

## 概要

本部は前回の数学的な準備を経て、2回目になる。本部では古典的な内容を取り上げる。そのはじめに現代物理学を学ぶ基礎固めとして古くから物理の指導原理として存在していた作用原理を考察し、角運動量や量子論について基本的な背景を復習する。ポアソンの括弧やネーターの定理は今後重要な基礎になる。基礎力学、解析力学の基礎を既習していることが望ましい。次に本部は未完成部分が多く、今後加筆修正する予定である。参考文献を見て学習に役立ててほしい。

# 1 数学的準備

## 1.1 Dirac デルタ関数時間の連続性

$\delta$  関数は正規分布から次のように密度関数としての定義できる。

$$\delta(x) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \quad (1.1)$$

また、Sinc 関数の近似からも定義できる。

$$\delta(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sin kx}{\pi x} \quad (1.2)$$

次の Heaviside-StepFunction との関係が深い

$$\theta_0(x) \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ 1 & (x > 0) \end{cases} \quad (1.3)$$

$$\theta_0(x) = \int_{-\infty}^x \delta(\xi) d\xi \quad (1.4)$$

つまりステップ関数の微分がデルタ関数である。

フーリエ変換を用いると  $\delta$  関数は次のように導くことができる。

$f(x)$  が次のようにおけるから

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0, \pm 1, \dots} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny} \right) e^{iny} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \sum_{n=0, \pm 1, \dots} f(y) e^{in(x-y)} \right\} dy \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \Delta(x-y) f(y) dy \end{aligned} \quad (1.5)$$

ただし、

$$\Delta(x-y) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0, \pm 1, \dots} e^{in(x-y)}$$

である。これは

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} d\omega$$

とおけば次のデルタ関数の積分公式を導ける。

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-y) f(y) dy$$

また、 $ax = y$  とおくと

$$\int_{-L}^L f(x)\delta(ax)dx = \int_{-aL}^{aL} f\left(\frac{y}{a}\right)\delta(y)\frac{dy}{a} = \frac{f(0)}{a}$$

となるので

$$\delta(ax) = \delta(x)/a \tag{1.6}$$

であることがわかる。また、正規分布から導けたように  $\delta(x)$  は偶関数だから

$$\delta(-x) = \delta(x)$$

$$x\delta(x) = 0$$

である。よって次のような性質を持つ。

$$\int \delta(x)f(x)dx = 0$$

$$\int \delta(x-a)f(x)dx = f(a) \tag{1.7}$$

上の式の両辺を  $x$  で微分すると

$$\int f'(x)\delta(x-a)dx + \int f(x)\delta'(x-a)dx = 0$$

よって 1.7 より

$$\int f(x)\delta'(x-a)dx = -f'(a)$$

という性質を持つ。これから有用な式

$$\delta(f(x) - f(x_0)) = \frac{1}{|f'(x_0)|}\delta(x - x_0)$$

が成り立つ。

また、 $g = x^2 - b^2 = (x+b)(x-b) = 0$  であることから  $x = b$  の近傍で  $g$  は

$$g = 2b(x - b)$$

$x = -b$  の近傍で

$$g = -2b(x + b)$$

のように振る舞う。これから

$$\delta(x^2 - b^2) = \delta(2b(x - b)) + \delta(-2b(x + b))$$

となることがわか。さらに一般的な  $g(x)$  が  $x_0$  で単根を持てば、

$$g(x) \doteq g'(x_0)(x - x_0)$$

とおけるので式 1.6 から次の重要な公式が得られる。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(g(x))dx = \frac{f(x_0)}{|g'(x_0)|}$$

さらに  $N$  個の単純 0 点を持てば

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(g(x))dx = \sum_{i=1}^N \frac{f(x_i)}{|g'(x_i)|}$$

となることから

$$\delta(g(x)) = \sum_{i=1}^N \frac{\delta(x - x_i)}{|g'(x_i)|}$$

のように振る舞っていることがわかる。

これから例えば次の関係が成り立つ。

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x}\delta(x^2 - a^2)dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x} \frac{\delta(x - a) + \delta(x + a)}{2a} dx \\ &= \frac{e^{-a} + e^a}{2a} \end{aligned}$$

さらに次のような離散的な和を導くこともできる。

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\delta(\sin x)dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x} \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\delta(x - n\pi)}{|\cos n\pi|} \right) dx \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\delta(x - n\pi)dx \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(n\pi)^2} \end{aligned}$$

このように通常関数に  $\delta$  関数をかけ、積分させると非常にシンプルに積分結果を得ることができる。ただし、これは基本的に式 1.5 のようにフーリエ変換していることが重要である。

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} d\omega$$

と考えると

佐藤の超関数としての定義は次のようになる。

$$\delta(x) = \frac{-1}{2\pi i} \left( \frac{1}{x + i0} - \frac{1}{x - i0} \right) \tag{1.8}$$

## 1.2 Hilbert 空間

量子力学は無次元のヒルベルト空間上に展開される。そこではじめにヒルベルト空間について考えてみる。複素数を  $\mathbf{C}$  として  $l_2$  ノルムが任意の可算集合  $D$  に対して有限に決まるとする。

$$l_2 = \left\{ x | x : D \rightarrow \mathbf{C} \left( \sum_{i \in D} x(i) x^*(i) \right)^{1/2} \right\} < \infty \tag{1.9}$$

ヒルベルト空間次のような内積が定義できる空間である。  $l_2(D) \times l_2(D) \rightarrow \mathbf{C}$

$$\langle x_1, x_2 \rangle = \sum_{i \in D} x_1(i) x_2^*(i)$$

$l_2$  の要素が可算集合  $D$  により指標付けされるベクトルと考えることができる。これにより量子力学の純粋状態がヒルベルト空間上の独立した単位ベクトルとして表すことができる。式 1.9 よりさらに無限大  $L_2$  にまで拡張すると極限をとり

$$\langle f|g\rangle = \int_a^b f^*(t)g(t)dt < \infty$$

とすると  $L_2$  を線形空間とすることができる。さらに次のノルムとユークリッド距離を導入する。

$$\|\psi\| = \sqrt{\langle\psi|\psi\rangle}$$

$$dist(\phi, \psi) = \|\phi - \psi\|$$

これでヒルベルト空間に距離トポロジーと連続性の概念が入る。

ヒルベルト空間を  $\mathcal{H}$  で表す。この空間においてベクトルのノルムは次のように定義される。

$$\|\phi\| = \sqrt{\phi \cdot \phi} \tag{1.10}$$

このノルムを利用して 2 つのベクトルのユークリッド距離は

$$\|\phi' - \phi\| = \sqrt{\phi' \cdot \phi'} \tag{1.11}$$

これは基底ベクトル  $|j\rangle$  を用いて次のように複素数の係数で展開できるで

$$\phi = \sum_j |x^j + iy^j|j\rangle \tag{1.12}$$

先のベクトル間の距離は

$$\|\phi' - \phi\| = \sum_j \left\{ (x'^j - x^j)^2 + i(y'^j - y^j)^2 \right\}^{1/2} \tag{1.13}$$

となる。また、これから内積  $\langle\phi'|\phi\rangle$  が次のようになることがわかる。

$$\langle\phi'|\phi\rangle = \frac{1}{4} \left\{ \|\phi' + \phi\|^2 - \|\phi' - \phi\|^2 + i\|\phi' + \phi\|^2 - i\|\phi' - \phi\|^2 \right\}^{1/2} \tag{1.14}$$

ここで曲線を表す  $\psi_t$  を次のように定義する。

$$t \rightarrow \psi_t \quad (0 \leq t \leq 1) \tag{1.15}$$

そしてこの曲線の長さを求めるためには次のように区分に分け、順序付けが可能であることを仮定する。

$$0 \leq t_0 \leq t_1 \cdots t_n \leq 1 \tag{1.16}$$

これによって次のように曲線の長さ  $s$  上限をユークリッド和として定義できる。

$$s = \sup \sum_j^n \|\psi_{t_{j-1}} - \psi_{t_j}\| \tag{1.17}$$

ここで曲線を表す  $\psi_t$  のパラメーター  $t$  による微分が定義できてこれもヒルベルト空間に属するとする。

$$\frac{d}{dt}\psi = \dot{\psi} \in \mathcal{H} \tag{1.18}$$

よって曲線の長さは  $t$  による積分に置きかえられて式 1.14 から

$$\begin{aligned}
s &= \int_0^1 \frac{ds}{dt} dt \\
&= \int_0^1 \sqrt{\langle \dot{\psi}_t | \dot{\psi}_t \rangle} dt
\end{aligned} \tag{1.19}$$

となる。つまり量子場において空間の距離は区分的に定義された波動関数の時間微分の内積が決めることになる。一方で量子場では shrodinger 方程式が成立するのでハミルトニアン  $H$  が与えられれば

$$i\hbar\dot{\psi} = H\psi \tag{1.20}$$

が成り立つ。よって式 1.19 から

$$s = \frac{1}{\hbar} \int_{t_0}^t \sqrt{\langle \psi | H^2 \psi \rangle} dt = \frac{(t - t_0)}{\hbar} \sqrt{\langle \psi | H^2 \psi \rangle} \tag{1.21}$$

となる。また、曲線に沿っての速さも次のように  $t$  に無関係に決まる。

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\langle \dot{\psi}_t | \dot{\psi}_t \rangle} = \frac{1}{\hbar} \sqrt{\langle \psi | H^2 \psi \rangle} \tag{1.22}$$

むしろ  $t = 0$  で発散するので逆数にした次の値に意味がある。

$$\frac{dt}{ds} = \left( \langle \dot{\psi}_t | \dot{\psi}_t \rangle \right)^{-1/2} = \hbar \left( \langle \psi | H^2 \psi \rangle \right)^{-1/2} \tag{1.23}$$

ヒルベルト空間の無限小時間推進がハミルトニアンそのものであることから時間推進のユニタリー演算子が

$$U(t) = \exp\left(\frac{Ht}{i\hbar}\right) \tag{1.24}$$

である。

### 1.3 エルミート演算子

波動関数  $\Psi, \Phi$  の内積 (inner product) を次のように定義する。

$$\langle \Phi | \Psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx (\Phi(x))^* \Psi(x)$$

これは正の値を持ち、次の性質がある。複素数  $a, b$  について

$$\langle a\Phi | \Psi \rangle = a^* \langle \Phi | \Psi \rangle$$

$$\langle \Phi | b\Psi \rangle = b \langle \Phi | \Psi \rangle$$

さらに  $A, D$  は任意の演算子であればエルミート共役が定義できて

$$\langle A^\dagger \Phi | \Psi \rangle = \langle \Phi | A\Psi \rangle$$

$$\langle \Phi | A^\dagger \Psi \rangle = \langle A\Phi | \Psi \rangle$$

例えば演算子  $D$  を

$$D = \frac{\partial}{\partial x}$$

とおくと

$$\langle \Phi | D^\dagger \Psi \rangle = \langle D\Phi | \Psi \rangle \quad (1.25)$$

が成り立つということは、右辺から次の2行目に部分積分を用いると表面項  $\Psi(\pm\infty) = \Phi(\pm\infty) = 0$  とすれば

$$\begin{aligned} \langle D\Phi | \Psi \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left( \frac{\partial}{\partial x} \Phi(x) \right)^* \Psi(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx (\Phi(x))^* \left( -\frac{\partial}{\partial x} \Psi(x) \right) \end{aligned}$$

となるから式 1.25 から

$$D^\dagger = -\frac{\partial}{\partial x}$$

であることがわかる。一般に演算子の積については

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$$

エルミート演算子であれば

$$A^\dagger = A$$

である。

## 1.4 同時固有値

$A, B$  が可換であれば、例えば次の固有方程式が  $\Psi_a$  に成り立つ場合

$$A\Psi_a = a\Psi_a$$

両辺に  $B$  を作用させると  $AB = BA$  であれば

$$BA\Psi_a = Ba\Psi_a$$

$$A(B\Psi_a) = a(B\Psi_a)$$

とみなすことができる。そこで  $B\Psi_a = \Psi_b$  とおけば次の固有方程式が成り立つことになる。

$$A\Psi_b = a\Psi_b$$

つまり、 $\Psi_a, \Psi_b$  は共通の固有値  $a$  を持つ同時固有関数である。

これは  $A, B$  が非可換である場合は成り立たない。

## 1.5 特性根

任意の行列  $A$  があるとき

$$A^2 - (\text{tr}A)A + (\det A)I = 0 \quad (1.26)$$

が成り立つことをハミルトンケーリーの定理 (Hamilton-Cayley) という。

これは

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (1.27)$$

として 1.26 に代入すると

$$\begin{aligned}
A^2 - (\text{tr}A)A &= A(A - (a + d)I) \\
&= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -ad + bc & 0 \\ 0 & cb - ad \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となることから明らかである。これから一般に  $A^n = 0$  ( $n \geq 2$ ) となる条件がハミルトンケーリーの定理から  $\det A = 0$  であれば

$$A^2 = (\text{tr}A)A$$

なので両辺に次々に  $A$  をかけていけば

$$A^3 = (\text{tr}A)A^2 = (\text{tr}A)^2 A$$

と繰り返しされるので

$$A^n = (\text{tr}A)^{n-1} A$$

を得る。よって  $A \neq 0$  であれば条件としては

$$\det A = 0, \text{tr}A = 0$$

であることがわかる。

また行列  $A$  の固有値を  $\lambda$  とすると次の特性多項式 (characteristic\_polynomial) の解が固有値  $\lambda$  になる。

$$\det(xI - A) = x^2 - \text{tr}(A)x + \det A$$

先の一般的な式 1.27 を代入すると

$$\det(xI - A) = x^2 - (a + d)x + (ad - bc)$$

例えば

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \cos \theta \\ -\cos \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \tag{1.28}$$

の特性根は

$$\det(xI - A) = x^2 - 2 \cos \theta x + 1$$

ただし

$$\begin{aligned}
x &= \cos \theta \pm \sqrt{\cos^2 \theta - 1} \\
&= e^{\pm i\theta}
\end{aligned}$$

である。また一般的に複素数の特性根  $\lambda_1, \lambda_2$  について次の関係が成り立つことも有用である。

$$\text{tr}A = \lambda_1 + \lambda_2$$

$$\det A = \lambda_1 \lambda_2$$

## 1.6 ジョルダンの標準形

行列  $A$  の特性根  $\lambda_1, \lambda_2$  があると  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  の時、次の可逆行列  $P$  が存在する。

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad (1.29)$$

また  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$  の時、

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

となるか、または次の可逆行列  $P$  が存在する。

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad (1.30)$$

この式 1.29、1.30 形をジョルダンの標準行列 (Jordan normal matrix) という。  
例えば次を例に標準形に変形してみる

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

特性方程式は

$$x^2 - 4x - 5 = (x - 5)(x + 1) = 0$$

従って固有値  $x = -1$  に対する固有ベクトル  $\mathbf{x}(x, y)$  は

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= -1\mathbf{x} \\ \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

よって  $x = 1$  を選ぶと

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

が得られ、固有値  $x = 5$  に対する固有ベクトル  $\mathbf{x}(x, y)$  は

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= 5\mathbf{x} \\ \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

よって  $x = 1$  を選ぶと

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

従って行列  $P$  はこれを縦に並べて

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

を得る。これから

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

のように標準形に変形できた。

## 1.7 線形写像

先の内容はさらに次元を拡大しても成り立つ。 $\mathbf{L}, \mathbf{L}'$  をそれぞれ  $n, n'$  次元の有限線形空間とする。 $\mathbf{L}$  から  $\mathbf{L}'$  への線形写像を

$$\text{Hom}(\mathbf{L}, \mathbf{L}') \quad (1.31)$$

とする。体を  $\mathfrak{F}$  として  $\mathbf{L}, \mathbf{L}'$  の基底を

$$\begin{aligned} E &= \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\} \\ E' &= \{\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_m\} \end{aligned}$$

とおくと次のような同型写像をつくることができる。

$$\begin{aligned} \psi_E : \mathbf{L} &\rightarrow \mathfrak{F}^n \\ \psi_{E'} : \mathbf{L}' &\rightarrow \mathfrak{F}^m \end{aligned}$$

ここで

$$\Psi_{E, E'}(T) = \psi_{E'} T \psi_E^{-1} \quad (1.32)$$

とおくと

$$\Psi_{E, E'} : \text{Hom}(\mathbf{L}, \mathbf{L}') \rightarrow \text{Hom}(\mathfrak{F}^n, \mathfrak{F}^m) \quad (1.33)$$

は同型写像になる。従って

$$T_A \equiv \Psi_{E, E'}(T) \quad (1.34)$$

を満たす  $A \in M(m, n; \mathfrak{F})$  がただ1つ存在し、 $A$  を  $T$  の基底  $E, E'$  に関する行列表示という。つまり

$$\begin{aligned} T(\mathbf{e}_j) &= \sum_{i=1}^m a_{ij} \mathbf{e}'_i \quad (j = 1, 2, \dots, n) \\ A &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

## 1.8 斜交座標

下図のような斜交座標によれば  $Ob = Pa, Oa = Pb$  なので

$$OA = Oa + Ob \cos \alpha \quad (1.35)$$

$$OB = Ob + Oa \cos \alpha \quad (1.36)$$

と表すことができる。

これから余弦定理からOPの長さを次のように表す。

$$OP = \sqrt{Oa^2 + Ob^2 + 2Oa \cdot Ob \cos\alpha}$$

これに先の式 1.35、1.36 を代入すると

$$OP = \sqrt{Oa \cdot OA + Ob \cdot OB}$$

を得る。

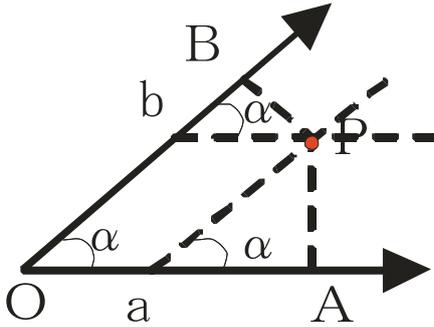


図 1.1: 斜交座標

ここで反変、共変成分を次のように定義する。

$$Oa = x^1, Ob = x^2$$

$$OA = x_1, OB = x_2$$

さらに計量テンソルを次のように定義する。

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & \cos\alpha \\ \cos\alpha & 1 \end{pmatrix} \quad (1.37)$$

すると 1.35、1.36 はまとめて次のように表現できる。(ただし、同じ添え字については和をとるものとする。)

$$x_i = g_{ij} x^j \quad (1.38)$$

さらに計量テンソルの逆行列が存在すれば

$$g^{ij} = g_{ij}^{-1} = \frac{1}{\sin^2\alpha} \begin{pmatrix} 1 & -\cos\alpha \\ -\cos\alpha & 1 \end{pmatrix}$$

のように定義して

$$x^i = g^{ij} x_j$$

であり

$$g^{ij} g_{ik} = \delta_k^j \text{ (クロネッカー)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.39)$$

となる。これからOPの長さとして

$$x^2 = g_{ij}x_i x_j = g^{ij}x^i x^j \quad (1.40)$$

はスカラーである。

## 1.9 パウリ行列

$2 \times 2$  のエルミート行列でかつユニタリな行列にパウリ行列 (Pauli\_Matrix) がある。これは 2 次元特殊ユニタリ群の元として

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix}, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

を考え単位元は  $\alpha = 1, \beta = 0$  であり次のようにして無限小演算子をつくる。

$$\frac{\partial A}{\partial \text{Re}\beta} \Big|_{\alpha=1, \beta=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial A}{\partial \text{Im}\beta} \Big|_{\alpha=1, \beta=0} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial A}{\partial \text{Im}\alpha} \Big|_{\alpha=1, \beta=0} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

リー群の無限小変換  $R(a)$  は単位元が  $R(0)$  となるようにパラメタ  $a$  を決めて

$$R(a) = 1 + \sum_{\rho=1}^r a^\rho X_\rho$$

$$X_\rho = \frac{\partial R(a)}{\partial a^\rho} \Big|_{a=0}$$

となり、 $X_\rho$  を生成子という。この時交換関係として

$$[R(a), R(b)] = [X_\rho, X_\sigma]$$

が成り立ち、リー群の構造定数として  $C$  をもってくると

$$[X_\rho, X_\sigma] = \sum_{\lambda=1}^r C_{\rho\sigma}^\lambda X_\lambda$$

となった。これから

$$\left[ \frac{1}{2}\sigma_a, \frac{1}{2}\sigma_b \right] = i \sum_{c=1}^3 \epsilon_{abc} \frac{1}{2}\sigma_c$$

を満たすものをつくと単位行列を  $\sigma_0$  として表現すると次のような PauliMatrix が得られる。

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.41)$$

この行列は次の性質を示す。

$$\text{Tr}(\sigma_k) = 0, \quad k = 1, 2, 3$$

$$\det(\sigma_k) = -1, \quad k = 1, 2, 3$$

もちろん上の2式は単位行列  $\sigma_0$  には成り立たない。  
 さらに次の関係が成り立つから

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \sigma_0$$

$$\sigma_1\sigma_2 = i\sigma_3$$

$$\sigma_3\sigma_1 = i\sigma_2$$

$$\sigma_2\sigma_3 = i\sigma_{21}$$

まとめると

$$\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij}\sigma_0 + i\epsilon_{ijk}\sigma_k, \quad k = 1, 2, 3$$

であり

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k$$

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}\sigma_0$$

なので次の関係がある。

$$2\sigma_i\sigma_j = \{\sigma_i, \sigma_j\} + [\sigma_i, \sigma_j], \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (1.42)$$

この性質からスピン角運動量  $s$  は

$$s_k = \frac{\hbar}{2}\sigma_k \quad (1.43)$$

と表すことができる。

## 2 曲面上の力学

### 2.1 曲面

一般に3次元において曲面とは  $R^3$  の部分集合  $M$  に対して  $M$  を含む  $R^3$  のある開集合  $V$ ,  
 および  $V$  上に定義された可微分関数  $f$  で

- $f^{-1}(0) = M$
- $df_p = \frac{\partial f}{\partial x}(p)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(p)dy + \frac{\partial f}{\partial z}(p)dz \neq 0$  ( $\forall p \in M$ )

を満たす場合をいう。

例えば

$$f(x, y, z) = 1 - x^2 - y^2 - z^2$$

は曲面であるが

$$f(x, y, z) = 1 + x^2 + y^2 + z^2$$

は曲面ではない。

平面の方程式は

$$ax + by + cz = d$$

で表すことができた。同じように等方的で等質な面が球面で

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

これは2次曲面の内の1つで他に  
楕円面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (2.1)$$

一葉双曲面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (2.2)$$

二葉双曲面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad (2.3)$$

楕円放物面

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \quad (2.4)$$

双曲放物面

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \quad (2.5)$$

などがある。球面、楕円面、トーラスなどのように有界で境界のない曲面を閉曲面 (closed surface) という。これらの曲面はパラメタ  $(u, v)$  を用いても表現される。そこで次のように速度ベクトルの組を定義する

$$x_u(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u} \\ \frac{\partial x_3}{\partial u} \end{pmatrix} \quad x_v(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial v} \\ \frac{\partial x_2}{\partial v} \\ \frac{\partial x_3}{\partial v} \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

すると平面  $(u, v)$  は  $u, v$  が1次独立であれば空間曲面  $(x_1, y_1, z_1)$  を決める。これを  $C^r$  曲面片という。

## 2.2 拘束力

水平床に置かれた物体が水平に移動する場合、重力と垂直抗力は仕事をしない。これは重力や垂直抗力が物体の制限された運動面に垂直に働くことからくる。この力を拘束力といい。ここではこれを一般化する。水平面は次元  $N$  の超曲面に拡大し、次の無限小変位  $\delta q$  を用いて仮想変位として定義する。  $\partial_i = \partial/\partial q^i$  として古典的にまず考察していく。

$$\delta \mathbf{r}_\alpha = (\partial_i \mathbf{r}_\alpha) \delta q^i \quad (\alpha = 1, 2, \dots, N)$$

のように各  $\alpha$  について  $i = 1..n$  で和をとる必要がある。

この時拘束力  $F'_\alpha$  は

$$\sum_\alpha \mathbf{F}'_\alpha \cdot \delta \mathbf{r}_\alpha = \sum_\alpha \left( \mathbf{F}'_\alpha \cdot \partial_i \mathbf{r}_\alpha \right) \delta q^i = 0$$

つまり拘束力の和  $\{\mathbf{F}'_\alpha\}$  が超曲面と直交する。つりあいが成り立てば

$$\mathbf{F}_\alpha + \mathbf{F}'_\alpha = 0$$

となる外力  $\mathbf{F}_\alpha$  が必要である。この外力の仮想変位に対してする仕事を仮想仕事 (virtual\_work) という。この時

$$\delta W = \sum_{\alpha} (\mathbf{F}_\alpha + \mathbf{F}'_\alpha) \delta \mathbf{r}_\alpha = 0$$

が成り立つがこれはつりあいの条件を必要とせず、 $\{\mathbf{F}_\alpha\}$  も超曲面に直交していれば

$$\delta W = \sum_{\alpha} \mathbf{F}_\alpha \delta \mathbf{r}_\alpha = - \sum_{\alpha} \mathbf{F}'_\alpha \delta \mathbf{r}_\alpha = 0$$

が成り立つ。この意味でも変位  $\delta \mathbf{r}_\alpha$  は仮想的である。

実際に静止状態から微小時間  $\delta t$  だけ変位する場合は加速度が必要で

$$\delta \mathbf{r}_\alpha = \delta \dot{\mathbf{r}}_\alpha \delta t$$

が決まり、運動方程式

$$m_\alpha \ddot{\mathbf{r}}_\alpha = \mathbf{F}_\alpha + \mathbf{F}'_\alpha$$

がつりあいの代わりに成立するので

$$\begin{aligned} \delta W &= \sum_{\alpha} (\mathbf{F}_\alpha + \mathbf{F}'_\alpha) \delta \mathbf{r}_\alpha \\ &= \sum_{\alpha} m_\alpha \ddot{\mathbf{r}}_\alpha \delta \dot{\mathbf{r}}_\alpha \delta t \\ &= \sum_{\alpha} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m_\alpha \dot{\mathbf{r}}_\alpha^2 \right) \delta t \\ &= \delta \left( \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_\alpha \dot{\mathbf{r}}_\alpha^2 \right) \end{aligned} \tag{2.7}$$

となり超曲面に沿った仕事の変分が運動エネルギーとして導かれる。

また、力の次元に関係なく、一般化力として全て独立にとった一般化座標  $\{q^i\}$  を用いて

$$\mathcal{F}_i := \sum_{\alpha} F_\alpha \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q^i} = \mathbf{F}_\alpha \partial_i \mathbf{r}_\alpha$$

を定義すればつり合いの条件は

$$\mathcal{F}_i = 0$$

であり、これはポテンシャルの停留値をとる条件

$$\delta W = \sum_{\alpha} \mathbf{F}_\alpha \delta \mathbf{r}_\alpha = - \sum_{\alpha} \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_\alpha} \delta \mathbf{r}_\alpha = 0$$

から得られる。

つりあいを保たない場合も拘束力  $\mathbf{F}'_\alpha$  について  $\delta q^i$  が独立であれば

$$\sum_{\alpha} \mathbf{F}'_\alpha \cdot \partial_i \mathbf{r}_\alpha = 0$$

が成り立ち、運動方程式と  $\partial_i \mathbf{r}_\alpha$  と内積をとり  $\alpha$  でたしあげる操作をすると

$$\sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \left( \frac{d^2 \mathbf{r}_\alpha}{dt^2} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q^i} \right) = \sum_{\alpha} (\mathbf{F}_\alpha + \mathbf{F}'_\alpha) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q^i} = \mathcal{F}_i$$

が得られる。これが一般化力の定義としてもよい。

ここでは拘束力が時間に無関係であるとして質点  $\alpha$  の速度、加速度を一般化座標で表すと

$$\frac{d\mathbf{r}_\alpha}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q^j} \frac{dq^j}{dt}$$

$$\frac{d^2\mathbf{r}_\alpha}{dt^2} = \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q^j} \frac{d^2q^j}{dt^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_\alpha}{\partial q^j \partial q^k} \frac{dq^j}{dt} \frac{dq^k}{dt}$$

となるので運動方程式は  $\partial_i \mathbf{r}_\alpha$  と内積をとり  $i = 1, 2, \dots, n$  として

$$\sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \left\{ \left( \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q^j} \right) \frac{d^2q^j}{dt^2} + \left( \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}_\alpha}{\partial q^j \partial q^k} \right) \frac{dq^j}{dt} \frac{dq^k}{dt} \right\} = \mathcal{F}_i \quad (2.8)$$

