変換すれば

$$\begin{aligned} E^*(x, t; \xi, \tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} H(\tau - t)e^{-k\kappa^2(\tau - t)} e^{-\kappa \xi} e^{ikx} dk \\ &= \frac{H(\tau - t)}{\sqrt{4\pi k(\tau - t)}} \exp\left(\frac{(x - \xi)^2}{4k(\tau - t)}\right) \end{aligned}$$

が得られる。これは過去に向かっての拡散を表している。式 12.19 からとしてこの結果を代入すると次の項だけが残る。

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_a^b (vLu - uL^*v) dx dt = - \int_a^b [uv]_{t=t_1} dx$$

よって

$$a = -\infty, b = \infty$$

とすると式 12.20 から

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} uL^*v dx dt &= \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} vLudx dt + \int_{-\infty}^{\infty} [uv]_{t=t_1} dx \\ &= \int \int uL^*E^*(x, t; \xi, \tau) dx dt = \int \int u\delta(x - \xi, t - \tau) dx dt = u(x, t) \end{aligned}$$

よって式 12.18 が成り立つので基本解  $E^*$  が随伴グリーン関数になる。

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad Lu = f, \quad t = 0, t_2 = t > \tau$$

として、最後の式で変数を入れ替えると式 12.16 の処方に従い

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x, t)}{\sqrt{4\pi k(\tau - t)}} \exp\left(\frac{(x - \xi)^2}{4k(\tau - t)}\right) dx d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(x)}{\sqrt{4\pi kt}} \exp\left(\frac{(x - \xi)^2}{4kt}\right) dx \\ &= \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi, \tau)}{\sqrt{4\pi k(\tau - t)}} \exp\left(\frac{(x - \xi)^2}{4k(\tau - t)}\right) d\xi d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(\xi)}{\sqrt{4\pi kt}} \exp\left(\frac{(x - \xi)^2}{4kt}\right) d\xi \end{aligned}$$

### 12.3.4 波動関数

次に空間 3 次元の波動演算子を考えよう。これは次のように自己随伴である。

$$L = L^* = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2$$

まず基本解を

$$LE(x, t; \xi, \tau) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} E - c^2 \nabla^2 E = \delta(x - \xi, t - \tau) \quad (12.21)$$

とおく。時刻  $\tau$  に点源が作用したとして時間的な境界条件は

$$E = 0 \quad (t < \tau)$$

とする。フーリエ変換すると

$$\frac{d^2 \hat{E}}{dt^2} + c^2 k^2 \hat{E} = e^{-i\mathbf{k} \cdot \xi} \delta(t - \tau) \quad (k = |\mathbf{k}|)$$

$t > \tau$  では  $\delta(t - \tau) = 0$  だから

$$\hat{E}(k, t) = \begin{cases} 0 & (t < \tau) \\ A \sin(ckt) + B \cos(ckt) & (t > \tau) \end{cases}$$

$t = \tau$  での接続条件は微分係数も連続であるとして

$$\hat{E}(k, t) = \begin{cases} A \sin(ck\tau) + B \cos(ck\tau) = 0 \\ ckA \cos(ck\tau) - ckB \sin(ck\tau) = e^{-i\mathbf{k} \cdot \xi} \end{cases}$$

これを解くと

$$\begin{aligned} A &= \frac{e^{-i\mathbf{k} \cdot \xi}}{ck} \cos(ck\tau) \\ B &= -\frac{e^{-i\mathbf{k} \cdot \xi}}{ck} \sin(ck\tau) \end{aligned}$$

となるのでステップ関数  $\theta(t - \tau)$  を用いて次のように 1 つの表現にまとまる。

$$\hat{E} = \frac{1}{ck} e^{-i\mathbf{k} \cdot \xi} \sin[ck(t - \tau)] \theta(t - \tau)$$

よってこれを逆変換すると  $\mathbf{k}(k_1, k_2, k_3)$  であることに注意して

$$E = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \xi)}}{ck} \sin(ck(t - \tau)) dk_1 dk_2 dk_3 \theta(t - \tau)$$

従って新たに  $c\mathbf{k} = \kappa, \kappa = |\kappa|$  とおくと

$$E = \frac{\theta(t-\tau)}{(2\pi c)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\kappa/c \cdot (\mathbf{x}-\xi)}}{\kappa} \sin(\kappa(t-\tau)) d\kappa_1 d\kappa_2 d\kappa_3$$

さらに極座標に変換して

$$\begin{aligned} E &= \frac{\theta(t-\tau)}{(2\pi c)^3} \int_0^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{e^{i\kappa/c \cdot |\mathbf{x}-\xi| \cos \theta}}{\kappa} \sin(\kappa(t-\tau)) \sin \theta d\theta d\kappa \\ &= \frac{\theta(t-\tau)}{(2\pi c)^3} \int_0^{\infty} \int_{-1}^1 \frac{e^{i\kappa/c \cdot |\mathbf{x}-\xi| \cos \theta}}{\kappa} \sin(\kappa(t-\tau)) d(\cos \theta) d\kappa \\ &= \frac{\theta(t-\tau)}{4\pi^2 c^2 |\mathbf{x}-\xi|} \int_0^{\infty} 2 \sin\left(\kappa \frac{|\mathbf{x}-\xi|}{c}\right) \sin(\kappa(t-\tau)) d\kappa \\ &= \frac{\theta(t-\tau)}{4\pi^2 c^2 |\mathbf{x}-\xi|} \int_0^{\infty} \left\{ \cos \kappa \left(t-\tau - \frac{|\mathbf{x}-\xi|}{c}\right) - \cos \kappa \left(t-\tau + \frac{|\mathbf{x}-\xi|}{c}\right) \right\} d\kappa \end{aligned}$$

となるが  $\delta$  関数の定義から

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \kappa x d\kappa = \delta(x)$$

だったから  $r = |\mathbf{x}-\xi|$  としてステップ関数を考慮すると

$$\begin{aligned} E(\mathbf{x}, t; \xi, \tau) &= \frac{\theta(t-\tau)}{4\pi c^2 |\mathbf{x}-\xi|} \left( \delta\left(t-\tau - \frac{|\mathbf{x}-\xi|}{c}\right) - \delta\left(t-\tau + \frac{|\mathbf{x}-\xi|}{c}\right) \right) \\ &= \frac{1}{4\pi c^2 r} \delta\left(t-\tau - \frac{r}{c}\right) \end{aligned} \quad (12.22)$$

となる。ステップ関数があるので最後の式は遅延解のみ拾うことになった。

この基本解を遅延グリーン関数という。

この解から時刻  $\tau$  という時刻に点  $\xi$  に作用した点源の影響が球面波として速度  $c$  で外向きに伝わる。

点源の効果が点  $\mathbf{x}$  に到達するのは  $t-\tau = |\mathbf{x}-\xi|/c$  を満たす時刻  $t$  になる。この前後の時刻では点源には影響はない。

これはこの場合の波動演算子  $L$  の基本解とみなすことができるが無限領域のグリーン関数とみなすこともできる。

これに対して点源の作用時刻  $\tau$  より先の時刻においては

$$\begin{aligned} L^* E^*(x, t; \xi, \tau) &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} E^* - c^2 \nabla^2 E^* = \delta(x-\xi, t-\tau) \\ E^* &= 0 \quad (t > \tau) \end{aligned} \quad (12.23)$$