を得る。そこで系の全運動エネルギーとして式 2.7 から

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \left( \frac{d\mathbf{r}_\alpha}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{r}_\alpha}{dt} \right) \frac{d^2q^j}{dt^2} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \left( \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q^j} \right) \left( \frac{dq^i}{dt} \cdot \frac{dq^j}{dt} \right) \quad (2.9)$$

とおく。 $n$ 次元配位空間上で質量 1 の仮想的な質点を考える。この質点が微小時間  $dt$  の間に動く距離を  $\sqrt{(d\bar{s})^2}$  とするとこの空間の計量として

$$(d\bar{s})^2 := \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \left( \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q^j} \right) dq^i dq^j = m_{ij} dq^i dq^j \quad (2.10)$$

を定義する。ここで

$$m_{ij} = m_{ji} := \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \left( \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q^j} \right)$$

は一般化座標に依存した計量テンソルである。この時の質量 1 の質点の持つ運動エネルギー  $T$  は

$$T = \frac{1}{2} \left( \frac{d\bar{s}}{dt} \right)^2$$

となる。さらに第 1 種クリストフェル記号 (Christoffel\_symbol) が次のように定義できる。

$$C_{ijk} = C_{ikj} := \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \left( \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}_\alpha}{\partial q^j \partial q^k} \right)$$

これは次の関係式を満たす。

$$\partial_i m_{jk} = C_{jki} + C_{kji}$$

$$\partial_j m_{ki} = C_{kij} + C_{ikj}$$

$$C_{ijk} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{ki}}{\partial q^j} + \frac{\partial m_{ji}}{\partial q^k} - \frac{\partial m_{jk}}{\partial q^i} \right)$$

これから式 2.9 は

$$T = \frac{1}{2} m_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j$$

また式 2.8 は

$$m_{ij} \ddot{q}^j + C_{ijk} \dot{q}^i \dot{q}^k = \mathcal{F}_i = -\partial_i U(\mathbf{r}(q)) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

となる。さらに

$$m^{ij} m_{jk} = \delta_k^j$$

という関係から逆行列が存在するとして

$$m^{ij} := \sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{m_{\alpha}} \left( \frac{\partial q^i}{\partial \mathbf{r}_{\alpha}} \cdot \frac{\partial q^j}{\partial \mathbf{r}_{\alpha}} \right)$$

を定義すれば第2種クリストフェル記号 (Christoffel\_symbol) が次のように定義できる。

$$C_{jk}^i = C_{kj}^i := \frac{1}{2} m^{kl} \left( \frac{\partial m_{jl}}{\partial q^i} + \frac{\partial m_{li}}{\partial q^j} - \frac{\partial m_{ij}}{\partial q^l} \right)$$

これを用いて運動方程式を別表現すれば

$$\ddot{q}^i + C_{jk}^i \dot{q}^j \dot{q}^k = m^{ij} \mathcal{F}_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.11)$$

となる。これらはアファインと呼ばれ、第5部で詳しく触れる。

### 2.2.1 例：球面振り子

## 2.3 第1基本形式

ある拘束条件のもとで2次元曲面上に拘束された質点の運動を考える。2次元の曲面を  $N$  とするとこの曲面上の点は一般に

$$\mathbf{r} = (x(q^1, q^2), y(q^1, q^2), z(q^1, q^2))$$

となる。例えば球座標をとれば

$$\mathbf{r} = (a \sin \theta \cos \phi, a \sin \theta \sin \phi, a \cos \theta)$$

である。これを  $(q^1, q^2)$  平面から曲面  $N$  への写像とみなせたのでランク2のヤコビ行列が

$$j_{ij} = \begin{pmatrix} \partial_1 x & \partial_1 y & \partial_1 z \\ \partial_2 x & \partial_2 y & \partial_2 z \end{pmatrix}$$

ここで  $q^1$  を固定し  $q^2$  を変化させることで  $N$  上に1本の曲線ができるのでこれを  $q^1$  曲線と同様に  $q^2$  曲線もできる。

よってこの  $q^1, q^2$  曲線から交点としての1点を定めることができるので  $(q^1, q^2)$  は  $N$  の座標とすることができる。

この時  $\partial_1 \mathbf{r} = (\partial_1 x, \partial_1 y, \partial_1 z)$  は  $q^2$  曲線の接ベクトル、 $\partial_2 \mathbf{r} = (\partial_2 x, \partial_2 y, \partial_2 z)$  は  $q^1$  曲線の接ベクトルとみなせ、ヤコビアンが2なのでこれらは互いに1次独立とすることができる。よって  $(\partial_1 \mathbf{r}, \partial_2 \mathbf{r})$  はこの交点での接平面を張る。

しかし、先の球面振り子の極では無数の子午線が集中し、経度が一意に定まらず、ヤコビアンのランクは1になる。

このような場所では別の座標系  $(q^{1'}, q^{2'})$  を用いて覆う必要があることに注意する。

場合によってはさらに別の座標系  $(q^{1''}, q^{2''})$  を用いて完全に被覆する。これらの座標系をつなぐ変換行列を  $\psi$  とする。

この時、曲面の線素は2次形式として

$$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} dq^i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^j} dq^j \right) = g_{ij} dq^i dq^j$$

で定義し、

$$g_{ij} := \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^j} = \frac{m_{ij}}{m} \quad (2.12)$$

を曲面の第 1 基本量 (first\_fundamental\_quantities) という。  
またこれは

$$\begin{aligned} \det(g_{ij}) &= g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} \\ &= (\partial_1\mathbf{r} \cdot \partial_1\mathbf{r})(\partial_2\mathbf{r} \cdot \partial_2\mathbf{r}) - (\partial_1\mathbf{r} \cdot \partial_2\mathbf{r})(\partial_2\mathbf{r} \cdot \partial_1\mathbf{r}) \\ &= (\partial_1\mathbf{r} \times \partial_2\mathbf{r})^2 \neq 0 \end{aligned}$$

となるので逆行列が存在し、

$$g^{ij} := \frac{\partial q^i}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial q^j}{\partial \mathbf{r}} = mm^{ij}$$

であり前部での計量テンソルである。

質点が曲面を運動することを考えるとその軌道は 3 次元空間上で次のように表すことができる。

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q(t))$$

この時の速度は

$$v = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^j} \frac{dq^j}{dt}$$

であるが、 $\partial_i\mathbf{r}$  ( $i = 1, 2$ ) は点  $\mathbf{r}$  における接ベクトルであり、常に曲面  $N$  に接している。

また、加速度は

$$a = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^j} \frac{dq^j}{dt} \right) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^j} \frac{d^2q^j}{dt^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q^k \partial q^j} \frac{dq^k}{dt} \frac{dq^j}{dt} \quad (2.13)$$

となるので、これから第 1 項は曲面  $N$  に接するが、第 2 項は法線方向の成分を持つことがわかる。  
そこで点  $\mathbf{r}$  における曲面の単位法ベクトルを

$$\mathbf{e}_3 = \frac{\partial_1\mathbf{r} \times \partial_2\mathbf{r}}{|\partial_1\mathbf{r} \times \partial_2\mathbf{r}|}$$

とすれば第 2 項の係数を先のクリストフェル記号を質量項が異なるのでここでは  $\Gamma$  用いて

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^k \partial q^j} = \Gamma_{jk}^i \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} + h_{jk} \mathbf{e}_3$$

ただし、

$$h_{jk} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q^k \partial q^j} \cdot \mathbf{e}_3 \quad (2.14)$$

である。またここでのクリストフェル記号は  $\partial_n\mathbf{r}$  との内積をとって  $\partial_n\mathbf{r} \perp \mathbf{e}_3$  だから第 2 項は落ち、

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^n} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q^j \partial q^k} = \Gamma_{jk}^i \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^n} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} \right) = g_{ni} \Gamma_{jk}^i$$

という計算則を満たす。これは前節の  $C_{jk}^i$  とおなじ演算関係である。

そこで次のような関係がある。

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{m} g^{in} C_{njk} = m^{in} C_{njk} = m C_{jk}^i$$

$$\Gamma_{ijk} = g_{ni} \Gamma_{jk}^n = \frac{1}{m} C_{ijk}$$

この場合は質量は座標成分によらず質点に集中していることになる。このクリストフェル記号にも先と同様に 1 種、2 種という区別を用いることがある。式 2.12 から計量テンソルで表すと

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{ki}}{\partial q^j} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} \right)$$

である。これから質点に働く全ての力を  $\mathbf{F}$  として曲面に水平な成分  $\mathbf{F}_T$  と垂直な成分  $\mathbf{F}_N$  に分解する。

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_T + \mathbf{F}_N$$

これにより全体の運動方程式が式 2.13 から

$$m \left( \frac{d^2 q^k}{dt^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dq^i}{dt} \frac{dq^j}{dt} \right) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^k} + mh_{ij} \frac{dq^i}{dt} \frac{dq^j}{dt} \mathbf{e}_3 = \mathbf{F}$$

となり、曲面N上の曲線に接する方向には

$$m (\ddot{q}^k + \Gamma_{ij}^k \dot{q}^i \dot{q}^j) \partial_k \mathbf{r} = \mathbf{F}_T \quad (2.15)$$

となりこれは式 2.22 と同じである。よって拘束力を含まない。

曲線に直行する方向には右手系を正として

$$mh_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j \mathbf{e}_3 = \mathbf{F}_N \quad (2.16)$$

のように分けることができる。これは曲線方向には仕事をしない。

この式の意味を次節で考える。

## 2.4 第2基本形式

先の式 2.16 について次のようにまず曲面N上の任意の1点  $r_0(q_0^1, q_0^2)$  を考える。

図のように曲面上の近くの点  $\mathbf{r}(q^1, q^2)$  の余接平面上の単位ベクトル  $\mathbf{e}_N$  方向への射影を

$$h(q) = (\mathbf{r}(q) - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{e}_N$$

とする。

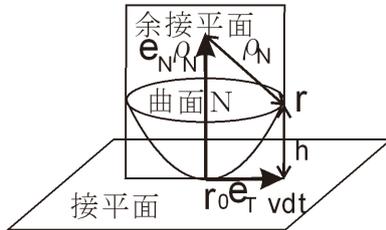


図 2.1: 余接平面と曲率半径

内積  $\partial_i \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_N = 0$  となるから点  $\mathbf{r}$  を次のように微小量で表すと

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_0^1 + \epsilon \xi^1, q_0^2 + \epsilon \xi^2) \quad (2.17)$$

となる。式 2.14 から  $h_{jk}$  は

$$\begin{aligned} h(q_0^1 + \epsilon \xi^1, q_0^2 + \epsilon \xi^2) &= \frac{\epsilon^2}{2} \left( \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q^k \partial q^j} \cdot \mathbf{e}_N \right) \xi^j \xi^k + O(\epsilon^3) \\ &= \frac{\epsilon^2}{2} (h_{jk})_0 \xi^j \xi^k \end{aligned} \quad (2.18)$$

となるが図からこれは接平面から  $\mathbf{r}$  への高さ  $h$  に等しい。曲面Nが平面であれば0である。

そこでこの  $\{h_{jk}\}$  を曲面の第2基本量という。また次を曲面の第2基本形式 (second\_fundamental\_form) という。

$$H = h_{jk} dq^j dq^k \quad (2.19)$$

図において、質点が  $\mathbf{r}_0$  から微小時間  $dt = \epsilon\tau$  の間に  $\mathbf{r}(q_0^1 + \epsilon\xi^1, q_0^2 + \epsilon\xi^2)$  だけ動いたとすると  $\mathbf{r}_0$  での質点の速さは  $v = |\dot{\mathbf{r}}|$  となる。このとき曲面の曲率半径を  $\rho_N$  とすると図から

$$\begin{aligned}\rho_N^2 &= (\rho_N - h)^2 + (v\epsilon\tau)^2 \\ &\cong \rho_N^2 - 2\rho_N h + (v\epsilon\tau)^2 + O(\epsilon^3)\end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned}h &= \frac{(v\epsilon\tau)^2}{2\rho_N} + O(\epsilon^3) \\ (\epsilon\tau)^2 &= \frac{2\rho_N h}{v^2}\end{aligned}\tag{2.20}$$

と表すことができる。また、式 2.17 から  $\mathbf{r}_0$  での質点の速さの成分は

$$\dot{q}^1 = \xi^1/\tau, \quad \dot{q}^2 = \xi^2/\tau$$

となる。式 2.18, 2.20 より

$$\begin{aligned}h &= \frac{\epsilon^2}{2} (h_{jk})_0 \xi^j \xi^k \\ &= \frac{(\epsilon\tau)^2}{2} (h_{jk})_0 \dot{q}^j \dot{q}^k \\ &= \frac{(v\epsilon\tau)^2}{2\rho_N}\end{aligned}$$

よって

$$(h_{jk})_0 \dot{q}^j \dot{q}^k = \frac{v^2}{\rho_N}$$

と置きかえてできるので式 2.13 から  $\mathbf{r}_0$  での質点の加速度の法線方向の成分は

$$\begin{aligned}(\ddot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{e}_N)_0 &= (h_{jk})_0 \dot{q}^j \dot{q}^k \\ &= \frac{v^2}{\rho_N}\end{aligned}$$

となる。これを用いて運動方程式の曲面に垂直な成分については式 2.16 から

$$\mathbf{F}_N = m \frac{v^2}{\rho_N}$$

とあらわすことができる。

## 2.5 測地線

曲面上の運動を調べるためにパラメタとして時間  $t$  が選べれば次の軌道の長さを基準にすることができる。

$$\begin{aligned}s &= \int_0^t v dt = \int_0^t |\dot{\mathbf{r}}| dt \\ v &= \frac{ds}{dt}\end{aligned}$$

これにより  $t = t(s)$  とみることができる。軌道上の点は

$$r = r(q^1(t(s)), q^2(t(s))) = r(s)$$

で表される。この時、軌道の接ベクトルが決まり

$$\mathbf{e}_1 = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{\dot{\mathbf{r}}}{v}$$

$$|\mathbf{e}_1| = \sqrt{\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1}$$

である。

よって  $v = 0$  の場合は特異であることに注意する。  $|\mathbf{e}_1| = 1$  なのでこれは単位ベクトルとしてよい。よって  $r(s)$  でこの曲面に接して  $\mathbf{e}_1$  に直交する単位ベクトルを空間が 3 次元であるとすれば次のように定義できる。

$$\mathbf{e}_2 = \frac{\partial_2 r - (\partial_2 r \cdot \mathbf{e}_1) \mathbf{e}_3}{|\partial_2 r - (\partial_2 r \cdot \mathbf{e}_1) \mathbf{e}_3|}$$

そうすれば法ベクトルが

$$\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$$

で決まり  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  は右手直交系を張る。

この時の速度は次のようになる。ここからはベクトルを太字で強調し、前節の記号を用いて

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = v\mathbf{e}_1 = v\mathbf{e}_T, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_G$$

とする。

$$\frac{d}{dt} \mathbf{e}_1 = \frac{d}{dt} \frac{d\mathbf{r}}{ds} = v \frac{d}{ds} \mathbf{e}_1 = v\mathbf{e}'_1 = v\mathbf{e}_N$$

とおけば加速度は

$$\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}} = \dot{v}\mathbf{e}_T + v^2\mathbf{e}'_T \tag{2.21}$$

となる。さらに

$$\mathbf{e}_T \cdot \mathbf{e}_T = 1 \tag{2.22}$$

の両辺を  $s$  で微分すれば

$$2\mathbf{e}_T \cdot \mathbf{e}'_T = 0$$

となるので  $\mathbf{e}_T, \mathbf{e}'_T$  は互いに直行している。よって曲線方向に 2 階微分すると

$$\mathbf{r}'' = \mathbf{e}'_T = \kappa_G \mathbf{e}_G + \kappa_N \mathbf{e}_N \tag{2.23}$$

と表されなくてはならない。よって 2.21 は

$$\ddot{\mathbf{r}} = \dot{v}\mathbf{e}_T + v^2(\kappa_G \mathbf{e}_G + \kappa_N \mathbf{e}_N)$$

となるがここで前節の結果から  $\ddot{\mathbf{r}} = v^2 \mathbf{r}''$  だから

$$v^2 \kappa_N = \ddot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{e}_N = \pm \frac{v^2}{\rho_N}$$

$$\kappa_N = \mathbf{r}'' \cdot \mathbf{e}_N = \pm \frac{1}{\rho_N}$$

となり、 $\rho_N$  を法曲率 (normal curvature) という。

この曲率は接平面上に射影することからは求められない。

これに対し、式 2.23 から

$$\kappa_G = \mathbf{r}'' \cdot \mathbf{e}_G = \frac{\ddot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{e}_G}{v^2}$$

であらわされる曲率は軌道を接平面  $TN$  に射影して得られる曲線の曲率である。

これを測地的曲率 (geodesic curvature) という。

実際に軌道を  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(s_0)$  での接平面  $(TN)_0$  に射影して得られる曲線はもとの曲線から  $\mathbf{e}_{N0}$  方向への射影成分を引きさればよいから

$$\tilde{\mathbf{r}}(s) = \mathbf{r}(s) - ((\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{e}_{N0}) \mathbf{e}_{N0}$$

となる。よって

$$\tilde{\mathbf{r}}''(s) = \mathbf{r}''(s) - (\mathbf{r}''(s) \cdot \mathbf{e}_{N0}) \mathbf{e}_{N0}$$

となるので前回と同様に

$$(\kappa_G)_0 = (\mathbf{r}''(s) \cdot \mathbf{e}_G)_0 = (\tilde{\mathbf{r}}'' \cdot \mathbf{e}_G)_0 = \pm \frac{1}{(\rho_G)_0}$$

この時の運動方程式は3つの方向のベクトル和として

$$m \left( \frac{dv}{dt} \mathbf{e}_T + \frac{v^2}{\rho_G} \mathbf{e}_G + \frac{v^2}{\rho_N} \mathbf{e}_N \right)$$

となる。各方向の成分は単位ベクトルと内積を取り得られる。

$$m \frac{dv}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_T$$

$$m \frac{v^2}{\rho_G} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_G$$

$$m \frac{v^2}{\rho_N} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_N$$

特に測地的曲率  $\kappa_G$  が0で、 $v = 0$  であれば

$$\kappa_G = (\mathbf{r}'' \cdot \mathbf{e}_G) = (q^{k''} + \Gamma_{ij}^k q^i q^{j'}) (\partial_k \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_G) = 0$$

となるので測地線は曲面上で慣性運動をし測地線の方程式

$$\frac{d^2 q^k}{ds^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dq^i}{ds} \frac{dq^j}{ds} = 0 \quad (k = 1, 2)$$

を満たす。この解曲線を測地線 (geodesic curve) という。これは曲面上で局所的に最短距離になる。

## 2.6 フェルマーの原理

光学的な最短時間の原理はフェルマーの原理であった。そこでこの原理との関係のみておく。

式 2.10 から

$$(\bar{ds})^2 = m_{ij} dq^i dq^j = m(dl)^2$$

としよう。配位区間上で実現される経路はヤコビの原理から

$$\Delta A = \Delta \int_{Q_1}^{Q_2} \sqrt{2(E - U(q))} d\bar{s} = \Delta \int_{Q_1}^{Q_2} \sqrt{2m(E - U(q))} dl = 0$$

から決まり特に1質点であれば

$$\Delta \int_{Q_1}^{Q_2} \sqrt{2m(E - U(q))} dl = \Delta \int_{Q_1}^{Q_2} m v dl = 0$$

から決まった。光学の場合は屈折率を  $n(\mathbf{r})$ 、位相速度を  $u(\mathbf{r}) = c/n(\mathbf{r})$  としてフェルマーの原理 (Fermat's principal) は

$$\Delta \int_{Q_1}^{Q_2} \frac{dl}{u(\mathbf{r})} = \Delta \int_{Q_1}^{Q_2} \frac{n(\mathbf{r})dl}{c} = 0$$

である。ここで

$$u(\mathbf{r}) \propto \frac{1}{mv} \propto \frac{1}{\sqrt{m(E - (U(\mathbf{r})))}}$$

とするとポテンシャル内の粒子の運動を波の伝搬と相似付けられる。よって波数  $k(\mathbf{r}) = \omega/c$  として光波の位相について

$$\omega \left\{ \int_{Q_0}^Q \frac{dl}{u(\mathbf{r})} - (t - t_0) \right\} = \int_{Q_1}^{Q_2} k(\mathbf{r})dl - \omega(t - t_0) = \phi(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}_0, t_0)$$

とかける。興味あることにこれは次のように、対比できる。  $k(\mathbf{r}) = p/\hbar$  として

$$\frac{1}{\hbar} \left\{ \int_{Q_0}^Q p dl - E(t - t_0) \right\} = \frac{1}{\hbar} \{W_H(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) - E(t - t_0)\} = \frac{1}{\hbar} S_H(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}_0, t_0)$$

これはド・ブローイ波の位相である。

### 3 双曲幾何 [18]

#### 3.1 双曲線距離

ユークリッド幾何では基本的な順運動は回転と平行移動である。球面幾何では回転のみであった。では双曲幾何においてはどうか。式??の計量を用いて次のように双曲直線の距離を定義する。  $dz$  が無限小であれば

$$H[z + dz, z] = \frac{|dz|}{\text{Im}[z]} \quad (3.1)$$

双曲円とは点  $c$  を中心として

$$H[z, c] = \rho \quad (3.2)$$

を満たす軌跡として定義する。曲率が  $-1/R$  になるようなトラクトリクス母線は明らかに測地線であるのでこの地図での垂直線もまた測地線、つまり双曲直線の例である。これにより次の最短経路の定義ができる。垂直直線上の2点間の最短道筋は一意的にきまり、2点を結ぶ直線線分  $L$  になる。

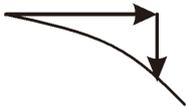


図 3.1: 双曲平面の最短距離と反運動

よって上図左のように垂線上の距離  $ds_1$  が最短であり

$$\hat{ds}_1 = \frac{ds_1}{y} < \hat{ds}_2 = \frac{ds_2}{y} \quad (3.3)$$

が成り立つ。これから

$$H[x + iy_1, x + iy_2] = \left| \log \left( \frac{y_1}{y_2} \right) \right| \quad (3.4)$$

という関係が得られる。 $y_1 = 1$  とするとこれは次の図のように  $y_2$  に対し変化していく。



図 3.2: H のグラフ

ではトラクリトス母線ではない普通の双曲直線ではどのような変化をするかというところの双曲直線も水平線に直交する半直線の垂直線か、水平線に直交する円のどちらかでしかない。この2つも円の半径を無限大にすることで垂直線に写る。

さらに双曲線幾何には次の定理があった。

水平線に直交する半円の反転は双曲平面の反運動である。

これは式??による反転により次のように変換されたとする。

$$z \rightarrow \tilde{z} = T_K(z) \quad (3.5)$$

図 3.1 により等角であるので

$$z = re^{i\theta} \quad (3.6)$$

とすると

$$\tilde{z} = \frac{1}{r} e^{i\theta} \quad (3.7)$$

だから

$$\hat{d}s = \frac{r\theta}{y} = \frac{r\theta}{\text{Im}[z]} = \frac{r\theta}{r\text{Sin}\theta} = \theta/\text{Sin}\theta \quad (3.8)$$

$$\hat{d}s = \frac{\theta}{r\tilde{y}} = \frac{\theta}{r\text{Im}[\tilde{z}]} = \frac{\theta}{\text{Sin}\theta} = \theta/\text{Sin}\theta \quad (3.9)$$

となり

$$\hat{d}s = \tilde{d}s \quad (3.10)$$

が成り立つ。これは図 3.1 の直角三角形が相似であることから明らかである。

これから双曲距離について

$$H[a, b] = H[\tilde{a}, \tilde{b}] = \left| \log \frac{\text{Im}\tilde{a}}{\text{Im}\tilde{b}} \right| \quad (3.11)$$

が成り立つ。

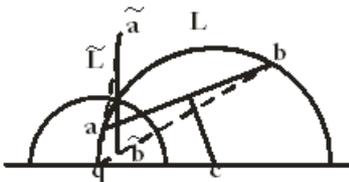


図 3.3: 2つの円は互いの中心を通る

上の図では2つの円は互いの中心を通る。この時双曲距離  $ab$  は図の弧  $ab$  が最短になる。これは反転により線分  $\tilde{a}\tilde{b}$  の距離が最短であることから明らかである。また、双曲平面上では半直線 (垂線) と半円はどちらも水平線に直交しており区別はできない。

さらにこれから次の説明ができる。

水平線に直交する半円  $K$  に関する反転は、双曲直線  $K$  に関する双曲平面の鏡映  $R_K$  に等しい。

つまり次が成り立つ。

$$T_K(z) = R_K(z) \tag{3.12}$$

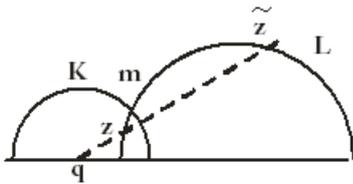


図 3.4: 任意の  $\tilde{z}$  と  $z$  を通る円は交点  $m$  で直交する

この式は上図において  $z$  を  $K$  により反転した点  $\tilde{z}$  を通る円は自動的に  $K$  に直交し、また

$$T_K(zm) = \tilde{z}m \tag{3.13}$$

で入れ替わるので距離  $\tilde{z}m = zm$  が成り立つので  $z$  は  $K$  によって  $\tilde{z}$  に鏡映される。

### 3.2 ボーヤイ・ロバチェフスキーの公式

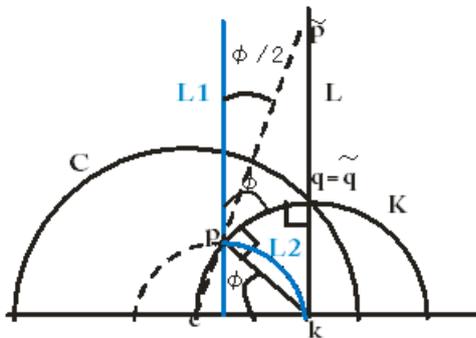


図 3.5: 直線  $L$  に対し  $L1$ 、 $L2$  は漸近的である

上の図において双曲幾何では点  $p$  で直線  $L$  と交わらない双曲直線 (半円) は無数にあり、これらは超平行と呼ばれる。この点はユークリッド幾何との相違点である。また直線  $L$  に  $L1$  と  $L2$  は水平面上では直交し交わるので漸近的であるという。この漸近的直線のなす角  $\phi$  を平行角という。この時、ユークリッド幾何と同様に点  $p$  を通り  $L$  と垂直に交わる双曲直線は図の  $K$  の1つしかない。

$K$  と  $L$  の交点を  $q$  とする。  $L2$  の水平線との交点  $c$  を中心として半円  $C$  を作図し、  $q$  を通る双曲直線を  $C$  とすると

$$\begin{aligned} T_C(q) &= q = \tilde{q} \\ T_C(p) &= \tilde{p} \end{aligned}$$

が成り立つ。そこで

$$D \equiv H[p, q] \tag{3.14}$$

とするとボーヤイ・ロバチェフスキーの公式は次のように表すことができる。

$$\tan \frac{\phi}{2} = e^{-D} \tag{3.15}$$

これは図から次のように説明できる。角  $\text{pkc}$  は  $\phi$  に等しい。また弧  $pq$  は線分  $\tilde{p}\tilde{q}$  に双曲面上では等しいので式 3.11 より  $\tan\left(\frac{\phi}{2}\right) < 1$  となることから

$$\begin{aligned} D &= \left| \log \left( \frac{qk}{\tilde{p}k} \right) \right| = \left| \log \left( \frac{ck}{\tilde{p}k} \right) \right| \\ &= \left| \log \left( \tan \left( \frac{\phi}{2} \right) \right) \right| = -\log \left( \tan \left( \frac{\phi}{2} \right) \right) \end{aligned}$$