を満たす  $E^*$  が基本解であり、これを先進グリーン関数という。この解は次の時間反転

$$t \rightarrow -t, \tau \rightarrow -\tau$$

と置き換えればよい。よって

$$E^*(\mathbf{x}, t; \xi, \tau) = \frac{1}{4\pi c^2 r} \delta\left(t-\tau + \frac{r}{c}\right)$$

である。先進と遅延のグリーン関数については後にシュレディンガー方程式を例に考察する。

これらの解から空間 2 次元の場合の基本解も求めることができる。  $z$  軸をつぶして考えれば波動方程式は

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \right] E(x, y, t; \xi, \eta, \tau) = \delta(x-\xi) \delta(y-\eta) \delta(t-\tau)$$

となる。ただし、先の結果から  $z$  軸をつぶすので  $E$  は  $z$  に無関係として  $\zeta$  については  $-\infty, \infty$  で積分する。

$$E(x, y, t; \xi, \eta, \tau) = \frac{1}{4\pi c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta\left(t - \tau - \frac{r}{c}\right)}{r} d\zeta$$

となる。次のように変数変換すると

$$z - \zeta = s, \quad r^2 = \rho^2 + s^2, \quad \rho = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$$

$$\alpha = \frac{r}{c} = \sqrt{\rho^2 + s^2}/c$$

すると

$$\frac{ds}{r} = \frac{ds}{c\alpha} = \frac{cd\alpha}{s} = \frac{cd\alpha}{\sqrt{c^2\alpha^2 - \rho^2}}$$

となるので次のような半空間積分に置き換えられる。

$$\begin{aligned} E(x, y, t; \xi, \eta, \tau) &= \frac{1}{2\pi c^2} \int_0^{\infty} \frac{\delta\left(t - \tau - \sqrt{\rho^2 + s^2}/c\right)}{\sqrt{\rho^2 + s^2}} ds \\ &= \frac{1}{2\pi c} \int_{\rho/c}^{\infty} \frac{\delta(t - \tau - \alpha)}{\sqrt{c^2\alpha^2 - \rho^2}} d\alpha \\ &= \begin{cases} 0 & , c(t - \tau) < \rho \\ \frac{1}{2\pi c \sqrt{c^2(t - \tau)^2 - \rho^2}} & , c(t - \tau) > \rho \end{cases} \end{aligned}$$

となる。この解も

$$E = 0 \quad (t < \tau)$$

を満たす。

さらに式 12.23 を  $y$  軸についてもつぶし、 $\eta$  を  $-\infty, \infty$  で積分してしまえば空間 1 次元の場合が得られる。

$$c(t - \tau) < |x - \xi| = \rho$$

の時には  $E(x, y, t; \xi, \eta, \tau) = 0$  であったから積分の結果も 0 になる。そこで

$$c(t - \tau) > |x - \xi| = \rho$$

の時、次のように変数変換すると

$$y - \eta = s, \quad c^2(t - \tau)^2 - (x - \xi)^2 = a^2$$

$$\begin{aligned} E(x, y, t; \xi, \eta, \tau) &= \frac{1}{2\pi c} \int_{-a}^a \frac{1}{\sqrt{a^2 - s^2}} ds \\ &= \frac{1}{\pi c} \left[ \sin^{-1} \left( \frac{s}{a} \right) \right]_0^a = \frac{1}{2c} \\ &= \begin{cases} 0 & , c(t - \tau) < \rho \\ \frac{1}{2c} & , c(t - \tau) > \rho \end{cases} \end{aligned}$$

となる。この解も

$$E = 0 \quad (t < \tau)$$

をみたしている。

式 12.23 からは 3 次元の場合には点源の効果が点  $\mathbf{x}$  に到達するのは  $t - \tau = |\mathbf{x} - \xi|/c$  を満たす時刻  $t$  になる。この前後の時刻では点源には影響はなかった。

しかし、1, 2 次元の場合には点  $(x, y)$  に線源の影響が到達するのは  $t - \tau = \rho/c$  を満たす時刻  $t$  になるが、この場合は  $\delta$  関数をふくまないの、その後も点  $(x, y)$  は線源の影響を受け続けることになる。

## 12.4 固有値問題

ある1粒子のハミルトニアンを相互作用項とわけ、

$$H = H_0 + H_I \quad (12.24)$$

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2$$

としてシュレディンガー方程式は次のようになるから

$$H\phi(r) = E\phi(r)$$

これを次のように変形し、

$$(E - H)\phi(r) = L\phi(r)$$

$E$  は固有値であるから実数である。従って先の定義から Green 演算子として

$$G = L^{-1} = (E - H)^{-1} \quad (12.25)$$

となるが  $E$  が  $H$  の固有値と一致するとき不定になってしまう。そこで  $I$  を単位行列として

$$LG = (E - H)G = I$$

とかける。そこで両辺を次のように状態ベクトルで囲むと

$$\langle r | (E - H)G | r' \rangle = \langle r | I | r' \rangle = \delta(r - r') \quad (12.26)$$

とかける。さらに先とおなじように完全系で

$$\langle r | (E - H)G | r' \rangle = \int \langle r | (E - H) | r'' \rangle \langle r'' | G | r' \rangle dr''$$

と表されるので Green 関数を

$$G(r'', r') = \langle r'' | G | r' \rangle = \int \phi^*(r'') G \phi(r') dr''$$

で定義すればよい。このとき  $L$  が線形エルミートであれば式 12.24 から

$$\begin{aligned} \langle r | (E - H) | r'' \rangle &= \langle r | L | r'' \rangle \\ &= \langle Lr | r'' \rangle \\ &= \int L\phi^*(r)\phi(r'')dr'' \\ &= L\delta(r - r'') \\ &= (E - H)\delta(r - r'') \\ &= \left(E + \frac{\hbar^2}{2m}\nabla_{r''}^2 - H_I(r'')\right)\delta(r - r'') \end{aligned}$$

よってデルタ関数の次の公式

$$f(r) = \int f(r')\delta(r - r')dr'$$

を利用すると

$$\int (E + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla_{r''}^2 - H_I(r'')) \delta(r - r'') G(r'' - r') dr'' = (E + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla_r^2 - H_I(r)) G(r - r')$$

を得る。よってグリーン関数の微分方程式が式 12.42 から

$$(E + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla_r^2 - H_I(r)) G(r, r') = \delta(r - r')$$

となる。

## 12.5 離散状態の Green 関数

次に系の状態がとびとびの場合  $n$  について考える。この時次の完全系を考え Green 演算子と Green 関数を定義する。

$$\begin{aligned} G &\equiv L^{-1} = (E - H)^{-1} = \sum_n (E - H)^{-1} |n\rangle \langle n| \\ &= \sum_n |n\rangle \langle n| (E - H)^{-1} |n\rangle \langle n| \\ &= \sum_n \frac{|n\rangle \langle n|}{E - E_n} \end{aligned} \tag{12.27}$$

これを時間独立な系における固有値問題におけるグリーン演算子のスペクトル表示という。Green 関数はこれに座標を作用させて

$$G(l, l') = \langle l | G | l' \rangle = \sum_n \frac{\langle l | n \rangle \langle n | l' \rangle}{E - E_n}$$