を得る。よって式 3.15 が示された。

### 3.3 ポアンカレ円板

平面上の座標  $(x, y)$  において  $y$  が正になるような全体を上半平面 (upper\_half\_plane) という。これを  $UP$  で表すと

$$UP = \{(x, y) | y > 0\} \tag{3.16}$$

である。

中心が  $-i$  にあり  $\pm 1$  を通る円を  $K$  とし次の反転

$$z \rightarrow \tilde{z} = T_K(z) \tag{3.17}$$

を用いて下図のように複素平面の上半平面を単位円板の中に写すことを考える。

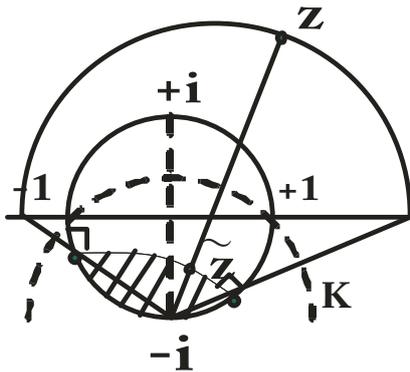


図 3.6: 上半平面全体を単位円板に写す

$K$  によって  $z$  のある半円の外側の上半平面は図の単位円板の斜線部に写され、内側の部分は単位円内に写される。

また双曲平面の水平線全体はこの写像により、単位円に写され、上半平面の垂直な双曲直線の共有する無限遠は  $-i$  に写される。

しかしこの反転  $T_K(z)$  は反等角なので向きが反対になる。

そこで実軸に関して鏡映を施すと等角なポアンカレ円板をつくることができる。つまり上半平面からポアンカレ円板への変換は複素反転を表すメビウス変換になる。このメビウス変換をとするとこれは

$$\begin{aligned} i &\rightarrow 0 \\ -i &\rightarrow \infty \end{aligned}$$

のように写すことから  $k$  を定数として

$$k \frac{z-i}{z+i}$$

という形をしていることが予想される。さらに点  $\pm 1$  が固定されているので結局

$$D(z) = \frac{iz+1}{z+i} \tag{3.18}$$

であることがわかる。

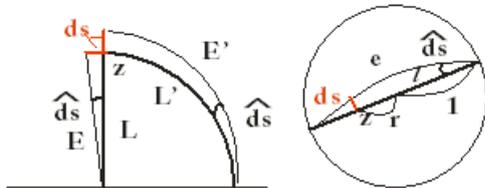
### 3.4 ポアンカレ計量

前節のメビウス変換の式??を持ってきて

$$M(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad ad-bc=1 \tag{3.19}$$

とする。上半平面  $UP$  上の点を同じ  $UP$  上の点に写すメビウス変換 (1 次分数変換) の全体を  $PSL(2; R)$  で表す。

ポアンカレ平面上での計量を定めるためにまず次の図を利用する。



$ds$  の双曲直線的な長さに対応するのが図の  $\hat{ds}$  である。

図 3.7: ポアンカレ円板上でメビウス変換は等角になる。

図左において  $z = re^{i\theta}$  を始点とする水平な線素の無限小ユークリッド長さを  $ds$  とすると  $L$  と  $E$  との間の角度は

$$ds = r\theta = \hat{ds} \operatorname{Im}[z] \tag{3.20}$$

$$\hat{ds} = \frac{ds}{\operatorname{Im}[z]} \tag{3.21}$$

となる。 $L$  は  $ds$  に直交していて  $E$  は  $L$  の等距離曲線である。式 3.18 からメビウス変換が等角であることから

$\hat{ds}$  は角としてみなすことが大変有効になる。つまり上図右において

$ds$  の 1 つの端点を通り  $ds$  に直交する双曲直線  $l$  とし、さらに  $ds$  の他の端点を通る双曲直線を  $e$  とする。

この時、 $ds$  の双曲直線的な長さに対応するのが図の  $\hat{ds}$  である。簡単のため角  $\hat{ds} = \phi$  とおくと

よって下図右のように弧  $e$  を含む円の半径を  $\rho$  とすると

$$\rho \sin \phi = 1 \tag{3.22}$$

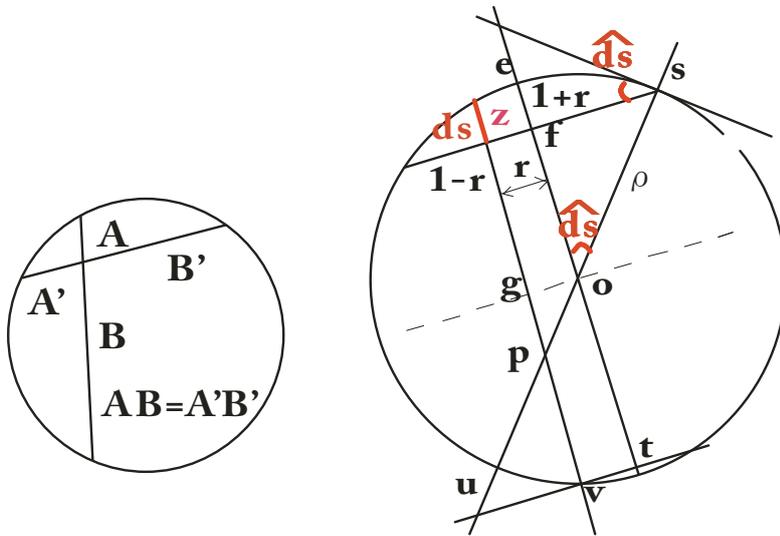


図 3.8:

円内の定点を通る任意の弦に対して定点で切って得られる線分の長さの積  $AB = A'B'$  は一定であることを使うと

線分  $zv$  の長さは

$$zv = \rho \cos \phi + \rho \tag{3.23}$$

だから式 3.22 より

$$\begin{aligned} (\rho \cos \phi + \rho) ds &= (1-r)(1+r) \\ \frac{\cos \phi + 1}{\sin \phi} ds &= 1 - |z|^2 \end{aligned}$$

よって  $\phi$  が小さい時には

$$\phi = \hat{ds} = \frac{2}{1 - |z|^2} ds \tag{3.24}$$

という計量が得られる。この式は式??と符号を除いて一致している。これから双曲平面の距離を次のように決めることができる。

$$H[0, z] = \int_0^{|z|} \frac{2dr}{1-r^2} = \int_0^{|z|} \left[ \frac{1}{1+r} - \frac{1}{1-r} \right] dr \tag{3.25}$$

$$= \log \left( \frac{1+|z|}{1-|z|} \right) \tag{3.26}$$

となる。

ポアンカレ円板上においてもどの順運動  $M$  も 2つの双曲直線に対する反転、または鏡映で表すことができる。

$$M = R_{L1} \circ R_{L2} = T_{L2} \circ T_{L1} \tag{3.27}$$

また前節でどの順運動も単位円をそれ自身に写すことがわかったので単位円板の自己同型を表すメビウス変換を表す式が式??から原点周りの回転角を  $\phi$  として

$$M_a^\phi = e^{i\phi} M_a(z) \quad (3.28)$$

$$M_a(z) = \frac{z - a}{\bar{a}z - 1} \quad (3.29)$$

メビウス変換は  $a$  と原点を交換する

$$M_a(a) = 0, \quad M_a(0) = a \quad (3.30)$$

を満たすから  $a$  を通り、直径が  $B$  で中心が  $1/\bar{a}$  の単位円に直交する円を  $A$  とすると次のように分解ができる。

$$M_a = T_B \circ T_A \quad (3.31)$$

これから次の図のように  $A$  と  $B$  の交点  $m$  は  $0$  と  $a$  の双曲中心であり  $A$  は線分  $0a$  の垂直二等分線になっている。

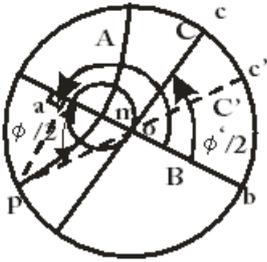


図 3.9: 曲線  $A$  は  $0a$  の垂直二等分線になる。

よって  $a$  を原点と交換する一意的な変換  $M_a$  は双曲線分  $0a$  の中点  $m$  周りの角  $\pi$  の回転  $R_m^\pi$  になる。これから次のように距離の関係が導ける。

$$H[a, z] = H[M_a(a), M_a(z)] = H[0, M_a(z)] = \log \left( \frac{1 + |M_a(z)|}{1 - |M_a(z)|} \right) \quad (3.32)$$

であり、式 3.28 より

$$H[a, z] = \log \left( \frac{|\bar{a}z - 1| + |z - a|}{|\bar{a}z - 1| - |z - a|} \right) \quad (3.33)$$

を得る。ユークリッド回転  $z \rightarrow e^{i\phi}z$  が双曲回転  $R_0^\phi$  を表す。

一般的な単位円板のメビウス自己同型は次のように双曲回転の合成になる。

$$M_a^\phi = R_0^\phi \circ R_m^\pi \quad (3.34)$$

曲線  $l: [a, b] \rightarrow \mathcal{R}^2$  は次のようにパラメタ  $t$  の連続した関数の組で表され、

$$l(t) = (l_1(t), l_2(t)) \quad (3.35)$$

この曲線の長さ  $S_P$  を式??を参考にして次で表す。

$$S_P = \int_a^b \frac{1}{l_2(t)} \left| \frac{dl}{dt} \right| dt \quad (3.36)$$

これをポアンカレ計量 (Poincare\_metric) という。

この時 2 点間の距離  $d(P, Q)$  を次のように定義する。

$$d(P, Q) = \inf \{S_P(l) \mid l: [a, b] \rightarrow UP, l(a) = P, l(b) = Q\} \quad (3.37)$$

この平面を複素空間に拡大すると  $UP$  はまさに虚部分が正の複素数全体を表すことになる。すなわち

$$P = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}[z] > 0\} \quad (3.38)$$

とする。単位円板を

$$D^2 \equiv \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\} \quad (3.39)$$

で定義し、この円板に含まれる曲線の長さを式 3.28 より

$$S_D = \int_a^b \frac{2}{1 - |l(t)|^2} \left| \frac{dl}{dt} \right| dt \quad (3.40)$$

となる。

### 3.5 共形変換

$l: [a, b] \rightarrow R^2, m: [a', b'] \rightarrow R^2$  を  $R^2$  上の曲線とし、この曲線が点  $P = l(c) = m(c')$  で交わっているとする。この時、点  $P$  での  $l$  と  $m$  の間の角度はそれぞれの接ベクトルのなす角  $\theta$  は次で定義できる。

$$\text{Cos}\theta \equiv \frac{\frac{dl}{dt}(c) \cdot \frac{dm}{dt}(c')}{\left| \frac{dl}{dt}(c) \right| \left| \frac{dm}{dt}(c') \right|} \quad (3.41)$$

$U$  を平面  $R^2$  上の開集合とし、 $\psi$  を  $U$  から  $R^2$  への無限回微分可能な写像であるとする。この時  $\psi$  が共形式 (conformal) であるとは  $U$  に含まれ 1 点  $P = l(c) = m(c')$  での角度が  $\psi(P)$  での角度が  $\psi m$  と  $\psi l$  の間の角度に等しい場合である。共形的な写像を等角写像という。

$\psi \in \text{PSL}(2; R)$  とすると任意の 2 点  $P, Q \in UP$  に対してメビウス変換が等長変換であることから

$$d(\psi(P), \psi(Q)) = d(P, Q) \quad (3.42)$$

である。このヤコビアンを求めこの式を証明してみる。写像  $\psi$  の  $z = x + iy$  でのヤコビ行列を  $(J\psi)_z$  とおくと次が成り立つ。

$$(J\psi)_z = \begin{pmatrix} \text{Re} \left[ \frac{1}{(cz+d)^2} \right] & -\text{Im} \left[ \frac{1}{(cz+d)^2} \right] \\ \text{Im} \left[ \frac{1}{(cz+d)^2} \right] & \text{Re} \left[ \frac{1}{(cz+d)^2} \right] \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

まず、これは次のように導ける。 $z = x + iy$  として  $ad - bc = 1$  から

$$\frac{\partial}{\partial x} \psi(z) = \frac{(a(cz+d) - c(az+b))}{cz+d} = \frac{1}{(cz+d)^2} \quad (3.44)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \psi(z) = \frac{(a(cz+d) - c(az+b))i}{cz+d} = \frac{i}{(cz+d)^2} \quad (3.45)$$

よってヤコビ行列は 1 になるわけではなく次のようになる。

$$(J\psi)_z = \begin{pmatrix} \text{Re} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \psi(z) \right] & \text{Re} \left[ \frac{\partial}{\partial y} \psi(z) \right] \\ \text{Im} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \psi(z) \right] & \text{Im} \left[ \frac{\partial}{\partial y} \psi(z) \right] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Re} \left[ \frac{1}{(cz+d)^2} \right] & -\text{Im} \left[ \frac{1}{(cz+d)^2} \right] \\ \text{Im} \left[ \frac{1}{(cz+d)^2} \right] & \text{Re} \left[ \frac{1}{(cz+d)^2} \right] \end{pmatrix} \quad (3.46)$$

次に等長変換であることを示すために

$$l(t) = l_1(t) + l_2(t)i \quad (3.47)$$

$$l'(t) = l'_1(t) + l'_2(t)i \quad (3.48)$$

とおくと

$$\left| \frac{dl'}{dt} \right| = \sqrt{\left( \frac{dl'_1}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dl'_2}{dt} \right)^2} \quad (3.49)$$

ベクトルの成分としてヤコビアン  $(J\psi)_z$  で表すと

$$\begin{pmatrix} \frac{dl'_1}{dt} \\ \frac{dl'_2}{dt} \end{pmatrix} = (J\psi)_{l(t)} \begin{pmatrix} \frac{dl_1}{dt} \\ \frac{dl_2}{dt} \end{pmatrix} \quad (3.50)$$

だから

$$\left( \frac{dl'_1}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dl'_2}{dt} \right)^2 = \left( \frac{dl_1}{dt}, \frac{dl_2}{dt} \right) \begin{pmatrix} \frac{dl'_1}{dt} \\ \frac{dl'_2}{dt} \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

$$= \left( \frac{dl_1}{dt}, \frac{dl_2}{dt} \right) (J\psi)_{l(t)}^t (J\psi)_{l(t)} \begin{pmatrix} \frac{dl_1}{dt} \\ \frac{dl_2}{dt} \end{pmatrix} \quad (3.52)$$

ここで

$$(J\psi)_{l(t)}^t (J\psi)_{l(t)} = \frac{1}{|cl(t) + d|^4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.53)$$

を代入すると

$$\left( \frac{dl'_1}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dl'_2}{dt} \right)^2 = \frac{1}{|cl(t) + d|^4} \left( \left( \frac{dl_1}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dl_2}{dt} \right)^2 \right) \quad (3.54)$$

ここで  $ad - bc = 1$  から

$$Im[\psi(z)] = Im \left[ \frac{az + b}{cz + d} \right] \quad (3.55)$$

$$= Im \left[ \frac{adz + bc\bar{z} + bd + ac|z|^2}{|cz + d|^2} \right] \quad (3.56)$$

$$= \frac{1}{|cz + d|^2} Im[z] \quad (3.57)$$

になるので長さ

$$S(l') = \int_a^b \frac{1}{Im[l']} \left| \frac{dl'}{dt} \right| dt \quad (3.58)$$

$$= \int_a^b \frac{1}{|cl(t) + d|^2} \frac{1}{Im[l']} \left| \frac{dl}{dt} \right| dt \quad (3.59)$$

$$= \int_a^b \frac{1}{|cl(t) + d|^2} \frac{|cl(t) + d|^2}{Im[l]} \left| \frac{dl}{dt} \right| dt \quad (3.60)$$

$$= \int_a^b \frac{1}{Im[l]} \left| \frac{dl}{dt} \right| dt = S(l) \quad (3.61)$$

となり、等長性式 3.42 が示された。

## 4 作用原理

### 4.1 作用積分

#### 4.1.1 無限小変化

相対論では時間と空間は対等に近いところまで引き上げられた。しかし、対称ではない。  
時間変化を

$$t' = t + \epsilon(t) \quad (4.1)$$

空間変化を

$$q'(t') = q(t) + \Delta q \quad (4.2)$$

とすると、時間変化と座標変化をあわせたものの微小変化はそれぞれが独立していれば

$$\begin{aligned} \Delta q(t) &= q'(t') - q(t') + q(t') - q(t) \\ &= \delta q(t') + \epsilon \dot{q}(t) \end{aligned} \quad (4.3)$$

となる。これは簡単にいえば時間を止めた関数  $q$  の変化と時間を変化させた時の関数の変化の和である。  
つまり、空間と異なり、時間は常に連続したパラメタである。

言い換えるとこのことが古典的な原理とみなせる。

古典論では時間が常に空間面に直交した変化で積分された平均値であり、あらゆる物理量はこの平均値に沿って  
みることしかできない。

次に先の結果を使って速度  $\dot{q}$  の微小変化を考えよう。

$$dt' = dt + \dot{\epsilon} dt$$

とおけるから

$$\begin{aligned} \Delta \dot{q}(t) &= \dot{q}'(t') - \dot{q}(t) = \frac{d}{dt'} q'(t') - \dot{q}(t) \\ &= \frac{d}{(1 + \dot{\epsilon}) dt} q'(t') - \dot{q}(t) \\ &= \frac{1}{(1 + \dot{\epsilon})} \dot{q}'(t') - \dot{q}(t) \\ &= (1 - \dot{\epsilon}) \dot{q}'(t') - \dot{q}(t) \\ &= \dot{q}'(t') - \dot{q}(t) - \dot{\epsilon} \dot{q}'(t') \end{aligned}$$

となるが式 4.2 から

$$\begin{aligned} \Delta \dot{q}(t) &= \frac{d}{dt} \Delta q(t) - \dot{\epsilon} \dot{q}'(t') \\ &= \frac{d}{dt} (\delta q(t') + \epsilon \dot{q}(t)) - \dot{\epsilon} \dot{q}'(t') \\ &= \delta \dot{q}(t') + \epsilon \ddot{q}(t) \end{aligned} \quad (4.4)$$

#### 4.1.2 作用積分の不定性

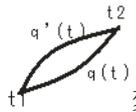
作用積分を  $J$  で表す。ハミルトンの原理では両端は固定されるのでラグランジュ関数  $L$  に任意の関数  $F$  が次のように入ってもかまわないことになる。

$$J' = \int_{t_1}^{t_2} dt \left( L + \frac{dF}{dt} \right) = \int_{t_1}^{t_2} dt L + F(t_2) - F(t_1) \quad (4.5)$$

いいかえると次のように  $L$  に任意の関数の全微分が加わってもラグランジュの方程式は不変であった。

$$L' = L + \frac{dW}{dt}$$

これは図 のように作用積分が閉じた経路  $c_1+c_2$  の作る曲面を扱っていることによる。



変分では図のように端点が固定される。  $t_1$  と  $t_2$  での関数の差が 0 なら作用積分は影響をうけない。

図 4.1: 作用積分の経路

従って次の図のように  $t_1$  と  $t_2$  の間に関数  $F$  が連続的に変化しても作用積分  $J$  には影響しない。

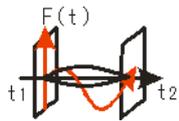
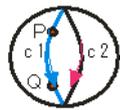


図 4.2: 作用積分の不定項

さらに経路の変分に対して作用積分は最小値をとるかどうかは注意が必要である。

次の図のように球面上においては  $P$  から  $Q$  への経路は 2 通り存在する。最短路  $c_1$  では最小値であっても  $c_2$  では異なる。



図のような球面上の積分では経路によって積分値が異なる。作用積分は局所的な視点の選択が必要になる。

図 4.3: 球面上の積分

これから作用積分には  $P$  と  $Q$  への最短路が決まる局所的な限定が必要になる。

作用積分が最小であるということより作用積分が停留値をとることに意味がある。

ハミルトンの原理は  $PC$  間を眺める大局的な決定がその間の経路を決定するという局所的な視点と相互に関係している。

そこで端点を固定しない次の場合について試してみる。

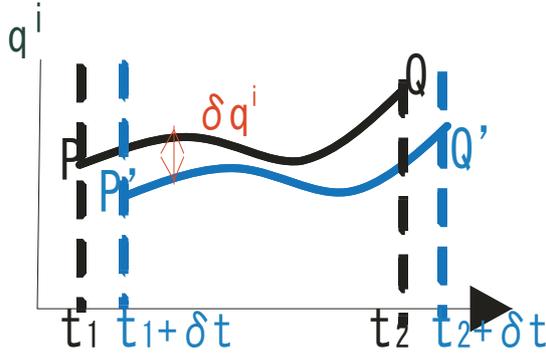


図 4.4: 端点が固定されない場合

この場合の  $q$  の変分を

$$\delta q^i(t) = q'^i(t) - q^i(t) + q^i(t + \delta t) - q^i(t) \quad (4.6)$$

とし、次のように表現する。

$$\bar{\delta} q^i(t) = q'^i(t) - q^i(t) \quad (4.7)$$

$$\delta q^i = \bar{\delta} q^i(t) + \dot{q}^i(t) \delta t \quad (4.8)$$

ただし、 $q^i$  の変分は  $\bar{\delta} q^i$  で関数の変化を  $\delta t$  で時間変化を表す。この時作用積分  $J$  の変分は次のようにおける。

$$\delta J[q] = \int_{t_1 + \delta t_1}^{t_2 + \delta t_2} dt L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) - \int_{t_1}^{t_2} dt L(q, \dot{q}, t) \quad (4.9)$$

ここで図 4.1.2 から  $t$  の変化は両端付近で、

関数の変化は中間領域で大きいとすると  $t$  の変化を次のように分けることができる。

$$= \left\{ \int_{t_1 + \delta t_1}^{t_1} + \int_{t_2}^{t_2 + \delta t_2} \right\} dt L(q, \dot{q}, t) + \int_{t_1}^{t_2} dt \{ L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) - L(q, \dot{q}, t) \} \quad (4.10)$$

$$= L(q_2, \dot{q}_2, t_2) \delta t_2 - L(q_1, \dot{q}_1, t_1) \delta t_1 + \bar{\delta} \int_{t_1}^{t_2} dt L(q, \dot{q}, t) \quad (4.11)$$

がほぼ断熱的に時間をとめた変分であるとするとき次が成り立つ

$$\delta \dot{q}^i = \frac{d}{dt} \bar{\delta} q^i \quad (4.12)$$

とすると式 4.11 は部分積分により

$$\delta J[q] = [L(q, \dot{q}, t) \delta t]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \bar{\delta} \dot{q}^i(t) + \frac{\partial L}{\partial q^i} \bar{\delta} q^i \right) \quad (4.13)$$

$$= \left[ L(q, \dot{q}, t) \delta t + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \bar{\delta} q^i(t) \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \bar{\delta} q^i + \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\partial L}{\partial q^i} \bar{\delta} q^i \quad (4.14)$$

$$= \left[ L(q, \dot{q}, t) \delta t + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \bar{\delta} q^i(t) \right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \right) \bar{\delta} q^i \quad (4.15)$$

ラグランジュの方程式が成り立てば第 2 項は 0 とみなせる。すると作用積分の変分が結果として端点のみで決まることを表している。

そこで運動の経路  $c$  上であれば第 1 項は式 4.8 より  $\delta q^i = \bar{\delta} q^i(t) + \dot{q}^i(t)\delta t$  だから

$$[\Theta(t)]_{t_1}^{t_2} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i(t) - \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i(t) - L \right) \delta t \quad (4.16)$$

となる。これは端点による変化を空間と時間の変化で表している。  
左辺は次のように単純に示すことができる。

$$\delta J[q] = \Theta(t_2) - \Theta(t_1) \quad (4.17)$$

正準運動量を

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$$

で定義し、ハミルトニアン  $H$  を次で定義する。

$$H(p, q) = p_i \dot{q}^i - L \quad (4.18)$$

これを用いると式 4.16 はハミルトンの正準形式で次のように表現できる。

$$\Theta_H(t) = p_i \delta q^i(t) - H(p, q) \delta t \quad (4.19)$$

つまり端点の変化が空間変分と時間変分を引き起こし、その係数が空間変分に対して運動量が与えられ、時間変分に対してはハミルトニアンが与えられる。

さらに式 4.16 の第 1 項を

$$\theta_L^i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} dq^i = p_i dq^i \quad (4.20)$$

と定義するとこの  $\theta_L$  は座標系によらないで成立することがわかる。

$$p_i dq^i = P_i dQ^i \quad (4.21)$$

さらに 1 形式から後で扱う 2 形式を次のようにつくることができる。

$$\omega_L^i \equiv dp_i \wedge dq^i \quad (4.22)$$

式 4.18 では  $H$  を決めるのに  $L$  が再び使われる

また次のようにラグランジュ形式でも表現できる。

$$\Theta_L(t) = p_i(q, \dot{q}) \delta q^i(t) - E(q, \dot{q}) \delta t \quad (4.23)$$

$$E(q, \dot{q}) = p_i(q, \dot{q}) \dot{q}^i(t) - L(q, \dot{q}) \quad (4.24)$$

端点を固定していくことは次のように連続性と関係している。

#### 4.1.3 拘束条件

速度位相空間での微分方程式は次のように置き換えて位置とその時間微分を独立に扱う。  
よって

$$dq^i = \xi^i dt \quad (4.25)$$

$$\dot{q}^i = \xi \quad (4.26)$$

また、位相空間を考えているのでラグランジュの方程式は次のようにヘシアン行列  $A_{ij}$  を定義すると

$$A_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial \xi^i \partial \xi^j} = \frac{\partial p_i}{\partial \xi^j} \quad (4.27)$$

$$A_{ij} \dot{\xi}^j + \frac{\partial^2 L}{\partial \xi^i \partial q^j} \xi^j - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0 \quad (4.28)$$

となる。ヘシアン行列が正則ならば

$$\det(A_{ij}) \neq 0 \quad (4.29)$$

が成り立ち逆行列が存在するので式 4.28 の左から逆行列をかければ解くことができる。

つまりラグランジュの方程式は全てが独立の運動方程式になる。

しかし、次の場合には逆行列は存在できない。

$$\det(A_{ij}) = 0 \quad (4.30)$$

この場合は  $\dot{\xi}$  を  $N$  個の運動方程式から消去した式を導くことができる。

つまりヘシアン行列が非正則であれば内的拘束条件があることになる。

例えば次のようなラグランジュ関数を考える。

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}^1)^2 + q^1 \dot{q}^2 + (q^2)^2 \quad (4.31)$$

この時、ヘシアン行列は次のようになる。

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

この行列の階数は 1 である。ラグランジュの方程式は

$$\dot{\xi}^1 - \xi^2 = 0 \quad (4.33)$$

$$\xi^1 - 2q^2 = 0 \quad (4.34)$$

が得られるが第 2 式の方は拘束条件とみなせる。これはラグランジュ関数がもともと内包しているものだから内部拘束条件である。

このようにヘシアンの階数が  $N-R$  であればヘシアン行列には  $R$  個のゼロ固有値が存在し、ゼロ 1 固有ベクトル  $\tau_\alpha^i$  について

$$A_{ij} \tau_\alpha^j = 0 \quad (4.35)$$

が成り立つ。

ラグランジュ形式からハミルトン形式は次のようにルジャンドル変換で結ばれる。

$$(q^i, \xi^i, L) \Rightarrow (q^i, p^i, H) \quad (4.36)$$

この時も式 4.27 から  $\xi^i$  と  $p^i$  は独立ではなく拘束条件が生じる。

位相空間であっても速度空間であってもヘシアンが正則であれば  $2N$  個の方程式は独立である。この時は積分可能になる。

次にこの積分可能な条件について試してみる。

#### 4.1.4 フロベニウスの条件

N 個の変数について 1 次微分形式

$$\omega_\alpha = a_{\alpha i}(x)dx^i = 0 \quad (\alpha = 1 \sim \mu \leq N) \quad (4.37)$$

を考える。 $\omega$  と直交する微分演算子  $Y$  を  $\omega$  の生成系という。式 4.37 と直交する  $Y_K(k, l = 1 \sim K)$  について

$$[Y_k, Y_l] = 0 \text{ mod.}(Y) \quad (4.38)$$

この時、 $\omega$  は完全積分可能で  $\omega_\alpha = dF_\alpha = 0$  なる  $\mu$  個の積分が存在する。これを応用すると式 4.25 からヘシアン行列が正則であれば

$$d\xi^j - R^i dt = 0 \quad (i = 1 \sim N) \quad (4.39)$$

$$R^i \equiv -(A^{-1})^{ij} \left( \frac{\partial p_j}{\partial q^k} \xi^k - \frac{\partial L}{\partial q^i} \right) \quad (4.40)$$

これら 2N 個の微分形式と直交する微分演算子  $X_t$  を式 4.25 と式 4.39 から

$$X_t = a^i \frac{\partial}{\partial q^i} + b^i \frac{\partial}{\partial \xi^i} + \frac{\partial}{\partial t}$$

とおくと

$$\langle dq^i - \xi^i dt, X_t \rangle = 0, \quad \langle d\xi^i - R^i dt, X_t \rangle = 0$$