具体的に次のような境界条件での 1 次元 1 自由粒子の場合を見てみる。

$$\phi_n(0) = 0, \phi_n(a) = 0$$

シュレディンガー方程式は次のようになる。

$$E_n \phi(x) = \frac{\hat{P}_n^2}{2m} \phi(x)$$

ここで

$$k_n = \sqrt{\frac{2mE_n}{\hbar^2}}$$

とおけば

$$\frac{d^2}{dx^2} \langle n | x \rangle + k_n^2 \langle n | x \rangle = 0$$

境界条件から  $a \cdot k_n = n\pi$  となるので

$$\langle n | x \rangle = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin(k_n \cdot x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a} \cdot x\right)$$

エネルギーの固有値も

$$E_n = \frac{1}{2m} \left(\frac{n\hbar\pi}{a}\right)^2$$

となった。これから Green 関数は

$$\begin{aligned}
 G(x, x') &= \langle x | G | x' \rangle = \sum_n \frac{\langle x | n \rangle \langle n | x' \rangle}{E - E_n} \\
 &= \sum_n \frac{\left(\frac{2}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x'\right)}{E - \frac{1}{2m} \left(\frac{n\hbar\pi}{a}\right)^2} = \sum_n \frac{\left(\frac{1}{a}\right) \left(\cos\left(\frac{n\pi}{a}(x-x')\right) - \cos\left(\frac{n\pi}{a}(x+x')\right)\right)}{E - \frac{1}{2m} \left(\frac{n\hbar\pi}{a}\right)^2}
 \end{aligned}$$

となる。これは次の図左のように  $x: -1, 1$  で  $x': -2, 2$   $a = 1$  の範囲で描画させると  $n$  に関係無く、速度一定な進行波である。

$a$  は図右のように振幅と周期に影響する。

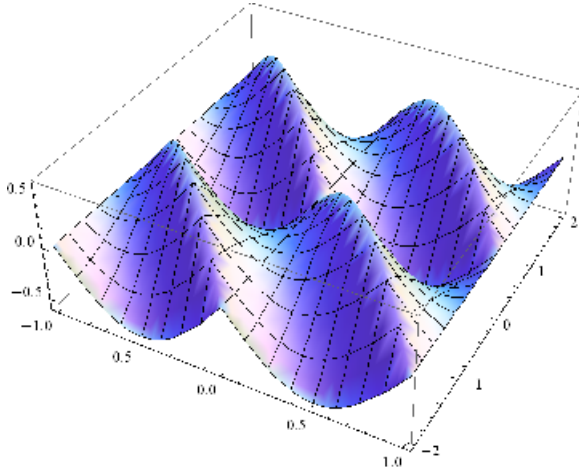


図 12.3:  $n=20$  の場合振幅が大きいのが  $a=1$ , 小さい方は  $a=2$

## 12.6 周期的境界条件

結晶中のような周期的な境界条件がある中での単純な 1 次元 1 自由粒子の場合を次に考えよう。

1 次元  $x$  軸上に長さ  $a$  の周期的な境界条件がある場合を考える。この場合のシュレディンガー方程式は  $p_n = \hbar k_n$  だから

ブラケット表示ではなく、関数の表示で

$$-i\hbar\nabla_x\phi_n(x) = p_n\phi_n(x) \quad (12.28)$$

$$\nabla_x\phi_n(x) = ik_n\phi_n(x)$$

また

$$E_n\phi(x) = H\phi(x) = \frac{p_n^2}{2m}\phi(x)$$

だから

$$k_n = p_n/\hbar = \sqrt{2mE_n}/\hbar$$

である。さて周期的な境界条件として次を課す。

$$\phi_n(x) = \phi_n(x+a)$$



$$\frac{d}{dx}\phi_n(x) = \frac{d}{dx}\phi_n(x+a)$$

式 12.28 の一般解として

$$\phi_n(x) = C \exp(ik_n x)$$

であり、規格化として区間  $-a/2 \leq x \leq a/2$  において

$$\int_{-a/2}^{a/2} \phi_n^*(x)\phi_n(x) = C^2 a = 1$$

から

$$C = \sqrt{\frac{1}{a}}$$

である。境界条件から

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{1}{a}} \exp(ik_n x) = \sqrt{\frac{1}{a}} \exp(ik_n a) \exp(ik_n x)$$

$$\frac{d}{dx}\phi_n(x) = ik_n \sqrt{\frac{1}{a}} \exp(ik_n x) = ik_n \sqrt{\frac{1}{a}} \exp(ik_n a) \exp(ik_n x)$$

これらは共に

$$\exp(ik_n a) = 1$$

であればよいので

$$k_n a = 2n\pi$$

が条件となる。この時、

$$E_n = \frac{2}{m} \left( \frac{n\hbar\pi}{a} \right)^2 \quad (12.29)$$

となるのでグリーン関数はブラケットの行列表示に書き換えると

$$\begin{aligned} G(x, x') &= \langle x | G | x' \rangle = \sum_n \frac{\langle x | n \rangle \langle n | x' \rangle}{E - E_n} \\ &= \sum_n \frac{\left(\frac{1}{a}\right) \exp\left(i\frac{2n\pi}{a}(x - x')\right)}{E - \frac{2}{m} \left(\frac{n\hbar\pi}{a}\right)^2} \end{aligned}$$

となる。

## 12.7 周期的ポテンシャル

1次元自由粒子についてさらに周期的なポテンシャルが次のクローニツヒペニーのモデル (Kronig-Penny\_model) になる場合を考える。

$$V(x) = -V_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x + na), \quad (V_0 > 0, n \in \mathbf{Z})$$

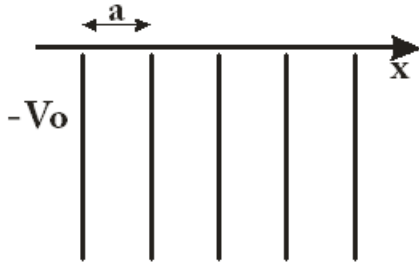


図 12.4: クローニツヒペニーのポテンシャル

$0 < x < a$  では  $V(x) = 0$  なので先と同様に波動関数の一般解は  $x \in (0, a)$  として

$$\phi_n(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \quad (12.30)$$

ただし  $k$  は束縛状態  $E < 0$  もあり得るので複素数であり

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \quad (12.31)$$

である。また周期的な境界条件から

$$\phi_n(x) = e^{ik_n a} \phi_n(x - a)$$

とおくことができた。よって  $a < x < 2a$  の範囲において解は

$$\phi_n(x) = e^{ik_n a} \left( Ae^{ik(x-a)} + Be^{-ik(x-a)} \right) \quad (12.32)$$

となる。境界条件から両側から

$$\phi_n(a \rightarrow +0) = \phi_n(a \rightarrow -0)$$

が成り立つのでシュレディンガー方程式を次の微小区間で積分するとデルタ関数の性質から

$$\int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} dx \left[ \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \phi_n - V(x) \phi_n + E \phi_n \right] = 0$$

$$\frac{\hbar^2}{2m} \nabla \phi_n \Big|_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} + V_0 \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} \delta(x-a) \phi_n(x) dx + E \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} \phi_n(x) dx = 0$$

$$\frac{\hbar^2}{2m} (\nabla \phi_n(a \rightarrow +0) - \nabla \phi_n(a \rightarrow -0)) + V_0 \phi_n(a) + 2\epsilon E \phi_n(a) + O(\epsilon^2) = 0$$

ここで  $\epsilon \rightarrow 0$  の極限をとれば

$$\nabla \phi_n(a \rightarrow +0) - \nabla \phi_n(a \rightarrow -0) + \frac{2m}{\hbar^2} V_0 \phi_n(a) = 0$$

式 12.6 から

$$e^{ik_n a} ik(A+B) - ik(Ae^{ika} - Be^{-ika}) + \frac{2m}{\hbar^2} V_0 (Ae^{ika} + Be^{-ika}) = 0 \quad (12.33)$$

を得る。さらに境界条件  $\phi_n(x) = \phi_n(x+a)$  を式 12.6 に使うと

$$Ae^{ika} + Be^{-ika} - e^{ik_n a} (A+B) = 0 \quad (12.34)$$

が得られる。この 2 式から  $A, B$  についての連立方程式は次のようになる。

$$\begin{pmatrix} e^{ika} - e^{ik_n a} & e^{-ika} - e^{ik_n a} \\ -ik(e^{ika} - e^{ik_n a}) + \frac{2m}{\hbar^2} V_0 e^{ika} & ik(e^{-ika} - e^{ik_n a}) + \frac{2m}{\hbar^2} V_0 e^{-ika} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 0$$

この行列に逆行列が存在すると  $A = B = 0$  になってしまうので解が存在する条件として行列式が 0 になればよい。

従って

$$(e^{ika} - e^{ikna}) \left( ik(e^{-ika} - e^{ikna}) + \frac{2m}{\hbar^2} V_0 e^{-ika} \right) - (e^{-ika} - e^{ikna}) \left( -ik(e^{ika} - e^{ikna}) + \frac{2m}{\hbar^2} V_0 e^{ika} \right) = 0$$

$$\begin{aligned} e^{ikna} ik e^{ikna} + ik(1 - 2e^{ika} e^{ikna}) - e^{ikna} \frac{2m}{\hbar^2} V_0 e^{-ika} \\ e^{ikna} ik e^{ikna} + ik(1 - 2e^{-ika} e^{ikna}) + e^{ikna} \frac{2m}{\hbar^2} V_0 e^{ika} = 0 \end{aligned}$$

よって  $e^{ika} + e^{-ika} = 2 \cos ka$  だから

$$2ik(1 + 2e^{ikna} - e^{ikna}(e^{ika} + e^{-ika})) + e^{ikna} \frac{2m}{\hbar^2} V_0 (e^{ika} - e^{-ika}) = 0$$

$$2ik(1 + 2e^{ikna} - 2e^{ikna} \cos ka) + e^{ikna} \frac{2m}{\hbar^2} V_0 2i \sin ka = 0$$

両辺を  $4ike^{ikna}$  でわると

$$\cos kna = \cos ka - \frac{am}{\hbar^2} V_0 \frac{\sin ka}{ka} = 0 \quad (12.35)$$

を得る。左辺は実のコサインだから

$$\cos ka - \frac{am}{\hbar^2} V_0 \frac{\sin ka}{ka} > 1$$

となる実数解は存在しない。 $E < 0$  の場合は地球に束縛された月のように束縛状態となるから式 12.31 から改めて

$$k = i\beta \quad \beta = \sqrt{\frac{2m|E|}{\hbar^2}} > 0$$

として  $k$  は純虚数とする。そこで次の公式

$$\cos ix = \cosh x$$

$$\sin ix = i \sinh x$$

から式 12.35 は新たに次のように関数  $f(x)$  を定義すると

$$\cos kna = f(i\beta a) \equiv \cosh \beta a - \frac{amV_0}{\hbar^2} \frac{\sinh \beta a}{ka}$$

となる。従ってこれは実数ならば下図左のように振動解になるが引数に虚数が入ると下図右のように急激に増加する関数である。

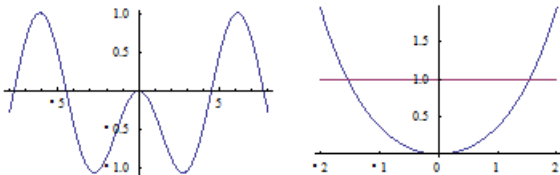


図 12.5:  $\cos x - \frac{\sin x}{x}$  のグラフ、右は  $x = ix$  の場合

従って必ず 1 と公差するところがあり、これより上の領域にはエネルギー固有値が存在しない。

これからエネルギー固有値の下限が次のように決まる。

$$|E| = \frac{\beta^2 \hbar^2}{2m} \leq \frac{\beta_0^2 \hbar^2}{2m} \equiv E_0$$

$$E \geq -E_0$$

この時

$$f(i\beta a) = 1$$

だから

$$k = 0 + 2n\pi$$

となる。次に非束縛状態  $E > 0$  の場合を考える。この時  $k$  は正の実数である。ただし、 $f(i\beta a) > 1$  となるような  $k$  はとることができないから  $C = \frac{amV_0}{\hbar^2}$  として式 12.35 は

$$\cos x - C \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (12.36)$$

を解くと半角の公式から

$$1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} - \frac{C}{x} \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 1$$

$$\sin \frac{x}{2} \left( \sin \frac{x}{2} + \frac{C}{x} \cos \frac{x}{2} \right) = 0$$

従って

$$\sin \frac{x}{2} = 0, \quad \tan \frac{x}{2} = -\frac{C}{x} \quad (12.37)$$

となる。よって1つは

$$x_n = 2n\pi$$

でもう一つは次のグラフ左の交点になる。この解を  $\Delta(2n\pi)$  とおくと

$$x'_n = 2n\pi - \Delta(2n\pi)$$

となるが  $n \rightarrow \infty$  では  $\Delta \rightarrow 0$  である。

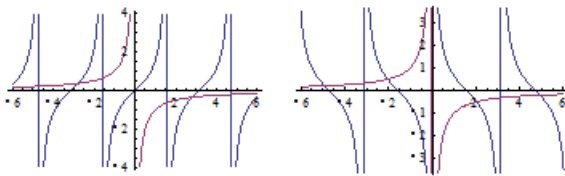


図 12.6:  $\tan x, \frac{1}{x}$  のグラフ左、 $\cot x, \frac{1}{x}$  のグラフ右、交点が解

また、 $f(x) = -1$  の場合も同様に

$$k = \pi + 2n\pi$$

なので次の2つの解を持つ。

$$\cos \frac{x}{2} = 0, \quad \cot \frac{x}{2} = -\frac{C}{x}$$

結局これは式 12.36 から次のグラフの 1, -1 の内側の領域で解を持つ。

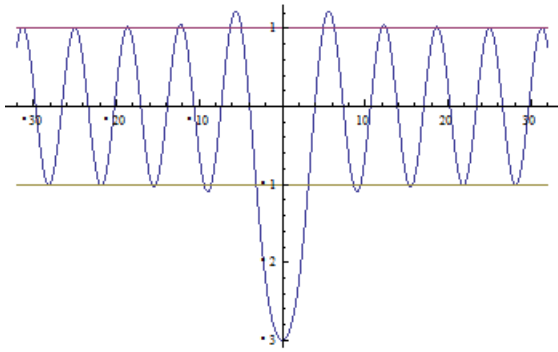


図 12.7: 非束縛状態  $\cos x - \frac{\sin x}{x}$  のグラフ

従って  $n$  が小さい時、外側の領域では解をとることができない禁則帯が存在する。  
 このモデルはシュレディンガー方程式の自由粒子と無限ポテンシャルがある場合の解を両極限に持っている。  
 つまりポテンシャル  $V_0$  を無限大にすると  $\Delta$  の幅が広がり、離散スペクトルになり、 $n$  が大きいところでは自由粒子の解になる。