から

$$X_t = \xi^i \frac{\partial}{\partial q^i} + R^i \frac{\partial}{\partial \xi^i} + \frac{\partial}{\partial t}$$

を得る。これは全体にかかる因子を除いて一意的に求まる。

その不定因子は時間のスケールを表すべきものであるからこれを 1 とすればこの式が運動の生成演算子とみなせる。

生成系が唯一この  $X_t$  であるなら自分自身との交換積は 0 になるのでラグランジュの方程式は積分可能になる。

#### 4.1.5 ハミルトン形式とラグランジュ形式の保存量

式 4.18 では  $p_i$  と  $q^i$  は独立変数のようにとるとすると次のように微分できる。

$$dH = p_i d\xi^i + \xi^i dp_i - \left( \frac{\partial L(q, \xi)}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial L}{\partial \xi^i} d\xi^i \right) \quad (4.41)$$

正準関係から

$$dH = \xi^i dp_i - \frac{\partial L(q, \xi)}{\partial q^i} dq^i \quad (4.42)$$

となる。これは H の変化が  $\frac{\partial L}{\partial \xi^i} d\xi^i$  項を含まないことになる。つまりラグランジュが次のように変化しても H の変化に影響しないことを示す。

$$L' = L + \frac{dF(q)}{dt} \quad (4.43)$$

式 4.44 から次のようにハミルトンの運動方程式が導ける。

$$dH = \dot{q}^i dp_i - \dot{p}_i dq^i \quad (4.44)$$

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (4.45)$$

$$\dot{p}^i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (4.46)$$

式 4.18 から次のように L が書ける。

$$L = p_i \dot{q}^i - H(q, p) \quad (4.47)$$

これから図 4.1.2 の作用積分は

$$J[q, p] = \int_{t_1}^{t_2} dt (p_i \dot{q}^i - H(q, p)) \quad (4.48)$$

両端を固定して変分をとると

$$\begin{aligned} \delta J[q, p] &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left( p_i \delta \dot{q}^i + \dot{q}^i \delta p_i - \frac{\partial H}{\partial q^i} \delta q^i - \frac{\partial H}{\partial p^i} \delta p^i \right) = 0 \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left( p_i \frac{d(\delta q^i)}{dt} + \dot{q}^i \delta p_i - \frac{\partial H}{\partial q^i} \delta q^i - \frac{\partial H}{\partial p^i} \delta p^i \right) \end{aligned}$$

はじめの項に部分積分をすると

$$\delta J[q, p] = [p_i \delta q^i]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} dt \left( -\dot{p}_i \delta q^i + \dot{q}^i \delta p_i - \frac{\partial H}{\partial q^i} \delta q^i - \frac{\partial H}{\partial p^i} \delta p^i \right) \quad (4.49)$$

第 1 項は端点を固定すると 0 になる。よって

$$\delta J[q, p] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ -\left( \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q^i} \right) \delta q^i + \left( \dot{q}^i - \frac{\partial H}{\partial p^i} \right) \delta p^i \right\} = 0 \quad (4.50)$$

を得るからこれから正準方程式が得られる。 $\delta q^i$  と  $\delta p^i$  が独立ではないので拘束条件が存在し、未定係数法で正準方程式を導かないといけない。

ハミルトン形式で H の時間変化は次のようになるが

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial H}{\partial p^i} \dot{p}_i \quad (4.51)$$

式 4.50 が成り立てば常に両者の変化が次のように打ち消しされ 0 になる。

$$\frac{dH}{dt} = -\dot{p}_i \dot{q}^i + \dot{q}^i \dot{p}_i = 0 \quad (4.52)$$

よって H は時間的に不変な物理量であるエネルギーの総和を表すと考えられる。

ここで式 4.50 より正準関係は直交している  $\delta p$  と  $\delta q$  との係数であるから式 4.52 の第 1 項と第 2 項の和については注意がいる。

$\dot{q}, \dot{p}$  が独立しているとして双対な関係あり、積  $\dot{p}_i \dot{q}^i$  の積分は相手については断熱的な変化として時間積分の前に出す。

すると

$$H = \left( -\dot{q}^i \int p_i dt + p_i \int \dot{q}^i dt \right) / 2 \quad (4.53)$$

と書ける。ところが  $\dot{q}, \dot{p}$  は次の図のような閉曲線にあるので

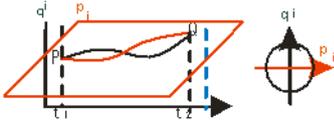


図 4.5: pq 平面での経路、図右は t 軸を紙面表から裏に見る

式 4.53 の第 1 項については時間を反転する。つまり

$$H = \left( -\dot{q}^i \int_t^0 \dot{p}_i dt + \dot{p}_i \int_0^t \dot{q}^i dt \right) / 2 \quad (4.54)$$

と表現される。これから次のように運動エネルギー T とポテンシャルエネルギー V を決めると

$$2V = \dot{p}_i \int_0^t \dot{q}^i dt = \dot{q}^i \dot{p}_i \quad (4.55)$$

$$2T = \dot{q}^i \int_0^t \dot{p}_i dt = \dot{q}^i \dot{p}_i \quad (4.56)$$

となるから式 4.47 から次が導ける。

$$L = T - V$$

$$H = T + V$$

また式 4.19 に変わる関係として

$$\Theta[t] = \frac{d}{dt} \{q^i, p_i\} \quad (4.57)$$

という関係がある。式 4.23 からは  $\Theta_L(t)$  が一定であれば

$$p(q, \dot{q})\delta q^i(t) - E(q, \dot{q})\delta t = Const \quad (4.58)$$

である。これはエネルギーと時間の作る体積空間が運動量と長さのつくる体積空間と相補的であることを示す。

前に端点を固定しない時の作用積分の変化を見た。

$$\begin{aligned} \delta J[q] &= \left\{ \int_{t_1+\delta t_1}^{t_1} + \int_{t_2}^{t_2+\delta t_2} \right\} dt L(q, \dot{q}, t) + \int_{t_1}^{t_2} dt \{L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) - L(q, \dot{q}, t)\} \\ &= L(q_2, \dot{q}_2, t_2)\delta t_2 - L(q_1, \dot{q}_1, t_1)\delta t_1 + \bar{\delta} \int_{t_1}^{t_2} dt L(q, \dot{q}, t) \end{aligned} \quad (4.59)$$

$\delta$  がほぼ断熱的に時間をとめた変分であるとする次が成り立つ

$$\delta \dot{q}^i = \frac{d}{dt} \bar{\delta} q^i \quad (4.60)$$

とすると式 4.59 は部分積分により

$$= \left[ L(q, \dot{q}, t)\delta t + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \bar{\delta} q^i(t) \right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \right) \bar{\delta} q^i \quad (4.61)$$

ラグランジュの方程式が成り立てば第2項は0とみなせる。すると作用積分の変分が結果として端点のみで決まることを表している。

そこで運動の経路  $c$  上であれば第1項は

$$[\Theta(t)]_{t_1}^{t_2} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i(t) - \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i(t) - L \right) \delta t$$

となる。これは端点による変化を空間と時間の変化で表している。  
左辺は次のように単純に示すことができる。

$$\delta J[q] = \Theta(t_2) - \Theta(t_1) \quad (4.62)$$

$$H(p, q) = p_i \dot{q}^i - L \quad (4.63)$$

ハミルトンの正準形式で次のように表現できる。

$$\Theta_H(t) = p_i \delta q^i(t) - H(p, q) \delta t \quad (4.64)$$

位相変換は前節のラグランジュの不定性と関係している。

そこで次に4元座標  $x$  に依存した一般的な変換をユニタリ行列を  $U$  として次のように表しておく。

$$U = \exp(-i\omega(x)) \quad (4.65)$$

この場合 gauge 変換は

$$\partial^\mu (U(x)\phi(x)) = U(x) (\partial^\mu \phi(x) + U(x)^{-1} \phi(x) \partial^\mu U(x))$$

また

$$\phi'(x') = \phi(x) + \delta\phi(x)$$

であるが、ある方向

$$x^0 = ict$$

$H$  は拡大した位相空間上の関数で  $H$  の変化が座標系に依存した関数の微分の虚成分に等しいとして

$$\Delta H = -i\partial^\mu \omega(x)$$

$$H' = H + \Delta H = H - i\partial^\mu \omega(x)$$

について定数を  $g$  として固有方程式

$$\begin{aligned} H' \phi'(x') &= H U(x) \phi(x) - i\partial^\mu \omega(x) U(x) \phi(x) \\ &= U(x) (H \phi(x) - i\partial^\mu \omega(x) \phi(x)) \end{aligned}$$

これから

$$\partial^\mu \phi(x) + U(x)^{-1} \phi(x) \partial^\mu U(x) = H \phi(x) - i\partial^\mu \omega(x) \phi(x)$$

となるので

$$\partial^\mu \phi(x) = H\phi(x)$$

と同一視できる条件上では

$$U(x)^{-1}\phi(x)\partial^\mu U(x) = -i\partial^\mu \omega(x)\phi(x)$$

が成り立ち  $U(x)^{-1} \neq 0$  であれば

$$\partial^\mu U(x) = (-i\partial^\mu \omega(x))U(x)$$

が成り立つ。

$$\partial^\mu (U(x)\phi(x)) = U(x)\partial^\mu \phi(x) - i\phi(x)U(x)\partial^\mu \omega(x)$$

$$\phi(x)\partial^\mu U(x) + U(x)\partial^\mu \phi(x) = U(x)\partial^\mu \phi(x) - i\phi(x)U(x)\partial^\mu \omega(x)$$

$$\partial^\mu U(x) = -iR_{g*}U(x)\partial^\mu \omega(x)$$

また、一般的な場  $\phi$  を次のようにおく

$$\partial_\mu \phi(x) = (\dot{\phi}/c, \nabla \phi)$$

またラグランジアン密度は  $\mathcal{L}$  は

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\partial_\mu \phi(x), \phi)$$

$$L = \int \mathbf{d}^3 \mathbf{x} \mathcal{L}(\partial_\mu \phi(x), \phi)$$

さらに作用  $J$  は次のようになる。

$$J = \int_{\Omega} d^4 x \mathcal{L}(\partial_\mu \phi(x), \phi)$$

次のように座標と場の無限小変化をおく。

$$x^{\mu'} = x^\mu + \delta x^\mu$$

$$\phi'(x') = \phi(x) + \delta \phi(x)$$

また同じ座標での変化量、リー微分を次のように定義された。

$$\delta_L \phi(x) = \phi'(x) - \phi(x) = \delta \phi(x) - \delta x^\mu \partial_\mu \phi(x)$$

よって

$$\delta J = \int_{\Omega} d^4 x \left[ \delta_L \phi(x) \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right\} + \partial_\mu \left\{ \delta_L \phi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} + \delta x^\mu \mathcal{L} \right\} \right] \quad (4.66)$$

そこで式に対応して

$$\Theta(\phi) = \delta_L \phi(x) \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right\} + \partial_\mu \left\{ \delta_L \phi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} + \delta x^\mu \mathcal{L} \right\} \quad (4.67)$$

をとする。

ネーターカレントを  $N^\mu$  として

$$N^\mu = \delta_L \phi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} + \delta x^\mu \mathcal{L} \quad (4.68)$$

とすると

$$\partial_\mu N^\mu = 0 \quad (4.69)$$

である。これは次のように空間、時間成分に分けることができる。

$$\partial_0 N^0 = \partial_k N^k \quad (4.70)$$

$$\int d^3x N^0 = ic\mathbf{N} \quad (4.71)$$

通常  $x \rightarrow \infty$  で  $\mathbf{N}=0$  とするとネーターのカレントの時間成分は全空間で不変になる。

$$\delta J^\mu = \delta \phi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} - \delta x_\nu T^{\mu\nu} \quad (4.72)$$

ただし

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi - \frac{\delta x^\mu}{\delta x_\nu} \mathcal{L} \quad (4.73)$$

であるが

$$\delta x^\mu = g^{\mu\nu} \delta x_\nu \quad (4.74)$$

なので

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L}$$

一般化運動量は次で表されるから

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$$

ハミルトニアン  $H$  は

$$H(p, q) = p_i \dot{q}^i - L$$

ハミルトンの正準形式で次のように表現できる。

$$\Theta_H(t) = p_i \delta q^i(t) - H(p, q) \delta t$$

つまり端点の変化が空間変分と時間変分を引き起こし、その係数が空間変分に対して運動量が与えられ、時間変分に対してはハミルトニアンが与えられる。さらに式の第1項を

$$\theta_L^i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} dq^i = p_i dq^i$$

と定義するとこの  $\theta_L$  は座標系によらないで成立する。

$$p_i dq^i = P_i dQ^i \quad (4.75)$$

$$\delta J[q] = \left[ L(q, \dot{q}, t) \delta t + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i(t) \right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \right) \delta q^i$$

$$\delta J[q] = [p_i \delta q^i]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} dt \left( -\dot{p}_i \delta q^i + \dot{q}^i \delta p_i - \frac{\partial H}{\partial q^i} \delta q^i - \frac{\partial H}{\partial p^i} \delta p^i \right)$$

を得るからこれから正準方程式が得られる。 $\delta q^i$  と  $\delta p^i$  が独立ではないので拘束条件が存在し、未定係数法で正準方程式を導かないといけない。

ハミルトン形式で  $H$  の時間変化は次のようになるが

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial H}{\partial p^i} \dot{p}^i \quad (4.76)$$

正準方程式が成り立てば常に両者の変化が次のように打ち消しされ 0 になる。

$$\frac{dH}{dt} = -\dot{p}_i \dot{q}^i + \dot{q}^i \dot{p}_i = 0$$

よって  $H$  は時間的に不変な物理量であるエネルギーの総和を表すと考えられる。

第 1 項と第 2 項の和については注意がいる。

$\dot{q}, \dot{p}$  が独立しているとして双対な関係あり、積  $\dot{p}_i \dot{q}^i$  の積分については相手については断熱的な変化として時間積分の前に出す。すると

$$H = \left( -\dot{q}^i \int \dot{p}_i dt + \dot{p}_i \int \dot{q}^i dt \right) / 2$$

と書ける。ところが  $\dot{q}, \dot{p}$  は次の図のような閉曲線にあるので

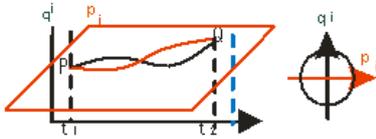


図 4.6: pq 平面での経路、図右は t 軸を紙面表から裏に見る

第 1 項については時間を反転する。つまり

$$H = \left( -\dot{q}^i \int_t^0 \dot{p}_i dt + \dot{p}_i \int_0^t \dot{q}^i dt \right) / 2$$

と表現される。これから次のように運動エネルギー  $T$  とポテンシャルエネルギー  $V$  を決めると

$$2V = \dot{p}_i \int_0^t \dot{q}^i dt = \dot{q}^i \dot{p}_i \quad (4.77)$$

$$2T = \dot{q}^i \int_0^t \dot{p}_i dt = \dot{q}^i \dot{p}_i \quad (4.78)$$

となるから前部の式から次が導ける。

$$L = T - V \quad (4.79)$$

$$H = T + V \quad (4.80)$$

#### 4.1.6 電磁相互作用

前部で荷電粒子のローレンツ変換をとりあげた。これに作用原理を適応してみよう。  
ローレンツ不変の作用として固有時間に沿った次の積分を考える。

$d\tau = dt/\gamma$  だから

$$S = -m \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau = -m \int_{t_1}^{t_2} \gamma^{-1} dt \quad (4.81)$$

この時、ミンコフスキー計量により  $i$  を空間成分として

$$d\tau^2 = dt^2 - dx^i dx^i = dt^2(1 - v^2) \quad (4.82)$$

と与えられているので

$$S = -m \int_{t_1}^{t_2} (1 - v^2)^{1/2} dt = -m \int_{t_1}^{t_2} (1 - \dot{x}^i \dot{x}^i)^{1/2} dt \quad (4.83)$$

とかけるのでラグランジアンは

$$L = -m(1 - \dot{x}^i \dot{x}^i)^{1/2} \quad (4.84)$$

となる。ただしここでは  $c = 1$  の単位系を利用している。

特に  $|\dot{x}| \ll 1$  ならば次のように展開できるので

$$L = -m + \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \dots$$

となるので第2項までの近似をとれば第1項がポテンシャル  $V$ 、第2項が運動エネルギーとみなすことができ

$$L = T - V$$

とかける。これを最小作用の原理に用いてみよう。式 4.84 より

$$\delta S = m \int_{t_1}^{t_2} (1 - \dot{x}^i \dot{x}^i)^{-1/2} \dot{x}^j \delta \dot{x}^j dt$$

となるので部分積分から

$$\delta S = m \left[ (1 - \dot{x}^i \dot{x}^i)^{-1/2} \dot{x}^j \delta x^j \right]_{t_1}^{t_2} - m \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left( (1 - \dot{x}^i \dot{x}^i)^{-1/2} \dot{x}^j \right) \delta x^j dt$$

となり、端点では

$$\delta x^i(t_1) = \delta x^i(t_2) = 0$$

が使えるので  $\dot{x}^i \dot{x}^i = v^2$ ,  $\gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$   $\delta S = 0$  とすると

$$\frac{d}{dt} (m\gamma \dot{x}^j) = 0$$

が得られるがこれは  $\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v}$  とすると次の運動方程式を表す。

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0$$

前部の相対性理論の節から4元電磁場テンソルが  $A_\mu(-\phi, \mathbf{A})$  として

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

となるから荷電ポテンシャルを含む作用が

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} (-m d\tau + e A_\mu dx^\mu)$$

とかけるだろう。ラグランジアンがスカラーであるために共変ベクトルが必要になる。その意味で固有時間  $d\tau$  もまた、共変的な関係

$$d\tau = t_\mu d\theta^\mu$$

と考えることが自然である。ただ我々は空間とことなり、時間に関してはベクトル成分を見ることはできない。常にスカラとして1方向のみを連続的にもつ。我々の物理現象においては常に  $dt$  が時間であって  $t_\mu$  を決めることができない。  $dx$  と異なり  $dt$  は1形式ではなく  $n$ 次元空間における  $n$ 形式である。

この時、

$$A_\mu dx^\mu = A_\mu \frac{dx^\mu}{dt} dt = (A_0 + A_i \dot{x}^i) dt = (-\phi + A_i \dot{x}^i) dt$$

とおけることに留意すると荷電モデルのラグランジアンが次のようにおける。

$$L = -m(1 - \dot{x}^i \dot{x}^i)^{1/2} - e\phi + eA_i \dot{x}^i \quad (4.85)$$

よって最小作用の原理から  $\int A_i \delta x^i \rightarrow 0$  として

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \left( \left( m(1 - \dot{x}^i \dot{x}^i)^{1/2} \right) \dot{x}^i \delta \dot{x}^i - e \partial_i \phi \delta x^i - e A_i \delta \dot{x}^i + e \partial_i A_j \dot{x}^j \delta x^i \right) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left( -\frac{d}{dt} (m\gamma \dot{x}^i) \delta x^i - e \partial_i \phi \delta x^i - e \frac{dA_i}{dt} \delta x^i + e \partial_i A_j \dot{x}^j \delta x^i \right) dt - e \int A_i \delta x^i \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left( -\frac{d}{dt} (m\gamma \dot{x}^i) - e \partial_i \phi - e \frac{dA_i}{dt} + e \partial_i A_j \dot{x}^j \right) \delta x^i dt \end{aligned}$$

また、全微分

$$\frac{dA_i}{dt} = \frac{\partial A_i}{\partial t} + \partial_j A_i \frac{dx^j}{dt} = \frac{\partial A_i}{\partial t} + \partial_j A_i \dot{x}^j \quad (4.86)$$

の関係を代入すると  $\delta S = 0$  から

$$-\frac{d}{dt} (m\gamma \dot{x}^i) - e \partial_i \phi - e \left( \frac{\partial A_i}{\partial t} + \partial_j A_i \dot{x}^j \right) + e \partial_i A_j \dot{x}^j = 0$$

つまり荷電粒子の運動方程式が

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (m\gamma \dot{x}^i) &= e \left( \partial_i \phi - \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) + e (\partial_i A_j - \partial_j A_i) \dot{x}^j \\ &= e (E_i + \epsilon_{ijk} \dot{x}^j B_k) \end{aligned}$$

のようにローレンツ方程式になることがわかる。

3次元の空間部分に分離してみてきたが、4次元時空そのまま考えてみよう。

この時の運動方程式は4元速度  $U$  を用いて次のように拡張される。

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = e F^{\mu\nu} U_\nu$$

固有時間は式 4.82 から

$$d\tau = (-\eta_{\rho\sigma} dx^\rho dx^\sigma)^{1/2}$$

とかけるので

$$\begin{aligned} \delta(d\tau) &= -(-\eta_{\rho\sigma} dx^\rho dx^\sigma)^{-1/2} \eta_{\mu\nu} dx^\mu d(\delta x^\nu) \\ &= -\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} d(\delta x^\nu) \\ &= -U_\mu d(\delta x^\mu) \end{aligned} \quad (4.87)$$

となることに留意し、

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} (-m d\tau + e A_\mu dx^\mu)$$

だったから式 4.87 から  $U_\mu \delta x^\mu = Const$ ,  $A_\mu \delta x^\mu = Const$  としてそれぞれ両辺を微分した結果を代入し、添え字を一部入れ替えると

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} (m U_\mu d(\delta x^\mu) + e A_\mu d(\delta x^\mu) + e \partial_\nu A_\mu \delta x^\nu dx^\mu) \\ &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} (-m (dU_\mu) \delta x^\mu - e (dA_\mu) \delta x^\mu + e \partial_\mu A_\nu \delta x^\mu dx^\nu) \\ &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left( -m \frac{dU_\mu}{d\tau} - e \frac{dA_\mu}{d\tau} + e \partial_\mu A_\nu \frac{dx^\nu}{d\tau} \right) \delta x^\mu d\tau \end{aligned}$$

さらに式 4.86 から

$$\frac{dA_\mu}{d\tau} = \partial_\nu A_\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} = \partial_\nu A_\mu U^\nu$$

である。よって  $\delta S = 0$  から

$$\begin{aligned} m \frac{dU_\mu}{d\tau} &= -e \partial_\nu A_\mu U^\nu + e \partial_\mu A_\nu U^\nu \\ &= e F_{\mu\nu} U^\nu \end{aligned} \quad (4.88)$$

が得られる。これは観測する領域から考察すると非常に興味深い質量  $m$  の物質の 4 元速度の変化いが局所的な場の作用原理から 4 元速度を共通項として引き出していく過程がある。また、 $F_{\mu\nu}$  はベクトルポテンシャルの時空微分の差になっていることが重要である。

#### 4.1.7 ゲージ変換

ここで、詳しくは次部で論議するゲージ変換についての作用をみておこう。ベクトルポテンシャルは当初、数学的な道具にすぎなかったが、この電磁場の議論からきわめて物理的に重要な内容をもっていることがわかる。任意の時空間の関数となる  $\lambda$  を用意する。するとベクトルポテンシャルに

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \lambda$$

となっても式 4.88 に影響を与えない。つまり、運動方程式からこの変化は見えない。そこでこの変化を考慮した作用  $S'$  を考えると

$$\begin{aligned} S' &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} (-m d\tau + e A_\mu dx^\mu + e \partial_\mu \lambda dx^\mu) \\ &= S + e \int_{a_1}^{b_2} d\lambda = S + e (\lambda(\tau_2) - \lambda(\tau_1)) \end{aligned}$$

となる。つまりゲージ不変であるためには  $\lambda$  は閉じていないといけない。そうでない時はこの第 2 項の影響が実際に観測できる。これは次項のアラハノフ・ボーム効果で見ることにする。

電磁場中の荷電粒子の運動方程式が

$$m \ddot{\mathbf{x}} = e (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

となった。これをハミルトンの原理から示す。ローレンツゲージを用いてベクトルポテンシャルを  $\mathbf{A}$  を使うと

$$\mathbf{E} = -\nabla A_0 - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

この時ハミルトニアンを非相対論的に

$$H = \frac{1}{2m} (p - eA)^2 + eA_0$$

とすると正準方程式は

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{1}{m} (p_i - eA)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} = \frac{e}{m} \sum_{j=1}^3 (p_j - eA_j) \frac{\partial A_j}{\partial x_i} - e \frac{\partial A_0}{\partial x_i}$$

となる。しかし、自由粒子のハミルトニアン

$$H_0 = \frac{p_0^2}{2m}$$

において

$$H = H_0 + eA_0$$

$$p = p_0 - eA$$

と置き換えれば電磁場のハミルトニアンが導かれる。

相対論に拡張するために正準運動量を

$$\pi_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}$$

とすると式 4.85 より  $L = -m(1 - \dot{x}^i \dot{x}^i)^{1/2} - e\phi + eA_i \dot{x}^i$  だから

$$\begin{aligned} \pi_i &= m(1 - \dot{x}^i \dot{x}^i)^{-1/2} \dot{x}^i + eA_i \\ &= m\gamma \dot{x}^i + eA_i = p_i + eA_i \end{aligned}$$

とかけるからハミルトニアンが

$$\begin{aligned} H &= \pi_i \dot{x}^i - L = m\gamma \dot{x}^i \dot{x}^i + \frac{m}{\gamma} + e\phi \\ &= \frac{m(v^2/(1-v^2) + 1)}{\gamma} + e\phi \\ &= m\gamma + e\phi \end{aligned}$$

のように簡単になる。

さらに飛躍をしてみよう。古典的には  $q, p$  は独立的に扱ったがここで複素空間では相互作用? できることを仮定して

$$a_i = \frac{1}{\sqrt{2}} (q_i + ip_i)$$

$$a_i^* = \frac{1}{\sqrt{2}} (q_i - ip_i)$$

とする。逆に解けば

$$q_i = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_i + a_i^*)$$

$$ip_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_i - a_i^*)$$

虚数単位をかけて時間微分すると正準方程式から

$$\begin{aligned} i\frac{da_i}{dt} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(i\dot{q}_i - \dot{p}_i) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{\partial H}{\partial ip_i} + \frac{\partial H}{\partial q_i}\right) \\ &= \frac{\partial H}{\partial a_i^*} \end{aligned}$$

を得る。

#### 4.1.8 静電場の場合

次に時間依存するゲージ変換を考えよう。電荷をの速度がない場合は

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\partial_i\phi(\mathbf{r})$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad (4.89)$$

と表すことができる。次に時間依存する次の関数を考える。 $k$ を定数として

$$\lambda = \lambda(\mathbf{r}) + kt$$

よって次のようにゲージ変換される。

$$\phi \rightarrow \phi - k, \quad \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla\lambda(\mathbf{r})$$

また、エネルギーとハミルトニアンを

$$\mathcal{E} = H = m\gamma + e\phi$$

とすると  $H(t, x, \pi)$  として正準関係が成立していれば

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial x^i}\dot{x}^i + \frac{\partial H}{\partial \pi_i}\dot{\pi}_i \\ &= 0 - \dot{\pi}_i\dot{x}^i + \dot{x}^i\dot{\pi}_i \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる。正準関係が  $H$  を時間微分した時に互いにその変化を打ち消すように働く。

逆にこの関係があればエネルギーが保存される。

この関係は運動方程式からも導くことができる。つまり式 4.89 という場があれば質量ある粒子に力が働くので慣性項とつりあい。

$$\frac{d(m\gamma v^i)}{dt} = e(E_i + \epsilon_{ijk}v^j B_k)$$

となるが古典的にエネルギー保存を導いたように両辺に  $v^i$  をかけて

$$m\gamma v^i \frac{dv^i}{dt} + mv^i v^i \frac{d\gamma}{dt} = ev^i E_i$$

ここで

$$\frac{d\gamma}{dt} = (1 - v^2)^{-3/2} v^i \frac{dv^i}{dt} = \gamma^3 v^i \frac{dv^i}{dt}$$

となることを利用すると

$$m\gamma v^i \frac{1}{\gamma^3 v^i} \frac{d\gamma}{dt} + m v^i v^i \frac{d\gamma}{dt} = e v^i E_i$$

$$m \left( \frac{1}{\gamma^2} + v^i v^i \right) \frac{d\gamma}{dt} = e v^i E_i$$

$$m (1 - v^2 + v^2) \frac{d\gamma}{dt} = e v^i E_i$$

$$m \frac{d\gamma}{dt} = e v^i E_i$$

ここで力学的なエネルギーを

$$\mathcal{E}_{mech} = m\gamma$$

とおくと

$$\frac{d\mathcal{E}_{mech}}{dt} = e \mathbf{v} \cdot \mathbf{E}$$

である。また、式 4.89 より

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}}{dt} &= \frac{d(m\gamma)}{dt} + e \frac{d\phi}{dt} \\ &= \frac{d\mathcal{E}_{mech}}{dt} + e \partial_i \phi \dot{x}^i \\ &= e \mathbf{v} \cdot \mathbf{E} - e \mathbf{v} \cdot \mathbf{E} = 0 \end{aligned}$$