そこで式 12.35 の解を次のように連続的に足し合わせる関数をつくると。

$$f(x) = \frac{1}{x} \arccos \left( \sum_{n=0}^N \frac{\cos nk_n x}{ka} \right)$$

このグラフは

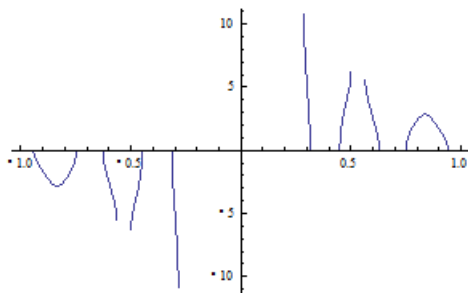


図 12.8: 不連続になった  $\arccos x$  のグラフ、このグラフを切り貼りする

これを  $y$  軸で反転させ、90 度回転してつなぐと下図のようなエネルギー固有値が得られる。

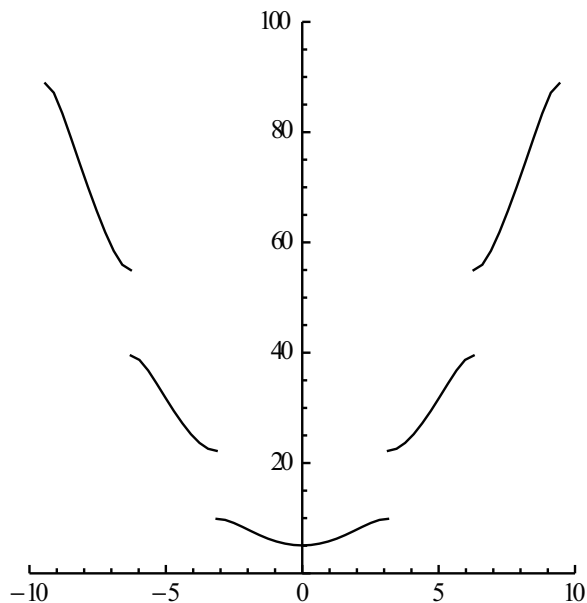


図 12.9: 不連続になったエネルギー固有値

エネルギー固有値に不連続な禁則帯が生じ、バンド構造が生れることがわかる。

## 12.8 摂動展開

次に定常状態からなんらかの相互作用があり、摂動状態  $H_I$  が加わった系を考える。

$$H = H_0 + H_I$$

ここで摂動項が加わっても

$$H\phi = E\phi$$

が成り立つので

$$(E - H_0)\phi(r) = H_I\phi(r)$$

となるので左辺を線形演算子

$$L_0 = E - H_0$$

を定義して 12.5 から

$$G_0 = L_0^{-1} = (E - H_0)^{-1}$$

が定義できてこれを非摂動グリーン演算子という。

これから

$$(L_0 - H_I)\phi(r) = 0$$

とかけるので、この式のグリーン関数は定義から

$$(L_0 - H_I)G = I$$

を満足する。

一般に次のような演算子  $A, B (A \neq B)$  の逐次展開公式

$$\frac{1}{A - B} = A^{-1} + A^{-1}BA^{-1} + A^{-1}(BA^{-1}B)A^{-1} + A^{-1}(BA^{-1}BA^{-1}BA^{-1}B)A^{-1} + \dots$$

を用いると  $G$  の逐次展開が次のようになる。

$$\begin{aligned}
 G &= \frac{1}{L_0 - H_I} = L_0^{-1} + L_0^{-1} H_I L_0^{-1} + L_0^{-1} (H_I L_0^{-1} H_I) L_0^{-1} + \dots \\
 &= G_0 + G_0 H_I G_0 + G_0 (H_I G_0 H_I) G_0 + \dots \\
 &= G_0 + G_0 H_I (G_0 + G_0 H_I G_0 + \dots) = G_0 + G_0 H_I G \\
 &= G_0 + (G_0 + G_0 H_I G_0 + \dots) H_I G_0 = G_0 + G H_I G_0
 \end{aligned} \tag{12.38}$$

となり、非常に有用な Green 関数の摂動展開公式が得られた。

## 12.9 散乱問題

量子力学では自由粒子は連続な固有スペクトルを持った規格化された平面波として記述された。例えば 1 次元の場合は

$$\langle x | k \rangle = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{ikx}$$

従って波数空間の Green 演算子は連続スペクトルを持つ時

$$G = \int \frac{|k' \rangle \langle k'|}{k^2 - k'^2} dk'$$

となるので Green 関数は

$$\begin{aligned}
 G(x, x', k) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\langle x | k' \rangle \langle k' | x' \rangle}{k^2 - k'^2} dk' \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(x-x')k'}}{k^2 - k'^2} dk'
 \end{aligned}$$

これを求める方法は複素  $k$  空間を考え、次のように実軸から微小ずれたところに極をとる方法がとられる。

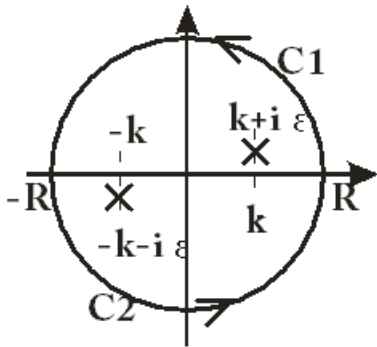


図 12.10: 複素  $k$  空間での極をずらしての積分

$$\begin{aligned}
 G(x, x', k) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} G(x, x'; \pm(k + i\epsilon)) \\
 G(x, x'; \pm(k + i\epsilon)) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(x-x')k'}}{(k' + k + i\epsilon)(k' - k - i\epsilon)} dk'
 \end{aligned} \tag{12.39}$$

ここで次の留数定理が使える。

$$\oint f(z)dz = 2\pi i \sum_{i=1}^n \text{Res}(a_i)$$

そこで極の±に対応して

$$G^+(x, x', k) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} G(x, x'; (k + i\epsilon))$$

$$G^-(x, x', k) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} G(x, x'; -(k + i\epsilon))$$

とおく。

$x > x'$  の時は上図の上半面の経路  $C_1$  を考えると+極1つを含むのでこの積分は

$$f^+(k') = \frac{e^{i(x-x')k'}}{(k' + k + i\epsilon)(k' - k - i\epsilon)}$$

とにおいて

$$\begin{aligned} F^+ &= \int_{C_1} f^+(k') dk' \\ &= \int_{-R}^{+R} f^+(k') dk' + \int_{C_1} f^+(k') dk' \end{aligned}$$