となり全エネルギーは保存される

## 4.2 双対空間

### 4.2.1 双対基底

ベクトル空間  $u, v$  に実数を対応させる線形写像  $\omega$  を考える。 $\omega[v]$  は内積表示としてカギ括弧で表す。

これらは線形空間の性質を満たし、線形写像  $\omega$  の全体の集合  $V^*$  もベクトル空間を作るのでこれを空間  $V$  の双対空間 (dual\_space) という。そしてこの写像  $\omega$  を 1 ベクトルまたはコベクトルという。

ベクトル空間の基底を  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  をとり、ベクトル  $u = u^i e_i$  に実数を対応させる写像を

$$\epsilon^i : V \rightarrow \mathbf{R} : u \rightarrow \epsilon^i[u] = u^i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

とすると、次のベクトルに対しては

$$\omega = (a u^i + b v^i) e_i$$

$$\epsilon^i [a u + b v] = a u^i + b v^i = a \epsilon^i [u] + b \epsilon^i [v]$$

となるので、 $\epsilon^i$  は線形写像で  $V^*$  の要素である。特にベクトル  $e_k = \delta_k^i e_i$  に対して

$$\epsilon^i [e_k] = \delta^i_k$$

が成り立つが 1 ベクトル  $\omega \in V^*$  に対しては

$$\omega_i := \omega[e_i]$$

とすると

$$\omega[u] = \omega[u^i e_i] = u^i (\omega[e_i]) = u^i \omega_i = \omega_i \epsilon^i[u]$$

となるので

$$\omega = \omega_i \epsilon^i = \omega[e_i] \epsilon^i$$

となり、 $\omega$  は  $\epsilon^i$  の 1 次結合である。しかも  $\epsilon^1, \dots, \epsilon^n$  は 1 次独立であるから双対基底が  $\{\epsilon^1, \dots, \epsilon^n\}$  となり、 $V^*$  の基底になる。また、次ように次元は双対空間で等しくなることが重要である。

$$\dim V^* = \dim V = n$$

#### 4.2.2 共変と反変

相対論の基礎で必ず登場する共変ベクトルと反変ベクトルは学生が戸惑うことが多い。まずこの概念は物理量のという観測者が共有できるものがスカラー量という実数だということが前提にある。

状態によって変化するベクトル量からいかにこの実数を作るかのからくりが共変ベクトルと反変ベクトルである。さらにこの名称がややこしい。共変とは実は座標の変換と同じように変換することからきていて、反変ベクトルは変換の規則の分母分子がちょうど反対になることによる。

通常は共変ベクトルを下付の添え字で表し、反変ベクトルは上付の添え字で表す。

しかし、ベクトルを基底と成分に分けた時、成分と基底いで反変、共変が入れ変わるので注意する。

また添え字は空間成分は  $i, k; i, k = 1, 2, 3$  を用いて、4 元を扱う場合には  $\mu, \nu; \mu, \nu = 0, 1, 2, 3$  を主に用いるが、決まっているわけではない。

ベクトル  $u = u^i e_i \in V$  と双対関係にある 1 ベクトル  $\omega_i \epsilon^i \in V^*$  を考える。

$V$  上で別の基底に変換することを考えると

$$\{e_1, \dots, e_n\} \rightarrow \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$$

として変換関数を

$$\bar{e}_k = e_i \psi_k^i$$

として、変換に対して、ベクトルが不変であるためには

$$u = u^i e_i = \bar{u}^k \bar{e}_k = \bar{u}^k e_i \psi_k^i$$

から

$$u^i = \psi_k^i \bar{u}^k \tag{4.90}$$

が成り立たないといけない。これに対し、相空間ではどうかみてみよう。

1 ベクトル  $\omega_i \epsilon^i \in V^*$  の変換則は

$$\{\epsilon^1, \dots, \epsilon^n\} \rightarrow \{\bar{\epsilon}^1, \dots, \bar{\epsilon}^n\}$$

として先と同様にベクトルが不変であるためには

$$\omega = \omega_i \epsilon^i = \bar{\omega}_k \bar{\epsilon}^k$$

となる必要があるが内積が定義されていれば 4.90 より

$$\begin{aligned} \omega &= \sum \omega_i \epsilon^i \bar{\epsilon}^k \\ &= \sum \omega_i \epsilon^i e_j \bar{\epsilon}^j \psi_k^j \\ &= \sum \omega_i \delta_j^i \bar{\epsilon}^k \psi_k^j \\ &= \omega_i \bar{\epsilon}^k \psi_k^i \end{aligned}$$

となるので

$$\epsilon^i = \psi_k^i \bar{\epsilon}^k$$

となることがわかる。これは具体的にしめすとわかりやすい。

$$\psi_k^i = \begin{pmatrix} \psi_1^1 & \cdots & \psi_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_1^n & \cdots & \psi_n^n \end{pmatrix}$$

とすると  $V$  上のベクトル、以下のような変換を示す時は反変ベクトル (**contravariant\_vector**) という。

$$\begin{aligned} u &= \begin{pmatrix} e_1 & \cdots & e_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \bar{e}_1 & \cdots & \bar{e}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}^1 \\ \bar{u}^2 \\ \bar{u}^3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

において基底の変換は

$$\begin{pmatrix} \bar{e}_1 & \cdots & \bar{e}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & \cdots & e_n \end{pmatrix} \psi_k^i$$

によってなされる時、成分の変換は

$$\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1^1 & \cdots & \psi_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_1^n & \cdots & \psi_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}^1 \\ \bar{u}^2 \\ \bar{u}^3 \end{pmatrix}$$

となる。

次に  $V^*$  上のベクトル、以下のような変換を示すとき、共変ベクトル (**covariant\_vector**) という。

$$\begin{aligned} \omega &= \begin{pmatrix} \omega_1 & \cdots & \omega_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon^1 \\ \epsilon^2 \\ \epsilon^3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \bar{\omega}_1 & \cdots & \bar{\omega}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\epsilon}^1 \\ \bar{\epsilon}^2 \\ \bar{\epsilon}^3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

において基底の変換は

$$\begin{pmatrix} \bar{\epsilon}^1 \\ \bar{\epsilon}^2 \\ \bar{\epsilon}^3 \end{pmatrix} = \psi_k^i \begin{pmatrix} \epsilon^1 \\ \epsilon^2 \\ \epsilon^3 \end{pmatrix}$$

によってなされる時、成分の変換は

$$\begin{pmatrix} \omega_1 & \cdots & \omega_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\omega}_1 & \cdots & \bar{\omega}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1^1 & \cdots & \psi_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_1^n & \cdots & \psi_n^n \end{pmatrix}$$

となり、反変と共変では基底と成分が反対になっている。また、変換行列の位置が左右反対になることにも注意する。

もっとも簡単な反変ベクトルは座標の微小変化  $ds^i$  である。例えば2次元を例にすると

$$ds^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} ds^i = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x} dx + \frac{\partial y^{i'}}{\partial y} dy$$

となる。またもっとも簡単な共変ベクトルは名称の由来にもなった座標微分  $\frac{\partial}{\partial x}$  である。これをスカラー関数にさようさせると'は空間微分ではないことに留意し、

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)' = \frac{\partial f}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial f}{\partial x^i} = \frac{\partial x}{\partial x^{i'}} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x^{i'}} \frac{\partial f}{\partial y}$$

となる。

一般的に反変ベクトルを  $A^\mu(x)$ 、共変ベクトルを  $B_\nu(x)$  のように上付、下付の添え字で表す。これから内積は次の2階反変テンソル  $\eta^{\mu\nu}$  を用いて

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{cases} 1 & \mu = \nu \neq 0 \\ 0 & \mu \neq \nu \\ -1 & \mu = \nu = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} A \cdot B &= A^\mu B_\mu = \eta^{\mu\nu} A_\mu B_\nu \\ &= \eta_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = \eta_\nu^\mu A_\mu B^\nu \end{aligned}$$

となる。これから次のようなスカラーの演算子を定義できる。

$$\begin{aligned} \square &= \eta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \\ &= -\left(\frac{\partial}{c\partial t}\right)^2 + \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)^2 \end{aligned}$$

これはよく知られた波動方程式であり、光(電磁波)の速さ  $c$  はどの慣性系からみても変化しないことを表している。

### 4.2.3 テンソル

内積をつくる関係を双対空間に求めてきたが、これを多次元に拡張するとテンソルの概念が生まれる。ベクトル空間  $V$  の任意のベクトル対  $u, v$  に実数に対応させる写像  $\tau$  を考える。

$$\tau : V \times V \rightarrow \mathbf{R} : u \in V, v \in V \rightarrow \tau[u, v] \in \mathbf{R}$$

これが  $u, v$  に対して共に線形であれば双線形写像 (bilinear\_map) という。これは2個の1ベクトル  $\omega, \sigma \in V^*$  に対して

$$(\omega \otimes \sigma)[u, v] = \omega[u]\sigma[v]$$

とすると、これは双線形性を満たす。この定義  $\omega \otimes \sigma$  をテンソル積 (tensor\_product) という。双線形写像は和、と実数倍についてはベクトル空間を張る。これを次のように表す。

$$L^2(V) = V^* \otimes V^*$$

$V$  の基底  $\{e_i\}, V^*$  の基底を  $\{\epsilon^i\}$  とする。双線形写像  $\tau$  によって、 $u^i v^j$  は成分値スカラーだから、

$$\begin{aligned} \tau[u, v] &= (\tau[e_i, e_j]) u^i v^j \\ &= (\tau[e_i, e_j]) \epsilon^i[u] \otimes \epsilon^j[v] \\ &= (\tau[e_i, e_j]) \epsilon^i \otimes \epsilon^j[u, v] \end{aligned}$$

とかけることができるので  $u, v$  の任意性から  $T_{ij} = \tau[e_i, e_j]$  として

$$\tau = T_{ij} \epsilon^i \otimes \epsilon^j$$

とかける。したがってこれを  $n^2$  個のテンソル積  $\{\epsilon^i \otimes \epsilon^j\}$  がベクトル空間  $L^2(V)$  をつくる。この  $T_{ij}$  を 2 階共変テンソルという。同様に

$$\rho : V^* \times V^* \rightarrow \mathbf{R} : u \in V^*, v \in V^* \rightarrow \rho[u, v] \in \mathbf{R}$$

からは  $T^{ij} = \rho[\epsilon^i, \epsilon^j]$  として

$$\rho = T^{ij} e_i \otimes e_j$$

から  $T^{ij}$  を 2 階反変テンソルという。特に 2 階テンソルが任意のベクトル場  $u, v$  に対して

$$\tau[u, v] = \tau[v, u]$$

がなりたてば対称テンソルである。これは成分表示で

$$T_{ij} = T_{ji}$$

となる。また、2 階テンソルが任意のベクトル場  $u, v$  に対して

$$\tau[u, v] = -\tau[v, u]$$

がなりたてば交代テンソルである。これは成分表示で

$$T_{ij} = -T_{ji}$$

となる。2 階交代テンソルは 2 ベクトルでもある。つまり

$$\omega^2 \in \Lambda^2(V) : V \times V \rightarrow \mathbf{R}$$

で表され、この空間は  $n(n-1)/2$  の次元をもつ。これは  $p$  ベクトルに拡張できて

$$\dim \Lambda^p(V) = {}_n C_p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

であり、 $p > n$  の時は  $\Lambda^p(V) = \{0\}$  である。

#### 4.2.4 ラグランジアンの変換

局所座標系の一般化座標を用いてラグランジアンの変換性を確かめてみよう。

配位空間の座標変換を

$$\Phi : N \rightarrow N : q \rightarrow Q = \{\Phi^i(q, t)\}$$

を考え、これが微分同相であると逆変換が存在して、

$$\phi : Q \rightarrow q = \{\phi^i(Q, t)\}$$

この 1 対 1 の対応を点変換 (point\_transformation) と定義する。これによって

$$\dot{q}^i = \frac{\partial \phi^i}{\partial Q^k} \dot{Q}^k + \frac{\partial \phi^i}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \dot{q}^i}{\partial \dot{Q}^k} = \frac{\partial \phi^i}{\partial Q^k}$$

となる。また、逆変換のヤコビアンを

$$\hat{j} = (J_k^i) := \left( \frac{\partial \phi^i}{\partial Q^k} \right)$$

とおくと変換されたラグランジアンは

$$L^*(Q, \dot{Q}, t) := L \left( \phi^i, \frac{\partial \phi^i}{\partial Q^k} \dot{Q}^k + \frac{\partial \phi^i}{\partial t}, t \right)$$

とすると、このラグランジアンの変分は

$$\begin{aligned} \delta_i [L^*(Q, \dot{Q}, t)] &= \frac{\partial L}{\partial Q} \delta Q + \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}} \delta \dot{Q} \\ &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \frac{\partial \dot{q}^k}{\partial \dot{Q}^i} \right) - \left\{ \frac{\partial L}{\partial q^k} \frac{\partial \phi^k}{\partial Q^i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \frac{\partial}{\partial \dot{Q}^i} \left( \frac{d\phi}{dt} \right) \right\} \\ &= \frac{\partial \phi^k}{\partial Q^i} \left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^k} \right\} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \phi^k}{\partial \dot{Q}^i} \right) - \frac{\partial}{\partial Q^i} \left( \frac{d\phi^k}{dt} \right) \right\} \\ &= \frac{\partial \phi^k}{\partial Q^i} \delta_i [L^*(q, \dot{q}, t)] = j_i^k \delta [L] \end{aligned}$$

となることからラグランジアンが共変的に変換することがわかる。したがって座標変換に対して不変になる。

#### 4.2.5 ゲージ変換

さらにラグランジアンに時間の全微分を付け加えてもラグランジュの方程式は次のように変化しない。

$L(q, \dot{q}, t)$ ,  $A(q, \dot{q}, t)$  として次を加える

$$L' = L + \frac{dA}{dt}$$

$A$  の微分は

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \dot{q}}{\partial t} = \frac{\partial A}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial A}{\partial t}$$

となるので

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \right) \left( \frac{\partial A}{\partial q} \dot{q} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) + \frac{d}{dt} \frac{\partial A}{\partial q}$$

$$\frac{\partial L'}{\partial q} = \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{d}{dt} \frac{\partial A}{\partial q}$$

ラグランジュの方程式は

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L'}{\partial q} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q}$$

で不変である。しかし、状態空間上で  $q, \dot{q}$  が独立した変数のように扱える機構がなければこのようにはならない。これは電磁場のゲージ変換として後節に見る。

電磁ポテンシャルを  $(\Phi, \mathbf{A})$  としてこれに次のような微分項を付け加え

$$\Phi' = \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t}, \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \chi$$

電磁場のラグランジアンを次のように書き換える。

$$\begin{aligned} L' &= L + \frac{e}{c} \frac{d\chi}{dt} \\ &= \frac{m}{2} \dot{r}^2 - e \left\{ \left( \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t} \right) - \frac{1}{c} \dot{r} \cdot (\mathbf{A} + \nabla \chi) \right\} \\ &= \frac{m}{2} \dot{r}^2 - e\Phi' + \frac{1}{c} \dot{r} \mathbf{A}' \end{aligned}$$

となり、ラグランジアンへの時間全微分の付加項は電磁ポテンシャルのベクトルポテンシャル、クーロンポテンシャルの空間、時間項への分配される。

### 4.3 幾何的表現

#### 4.3.1 内積

ラグランジアンは座標系に依存しない、共変性の性質を満たすようにつくられていることをみた。ラグランジュ方程式は配位空間  $N$  上の曲線  $c_L(t)$  とその上の速度  $\dot{c}_L$  を決定すると考える。この速度  $\dot{c}_L$  の場を基底を含めて表すと

$$\dot{c}_L = \dot{q} \frac{\partial}{\partial q^i}$$

となり接空間の単位ベクトルが基底を張る。したがって  $\delta_i [L] dq^i$  は 1 形式

$$\delta_i [L] dq^i = 0$$

が座標によらず次のような座標変換にも成り立つ必要があった。

$$p = \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \rightarrow P = \frac{\partial L^*}{\partial \dot{Q}^i}$$

この時の変換則は

$$P_i = \frac{\partial L^*}{\partial \dot{Q}^i} = \frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}^k} \frac{\partial \dot{q}^k}{\partial \dot{Q}^i} = p_k \frac{\partial q^k}{\partial Q^i}$$

となり時間に無関係で共変ベクトルの成分として  $p = \{p_i\}$  が振る舞う。したがって  $p_i dq^i = P_i dQ^i$  は座標系に依存しない幾何的な量になる。よってこの微分 1 形式のラグランジアン形式として

$$\theta_L := p_i(q, \dot{q}) dq^i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} dq^i \quad (4.91)$$

を基本 1 形式として定義する。さらに外微分をとり基本 2 形式をつくると

$$d\theta_L = d \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \wedge dq^i$$

となる。これは  $p, q$  の張る相空間で正準 2 形式である。

この正準 2 形式と速度場  $\dot{c}$  との点  $q$  での内積を考えよう。前回に用いたブラケット  $\circ$  を使用し、外積の性質から基底が入れ替わり、次のような差で表される。

$$\begin{aligned} \langle d\theta_L | \dot{c}_L, \circ \rangle &= \langle d \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) | \dot{c}_L \rangle dq^i - \langle dq^i | \dot{c}_L \rangle d \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) dq^i - \dot{q}^i d \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \end{aligned} \quad (4.92)$$

ここでやや技巧的だが

$$\dot{q}^i d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) = d\left(\dot{q}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} d\dot{q}^i = d\left(\dot{q}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - L\right) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} d\dot{q}^i$$

とかけることからラグランジュの式を引き出すことができ

$$\begin{aligned} \langle d\theta_L | \dot{c}_L, \circ \rangle &= \left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} \right\} dq^i - d\left(\dot{q}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - L\right) \\ &= \delta_i[L] dq^i - \langle dH_L | \circ \rangle \end{aligned} \quad (4.93)$$

となる。これは2形式から1形式をつくっている。ハミルトン形式の式4.19の母関数が導けたことになる。

### 4.3.2 相空間

ラグランジュ形式の力学では系の状態  $h$  配位空間  $N$  の接バンドル  $TN$  (状態空間) 上の点で指定される。 $\{q^n, \dot{q}^n\}$  はその局所座標である。そこで正準変数  $(q, p)$  を局所座標とする空間についてみていこう。

あるラグランジアンが与えられていればその一般化運動量の成分は  $\{p_i\}$  は座標変換に対して共変的に振る舞った。

配位空間  $N$  上の点  $Q$  でのラグランジアン  $L(q^i, \dot{q}^i)$  を  $TN_Q$  上の関数とみなし、その接空間のベクトルを  $u = (u^1, u^2, \dots, u^n)$  とする。このベクトルに対して方向微分は

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{L(q, \dot{q} + su) - L(q, \dot{q})}{s} = \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}^i} u^i \in \mathbb{R}$$

となり  $i$  成分に依存した実数である。よって共役運動量  $p_i = \partial L / \partial \dot{q}^i$  の  $n$  個の組は  $u \in TN_Q$  に対する線形写像が次のように存在しなくてはならない。

$$\theta_Q : TN_Q \rightarrow \mathbb{R}, \quad u \mapsto p_i u^i \in \mathbb{R}$$

これは接ベクトルの空間に対して双対な余接空間であることを表している。よってこれをスターをつけて

$$p_i \in T^*N$$

のように表す。

さらに配位空間のあらゆる点での余接空間の直和集合を余接バンドル (cotangent\_bundle) という。

力学では簡単に相空間 (phase\_space) といい  $M$  で表す

。正準変数  $(q, p)$  はこの相空間の局所座標である。

ラグランジュ形式からハミルトンの正準形式への移行が

$$(q, \dot{q}) \rightarrow (q, p)$$

という変数変換でおこなわれたが、

これは幾何学的には接バンドル (状態空間) の記述からこの双対空間である余接バンドル (相空間) の記述への変換だといえる。

### 4.3.3 正準1形式

接空間の状態空間  $TN$  から相空間  $M$  への写像  $\pi_L$  を考える。

この写像はラグランジアンが正則であればに全単射になり、次の写像は1対1になる。

$$\pi_L : TN \rightarrow M = T^*N : (q, \dot{q}) \rightarrow (q, p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}})$$

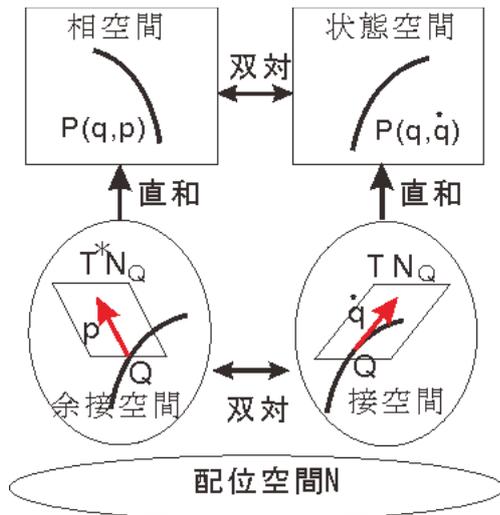


図 4.7: 相空間と状態空間の双対な関係

$TN_Q$  の基底が配位空間  $N$  の局所座標系  $\{q^i\}$  を用いて接ベクトルの基底は  $\{\frac{\partial}{\partial q^i}\}$  となるで写像  $\pi_L$  で同じ配位空間  $N$  の局所座標系  $\{q^i\}$  から  $T^*N_Q$  の基底が  $\{dq^i\}$  となる。これから点  $Q$  での運動量ベクトルは式 4.91 から

$$\theta_Q = p_i(dq^i)_Q$$

を満たす  $p_i$  で表される。。そこで位置  $Q$  に関係なく  $N$  上の点から  $T^*N$  上の点  $\theta$  として

$$\theta : N \rightarrow TN^*, \theta = p_i dq^i$$

が定義できる。これは全微分の形になっており前部で扱った正準 1 形式 (canonical\_1form) である。正準方程式により相空間上に力学が展開できるようになる。これをハミルトン形式の力学という。これらは配位空間との間に写像関係があるので逆を持つことが必要でラグランジアン of 正則性が問題になる。

1 形式を

$$\omega = \omega_i dq^i$$

ベクトル場を

$$v = v^i \partial_i$$

と表すと関数の全微分は

$$df = \left( \frac{\partial f}{\partial q^i} \right) dq^i$$

となる。また内積が

$$\langle \omega | v \rangle = \omega_i v^i = \omega[v]$$

のように表現できる。

これは多様体上のベクトル場  $v$  に 1 形式を作用させて得られる関数  $f$  である。多様体上のある反変ベクトルに作用を与える関数は 1 形式とベクトル場で表現できるわけである。これらは次のような関係を満たす。

$$\langle dq^i | \partial_i \rangle = \delta_j^i$$

また  $Q$  点での方向微分は

$$\langle dq^i | v \rangle = dq^i[v] = v[q^i] = v^i$$

となる。特に  $v = \dot{c} = \dot{q}^i \partial_i$  の時

$$\langle df | \dot{c} \rangle = \frac{dq^i}{dt} \frac{\partial f}{\partial q^i} = \frac{df}{dt}$$

となりこれをパラメタ  $t$  に関する全微分導関数 (**total\_derivative**) という。

またこの内積操作は 1 形式  $\omega$  に対して、任意のベクトル場  $\circ$  を右側に入れることで実数を取り出す操作であるといえる。

$$\langle \omega | \circ \rangle \rightarrow R$$

これは正確には前部の引き戻しの操作である。

写像  $\phi: M \rightarrow N: q \rightarrow p = \phi(q)$  に対して  $T^*N$  上の 1 形式  $\bar{\omega} = \bar{\omega}_j dp^j$  の引き戻し  $\phi^* \bar{\omega}$  を

$$\langle \phi^* \bar{\omega} | v \rangle_Q = \langle \bar{\omega} | \phi_* v \rangle_{\phi(Q)}$$

と定義する。これは座標基底を加えて表現すれば

$$\begin{aligned} \langle \phi^* (\bar{\omega}_j dp^j) | v^i \frac{\partial}{\partial q^i} \rangle_Q &= \langle \bar{\omega}_j dp^j | v^i \frac{\partial p^k}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p^k} \rangle_{\phi(Q)} \\ &= \left[ \bar{\omega}_j(p) \frac{\partial p^j}{\partial q^i} \right]_{p=\phi(q)} v^i(q) \end{aligned}$$

となるが  $v$  が任意だから  $p = \phi(q)$  より

$$\phi^* (\bar{\omega}_j dp^j)_Q = \left[ \bar{\omega}_j(p) \frac{\partial p^j}{\partial q^i} \right]_{p=\phi(q)} dq^i = \bar{\omega}_j(\phi(q)) \frac{\partial \phi^j(q)}{\partial q^i} dq^i$$

であり引き戻しの写像として次が得られる。

$$\phi^* (dp^j)_Q = \left( \frac{\partial p^j}{\partial q^i} \right)_{p=\phi(q)} dq^i = \frac{\partial \phi^j(q)}{\partial q^i} dq^i$$

つまり引き戻しは写像後の  $\{p^i\}$  を写像前の座標成分  $\{q_i\}$  で表すことである。

2つの異なる座標間関係で物理的な観測量である実数が得られることが重要になる。

#### 4.3.4 リーマン計量

先の内容を高階まで拡張したのがテンソル場である。

$$\tau = \sum T_{i_1 i_2 \dots i_p} dq^{i_1} \otimes dq^{i_2} \dots \otimes dq^{i_p}$$

2階の場合のリーマン計量を考えてみよう。2階の対称テンソル場を

$$g: Q \rightarrow g_Q$$

$g$  を正定値として  $u_Q \in (TM)_Q$

$$g_Q[u_Q, u_Q] > 0$$

が成り立つ時、 $g$  をリーマン計量という。つまり  $M$  上のベクトル場  $u_Q, v_Q$  の作る点  $Q$  での接空間に内積

$$(u_Q \cdot v_Q) = g_Q[u_Q, v_Q]$$

が定義できる。 $g_Q$  は計量テンソルである。基底を含めて表現すると

$$g = g_{ij} dq^i \otimes dq^j: Q \rightarrow g(Q)_{ij} (dq^i)_Q \otimes (dq^j)_Q$$

となる。これは曲面の第一基本形式の一般化である。  
 一方でベクトル場は  $u = u^i \partial_i$  としてブランク  $\circ$  との内積として

$$g[u, \circ] = g_{ij} u^i dq^j$$

双対空間に写像すると

$$\tilde{u} = g_{ij} u^i dq^j$$

つまり  $g_Q$  は共変と反変を入れ替える添え字の上げ下げをしていることになる。  
 計量テンソル場があると 2 個の反変ベクトルからの内積

$$(u \cdot v)_Q = g(Q)_{ij} u_Q^i v_Q^j$$

は点  $Q$  での 1 形式ベクトル  $\tilde{u}_Q = g(Q)_{ij} u_Q^i dq^j$  との双対内積

$$\langle \tilde{u} | v \rangle_Q = g_Q[u_Q, v_Q]$$

と同じものになる。今後次のように表現することがある。

$$\langle g | u, v \rangle = g[u, v]$$

これにより曲線の接ベクトルを

$$v_Q = \left. \frac{dc}{dt} \right|_{t=\tau}$$

として、この接ベクトルの長さが次のように決まることになる。

$$|\dot{c}| = |v_Q| = \sqrt{(v_Q \cdot v_Q)} = \sqrt{g_Q[v_Q, v_Q]}$$

となる。これから曲線  $c(\tau)$  の長さが

$$\int_a^b |\dot{c}| d\tau = \int_a^b \sqrt{g(q(\tau))_{ij} \frac{dq^i}{d\tau} \frac{dq^j}{d\tau}} d\tau$$

で表され、計量テンソルに依存することがわかる。

例えばラグランジアンを質量が座標に依存する次の形でかけるとする。  $T > 0$  として

$$L = T(q, \dot{q}) - V(q) = \frac{1}{2} m_{ij}(q) \dot{q}^i \dot{q}^j - V(q)$$

一般化運動量はポテンシャル  $V$  が速度に依存しないので

$$p_i = \frac{\partial T(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}^i} = m_{ik}(q) \dot{q}^k \quad (4.94)$$

となり、座標に依存する。この時の配位空間にはリーマン計量が存在し、内積から共変ベクトルと反変ベクトルが導かれる。リーマン計量を

$$m_{ij}(q) dq^i dq^j$$

として座標に依存するように表す。接空間  $TN_Q$  に計量テンソルを

$$m_Q = m_{ij}(q) (dq^i)_Q \otimes (dq^j)_Q$$

とおくと任意の反変ベクトル

$$u = u^i \left( \frac{\partial}{\partial q^i} \right)_Q, \quad v = v^i \left( \frac{\partial}{\partial q^i} \right)_Q$$

の内積は先の定義から

$$\begin{aligned} \langle m_{ij}(q)|u, v \rangle &= \langle m_{ij}(q) (dq^i)_Q \otimes (dq^j)_Q | u^k (\frac{\partial}{\partial q^k})_Q, v^l (\frac{\partial}{\partial q^l})_Q \rangle \\ &= m_{ij}(q) u^i v^j \end{aligned}$$

となる。

次に  $TN_Q$  上の速度ベクトル  $v_Q$  と任意のベクトル  $\circ$  との内積を考える。基底もふくめて

$$v_Q = \dot{q}^i (\frac{\partial}{\partial q^i})_Q$$

としてあるブラケットであらわされる別のベクトルとの内積は式 4.94 から

$$\begin{aligned} \langle m_{ij}(q)|\circ, v_Q \rangle &= \langle m_{ij}(q) (dq^i)_Q \otimes (dq^j)_Q | \circ, \dot{q}^i (\frac{\partial}{\partial q^i})_Q \rangle \\ &= m_{ij}(q) \dot{q}^j (dq^i)_Q \\ &= p_i (dq^i)_Q \\ &= \theta_Q \end{aligned}$$

となり相空間の運動量ベクトル、すなわち共変ベクトル得られる。これらは点  $Q$  に依存しない。つまり対称テンソル場としての計量場を

$$m = \langle m | \circ, \circ \rangle = m_{ij} dq^i \otimes dq^j : Q \rightarrow m_Q$$

また、1 形式として

$$m = \langle m | u, \circ \rangle = m_{ij}(q) u^j (dq^i)_Q$$

が定義できる。これによって正準 1 形式を

$$\theta = p_i dq^i = \langle m | \circ, \dot{q} \rangle = m_{ij} \dot{q}^j dq^i$$

となる。つまり正準 1 形式  $\theta$  は  $TN$  上の速度ベクトル場  $\dot{q}$  を計量テンソル場で  $M = T^*N$  に写像したものである。ベクトル場と 1 形式は計量テンソル場を仲介にして 1 対 1 で対応する。

#### 4.3.5 p 形式

$M$  の各点  $Q$  で  $p$  ベクトルが定義されると、その集合の空間  $\Lambda^p(TM)_Q$  が考えられる。そこで  $M$  の各点  $Q$  に  $p$  ベクトル  $(\omega^p)_Q$  を 1 つずつ対応させる写像

$$\omega^p : M \rightarrow \bigcup_{Q \in M} \Lambda^p(TM)_Q : Q \rightarrow (\omega^p)_Q \quad p \leq \dim M$$

これを  $p$  形式という。座標近傍  $(U, \phi)$  をとった時、 $p$  形式  $\omega^p$  が点  $Q$  において値をとるべき  $p$  ベクトルは局所座標表示で  $1 \leq i_1 \leq i_2 \cdots \leq i_p \leq m$  の範囲で和をとるとして

$$(\omega^p)_Q = \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_p} a_{i_1, i_2, \dots, i_p}(Q) (dq^{i_1})_Q \wedge (dq^{i_2})_Q \wedge \cdots \wedge (dq^{i_p})_Q$$

となる。外積の定義から  $p$  ベクトルの基底と  $p$  個の反変ベクトル  $u_i = u_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  との関係が

$$(dq^{i_1})_Q \wedge (dq^{i_2})_Q \wedge \cdots \wedge (dq^{i_p})_Q [(u_1)_Q, (u_2)_Q, \dots, (u_p)_Q]$$

であらわされる。

#### 4.3.6 拡大配位空間

古典的な運動方程式に従う粒子はある瞬間の力により運動の経路が決定される。これは局所的で逐次的であるといえる。しかし、変分原理的には端点の指定があれば作用積分を最少にする経路として運動が決まる。端点を指定するというレベルで大域的である。ここで時間の扱いが重要になる。大域的に同時に決定する方法は相対論からすればない。そこで配位空間に時間軸を加え、拡大することを考える。

配位空間は  $N$  次元とし、さらに 1 つの座標軸を追加し  $N + 1$  次元に拡大した空間を拡大配位空間という。この時の古典的な経路  $C_L$  は  $\tilde{C}_L$  に引き上げられるとしよう。

$$C_L : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{N}, t \in [t_1, t_2] \rightarrow C_L(t)$$

$$\tilde{C}_L : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{N} \times \mathbf{R}, \tau \in [\tau_1, \tau_2] \rightarrow \tilde{C}_L(\tau)$$

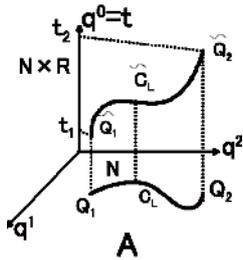


図 4.8: 拡大配位空間

系の時間発展は曲線状の点の移動だけではなく、曲線の変化も考えないといけない。 $\tilde{C}_L$  の局所座標は次のように 0 成分を時間として  $i$  成分を空間とする。

$$\tilde{q}(\tau) = (\tilde{q}^0, \tilde{q}^1, \dots, \tilde{q}^n)$$

$$\tilde{q}^0(\tau) = t(\tau)$$

$$\tilde{q}^i(\tau) = q^i(t(\tau)), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$\tilde{q}^i(\tau)$  の空間面への射影が  $q^i(t(\tau))$  となる。この時  $\tau$  による微分は

$$\dot{\tilde{q}}^0 = \frac{d\tilde{q}^0}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} = t'$$

$$\tilde{q}^{i'} = \frac{d\tilde{q}^i}{d\tau} = \frac{dq^i}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \dot{q}^i t'$$

となるので、作用積分  $J$  は  $dt = \tilde{q}^{0'} d\tau$  だから通常の配位空間から出発すると

$$\begin{aligned} J &= \int_{t_1}^{t_2} L(t, q^i, \dot{q}^i) dt \\ &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} L\left(\tilde{q}^0, \tilde{q}^i, \frac{\tilde{q}^{i'}}{t'}\right) \tilde{q}^{0'} d\tau \\ &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \tilde{L}(\tilde{q}^0, \tilde{q}^i, \tilde{q}^{0'}, \tilde{q}^{i'}) d\tau \end{aligned}$$

となる。ただし、

$$\tilde{L}(\tilde{q}^0, \tilde{q}^i, \tilde{q}^{0'}, \tilde{q}^{i'}) = L\left(\tilde{q}^0, \tilde{q}^i, \frac{\tilde{q}^{i'}}{\tilde{q}^{0'}}\right) \tilde{q}^{0'}$$

である。これによって通常のラグランジアン自由度は  $2n$  だが、自由度の総数は  $\tilde{q}^0, \tilde{q}^{0'}$  が加わり  $2n+2$  になっていることがわかる。しかし、実際の自由度は  $2n+1$  であり  $t$  が加わっただけである。これは次のように確認できる。以後  $i$  に  $0$  も含めることにし、次のような速度項を一斉に  $k$  倍する操作をおこなう。

$$\tilde{L}(\tilde{q}^i, k\tilde{q}^{i'}) = L\left(\tilde{q}^i, \frac{k\tilde{q}^{i'}}{k\tilde{q}^{0'}}\right) k\tilde{q}^{0'} = k\tilde{L}(\tilde{q}^i, \tilde{q}^{i'}), \quad i = 0, 1, 2.. \quad (4.95)$$

ここで相空間の引き上げに対して

$$L(a, \frac{b}{t})t = \tilde{L}(a, b)$$

が成り立つとした。4.95 から  $\tilde{L}$  は  $\{q^{i'}\}$  の 1 次式であり、オイラーの定理から次が成り立つ

$$\sum_{i=0} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{q}^{i'}} \tilde{q}^{i'} = \tilde{L}(\tilde{q}^i, \tilde{q}^{i'}) \quad (4.96)$$

つまり、あらゆる方向の全自由度の足し合わせが元の関数を再現させる。 $2n+2$  に拡大された空間がこの式により拘束され  $2n+1$  上に制限されることになる。

これによって拡大配位空間上の作用積分は次のように配位空間上の作用積分に一致する。

$$\tilde{I}(C_L \tilde{t}) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \tilde{L}(\tilde{q}^i, \tilde{q}^{i'}) d\tau = \int_{t_1}^{t_2} \tilde{L}(q^i, q^{i'}) dt = I(C_L(t))$$

例えばこの拡大配位空間でのラグランジアンを

$$\tilde{L}(q, q'/q^{0'}) q^{0'} = \left( \sum_{i,j} \frac{m_{ij}(q)}{2(q^{0'})^2} q^{i'} q^{j'} - U(q) \right) q^{0'}$$

とすると、 $q^0$  は循環座標になる。

#### 4.3.7 ラウシアン

実際の物理系ではラグランジアン以外に拘束条件が成り立っていることが多い。これから変数を減らしたラグランジアンをつくれば問題が簡単になる。配位空間においてこのように簡約されたラグランジアンをラウシアン (Routhian) という。

循環座標に共役な一般化運動量は第一積分になる。この第一積分が存在する空間は状態空間の部分空間とみなすことができる。

例えば次に従う運動があったとする。

$$p_n(q, \dot{q}) = a_n \quad (4.97)$$

この運動は  $q^n$  にラグランジアンが陽に依存しないので  $(2n-1)$  の超空間上の運動に限定されることになる。ラグランジアンが正則であれば

$$\det \left( \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \right) \neq 0 \quad (4.98)$$

が成り立つので  $q^n$  の第一積分が求まり、式 4.20 を逆に解くことができその成分を

$$\dot{q}^n = \theta^n(q^1, q^2, \dots, q^{n-1}, \dot{q}^1 \dots \dot{q}^{n-1}, a_n, t) \quad (4.99)$$

と表すことができる。これから元のラグランジアンからを消去したラグランジアン

$$L^*(q^{n-1}, \dot{q}^{n-1}, a_n, t) \equiv L(q^n, \dot{q}^n, \dot{q}^n = \theta^n, t) \quad (4.100)$$

が定義でき、オイラー微分が  $[\dots]^*$  を内部微分のあとに  $\dot{q}^n \rightarrow \theta^n$  とする演算として、この時 4.97 より

$$\left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n} \right]^* = a_n \quad (4.101)$$

となるから

$$\begin{aligned} [L^*]_i &= \frac{\partial L^*}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}^i} \right) \\ &= \left[ \frac{\partial L}{\partial q^i} \right]^* - \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \right]^* + \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right]^* \frac{\partial \theta^n}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left( \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right]^* \frac{\partial \theta^n}{\partial \dot{q}^i} \right) \\ &= [L]_i^* - a_n [\theta^n]_i \quad (i = 1, 2, \dots, n-1) \end{aligned}$$

となる。従って  $n$  の和はとらない形で  $2n-2$  空間に落とせ、

$$[L^* - a_n \theta^n]_i = [L]_i^* \quad (i = 1, 2, \dots, n-1) \quad (4.102)$$

が成り立つ。従って簡約したラグランジアンをラウシアン (Routhian)  $R$  として

$$R \equiv L^* - a_n \theta^n \quad (4.103)$$

で定義すればこれもラグランジュの方程式を満たすことになる。よってもとの配位空間  $N$  で  $q^n$  の値だけが

$$q^n \rightarrow q^n + \tau \quad (4.104)$$

だけ変化する点を同値として同値関係  $\sim$  をつくることができ、

$$N' = N / \sim \quad (4.105)$$

の商空間をつくることができる。ラウシアン  $R$  はこの  $N'$  の接空間  $TN'$  上での運動を決めるラグアジアンとみなすことができる。

#### 4.3.8 ヤコビの原理

ここでは等エネルギー空間について考える。エネルギーが

$$H_L = -p_0 = -\frac{\partial \tilde{L}}{\partial q^{0'}} = \sum_{i=1} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i - L = T(\dot{q}) + U(q)$$

と書けるとき、拡大配位空間のラグランジアンは計量を用いて

$$\tilde{L} = L(q, \dot{q}/q^{0'}) q^{0'} = \left( \sum_{i,j} \frac{m_{ij}(q)}{2(q^{0'})^2} \dot{q}^{i'} \dot{q}^{j'} - U(q) \right) q^{0'}$$

となり  $q^0$  は循環座標である。このとき

$$-p^0 = -\frac{\partial \tilde{L}}{\partial q^{0'}} = \sum_{i,j} \frac{m_{ij}(q)}{2(q^{0'})^2} \dot{q}^{i'} \dot{q}^{j'} + U(q) = T + U(q) = E$$

とおけるので、これから

$$t' = q^{0'} = \sqrt{\frac{m_{ij}(q)q^{i'}q^{j'}}{2(E-U(q))}} = \phi^0(q, q')$$

となる。 $q^{0'}$  を割ったのでこれはすでに配位空間に射影されている表現である。  
この  $\phi^0$  から前節のラウシアンは式 4.101 からオイラー微分を用いて

$$\begin{aligned} R(q, q') &= \left[ \tilde{L} - \frac{\partial L}{\partial q^{0'}} q^{0'} \right]^* \\ &= \left[ \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i q^{0'} \right]^* \\ &= \left[ \tilde{L} + E q^{0'} \right]^* \\ &= L(q, q' / \phi^0) \phi^0 + E \phi^0 \\ &= \sqrt{2(E-U(q))m_{ij}(q)q^{i'}q^{j'}} \end{aligned}$$

となりこのラウシアンに対する作用は

$$A[c_L] = \int_{\tau_1}^{\tau_2} R(q, q') d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{2(E-U(q))m_{ij}(q)q^{i'}q^{j'}} d\tau$$

となる。さらに  $q^{i'} = dq^i/d\tau$  だから等エネルギー空間内の 2 点  $Q_1, Q_2$  が固定されれば  
時間に無関係に作用積分が

$$A = \int_{Q_1}^{Q_2} \sqrt{2(E-U(q))m_{ij}(q)dq^i dq^j} = \int_{Q_1}^{Q_2} \sqrt{2Tm_{ij}(q)dq^i dq^j}$$

となり、これの停留曲線で古典的な経路が決まる。これをヤコビの原理 (Jacobi's principle) という。さらに  
これからヤコビ計量 (Jacobi metric) がもとの配位空間に定義できる。

$$g_{ij}(q) := 2(E-U(q))m_{ij}(q) = 2Tm_{ij}(q)$$

これは力の場の計量を座標系の歪みにくりこむ等エネルギー空間の計量で等価原理に相当する。等エネルギー空間の線素が次のように定義できる。

$$d\sigma := \sqrt{g_{ij}dq^i dq^j}$$

これから作用積分を極小にするために

$$\Delta \int_{Q_1}^{Q_2} d\sigma = 0$$

でなくてはいけない。これをみताすのは前部の定義から測地線である。エネルギー空間の曲りがポテンシャルで決定され、2 点間を最短にする曲線により経路が決まる。

#### 4.4 基本 1 形式

前節において配位空間において微分 1 形式が次のようにつくられた。

$$\theta_L := \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} dq^i$$

式 4.96 から次のように拡大配位空間に持ち上げて微分 1 形式をつくる。

$$\Theta_L := \sum_{i=0} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q^i} dq^i$$

これを基本 1 形式という。ラグランジアン  $\tilde{L}$  は前回と同様に次のような関係を満たす。

$$q' = \frac{dq}{d\tau}, \quad \dot{q} = \frac{dq}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{q'}{t'}$$

$$\tilde{L}(\tau, \tilde{q}, \tilde{q}') = L(t, q, \dot{q})t'$$

両辺を  $q^i$  で微分すると

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial q^i} = \frac{\partial L}{\partial q^i} t' = \frac{\partial L}{\partial q^i} \frac{dt}{d\tau} \quad (i = 0, 1, 2, \dots)$$

となり、系の相対速度に依存する。  $k = 1, 2, \dots$  として

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial q^{k'}} = \sum_{l=1} \frac{\partial \{L(t, q, \dot{q})t'\}}{\partial \dot{q}^l} \frac{\partial}{\partial q^{k'}} \left( \frac{q^l}{t'} \right) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} = p_k$$

となり、 $q^k$  に対する共役運動量が得られる。

また  $q^{0'} = t'$  から  $i = 0$  の場合は  $\partial \{Lt'\} / \partial q^{0'} = L$  となる。

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial q^{0'}} = L + \sum_{l=1} \frac{\partial \{L(t, q, \dot{q})\}}{\partial \dot{q}^l} \frac{\partial}{\partial q^{0'}} \left( \frac{q^l}{t'} \right) t' = L - \sum_{l=1} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^l} \dot{q}^l = -H_L = p_0$$

であり、ハミルトニアンが得られる。これから  $\theta, \Theta$  の関係が次のように求まる。

$$\begin{aligned} \Theta_L &= \sum_{i=0} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q^{i'}} dq^i \\ &= \sum_{l=1} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^l} dq^l - \left( \sum_{l=1} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^l} \dot{q}^l - L \right) dt \\ &= \theta_L - H_L dt \end{aligned} \tag{4.106}$$

つまり  $q^0 = t$  の時間に共役な一般化運動量が  $-H_L$  である。よって

$$\tilde{p} = (-H_L, p_1, p_2, \dots)$$

は共変ベクトルのようにふるまう。

よって  $2n + 1$  次元の拡大相空間では次のように正準 1 形式は  $(T^*N) \times \mathbf{R} = M \times \mathbf{R}$  として

$$\Theta = \sum_{i=1} p_i dq^i - H(q, p, t) dt = \theta - H dt \tag{4.107}$$

と表すことができる。

また次のような線積分をとると 4.96 から

$$\begin{aligned} \tilde{I}[\tilde{c}_L] &= \int_{\tilde{c}_L} \Theta_L = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \langle \Theta_L | \tilde{c}'_L \rangle d\tau \\ &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left\langle \sum_{i=0} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q^{i'}} dq^i \middle| \frac{d}{d\tau} \right\rangle d\tau \\ &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left( \sum_{i=0} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{q}^{i'}} \tilde{q}^{i'} \right) d\tau \\ &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \tilde{L} d\tau \end{aligned}$$

であり、また  $t' = dt/d\tau$  だから

$$\begin{aligned}\tilde{I}[\tilde{c}_L] &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left( \sum_{i=0} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q^{i'}} q^{i'} \right) d\tau \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left( \sum_{i=0} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q^{i'}} \frac{q^{i'}}{t'} \right) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} L dt\end{aligned}$$

となり、結局、配位空間上で運動方程式を決定していくことは拡大配位空間である時空点の端点間のつりあいの条件として次の作用積分

$$\int_{\tilde{c}_L} \Theta_L = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \tilde{L} d\tau = \int_{t_1}^{t_2} L dt$$

の停留値を決定することである。

#### 4.5 ストークスの定理

前節に端点を固定しない場合の作用積分を扱った。ここでそれを拡大配位空間に応用しよう。

拡大配位空間上で  $\tilde{c}_L$  をわずかにずらし、 $\tilde{c}_L + \Delta\tilde{c}_L$  を考える。この時、端点は  $\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2$  から  $\tilde{Q}'_1, \tilde{Q}'_2$  に変化し、その変化を結ぶ曲線  $l_1, l_2$  を付加する。

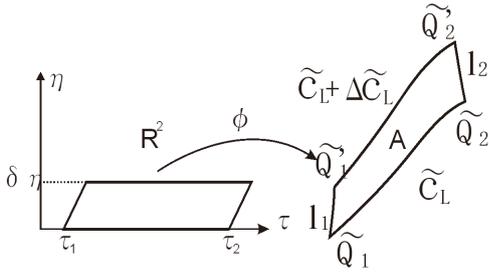


図 4.9: 拡大配位空間上で異なる経路がつくる面積 A

これらの曲線で囲まれた領域を  $A$  とすると閉曲線  $\partial A$  が得られる。ここにストークスの定理を使えば

$$\int_{\partial A} \Theta_L = \int_A d\Theta_L$$

ただし、反時計回りを正にとる。これを用いれば

$$\Delta \tilde{I}[\tilde{c}_L] = \int_{\tilde{c}_L + \Delta\tilde{c}_L} \Theta_L - \int_{\tilde{c}_L} \Theta_L = \int_{l_2} \Theta_L - \int_{l_1} \Theta_L - \int_A d\Theta_L = \Delta I[c_L] \quad (4.108)$$

を得る。具体的に計算するために  $\tilde{c}_L$  上の各点  $\tilde{c}_L(\tau)$  を始点とし  $\tau = Const$  の曲線の接ベクトルを  $u_\eta = \partial/\partial\eta$  として座標変化の  $\eta$  のみの変化を考えた  $\delta$  変分を定義する。

$$\delta q^i := \langle dq^i | u_\eta \rangle \delta\eta = \frac{\partial q^i}{\partial \eta} \delta\eta \quad (4.109)$$

これに対して  $\tilde{c}_L$  上の点を始点とする任意の曲線の変化はパラメタ  $\lambda$  に対して 2 変数  $(\tau, \eta)$  を持つことになるので

$$v_\lambda = \frac{d}{d\lambda} = \frac{d\eta}{dt} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{d\tau}{dt} \frac{\partial}{\partial \tau}$$

としてこの曲線に沿った変化は全微分で表される。

$$\Delta q^i := \langle dq^i | v_\lambda \rangle \Delta \lambda = \frac{\partial q^i}{\partial \eta} \delta \eta + \frac{\partial q^i}{\partial \tau} \delta \tau = \delta q^i + q^{i'} \delta \tau \quad (4.110)$$

ところが  $t$  は  $\tau$  のみの関数としているため

$$\delta q^0 = 0, \quad \Delta q^0 = q^{0'} \delta \tau$$

となり  $\delta$  変分は同時刻の変分を表す。

そこで式 4.108 のはじめの 2 項については図  $l_1 l_2$  の寄与部分は曲線に沿った接ベクトルを  $v_\lambda = d/d\lambda$  として式 4.106 から線積分になり  $t(\tau_1) = t_1, t(\tau_2) = t_2$  として

$$\begin{aligned} \int_{l_1}^{l_2} \Theta_L &= \langle \Theta_L | v_\lambda \rangle_Q \Delta \lambda \\ &= \left[ \sum_{i=0} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q^{i'}} \langle dq^i | v_t \rangle \right]_{\tau_1}^{\tau_2} \Delta \lambda \\ &= \left[ \sum_{i=0} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q^{i'}} \Delta q^i \right]_{\eta=0} \\ &= \left[ \sum_{i=1} p_i \Delta q^i - H_L \Delta q^0 \right]_{\eta=0} \end{aligned}$$

となりこれが端点を変化させた時の作用積分の変分である。

さらに式 4.108 のはじめの 3 項については 2 形式であるから図の面積  $A$  について式 4.109 から

$$\begin{aligned} \int_A d\Theta_L &= \iint d\tau d\eta \langle d\Theta_L | \frac{\partial}{\partial \tau}, \frac{\partial}{\partial \eta} \rangle \\ &= \iint d\tau d\eta \langle d\Theta_L | \tilde{c}'_L, u_\eta \rangle_{\eta=0} \end{aligned}$$

ところが式 4.93 から

$$\delta_i[L_i] \delta q^i = \langle d\theta_L | \dot{c}_L, \circ \rangle + \langle dH_L | \circ \rangle$$

が成り立つ。式 4.106 から  $t' = dt/d\tau$  だから  $\tilde{L}(\tau, \tilde{q}, \tilde{q}') = L(t, q, \dot{q})t'$  に注意し、

$$\langle d\Theta_L | \tilde{c}'_L, u_\eta \rangle \delta \eta = \delta_i[L_i] \langle dq^i | u_\eta \rangle \delta \eta \frac{dt}{d\tau} = \delta_i[L_i] \delta q^i t' \quad (4.111)$$

よって

$$\begin{aligned} \int_A d\Theta_L &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left( \delta_i[L_i] \langle dq^i | u_\eta \rangle \delta \eta \frac{dt}{d\tau} \right) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \sum \delta_i[L_i] \delta q^i \right) \end{aligned} \quad (4.112)$$

となるので結局  $\tau$  表現と  $t$  表現で

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{I}[\tilde{c}_L] &= \Delta I[c_L] \\ &= [\langle \Theta_L | v_t \rangle \Delta \lambda]_{\tau_1}^{\tau_2} - \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \langle d\Theta_L | \tilde{c}'_L, u_\eta \rangle \delta \eta \\ &= \left[ \sum_{i=1} p_i \Delta q^i - H_L \Delta t \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \sum \delta_i[L_i] \delta q^i \right) \end{aligned} \quad (4.113)$$

となり、拡大配位空間から配位空間の表現になっている。

第 1 項はハミルトンの正準関係、第 2 項はラグランジュ方程式が成り立てば 0 になるがこの項が共に 0 にならなくてもお互いの変化を打ち消す関係があれば、区別されないわけである。

## 5 力学系

### 5.1 正準 2 形式

第 8 部での超弦理論を構成する弦では正準 2 形式が重要になる。そこで正準 1 形式を微分し、正準 2 形式を次のようにつくる。

$$\Omega := d\theta = dp_i \wedge dq^i$$

さらに正準座標と運動量を 1 つの座標として次のように扱おうと便利である。

$$z := {}^t (q^1, q^2, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n) = {}^t (z^1, \dots, z^{2n})$$

この時、正準 2 形式は

$$\Omega = dp_i \wedge dq^i := \frac{1}{2} \Omega_{\mu\nu} dz^\mu \wedge dz^\nu \quad (5.1)$$

ただし、

$$\Omega_{\mu\nu} = \langle \Omega | \partial_\mu, \partial_\nu \rangle$$

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial q^i}$$

$$\partial^i = \frac{\partial}{\partial p^i}$$

である。この時、次が成り立つ。

$$\Omega_{n+i,j} = \langle \Omega | \partial^i, \partial_j \rangle = \delta_j^i$$

$$\Omega_{i,n+j} = \langle \Omega | \partial_i, \partial^j \rangle = -\delta_i^j$$

$$\Omega_{\mu\nu} = \langle \Omega | \partial^i, \partial_j \rangle = \delta_{\mu,\nu+n} - \delta_{\mu+n,\nu}$$

したがって正準 2 形式は 2 階交代テンソルとして次のように行列表示できる。

$$(\Omega_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

さらに

$$\Omega_{\mu\rho} \Omega^{\rho\nu} = \delta_\mu^\nu$$

だから反変成分の表示では

$$(\Omega^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{pmatrix} = {}^t (\Omega_{\mu\nu})$$

となる。Ω の性質として転置をとれば逆行列に等しい。

$${}^t \Omega = \Omega^{-1}$$

次数  $n$  が偶数の場合次のような性質を満たす。

$$\Omega_{2n}^2 = -I_{2n}$$

一般には偶数次元の多様体  $M$  に閉じた非退化つまり式 4.92 から内積をとると

$$\langle \Omega | v, \circ \rangle = 0$$

であれば必ず

$$v = 0$$

となることである。また閉じていることは

$$d\Omega = 0$$

で表すことができる。

## 5.2 シンプレクティック多様体

この  $d\Omega = 0$  の条件を満たす交代 2 形式の  $\Omega$  が備わっていればこれをシンプレクティック形式 (**symplectic\_form**) といい、 $(M, \Omega)$  をシンプレクティック多様体 (symplectic\_manifold) という。一般の座標系  $x = (x^1, x^2, \dots, x^{2n})$  として拡張座標  $z$  との間には  $\det(\partial z^\rho / \partial x^\mu) \neq 0$  とする。この時内積をとり

$$\langle \Omega | \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu} \rangle = \frac{\partial z^\rho}{\partial x^\mu} \Omega_{\rho\sigma} \frac{\partial z^\sigma}{\partial x^\nu} := \omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu} \quad (5.3)$$