とすると  $x > x'$  だから第2項は指数が負の実になり指数関数的に0となる。よって第1項のみを留数積分すればいい。

$$\begin{aligned} F^+ &= 2\pi i \left[ \frac{(k' - k - i\epsilon)e^{i(x-x')k'}}{(k' + k + i\epsilon)(k' - k - i\epsilon)} \right]_{k'=k+i\epsilon} \\ &= \pi i \frac{e^{i(x-x')(k+i\epsilon)}}{k + i\epsilon} \end{aligned}$$

従って式 12.16 より

$$G(x, x'; (k + i\epsilon)) = -\frac{i}{2} \frac{e^{i(x-x')(k+i\epsilon)}}{k + i\epsilon}$$

となる。したがって下半面も同様にして

$$G(x, x'; -(k + i\epsilon)) = -\frac{i}{2} \frac{e^{-i(x-x')(k+i\epsilon)}}{k + i\epsilon}$$

を得る。よって極限  $\epsilon \rightarrow 0$  をとると

$$G^\pm = -\frac{i}{2k} e^{\pm ik(x-x')}$$

が得られる。

摂動系では離散状態ベクトルを次のように摂動項、非摂動項に分ける。

$$\begin{aligned} |n \rangle &= |n \rangle_0 + |n \rangle_s \\ H &= H_0 + H_I \end{aligned}$$

自由粒子は

$$(E - H)|n \rangle = (E - H_0 - H_I)|n \rangle = 0$$

$$(E - H_0)|n \rangle_0 = 0$$



が成り立つので

$$(E - H_0 - H_I)|n \rangle_s = H_I|n \rangle_0$$

$$\begin{aligned} |n \rangle_s &= (E - H_0 - H_I)^{-1} H_I |n \rangle_0 \\ &= (E - H_I)^{-1} H_I |n \rangle_0 \\ &= G H_I |n \rangle_0 \end{aligned}$$

となるので

$$|n \rangle = |n \rangle_0 + G H_I |n \rangle_0$$

とかくことができる。

式 12.38 は次のような遷移行列 (T-Matrix) を用いて表すことができる。

$$G = G_0 + G T G_0$$

ただし

$$T = H_I + H_I G_0 H_I + H_I G_0 H_I G_0 H_I + \dots$$

である。この演算子  $T$  は次のように入力状態  $\langle k$  と出力状態  $k' \rangle$  をつなぐ。

$$\langle k | T | k' \rangle \equiv T(k, k') = \langle k | H_I | k' \rangle + \langle k | H_I G_0 T | k' \rangle$$

この時、非摂動のグリーン関数でかける。

## 12.10 先進と遅延

系に時間依存するハミルトニアンをここで考えてみる。この時、シュレディンガー方程式は次のようになる。

$$\left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H \right) \phi(r, t) = 0$$

前回と同様に次のように非摂動項をわけることができる。すると

$$H = H_0 + H_I$$

とし、次のように書き直す、

$$\left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H_0 \right) \phi(r, t) + H_I \phi(r, t) = 0$$

非摂動の場合を満足する波動関数を  $\phi_0(r, t)$  が既知だとして

$$\left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H_0 \right) \phi_0(r, t) = 0 \tag{12.40}$$

を満たすから線形演算子

$$L_0 = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H_0$$

が定義できる。よってこれから非摂動の場合の Green 演算子が次のようになる。

$$G_0 = L_0^{-1} = \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H_0 \right)^{-1}$$

よって前節と同様にして、Green 関数は、時空の差の関数として

$$G_0(r, r'; t, t') = \langle \phi_0(r, t) | G_0(r, t) | \phi_0(r', t') \rangle$$

で表される。よって  $G_0$  は式 12.9 から次を満たす関数になる。

$$\left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H_0 \right) G_0(r, r'; t, t') = \delta(r - r') \delta(t - t')$$

これを次のように表現し、時間依存性グリーン関数という。

$$G_0(r, r'; t, t') = G(r - r', t - t')$$

これは式 12.40 から  $\phi(r, t)$  に置き換えれば 0 になるところ Green 関数は時間、空間をずらし、原点では単位発生源になり、0 ではなくなる。

原点に特異点ができたことになる。

従って、シュレディンガー方程式では固有方程式として成立していたのが Green 関数に置き換えるともはや固有値に意味がなくなる。

しかし、時空の 1 点  $(r', t')$  を決めるときはどうか、この時の  $G(r, r_1; t_1, t_2)$  は原点以外では  $\phi(r, t)$  と同じである。

$$\left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H_0 \right) G_0(r, r_1; t, t_1) = 0, \quad r_1 \neq 0, t_1 \neq 0 \quad (12.41)$$

これは次のようにかくことができ、

$$AB = \delta$$

フーリエ変換とみなすことができる。

実際に  $G(r - r', t - t')$  を求めるために次のフーリエ変換を導入する。

$$G(k; \tau) = \int G(q; \tau) e^{-ikq} dq$$

この逆変換として

$$G(q; \tau) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int G(k; \tau) e^{ikq} dk$$

であり、 $\delta$  関数は定義から次のような関係を満たす。ステップ関数を  $\theta$  として

$$\delta(q) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{ikq} dk$$

$$\theta(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$$

よって、式 12.41 は時間差を  $\tau = t - t'$ 、 $E = \hbar^2 k^2 / 2m$  として

$$\left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - E \right) G_0(k; \tau) = \delta(\tau) \quad (12.42)$$

とかける。ただし、この物理現象が時刻  $t$  で発生し、観測時刻を  $t'$  とする。 $t > t'$  の時、観測時刻が遅れているので解を次のようにおくと、

$$G_0^R(k; t - t') = -i\theta(t - t') e^{-iE_k(t - t')}$$

$\tau = t - t'$  として 12.42 は

$t > 0$  の時は

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t'} - E\right)\left(-ie^{-iE_k(t-t')/\hbar}\right) = iEe^{-iE_k t/\hbar}\left(e^{iE_k t'/\hbar} + e^{iE_k t'/\hbar}\right) = 2iEe^{-iE_k(t-t')/\hbar}$$

$\tau = t - t'$  として 12.42 の両辺を積分すると

$t > 0$  の時は

$$\int_0^t \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t'} - E\right)\left(-ie^{-iE_k(t-t')/\hbar}\right) dt' = e^{-iE_k t/\hbar}\left(\hbar e^{iE_k t'/\hbar}\Big|_0^t + \hbar e^{-iE_k t'/\hbar}\Big|_0^t\right) = -2\hbar e^{-iE_k t/\hbar}$$

$t \leq 0$  の時は

$$\int_{-\infty}^t \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t'} - E\right)(0) dt' = 0$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}G_0(k; \tau) = \delta(\tau) + EG_0(k; \tau)$$

となる。これがシュレディンガー方程式の自由粒子の解を含むことになるが、

$$\theta(x) = \int_{-\infty}^x \delta(\xi) d\xi$$

## 12.11 非調和振動子への応用

質量  $m = 1$  の調和振動子に非調和項として

$$-\lambda q^4$$

を加えたラグランジアン  $L$  を

$$L = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - \frac{\omega^2}{2}q^2 - \frac{\lambda}{4!}q^4 \quad (12.43)$$

としてこれから運動方程式を導いてみよう。この時の  $\lambda$  は結合定数と呼ばれる。

この時に次の条件を満たす遅延グリーン関数  $G_R(t)$  を利用する。

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2\right)G_R(t) &= -\delta(t), \quad -\lim_{t \rightarrow -\infty} G_R(t) = 0 \\ \left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2\right)q_0(t) &= 0 \end{aligned} \quad (12.44)$$