という性質を持ったスカラーが得られる。この時  $\Omega$  は正準 2 形式として

$$\Omega = \frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \quad (5.4)$$

となり、この時、

$$\langle \Omega | v, \circ \rangle = \omega_{\mu\nu} v dx^\nu$$

ただし、

$$v = v^\mu \partial_\mu$$

となるので  $\Omega$  が非退化であれば全ての  $v$  に対して  $\omega_{\mu\nu} v^\mu = 0$  となる  $v$  は

$$v = v^\mu \partial_\mu = 0$$

のみであり、 $\det(\omega_{\mu\nu}) \neq 0$  である。

有限な偶数次元のシンプレクティック多様体には式 5.1 が成立する局所座標系が必ず存在する。

これをダブリューの定理 (**Drboux's\_theorem**) という。

この定理から式 5.3 に逆を作用させ、

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial z^\rho} \omega_{\mu\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial z^\sigma} = \Omega_{\rho\sigma}$$

また式 5.2 からダブリューの定理によれば次の式を満たす  $2n$  次正方行列  $S$  が存在することになる。

$${}^t S \omega S = \begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix} = \Omega \quad (5.5)$$

$$S_\rho^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial z^\rho}$$

相空間がシンプレクティック多様体であり、正準 2 形式がシンプレクティック形式になるので拡大した座標

$$\{z^\mu\} = \{q^n, p_n\}$$

をシンプレクティック変数という。これにより正準方程式は次のように 1 つにすることができる。

$$\frac{dz}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial p_n} \\ -\frac{\partial}{\partial q^n} \end{pmatrix} = \Omega \nabla H$$

成分では

$$\frac{dz^\mu}{dt} = \Omega^{\mu\nu} \frac{\partial H}{\partial z^\nu} \quad (\mu = 1, 2, \dots, 2n) \quad (5.6)$$

となる。この形式の必要性は状態空間との関係で重要になる。この式の左辺  $\{\dot{q}^i, \dot{p}_i\}$  は相空間  $M$  上の反変ベクトル場

$$\dot{c} = \dot{z}^\mu \frac{\partial}{\partial z^\mu} = \dot{q}^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \dot{p}_i \frac{\partial}{\partial p_i} \quad (5.7)$$

の成分とみなせる。一方右辺の  $\{\partial H/\partial z^\mu\}$  は 1 形式

$$dH = \frac{\partial H}{\partial z^\mu} dz^\mu \quad (5.8)$$

の成分である。この異なる基底の成分を結びつけるために  $\Omega$  の正準 2 形式が必要なわけである。逆にシンプレクティック形式であれば次のように速度ベクトル場から 1 形式がつけれる。

$$\begin{aligned} \langle \Omega | \dot{c}, \circ \rangle &= \langle \dot{q}^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \dot{p}_i \frac{\partial}{\partial p_i} | dp_i \wedge dq^i \rangle \\ &= -\dot{q}^i dp_i + \dot{p}_i dq^i \\ &= -\Omega_{\nu\mu} \dot{z}^\mu dz^\nu \end{aligned} \quad (5.9)$$

さらに式 5.6 があるので式 5.8 から

$$\dot{z}^\mu = \Omega^{\mu\nu} \frac{\partial H}{\partial z^\nu}$$

だから次のように 1 形式で正準方程式が記述できることになる。

$$\langle \Omega | \dot{c}, \circ \rangle = -dH \quad (5.10)$$

これは座標変換に対して共変的であり、局所座標に依存しない。また前節の式 4.93 からラグランジュ方程式が成り立てば

$$\langle d\theta_L | \dot{c}_L, \circ \rangle = -dH_L$$

であった。よって式 5.10 はこれの相空間での表現ということができる。

これは拡大配位空間に拡張すれば

$$\langle d\Theta | \dot{c}'_L, \circ \rangle = 0$$

が成り立つことが期待できる。実際に式 4.107

$$\Theta = \sum_{i=1}^n p_i dq^i - H(q, p, t) = \theta - H dt$$

の外微分をとると

$$\begin{aligned} d\Theta &= d\theta - dH \wedge dt \\ &= \frac{1}{2} \Omega_{\mu\nu} dz^\mu \wedge dz^\nu - \frac{\partial H}{\partial z^\nu} dz^\nu \wedge dt \end{aligned}$$

となる。また拡大配位空間上の曲線は式 5.7 に反変成分として時間が加わることから

$$\tilde{c}' = z^{\mu'} \frac{\partial}{\partial z^\mu} + t' \frac{\partial}{\partial t}$$

となる。よって内積をとると  $\Omega_{\mu\nu} = -\Omega_{\nu\mu}$ 、 $\frac{dz^\mu}{dt} = \Omega^{\mu\nu} \frac{\partial H}{\partial z^\nu}$  ( $\mu = 1, 2, \dots, 2n$ ) だから式 5.8 から

$$\begin{aligned}
\langle d\Theta|\dot{c}, \circ \rangle &= \Omega_{\mu\nu} \left( z^{\mu'} + t' \frac{dz^{\mu'}}{dt} \right) dz^{\nu} + \frac{\partial H}{\partial z^{\nu}} t' dz^{\nu} - \frac{\partial H}{\partial z^{\nu}} z^{\nu'} dt \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial H}{\partial z^{\nu}} dz^{\nu} \right) t' dt \\
&= - \left( \Omega_{\nu\mu} \frac{dz^{\mu}}{dt} - \frac{\partial H}{\partial z^{\nu}} \right) t' dz^{\nu} + \Omega_{\mu\nu} \left( z^{\mu'} dz^{\nu} - \frac{dz^{\mu}}{dt} z^{\nu'} dt \right) \\
&\quad - \left( \frac{dH}{dt} - \frac{\partial H}{\partial t} \right) t' dt \\
&= - \left( \Omega_{\nu\mu} \frac{dz^{\mu}}{dt} - \frac{\partial H}{\partial z^{\nu}} \right) t' dz^{\nu} - \left( \frac{dH}{dt} - \frac{\partial H}{\partial t} \right) t' dt
\end{aligned}$$

最後の表現の第1項から  $2n$  個の次の正準方程式

$$\Omega_{\nu\mu} \frac{dz^{\mu}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial z^{\nu}} \quad \nu = 1, 2, \dots, 2n$$

$$\frac{dz^{\mu}}{dt} = \Omega^{\mu\nu} \frac{\partial H}{\partial z^{\nu}} \quad \nu = 1, 2, \dots, 2n \quad (5.11)$$

がえられ、第2項から拘束条件として

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

が成り立つ。

### 5.3 ハミルトニアン・ベクトル場

リーマン多様体では計量テンソル場

$$g = g_{ij} dq^i \otimes dq^j$$

が1形式とベクトル場を1対1に対応つけたようにシンプレクティック多様体では正準2形式

$$\Omega = d\theta = dp_i \wedge dq^i$$

が同じ役割を果たす。よって  $\langle g|\circ, \circ \rangle$  がスカラーを機械的に作ったように  $\langle \Omega|\circ, \circ \rangle$

がスカラーを作ると考えられる。ただし、計量テンソルは対称テンソルであったが  $\Omega$  は交代テンソルなので

$$\langle \Omega|u, v \rangle = - \langle \Omega|v, u \rangle$$

となる。よって  $G(z)$  を相空間  $M$  上の関数として  $\Omega$  で写像することで1形式  $dG$  が得られるようなベクトル場  $v_G$  を考える。

$$dG = \langle \Omega|\circ, v_G \rangle = \Omega_{\nu\mu} v_G^{\mu} dz^{\nu}$$

$$\Omega_{\nu\mu} v_G^{\mu} = \frac{\partial G}{\partial z^{\nu}}$$

よって

$$v_G^{\mu} = \Omega^{\mu\nu} \frac{\partial G}{\partial z^{\nu}}$$

となる。こうして決められるベクトル場が

$$v_G = v_G^{\mu} \frac{\partial}{\partial z^{\mu}} = \Omega^{\mu\nu} \frac{\partial G}{\partial z^{\nu}} \frac{\partial}{\partial z^{\mu}} = \frac{\partial G}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial G}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i} \quad (5.12)$$

となる。これを関数  $G$  を生成関数としたハミルトニアン・ベクトル場 (Hamiltonian vector field) という。これからハミルトニアン  $H$  自身から生成されるベクトル場  $v_H$  を用いて正準方程式が次のように書けることになる。

$$\dot{c}(t) = (v_H)_{c(t)}$$

これは座標系に依存しない。また、多様体  $M$  上の連続曲線  $c(t)$  の時間微分がハミルトニアン・ベクトル場のその点での代表点に一致し、曲線の局所座標  $\{z^1(t), \dots, z^{2n}(t)\}$  を用いて

$$\frac{dc}{dt}\Big|_t = \dot{z}^\mu(t) \frac{\partial}{\partial z^\mu}$$

$$(v_H)_c = v_H^\mu(z(t)) \frac{\partial}{\partial z^\mu} = \Omega^{\mu\nu} \frac{\partial H}{\partial z^\nu} \Big|_{z=z(t)} \frac{\partial}{\partial z^\mu}$$

が等しいと考えることができる。これは座標  $z^\nu$  に微分作用素が作用していると考えられるので成分で書くと基底ベクトルが作用することで

$$v_H[z^\nu] = v_H^\mu \partial_\mu [z^\nu] = v_H^\nu(z)$$

となる。よって基底  $\frac{\partial}{\partial z^\mu}$  を共通に選べるので

$$\frac{dz^\nu}{dt} = v_H^\nu(z) = \Omega^{\nu\rho} \frac{\partial H(z)}{\partial z^\rho} \quad (5.13)$$

となり式 5.11 が得られる。

したがってハミルトニアン・ベクトル場は相空間の流れの速度を指定しているとみなせる。系の状態は  $z(q, p)$  で決定され、時間をパラメタとして多様体上に描かれる積分曲線が正準方程式の時間発展である。

### 5.3.1 フロー

さらに一般的に拡張すると  $n$  次元の座標とベクトル場を持つ相空間  $N : \{x_n\}, \{v_n(x, t)\}$  が次の積分曲線を決定する微分方程式を持つとする。

$$\frac{dx_i}{dt} = v_i(x, t), \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (5.14)$$

このセットを力学系 (dynamic\_system) という。

特にベクトル場が  $t$  を陽に含まない時この系を自律系 (autonomous\_system) という。

この時の微分方程式は外部にエネルギーの散逸を含むような正準方程式ではない場合でもよい。

力学系は個々の解というより解の集合を大局的に扱う。

特に偶数次元で正準 2 形式を持つシンプレクティック多様体でベクトル場がハミルトニアン・ベクトル場であればハミルトニアン力学系という。

この微分方程式を満たし初期条件として

$$t = 0, \quad x = x(0)$$

から出発する解を  $x(t; x(0))$  とすると初期値  $x(0)$  を解  $x(t; x(0))$  に対応させる写像を

$$\phi_t : N \rightarrow N : x(0) \in N \rightarrow x(t; x(0)) = \phi_t x(0) \in N \quad (5.15)$$

を考え、この変換の全体  $\{\phi_t | t \in \mathbf{R}\}$  を式 5.14 のフロー (phase\_flow) という。相空間上の各点を初期値として動点を 1 分子として動点全体を流体のように扱う。

初期値は  $x(t; x(0))$  について

$$x(0) = x(0; x(0))$$

が成り立つ。自律系は時間の原点をずらしても方程式が不変であるので  $x(t; x(0))$  が解である時、 $x(t+s; x(0))$  も解でないといけない。さらに重要なのはこれが  $t = 0$  において  $x = x(s; x(0))$  から出発する解にもなることである。よって次のように時間の変化を位置の変化で置き換えられる。

$$x(t+s; x(0)) = x(t; x(s; x(0)))$$

同様にもとの微分方程式において  $t \rightarrow -t$  とすると  $x = x(-t; x(0))$  だから

$$x(t) = x(t; x(0))$$

とすると

$$x(0) = x(-t; x(t))$$

と表すことができる。これはもとの積分曲線を逆にたどるものである。

よってフローを示す関数の集合  $\{\phi_t | t \in \mathbf{R}\}$  の性質を次のように特徴付けることができる。

$\phi_0 = id$  恒等写像として

$$\phi_{t+s} = \phi_t \cdot \phi_s \quad \phi_{-t} = (\phi_t)^{-1}$$

これらの相流は群をなし、1パラメタ変換群と呼ばれるものになる。

式 5.14 の微分方程式の解の集合は初期条件によって異なる積分曲線の集合になる。

$n$ 次元の相空間を  $N$  とすると

$$N_I = \{x | I_1(x) = c_1, I_2(x) = c_2, \dots, I_k(x) = c_k\}$$

この部分空間の集合は不変集合 (invariant set) と呼ばれ、 $dI_i$  のうち  $r (\leq k)$  個が 1 次独立

$$\text{rank} \left( \frac{\partial I_i}{\partial x^j} \right) = r$$

であれば  $N_I$  は  $n - r$  次元多様体になる。不変集合であれば

$$x(t; x(0)) = \phi_t$$

$$x(0) \in N_I$$

であるので例えば不変集合として

$$N_I = \{x | c_i \leq I_i(x) \leq c_i + \Delta c_i\}$$

のような範囲をとることができる。

### 5.3.2 リュウビルの定理

相空間上の流れ (フロー) によって領域の体積変化がどうなるか見ていこう。

相空間のある有限の領域  $D$  が時間  $\tau$  の間に領域  $\phi_\tau(D)$  に移動したとする。  $D$  の内部の座標を  $\{x_n\}$  とすると体積を

$$V[D] = \int_D dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$$

と表される。  $\bar{x} = \phi_\tau(x)$  とすると

$$\begin{aligned} V[\phi_\tau(D)] &= \int_{\phi_\tau(D)} d\bar{x}_1 \wedge d\bar{x}_2 \wedge \dots \wedge d\bar{x}_n \\ &= \int_D \det \left( \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_j} \right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n \end{aligned}$$

となる。τが十分小さければ

$$\bar{x} = x + \tau v(x) + O(\tau^2)$$

となるので変換関数が

$$\left( \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_j} \right) = \hat{I} + \tau \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) + O(\tau^2)$$

のように近似できる。よって

$$\begin{aligned} \det \left( \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_j} \right) &= \det \left( \delta_{ij} + \tau \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) + O(\tau^2) \\ &= 1 + \tau \operatorname{div} v + O(\tau^2) \end{aligned}$$

となり、vの発散で表すことができる。よって体積の変化率はvの発散に依存し、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V[D] &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{V[\phi_\tau(D)] - V[D]}{\tau} \\ &= \int_D (\operatorname{div} v(x)) dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n \end{aligned}$$

となる。これをリュウビルの公式という。

特にハミルトニアン・フローでは式 5.13 から

$$\begin{aligned} \operatorname{div} v_H &= \partial_\mu v_H^\mu \\ &= \Omega^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu H \\ &= 0 \end{aligned}$$

となり、形がいかに変化しても体積変化しないことが保証される。これをリュウビルの定理 (**Liouville's theorem**) という。

例えば N 粒子系の位置、運動量空間を考えよう。

$$\{q_N, p_N\}$$

は空間 3 成分を考えれば、添え字を省略するが、6N の位相空間になる。この時、次の正準方程式が成り立つ。

$$\frac{\partial \mathbf{q}_i}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_i}$$

$$\frac{\partial \mathbf{p}_i}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}_i}$$

これを系とする分布関数 f を考えた時、全位相空間において次のように規格化できるとする。

$$\frac{1}{N!(2\pi\hbar)^{3N}} \int f(p, q, t) dp dq = \int f(p, q, t) d\Gamma = 1$$

この時、リュウビルの定理は

$$f(p, q, t) = f(p', q', t') \tag{5.16}$$

であることを意味する。

そこで単純に時間の微小変化 dt' を考えると

$$p' = p + \frac{dp}{dt} dt, \quad q' = q + \frac{dq}{dt} dt \tag{5.17}$$

となるから

$$\begin{aligned}
f(p', q', t') &= f\left(p + \frac{dp}{dt}dt, q + \frac{dq}{dt}dt, t + dt\right) \\
&= f(p, q, t) + \frac{\partial f}{\partial p}dp + \frac{\partial f}{\partial q}dq + \frac{\partial f}{\partial t}dt
\end{aligned}$$

式 5.17 を代入すると

$$\begin{aligned}
f(p', q', t') &= f(p, q, t) + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{dt} dt + \frac{\partial f}{\partial q} \frac{dq}{dt} dt + \frac{\partial f}{\partial t} dt \\
&= f(p, q, t) + \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} \right) dt + \frac{\partial f}{\partial t} dt
\end{aligned}$$

リウビルの定理式 5.16 から

$$\sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} \right) dt + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0$$

さらに正準関係から

$$\frac{\partial}{\partial t} f = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{dH}{dq_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{dH}{dp_i} \right)$$

これを後節のポアソン括弧式を利用すればリウビル方程式 (**Liouville's equation**) が導ける。

$$\frac{\partial}{\partial t} f = \{H, f\} \tag{5.18}$$

である。これは量子論への橋渡しとしても重要な式である。

リウビルの演算子として

$$Lf = -i\{H, f\}$$

で表すと

$$\frac{\partial f}{\partial t} = iLf$$

でありシュレディンガー方程式とおなじ 1 階の微分方程式であり

$$f(p, q, t) = e^{iLt} f(p, q, 0)$$

が成り立つ。

### 5.3.3 不動点

式 5.14 の微分方程式には特異点がありベクトル場  $v$  に対して点  $x = x_0$  で

$$v_i(x_0) = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n)$$

となり、これは相空間上で動かないことからベクトル場  $v$  の不動点 (**fixed\_point**) という。

$n$  次元であるので

$$x = x_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$$

であり、この  $x_0$  を平衡解ともいう。これに対して

$$x(t+T) = x(t) \quad (T > 0)$$

が満たされれば周期解になる。

$t = 0$  に  $x = x(0)$  から出発する解  $x(t; x(0))$  に対して  $t = 0$  に  $x = x(0)$  の近くの任意の点  $x'(0)$  から出発した解がその後動点  $x(t; x(0))$  から大きく離れずに動く時、この解  $x(t; x(0))$  は安定といい。さらに  $t \rightarrow \infty$  で  $x(t; x(0))$  に収束すれば漸近安定 (asymptotically stable) という。

ただし、不動点の外から有限の時間内で不動点  $x_0$  到達することはできない。これは  $t \rightarrow -t$  とした時、有限時間で不動点の外に出られないことの裏返しである。

この例を考えてみよう。相空間を 2 次元平面として次の微分方程式に従う力学系を考える。

$$\dot{x} = a^2x - \omega y - x(x^2 + y^2)$$

$$\dot{y} = a^2y + \omega x - y(x^2 + y^2)$$

ただし  $a > 0$  である。これは次のように解ける。

まず  $x = y = 0$  は平衡解である。他の解は極座標を用いて

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

とすると

$$\begin{aligned} \frac{\dot{x}}{x} &= a^2 - \omega \tan \theta - r^2 \\ \dot{x} &= \dot{r} \cos \theta - r\omega \sin \theta \end{aligned}$$

だから微分方程式は次のように書き換わる。

$$\dot{r} = r(a^2 - r^2), \quad \dot{\theta} = \omega \tag{5.19}$$

したがって  $r = a$ ,  $\theta = \omega t + \theta_0$  すなわち

$$x = a \cos(\omega t + \theta_0)$$

$$y = a \sin(\omega t + \theta_0)$$

が周期解である。さらに 5.19 から一般解は次の積分方程式を解けばよい。

$$\int \frac{dr}{r(a^2 - r^2)} = \int dt$$

解は  $r(0) \neq 0$  として下図のように

$$r = \frac{a}{\sqrt{1 - (1 - a^2/r(0)^2) e^{-2\alpha^2 t}}}$$

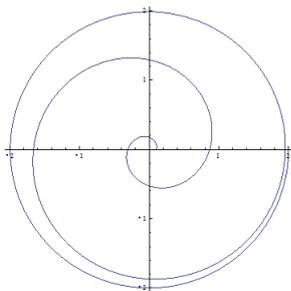


図 5.1: リミットサイクル  $r(0) = 0.1$ ,  $a = 2$ ,  $\alpha = 0.6$

となる。確かに  $t \rightarrow \infty$  で  $r \rightarrow a$  の周期軌道に近づく。

このような場合は解が厳密に求まり、リミット・サイクル (limit\_cycle) と呼ばれる。正準力学系では体積変化がなく、連続の方程式から

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho v) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (v \cdot \nabla) \rho + \rho \text{div} v = 0$$

ハミルトニアンフローでは  $\text{div} v = 0$  となるので流れに沿った密度変化は 0 である。

さらに湧き出し点や吸い込み点はない。相空間上の経路は交差しない。これから 2 次元の正準力学系はこのような孤立周期解、リミットサイクルを持つことができず、周期解が 1 つあればその近くの解もまた周期解になる。これらは粒子数の保存を満たすことになる。

しかし、オイラーの方程式のように  $\text{div} v = 0$  を満たしも奇数次元をもつ場合は正準力学系になれないので注意がいる。

### 5.3.4 ポアンカレの再帰定理

相空間上でハミルトニアンが第一積分になる。これは次のように保存系になることを示す。

つまりハミルトニアンの全微分は次のように反対称行列  $\Omega$  のせいで正準方程式の式 5.6 があるので次のように簡単になる。

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial z^\mu} \frac{dz^\mu}{dt} = \Omega^{\mu\nu} \frac{\partial H}{\partial z^\mu} \frac{\partial H}{\partial z^\nu} = 0 \quad (5.20)$$

したがって物体の運動は  $H = E(\text{Const})$  の一定な超曲面上の運動に制限される。この曲面は式 5.20 があるので  $2n - 1$  次元をもつ。これを等エネルギー面という。この  $2n - 1$  次元の体積要素を  $d\sigma$  とおく。

保存系では不変集合  $S$  を持ち、 $H = E$ ,  $H = E + \Delta E$  の 2 葉の間から外にでることはない、これを不変集合  $S(E; \Delta E)$  で表し、 $S(E)$  と  $S(E + \Delta E)$  との距離を  $d\rho$  とすると

$$\nabla H = \{\partial_1 H, \partial_2 H, \dots, \partial_{2n} H\}$$

は  $S(E)$  に垂直である。よって  $|\nabla H| = \sqrt{\sum_\mu (\partial_\mu H)^2}$  として

$$dH = |\nabla H| d\rho$$

となるはずである。よって  $S(E)$  と  $S(E + \Delta E)$  で囲まれた空間の体積が次のように定義できる。

$$\begin{aligned} \int d\rho d\sigma &= \int \int_E^{E+\Delta E} dH \frac{d\sigma}{|\nabla H|} \\ &= \Delta E \int \frac{d\sigma}{|\nabla H|} \end{aligned}$$

重要な点はこの体積が時間  $t$  だけ変化させる変換  $\phi_t$  に対して不変であることである。

もちろんこれを連続的に作用させても体積の変化がない。これからハミルトニアン・フローについて興味ある内容が導ける。

今、等エネルギー面  $S(E)$  が有界とすると

$$U_0, \phi U_0, \phi^2 U_0, \dots, \phi^n U_0, \dots$$

を考えると、リュウビルの定理からこれらは全て同一の面積を持つ、しかし、 $S(E)$  は有界なのでどこかで重なりあわないといけな。すなわち  $l(\geq 0)$  と  $m(\geq l)$  に対して、 $k_1 = m - l$  として

$$(\phi^m U_0 \cap \phi^l U_0) \neq \emptyset$$

$$(\phi^{k_1}U_0 \cap U_0) =: U_1 \neq \emptyset \subset U_0$$

さらにこの共有部分  $U_1$  に対して

$$(\phi^{k_2}U_1 \cap U_1) =: U_2 \neq \emptyset \subset U_0$$

のように空集合にならない  $U_2$  が  $U_0$  に含まれる形で存在できる。同様に繰り返すと

$$U_0 \supset U_1 \supset U_2 \supset \cdots \supset U_n \supset \cdots \supset U_\infty$$

となり閉集合列の全体に含まれる点が存在する。この点の集合が  $U_\infty$  とすれば  $U_\infty$  を初期値とする解は

$$k_1\tau, (k_1 + k_2)\tau, \cdots$$

毎に  $U_\infty$  に戻ることになる。つまり初期の点  $P_0$  のどのような近傍にも解がその近傍に戻る点が必ず存在する。これをポアンカレの再帰定理 (Poincaré's recurrence theorem) という。

### 5.3.5 力学行列

不動点を原点として任意のベクトル場は次のように近似ができる。

$$\begin{aligned} v_i(x) &= \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(0)x_j + O(x^2) = K_i^j x_j + O(x^2) \\ \dot{x}_i &= K_i^j x_j \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \end{aligned}$$

この  $\hat{K} = K_i^j$  力学行列 (dynamic matrix) という。これは次のように無限級数を用いて解くことができる。

$$x(t) = \sum_n \frac{1}{n!} (t\hat{K})^n x(0) \quad (5.21)$$

代入することで確かめられる。いうまでもなくこの式は指数関数の定義式であるから

$$x(t) = \sum_n \frac{1}{n!} (t\hat{K})^n x(0) = \exp(t\hat{K}) x(0)$$

よって式 5.21 はベクトル場の切断を決める。

次のような線形変換をすると

$$x \rightarrow z = \hat{U}x$$

式 5.21 は

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \hat{U}\hat{K}\hat{U}^{-1}z$$

となる。よって  $\hat{U}$  によって  $\hat{K}$  が対角化されるならば  $\hat{K}$  の固有値を  $\{\lambda_n\}$  として

$$\hat{U}\hat{K}\hat{U}^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

となる。よって切断の関係があれば

$$\hat{U} \exp(t\hat{K})\hat{U}^{-1} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

となるので解は

$$x(t) = \hat{U}^{-1} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \hat{U}x(0)$$

のように求まる。

## 5.4 ビーズリング

図のように半径  $a$  のなめらかで細いリングに質量  $m$  のビーズを通し、角速度  $\omega$  で回転させる。ビーズの位置を  $\theta$  で表す。直観的にも  $\theta$  によりかなり異なった運動が期待でき、古典的であるが不動点を利用した相流を学習するにはよい例題である。

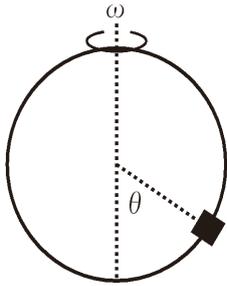


図 5.2: 摩擦のないリングにビーズを入れ、回転させる。

この時のラグランジアンは古典的に 2 方向の回転が考えられる  $L = T - V$  から

$$L = \frac{m}{2}a^2 \left( \dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2 \theta \right) - mga(1 - \cos \theta)$$

これから共役運動量は

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \\ &= ma^2 \dot{\theta} \end{aligned}$$

となるのでハミルトニアンは  $H = T + V$  から

$$H = \frac{p^2}{2ma^2} - \frac{m}{2}a^2\omega^2 \sin^2 \theta + mga(1 - \cos \theta) \quad (5.22)$$

となる。よって正準方程式は

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{ma^2} \quad (5.23)$$

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -mga \sin \theta \left( 1 - \frac{a}{g}\omega^2 \cos \theta \right) \quad (5.24)$$

よって相空間  $(p, \theta)$  上で  $H = E(\text{Const})$  で決まる経路  $c$  上を動く。この  $c$  が正準方程式の積分曲線を与える。この時のポテンシャル  $U(\theta)$  は  $H$  から分離し  $\theta$  の関数として遠心力のポテンシャルは負になるから

$$U(\theta) = -\frac{m}{2}a^2\omega^2 \sin^2 \theta + mga(1 - \cos \theta)$$

とする。  $dU/d\theta = 0$  とすると

$$mga \sin \theta = ma^2\omega^2 \sin \theta \cos \theta$$

$\theta$  は小さいとして  $\omega$  について解き、

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{a}}$$

とおくとこのハミルトニアン<sup>2</sup>の運動は  $\omega_0$  と  $\omega$  の大小関係で大きく変化する。改めて  $\omega_0^2 = g/a$  を代入して

$$U(\theta) = mga \left( 1 - \cos \theta - \frac{\sin^2 \theta}{2} \right)$$

となるがこれは最大値  $2mga$  になる。

はじめに  $\omega < \omega_0$  の場合、この時  $0 \leq U(\theta) \leq 2mga$  となる。運動可能範囲は

$$\frac{p^2}{2ma^2} = E - U(\theta) \geq 0$$

である。

ここで重要な不動点を式 5.22 から次のように置く。

$$(\theta, p) = (0, 0) = O \quad (E = 0)$$

$$(\theta, p) = (\pm\pi, 0) = P \quad (E = 2mga)$$

ただし、ここでは  $\theta$  は  $\pm\pi$  の範囲である。

力学行列で正準方程式を表すと式 5.24 から相空間上で不動点を原点として

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= K_i^j x_j \\ \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{p} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1/ma^2 \\ \mp ma^2(\omega_0^2 \mp \omega^2) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ p \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。ただし、 $-$ は  $O$  点、 $+$ は  $P$  点を不動点にした時の解である。