$q_0$  は調和振動子解を満たすとしてこの解がどう変化するかを見る。天下りのだが

$$q(t) = q_0(t) + \frac{\lambda}{3!} \int_0^\infty dt' G_R(t-t')q^3(t') \quad (12.45)$$

とおく。はじめに式 12.43 からラグランジュ方程式を用いて

$$\ddot{q} = -\omega^2 q - \frac{\lambda}{3!}q^3 \quad (12.46)$$

となる。一方で式 12.45 に演算子  $\left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2\right)$  を作用させると

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2\right)q(t) &= \left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2\right)q_0(t) + \frac{\lambda}{3!} \int_0^\infty dt' \left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2\right)G_R(t-t')q^3(t') \\ &= \frac{\lambda}{3!} \int_0^\infty dt' \delta(t-t')q^3(t') \\ &= \frac{\lambda}{3!}q^3(t) \end{aligned}$$

これは式 12.46 に一致する。

さらに前節の式 12.38 の摂動展開も利用してみよう。結合定数  $\lambda$  で展開すると

$$q(t) = q_0(t) + \lambda q_1(t) + \lambda^2 q_2(t) + \dots$$

となるのでこれを式 12.45 に代入し、係数比較すると

$$\begin{aligned} q_0 &= q_0(t) \\ q_1 &= \frac{1}{3!} \int_0^\infty dt' G_R(t-t') q_0^3(t') \\ q_2 &= \frac{1}{3!} \int_0^\infty dt' G_R(t-t') q_0^2(t') q_1(t') \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{1}{3!} \int_0^\infty dt' dt'' G_R(t-t') q_0^2(t') G_R(t-t'') q_0(t'') \end{aligned}$$

のように逐次代入すれば結果を得ることができる。

しかし、式 12.44 から  $q_0(t)$  は調和振動子として

$$q_0(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t$$

を満たし、ここでは初期条件として

$$\begin{aligned} q_0(0) &= B = a \\ \dot{q}_0(0) &= \omega A = 0 \end{aligned}$$

とすると

$$q_0(t) = a \cos \omega t$$

となる。

## 参考文献

- [1] 菅野礼治 ゲージ理論の解析力学 2007
- [2] G.M. ザスラフスキー 三島信彦、斉藤徹也、新藤 茂 訳 1989 カオス-古典および量子力学系-
- [3] 内山龍雄 相対性理論 1977 岩波全書
- [4] Tristan Needham **Visual complex analysis** 1997 培風館
- [5] J.W.Noh, A.Foug'eres, and L.Mandel **Operational approach to the phase of quantum field** 1992 Physical Review A 45
- [6] D.T.Pegg, S.M.Barnett **Phase properties of quantized single-mode electromagnetic field** 1989 Physical Review A 39
- [7] 小林昭七 接続の微分幾何とゲージ理論 1989 裳華房
- [8] 野水克己 現代微分幾何入門 1969 裳華房
- [9] 佐藤光 群と物理 1992 丸善株式会社
- [10] Tristan Needham **Visual Complex Analysis** 1997 OXFORD

- [11] 小沢哲也 曲線・曲面と接続の幾何 1997 倍風館
- [12] 中原幹生 理論物理学のための幾何学とトポロジー I,II 2000 ピアソン・エデュケーション
- [13] 丹羽雅昭 超伝導の基礎 2002 東京電機大学出版局
- [14] 矢吹治一 量子論における位相 1998 日本評論社
- [15] Tai Tsun Wu, Chen Ning Yang **Concept of nonintegrable factors and global formulation of gauge fields** 1975 Physical Review D 12
- [16] R.Glies **Reconstruction of gauge potentials from Wilson loops** 1981 Physical Review D 24
- [17] Pratul Bandyopadhyay **Geometry, Topology and Quantum Field Theory**
- [18] 深谷賢治 双曲幾何 岩波書店 2004
- [19] Shinichi Deguchi Kazuo Fujikawa **Second-quantized formulation of geometric phases** 2005 Physical Review A72
- [20] 大貫義朗 鈴木増雄 柏太郎 経路積分の方法 岩波 現代の物理学
- [21] 柏 太郎 サイエンス社 新版 演習 場の量子論
- [22] J.David Jackson **Classic Electrodynamics** 2001
- [23] 中村 哲・須藤彰三 電磁気学 朝倉書店 2012
- [24] Matthew N.O. **Elements of Eletromagnetic**
- [25] **Lectures on Clifford(Geometric) Algebras and Appliations** Rafal Ablamowicz Garret Sobczyk 2003
- [26] Julian Schwinger シュウインガ—量子力学 Springer 2000
- [27] 野村健太郎 トポロジカル絶縁体・超伝導体の基礎理論 September 11, 2013
- [28] 安藤陽一 トポロジカル絶縁体入門 2014
- [29] Brian R. Greene **STRING THEORY ON CALABI-YAU MANIFOLDS** Columbia University
- [30] 深谷 賢治 ゲージ理論とトポロジー 1995 Springer
- [31] Joseph L.Birman **Geometry, Particles, and Fields** Springer
- [32] Charles Nash Sinddhartha Sen **Topology and geometry for Physics** Mineola, New York
- [33] 二木 昭人 微分幾何講義-一般理論と現代物理への応用 サイエンス社
- [34] Andre Weil ケーラー多様体論入門 1958 Springer
- [35] 天野勝利 **Hopf** 代数とは 筑波大学
- [36] 谷村省吾 トポロジー・圏論・微分幾何 サイエンス社 SGC-52
- [37] 坪井 俊 幾何学3 微分形式 東京大学出版

- [38] Louis H.Kauffman **KNOTS AND PHYICS** World Scientific 1993
- [39] 服部昌夫 多様体のトポロジー 岩波 2003
- [40] David W. Lyons **An Elementary Introduction to the Hopf Fibration** Lebanon Valley College
- [41] Nicholas Wheeler **Transformational principles latent in the theory of CLIFFORD ALGEBRAS** Reed College Physics Department 2003
- [42] Mathematica Demonstration Richard Hennigan **Rotating the Hopf Fibration** <http://www.wolfram.com/>
- [43] Ana Cannas da Silva **Lectures on Symplectic Geometry** 2006
- [44] **Rotations of the three-sphere and symmetry of the Clifford Torus** John McCuan and Lafe Spietz October 5,1998
- [45] Maris Ozols **Geometry of qubit** 2007
- [47] Rupert Way **Dynamics in the Hopf bundle, the geometric phase and implications for dynamical systems** University of Surrey U.K 2008
- [48] Chris J Isham **Modern Differential Geometry for Physicists**
- [50] Robert Gilmore **Lie Groups, Lie Algebras, and Some of Their Applications**
- [51] Bo-Yu Hou, Bo-Yuan Hou **DIFFERENTIAL GEOMETRY FOR PHYSICS** World Scientific 1997
- [52] Thomas J.Bridges **The Orr-Sommerfeld equation on a manifold**
- [53] 佐古彰史 超対称性ゲージ理論と幾何学 2007 日本評論社
- [54] 早川尚男 連続体力学 京都大学大学院 平成 17 年
- [55] 岡部洋一 電磁気学 放送大学 2015
- [56] Bjorn Felsager **Geometry, Particles, and Fields** Springer 1997
- [57] 及川正行 偏微分方程式 岩波書店 1955
- [60] 三尾典克 変形体の力学 東京大学
- [61] Daniel Z.Freedman and Antoine Van Proeyen **Supergravity** CAMBRIDGE
- [62] V.P Nair **Quantum Field Theory** 2005 Springer
- [63] **Diagrammatica The Path to Feynman Rules** Martinus Veltman 1995 Cambridge University Press
- [64] Martin Ammon Johanna Erdmenger **Gauge/Gravity Duality: Foundations and Applications** 2005 Cambridge University Press
- [65] Kawamura Yoshiharu 相対論的量子力学 裳華房
- [66] 泰泉寺雅夫 数物系のためのミラー対称性入門 2014 サイエンス社

- [67] 堀川穎二 複素代数幾何学入門 岩波書店
- [68] Shiing-shen Chern **Complex Manifolds Without Potential Theory** 1995 Springer Verlag New York,LLC
- [69] 安藤哲也 コホモロジー 2002 日本評論社
- [70] Joseph Polchinski **String Theory I,II** Cambridge University Press 1998
- [71] 坂本真人 量子力学から超対称性へ SGC ライブラリ 96 2012 サイエンス社
- [72] Barton Zwiebach **A First Course in STRING THEORY** 2009 Cambridge University Press
- [73] 深谷 賢治 編 ミラー対称性入門 2009 日本評論社
- [74] 白水 徹也 アインシュタイン方程式 2012 SGO ライブラリ サイエンス社
- [75] 唐木田健一 ひとりで学べる一般相対性理論 講談社 2015
- [76] 深谷賢治 数学者による数学者のための **StrigDuality** 京都大学
- [77] 坪井 俊 幾何学Ⅷ ホモロジー入門 東京大学出版会
- [78] 佐藤秀司・佐藤周友 代数的サイクルとエタールコホモロジー Springer 2012
- [79] 石橋延幸・村上公一 弦の場の理論 2012 SGO ライブラリ サイエンス社
- [80] 伊藤克司 共形場理論 2011 SGO ライブラリ サイエンス社
- [81] 高柳 匡 ホログラフィー原理と量子エンタングルメント サイエンス社
- [82] 江沢 洋、渡辺敬二、鈴木増雄、田崎晴明 繰り込み群の方法 1999 岩波書店
- [83] 今村 洋介 超弦理論の基礎 2010 SGO ライブラリ サイエンス社
- [84] 江口 徹 菅原 祐二 共形場理論 2015 岩波書店
- [85] 西森 秀総 相転移・臨界現象の統計物理学 倍風館
- [86] Michael E.Peskin, Daniel V.Schroeder **An introduction to quantum Field Theory**
- [87] Charles Kittel and Herbrt Kroemer **THERMAL PHYSICS** W.H.Freeman and Company 1980
- [88] J.J Sakurai **Modern Quantum Mechanics** 1985 The Benbjamin/Cumming Publishng Company,Inc.
- [89] 松田 哲 複素関数 理工系の基礎数学 5 岩波書店 1995
- [90] 小林 昭七 複素幾何 岩波書店 2005
- [91] 早川 尚男 非平衡統計力学 サイエンス社 SGC ライブラリ 2006
- [92] Mukund Rangamani & Tadashi Takayanagi **“Holographic Entanglement Entropy“** 2017
- [93] 松枝 宏明 量子系のエンタングルメントと幾何学 森北出版 2016
- [94] 治部真里 高橋康 添削形式による場の量子論 日本評論社 1997
- [95] V.P. ナイア著 阿部泰裕 磯暁 訳 現代的視点からの場の量子論 Springer 2005

- [96] 大津 元一 現代光科学 Ⅷ、Ⅷ 光の物理的基礎 朝倉書店 1994
- [97] 日置 善郎 相対論的量子場 吉岡書店 2008
- [98] 細谷 暁夫 量子コンピューターの基礎 サイエンス社 1999
- [99] Michael A. Nielsen & Isaac L. Chuang **Quantum Computation and Quantum Information** Cambridge University press 2010
- [100] Brian C.Hall **Lie Groups,Lie Algebras, and Representations An Elementary Introduction** Springer 2015
- [101] 谷村省吾 ホロノミーと力学系 名古屋大学
- [102] Raffaele Rani **On Parallel Transport and Curvature** 2009
- [103] 塩濱 勝博, 成 慶明 曲面の微分幾何学 日本評論社 2005
- [104] 大槻 知忠 結び目の不変量 共立出版 2015
- [105] 鈴木 増雄 統計力学 岩波書店 1994
- [106] Anastasios Mallios **MODERN DIFFERENTIAL GEOMETRY IN GAUGE THEORIES** Springer 2009
- [107] **Lectures on Geometry** Edited by N.M,J.WOODHOUSE OXFORD university press 2017
- [108] 田中利夫・村上斉 トポロジー入門 サイエンス社 SGC ライブラリ 42 2005
- [109] 川村嘉春 基礎物理から理解するゲージ理論 サイエンス社 SGC ライブラリ 42 2017
- [110] 細谷 裕 ゲージヒッグス統合理論 サイエンス社 SGC ライブラリ 42 2018
- [111] 堺井義秀 山田憲和 野尻美保子 素粒子物理学 KEK 2012
- [112] 鈴木 増雄 経路積分と量子解析 サイエンス社 2017
- [113] David Tong **Quantum Field Theory** Universith of Cambridge 2006
- [114] 並木美喜雄 大場一郎 散乱の量子力学 岩波書店 1997
- [115] 福田礼次郎 フーリエ解析 岩波書店 1995
- [116] Adam Lupu-Sax **Quantum Scattering Theory and Applications** Harvard University 1998
- [117] 佐藤文隆 児玉英雄 一般相対性理論 岩波書店 1992
- [118] 松本幸夫 多様体の基礎 東京大学出版 1989
- [119] Wulf Rossmann **Lie Groups** OXFORD 2002
- [120] 佐武一郎 リー群の話 日本評論社 1982
- [121] F. シャトラン 行列の固有値 Springer 1988
- [122] 生西明夫 中神 臣 作用素環入門 1 岩波 2006
- [123] 黒田成俊 関数解析 共立出版 1980
- [124] 堀田昌寛 量子情報と時空の物理 第2版 サイエンス社 2019



- [125] 砂田利一 行列と行列式 岩波 2003
- [126] 太田 浩一 電磁気学の基礎 東京大学出版会 2013
- [127] J. マトウシエク著 岡本吉央訳 離散幾何学講義 丸善 2001
- [128] 根本香絵 量子力学の考え方 物理で読み解く量子情報論の基礎 サイエンス社 2008
- [129] 甘利 俊一 情報幾何学の新展開 サイエンス社 2014
- [130] Michael A.Nielsen Isaac L. Chuang **Quantum Computation and Quantum Information**
- [131] 佐川弘幸/吉田宣章 量子情報理論 第3版 丸善 2019
- [132] Leo.P.Kadanoff and Gordon Baym 1962 量子情報理論 丸善プラネット
- [133] Rodney Loudon **The quantum theory of light** Oxford University Press 1983