この行列  $K$  のトレースを  $\sigma/2$ 、行列式を  $\kappa$  とすると

$$2\sigma = \text{tr}K_{\mp} = 0$$

$$\kappa = \det K_{\mp} = \omega_0^2 \mp \omega^2$$

となるので  $\omega < \omega_0$  の場合  $O$  は安定な楕円不動点であり、渦心点になる。また  $P$  は不安定な双曲不動点、鞍点になる。実際に  $\theta \ll 1$  として  $O$  点の近くでは

$$\frac{p^2}{2ma^2} + \frac{m}{2}a^2(\omega_0^2 - \omega^2)\theta^2 = E$$

となり、これは楕円である。

また、 $\theta = \pi - \phi$ ,  $\phi \ll 1$  として

$$\frac{p^2}{2ma^2} - \frac{m}{2}a^2(\omega_0^2 - \omega^2)\theta^2 = E - 2mga$$

これは双曲線である。平衡点以外の解は次のようになる。

$0 < E < 2mga$  の時、リングの最高点と最下点との間には  $E - U(\theta) = 0$  となる点  $\theta = \theta_0$  がある。ビーズはこの間で往復運動をおこなうことになる。 $p = ma^2\dot{\theta}$  は  $p = 0$  を横切る閉曲線になる。

さらに  $E = 2mga$  の時式 5.22 から  $\omega_0^2 = g/a$  を代入し、

$$\begin{aligned} E &= \frac{p^2}{2ma^2} - \frac{m}{2}a^2\omega^2 \sin^2 \theta + mga(1 - \cos \theta) \\ p^2 &= 2ma^2E + m^2a^4\omega^2 \sin^2 \theta - 2m^2ga^3(1 - \cos \theta) \\ &= m^2a^4(\omega^2 \sin^2 \theta + 2\omega_0(1 + \cos \theta)) \end{aligned}$$

となるので

$$p = \pm ma^2 \sqrt{\omega^2 \sin^2 \theta + 2\omega_0^2(1 + \cos \theta)}$$

が得られる。これは不動点  $P(\pm\pi, 0)$  で交差し、P 点通過後は運動は一意に決まらなくなるように見えるが実際に P 点に到達する時間は  $\theta = \pi$  の近くでは  $\theta = \pi - \phi$  として

$$p = ma^2 \sqrt{\omega^2 + \omega_0^2} \phi = -ma^2 \frac{d\phi}{dt}$$

正準方程式 5.23 から

$$t = -\frac{1}{\sqrt{\omega^2 + \omega_0^2}} \int^0 \frac{d\phi}{\phi} \sim \infty$$

となる。従って次の図のように経路は式を満たす 2 つの曲線  $c_2, c_2'$  が分離枝 (separatrix) と呼ばれる。

## 6 ケプラーの法則

3次元の空間において点状の湧き出しから放射的に力線がでていければその強度、(密度) は逆 2 乗則に従うことになる。

これは線源を完全に覆う面積が  $4\pi r^2$  であることと関連している。この逆 2 乗則がどこまで成立するかは重要な問題で後節で取り扱う。ティゴ・ブラーエの詳細な観測結果からケプラーが導いた楕円に関する天体の運動の法則はニュートンの万有引力の法則にまとめられた。単順な円運動ではなく楕円運動が導かれたことが非常に複雑ではあるが多様な内容を生み出した。ここでのラグランジアンは単純に中心力のみによる運動を考え、デカルト座標で

$$L = T - U = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x, y, z)$$

であり、これから Newton の運動方程式

$$m\ddot{x} = -\partial_x U, \quad m\ddot{y} = -\partial_y U, \quad m\ddot{z} = -\partial_z U$$

であるが極座標  $(r, \theta, \phi)$  を用いたほうが便利である。これには次の変換則

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta$$

を用いればよいが、この時、運動方程式ではなく、ラグランジュの方程式が有用である。つまり次のように線要素を考えればよい。

$$\begin{aligned} (d\mathbf{r})^2 &= (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 \\ &= (dr)^2 + r^2(d\theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta (d\phi)^2 \end{aligned}$$

これからすぐにラグランジアンは

$$L = \frac{m}{2} \left\{ \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 (\sin^2 \theta) \dot{\phi}^2 \right\} - U(r, \theta, \phi)$$

となるのでラグランジュの方程式から次の運動方程式が導ける。

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{\partial U}{\partial r} + mr \left\{ \dot{\theta}^2 + (\sin^2 \theta) \dot{\phi}^2 \right\}$$

$$m \frac{d(r^2 \dot{\theta})}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \theta} + mr^2 (\sin \theta \cos \theta) \dot{\phi}^2$$

$$m \frac{d(r^2 (\sin^2 \theta) \dot{\phi})}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \phi}$$

さらにこれを回転座標系  $\xi, \eta$  で次のように変換する。

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

t で微分すると

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \\ &= \omega \begin{pmatrix} -\sin \omega t & \cos \omega t \\ -\cos \omega t & -\sin \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \omega \eta \\ -\omega \xi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \dot{\xi} - \omega \eta \\ \dot{\eta} + \omega \xi \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるので2次元でのラグランジアンは

$$L = T - U = \frac{m}{2} \left\{ (\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) - 2\omega (\dot{\xi}\eta - \dot{\eta}\xi) + \omega^2 (\xi^2 + \eta^2) \right\} - U(\xi, \eta)$$

これからラグランジュの方程式は

$$m\ddot{\xi} = -\partial_{\xi} U + 2m\omega\dot{\eta} + m\xi\omega^2$$

$$m\ddot{\eta} = -\partial_{\eta} U - 2m\omega\dot{\xi} + m\eta\omega^2$$

が得られる。第2項はコリオリ力 (Coriolis Force) 第3項は遠心力 (centrifugal Force) であり、いずれも慣性力 (inertial Force) である。

このような慣性力が出てくるのは Newton の運動方程式が共変的でないことによる。ラグランジュの方程式はこれに対し、共変的にかかっているため座標系によりその形が不変である。

## 7 主軸変換

前節での共変性の必要についてここでは固有値との関係をみていこう。  
楕円、双曲線の方程式を次のようにおく。

$$C: \alpha x^2 + \beta y^2 = 1$$

これを行列表示すると次のようになる。

$$(x, y) \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$$

標準形を  $C$  として一般化し、

$$(x, y) D \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 \tag{7.1}$$

ただし、行列  $D$  を

$$D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix}$$

で定義しよう。すると図のように半長軸  $a$  が半短軸  $b$  が

$$a = \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{\alpha_4}}, \quad \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

になる。

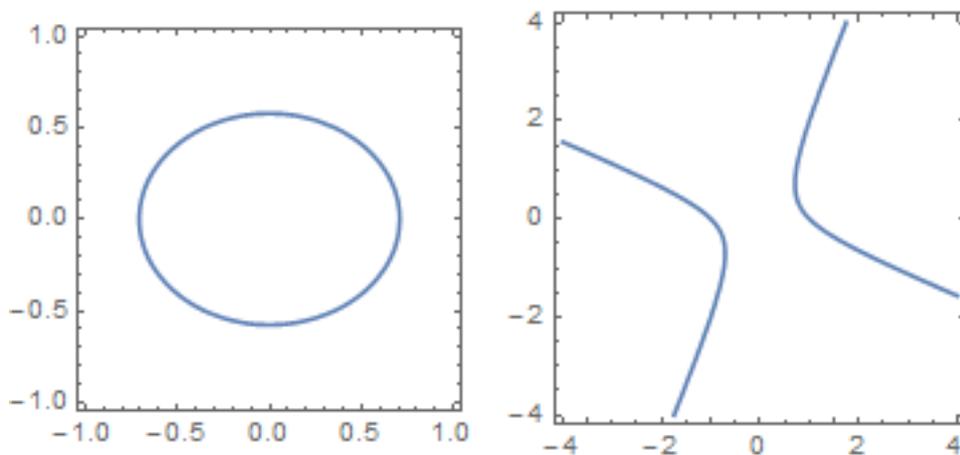


図 7.1:  $\alpha_1 = 2, \alpha_4 = 3$  の楕円と  $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  の双曲線

一般に 2 次形式の多項式  $F(x_1, x_2)$  は行列の対角化によって楕円形式  $G(x_1, x_2)$  に変換することができる。

$$F(x_1, x_2) = x_1^2 + ax_1x_2 + x_2^2 \rightarrow G(x'_1, x'_2) = \frac{x_1'^2}{a} + x_2'^2$$

このような変換を主軸変換という。主軸変換をする行列の一般的な形を求めてみよう。  
はじめに、図のような曲線の回転を考える。標準形  $C$  を  $C'$  に  $-\theta$  だけ回転させる。

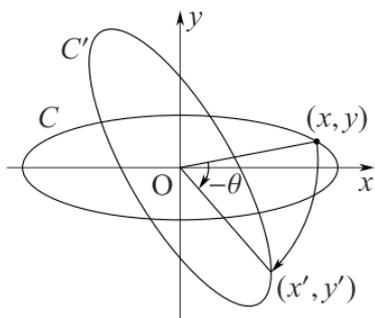


図 7.2: 2次元空間での回転

この変換は次のような回転  $R$  で表される。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R_{-\theta} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (7.2)$$

$$R_{-\theta} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

回転の逆関数は反対向きの回転になるから

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R_{\theta} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad (7.3)$$

転置について  $(AB)^t = B^t A^t$  が成り立つから

$$\begin{aligned} (x, y) &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^t = \left( R_{\theta} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right)^t = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}^t R_{\theta}^t \\ &= (x', y') R_{\theta}^T \end{aligned}$$

これを式 7.1 に代入すると

$$(x', y') R_{\theta}^t D R_{\theta} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 1$$

ここで

$$D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \quad A = R_{\theta}^T D R_{\theta} = \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha + \sin^2 \beta & -\sin(\alpha - \beta) \cos(\alpha - \beta) \\ -\sin(\alpha - \beta) \cos(\alpha - \beta) & \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha \end{pmatrix}$$

のように回転行列を使って表すと  $\alpha = \beta$  の時に対角化されることがわかる。

また、逆に対角行列を回転行列を用いて一般的な行列を作り出すことができる。

## 7.1 基底変換

行列の対角化を考える前に基底になる単位ベクトルの変換を見ておこう。

式 7.1 を次のように単位ベクトルで表現する。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x \mathbf{e}_1 + y \mathbf{e}_2$$

式 7.3 から

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R_\theta \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R_\theta \left( x' \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y' \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

とかけるので

$$\mathbf{a} = R_\theta \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{b} = R_\theta \mathbf{e}_2$$

とおくとこの関係式は

$$x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 = x'\mathbf{a} + y'\mathbf{b}$$

とかける。これは図のように単位ベクトルの組を  $\theta$  だけ回転させている。

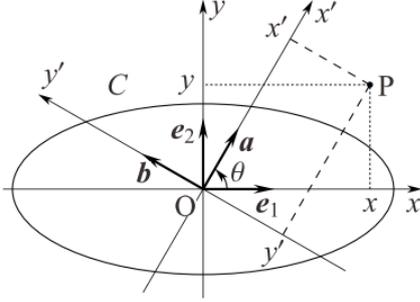


図 7.3:

これは次のような標準基底の回転を用いて表すことができる。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}_\theta = x'\mathbf{a} + y'\mathbf{b}$$

よって  $C'$  は

$$C' : (x', y') R_\theta^T D R_\theta \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 1 \rightarrow (x', y')_\theta D \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}_\theta = 1$$

$C'$  の軸は座標軸と角  $-\theta$  だけずれているので標準基底を  $-\theta$  だけ回転させてできる基底を

$$R_{-\theta} \mathbf{e}_1, R_{-\theta} \mathbf{e}_2$$

とすればこの基底を用いれば

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = x'\mathbf{e}_1 + y'\mathbf{e}_2 = uR_{-\theta} \mathbf{e}_1 + vR_{-\theta} \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_{-\theta}$$

また、 $R_\theta^t = R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$  とかけるから

$$A = R_\theta^t D R_\theta$$

$$A' = R_\theta A R_{-\theta} = R_\theta (R_\theta^t D R_\theta) R_{-\theta} = D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \quad (7.4)$$

となり、 $A'$  は対角化できる。 $C'_{-\theta}$  は

$$C'_{-\theta} : (u, v)_{-\theta} A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_{-\theta} = 1 \Leftrightarrow (u, v) R_{-\theta}^T A R_{-\theta} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 1 \Leftrightarrow (u, v) A' \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 1$$

と表すことができる。

## 7.2 行列の対角化

では一般に行列の対角化を考えてみよう。はじめに  $A$  は一般的な行列として、次のような基底  $(u, v)$  を選ぶ

$$C'_{-\theta} : (u, v)A' \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 1$$

これは、式 7.4 から、もし

$$A' = D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

であれば

$$(u, v)_{-\theta} A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_{-\theta} = 1$$

である。そこで基底を

$$\mathbf{a} = R_{-\theta}\mathbf{e}_1, \mathbf{b} = R_{-\theta}\mathbf{e}_2$$

とする。  $R_{\theta}^t = R_{\theta}^{-1} = R_{-\theta}$  とかけるから

$$A\mathbf{a} = (R_{\theta}^t D R_{\theta}) R_{-\theta}\mathbf{e}_1 = R_{\theta}^t \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = R_{-\theta} \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha R_{-\theta} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \mathbf{a}$$

となり、次の固有方程式が成立する。

$$A\mathbf{a} = \alpha \mathbf{a}$$

つまり、行列の演算がスカラー倍を生成したことになる。

同様に  $\mathbf{b}$  についても

$$A\mathbf{b} = (R_{\theta}^t D R_{\theta}) R_{-\theta}\mathbf{e}_2 = R_{\theta}^t \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = R_{-\theta} \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix} = \beta R_{-\theta} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta \mathbf{b}$$

$$A\mathbf{b} = \beta \mathbf{b}$$

が成り立つ。つまり

$$A\mathbf{a} // \mathbf{a}$$

$$A\mathbf{b} // \mathbf{b}$$

の平行関係も満たす。これらが固有値と固有ベクトルの関係であった。

例えば未知の曲線として対角成分を持つ  $A$  を用いて

$$C = (x, y)A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$$

を考える。ただし、

$$A^t = (R_{\theta}^t D R_{\theta})^t = R_{\theta}^t D (R_{\theta})^t = A$$

が満たされるとする。これはこの行列  $A$  が対称行列であることを意味している。

また、一般に

$$P^t P = I$$

を満たせば、この行列  $P$  は直交行列という。この変換が直交変換であるが、大切なのは直交変換  $f_P$  では次のように長さ保たれることである。

$$\left| f_P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right|^2 = \left( P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)^t P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x, y) P^t P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right|^2$$

直交変換では大きさや形をかえない。

実際に正規直交基底として

$$P\mathbf{e}_1 = \mathbf{a}, \quad P\mathbf{e}_2 = \mathbf{b}, \quad (|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|)$$

を選ぶと標準基底のベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = u\mathbf{a} + v\mathbf{b} = uP\mathbf{e}_1 + vP\mathbf{e}_2 = P(u\mathbf{e}_1 + v\mathbf{e}_2) = P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

よって未知の曲線は次のようにおける。

$$C = (u, v)_P A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_P = 1 \tag{7.5}$$

ただし、

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_P = u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$$

に変換される。ここで  $P$  をうまく選び、基底を  $A$  の固有値になるようにする。すなわち

$$A\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a}, \quad A\mathbf{b} = \beta\mathbf{b}$$

が成り立てば

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_P &= A(u\mathbf{a} + v\mathbf{b}) = u\alpha\mathbf{a} + v\beta\mathbf{b} = u\alpha P\mathbf{e}_1 + v\beta P\mathbf{e}_2 \\ &= P(u\alpha\mathbf{e}_1 + v\beta\mathbf{e}_2) \end{aligned}$$

となる。ここで

$$D \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$D \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を満たす行列  $D$  を求めると

$$D = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$$

とおけば、

$$p = \alpha, q = r = 0, s = \beta$$

$$D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

となるから

$$A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_P = u\alpha P\mathbf{e}_1 + v\beta P\mathbf{e}_2 = P(uD\mathbf{e}_1 + vPD\mathbf{e}_2) = PD \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

の関係を満たす。よって式 7.5 はから曲線の式が

$$(u, v)_P A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_P = 1 \rightarrow (u, v)_P \left( A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_P \right) = 1 \rightarrow (u, v) P^t \left( P D \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right) = 1 \rightarrow (u, v) D \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 1 \\ = \alpha u^2 + \beta v^2 = 1$$

と変形され、対角化される。つまり

$$D = P^{-1} A P$$

でつくられる対角化行列は行列  $A$  の固有ベクトルを並べた行列にとればよいことがわかる。従って、行列  $A$  の固有値、固有ベクトルが求まればよいことになる。

### 7.3 固有値・固有ベクトル

次の関係が見ただれる場合、固有方程式と呼んだ。零ではない単位ベクトル  $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$  を用意して

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, |\mathbf{p}| = 1$$

$$A\mathbf{p} = \lambda\mathbf{p}$$

この解法は次のように変形し、 $I$  は単位行列として

$$(A - \lambda I)\mathbf{p} = \mathbf{0} \tag{7.6}$$

となる零点を満たす場合を考える。両辺に左から  $(A - \lambda I)^{-1}$  をかけると  $\mathbf{p} = \mathbf{0}$  となり矛盾するので  $(A - \lambda I)$  に逆行列は存在しない。行列式は

$$\det|A - \lambda I| = 0$$

を満たしていないといけないことになる。これを特性方程式という。

つまり、状態ベクトルの平行伸展を表すのが固有方程式だから単位ベクトルとの間に面積を作ってはいけな  
いわけである。物理的にはこの面積が後に重要になる。

さて、 $A$  は対称行列だから一般に

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$$

とおける。よって特性方程式は次のような固有値  $\lambda$  の 2 次方程式になる。

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ b & d - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - b^2 = 0$$

よって解  $\alpha, \beta$  が次のように求まる。

$$\alpha, \beta = \lambda = \frac{1}{2} \left( a + d \pm \sqrt{(a - d)^2 + 4b^2} \right)$$

これから固有ベクトルを求めることができ式 7.6 に代入し、

$$\begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ b & d - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{0} \rightarrow (a - \lambda)x + by = 0 \text{ or } bx + (d - \lambda)y = 0$$

ただし、 $A$  には対称行列という制限があったので 2 つの式は同じ内容を表し、これからは比

$$x : y = b : (\lambda - a)$$

しか得られないことに注意する。つまり、向きの情報しかない。  
ベクトルの長さは今、単位ベクトルであるから

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} b \\ \lambda - a \end{pmatrix}$$

としておいて

$$k\sqrt{b^2 + (\lambda - a)^2} = \pm 1 \quad (7.7)$$

をみたま  $k_\alpha, k_\beta$  を決めればよい、結果として

$$\mathbf{a} = k_\alpha \begin{pmatrix} b \\ \alpha - a \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b} = k_\beta \begin{pmatrix} b \\ \beta - a \end{pmatrix}$$

となる。ただし、式 7.7 から  $\pm$  符号の不定性が残る。

## 7.4 テンソルの主軸変換

2 階対称テンソル  $T_{ij}$  を考える。

$$T_{ij} = T_{ji}$$

$T_{ij}$  の異なる固有値を  $\lambda_p, \lambda_q$  とし、対応する固有ベクトルを  $A_i^p, A_i^q, (p, q = 1, 2, 3)$  とする。

$$T_{ij}A_j^p = \lambda_p A_i^p$$

$$T_{ij}A_j^q = \lambda_q A_i^q$$

が成り立つからそれぞれに  $A_i^q, A_i^p$  をかけて、差をとると

$$T_{ij}A_j^p A_i^q - T_{ij}A_j^q A_i^p = (\lambda_p - \lambda_q) A_i^p A_i^q$$

が得られる。  $\lambda_p - \lambda_q \neq 0$  だから

$$A_i^p A_i^q = 0$$

を表すことになり。これは状態ベクトルが直交していることを意味している。つまり、対称テンソルの固有ベクトルは直交している。

従って直交座標系をテンソルの主方向にとればテンソルの作用を簡単にすることができるだろう。これは前節の行列の対角化に等しい。

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$$

とおくと次のような座標変換を主軸変換という。

$$\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A'_1 \\ A'_2 \\ A'_3 \end{pmatrix}$$

主軸変換によって状態ベクトルは向きを変えることなく定数倍される。我々はその定数を固有値として観測するわけである。さらに例えば  $z$  方向の固有値  $\lambda_3 = 0$  であると全て  $xy$  平面上のベクトルになる。これは零解の個数だけ縮退がおこることを意味している。

## 8 ネーターの定理

本章では特に断らない限り添え字  $i, j = 1, 2, 3$   $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$  を用いる。

### 8.1 ワイスの原理

先の式の第1項はハミルトンの原理、すなわち系の初期配位と最終配位を固定し停留点としてのラグランジュ方程式を導く。

いいかえると端点のみからの寄与に依存する経路が選ばれることである。この時、

$$\Delta I[q] = \left[ \sum_{i=1} p_i \Delta q^i - H_L \Delta t \right]_{t_1}^{t_2}$$

と書くことができる。これをワイスの原理 (**Weiss's principle**) という。

これを見るために短い時間間隔  $\epsilon$  の間に経路の作用積分を次のように近似する。

$$\begin{aligned} \tilde{I}[\tilde{c}_L] &= \int_{\tau}^{\tau+\epsilon} \langle \Theta_L | \tilde{c}'_L \rangle d\tau \\ &= \langle \Theta_L | \tilde{c}'_L \rangle \epsilon + O(\epsilon^2) \end{aligned}$$

曲線に沿った接ベクトルを  $v_\lambda = d/d\lambda$  として

$$\Delta \tilde{I}[\tilde{c}_L] = v_\lambda \left[ \langle \Theta_L | \tilde{c}'_L \rangle \right] \epsilon \Delta \lambda$$

が成り立つがワイスの原理によればこれが式 4.106 から

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{I}[\tilde{c}_L] &= [\langle \Theta_L | v_\lambda \rangle \Delta \lambda]_{\tau}^{\tau+\epsilon} \\ &= \frac{\partial}{\partial \tau} \{ \langle \Theta_L | \tilde{c}'_L \rangle \} \epsilon \Delta \lambda \\ &= \tilde{c}'_L [\langle \Theta_L | v_\lambda \rangle] \epsilon \Delta \lambda \end{aligned}$$

も成り立つので

$$\tilde{c}'_L [\langle \Theta_L | v_\lambda \rangle] = v_\lambda \left[ \langle \Theta_L | \tilde{c}'_L \rangle \right]$$

でなくてはならない。ここで前部でのリー括弧

$$\left[ \tilde{c}'_L, v_\lambda \right]_L = \left[ \frac{\partial}{\partial \tau}, \frac{d}{d\lambda} \right]_L$$

を用いれば

$$\begin{aligned} \langle d\Theta_L | \tilde{c}'_L, v_\lambda \rangle &= \tilde{c}'_L [\langle \Theta_L | v_\lambda \rangle] - v_\lambda \left[ \langle \Theta_L | \tilde{c}'_L \rangle \right] - \langle \Theta_L | \left[ \tilde{c}'_L, v_\lambda \right]_L \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

であるがこの結果は先の式 4.112 の拡大配位空間でのラグランジュの方程式

$$\langle d\Theta_L | \tilde{c}'_L, \circ \rangle = 0$$

である。結局ワイスの原理によれば作用積分は端点の座標のみの関数である。

この関数をハミルトンの主関数 (Hamilton's principal function) という。

この関数を  $S_H(q(t), t, q(t_0), t_0)$  として改めてハミルトンの原理を表すと

$$S_H = I_{cl} = \int_{t_0}^t L(q, \dot{q}, t) dt$$

$$\frac{\partial S_H}{\partial q^i} = p_i(q, \dot{q}, t)$$

$$\frac{\partial S_H}{\partial t} = -H_L(q, \dot{q}, t)$$

これからハミルトン・ヤコビ方程式

$$\mathcal{H}\left(x, \frac{\partial S}{\partial t}, t\right) + \frac{\partial S(x, t)}{\partial t} = 0 \quad (8.1)$$

が得られる。これは後にシュレディンガー方程式として、量子論の基礎となる。古典的にポテンシャルと力との間に空間的に

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -F(x)$$

が成りたったが、作用はこれの時間版であり、ハミルトニアンを決める。4元的に拡大すると

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial x^\mu} = -\mathcal{H}_\mu$$

のような関係が導けそうであるが、これは第9部で考えよう。

## 8.2 ネーターの第一定理

$\delta q^i$  と  $\delta t$  は互いに直交しながらも共通のパラメータを持つとしよう。

先に端点を固定しない場合の作用積分をみた。これを一般化してみよう。式4.6から時間と空間の微小変化は同調していなくてはならないから次のように表す。

$$\delta q^i(t, \epsilon) = q^{i'}(t') - q^i(t)$$

ただし  $\epsilon$  を時間変化の微小の共通パラメータとしておいた。

$$t' = t + \delta t(t, \epsilon) \quad (8.2)$$

このパラメータが0の位置が共に原点であるとして

$$\delta q^i(t, 0) = \delta t(t, 0) = 0$$

とする。そこで作用積分  $J$  を次のようにおく。

$$J[q', t'] = \int_{t_1'}^{t_2'} L' dt'$$

変分を1次までとることになると端点では  $t_1' = t_1, t_2' = t_2$  とすると

$$\begin{aligned} \delta J[q, t] &= \int_{t_1'}^{t_2'} L' dt' - \int_{t_1}^{t_2} L dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left( L' \frac{dt'}{dt} - L \right) dt \end{aligned} \quad (8.3)$$

式8.2から次の関係があるから

$$\frac{dt'}{dt} = 1 + \frac{d}{dt} \delta t \quad (8.4)$$

式 8.3 は

$$\delta J[q, t] = \int_{t_1}^{t_2} dt (L' - L + L \frac{d}{dt} \delta t) \quad (8.5)$$

となる。次に  $L'$  を展開する。このとき  $q$  は  $t$  の関数なので

$$\delta \dot{q}^i = \frac{d}{dt} \delta q^i$$

とはならない。そこで  $t$  を固定した変分を次のように表す。

$$\bar{\delta} q^i(t) = q'^i(t) - q^i(t) \quad (8.6)$$

よって

$$\bar{\delta} \dot{q}^i(t) = \frac{d}{dt} \bar{\delta} q^i \quad (8.7)$$

が成り立つので

$$\begin{aligned} \delta q^i(t) &= q'^i(t) - q^i(t) \\ &= q'^i(t') - q^i(t') + q^i(t') - q^i(t) \\ &= \bar{\delta} q^i(t') + \dot{q}^i(t) \delta t \\ &= \bar{\delta} q^i(t) + \dot{q}^i(t) \delta t \end{aligned} \quad (8.8)$$

最後の変形では  $t$  の 2 次を無視した。

よって

$$\begin{aligned} \delta \dot{q}^i(t) &= \dot{q}'^i(t') - \dot{q}^i(t) \\ &= \frac{dq'^i(t')}{dt} \frac{dt}{dt'} - \dot{q}^i(t) \end{aligned}$$

式 8.4、式 8.8 より

$$\begin{aligned} &= \frac{dq'^i(t')}{dt} (1 - \frac{d}{dt} \delta t) - \dot{q}^i(t) \\ &= \frac{d}{dt} (q'^i(t') - q^i(t)) - \frac{dq'^i(t')}{dt} \frac{d}{dt} \delta t \\ &= \frac{d}{dt} (\bar{\delta} q^i(t) + \dot{q}^i(t) \delta t) - \dot{q}^i \frac{d}{dt} \delta t \end{aligned} \quad (8.9)$$

よって式 8.9 の最後の項は無視すると次の関係式が得られる。

$$\delta \dot{q}^i(t) = \bar{\delta} \dot{q}'^i(t') + q(\ddot{t}) \delta t \quad (8.10)$$

式 8.8 と式 8.10 から  $L'$  は 1 次までで次のように展開できることになる。

$$L' = L + \frac{\partial L}{\partial q^i} \delta q^i(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta \dot{q}^i(t)$$

$$L' = L + \frac{\partial L}{\partial q^i}(\bar{\delta}q^i(t) + \dot{q}^i(t)\delta t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}(\bar{\delta}\dot{q}^i(t) + \dot{q}(\dot{t})\delta t)$$

$$L' = L + \frac{\partial L}{\partial q^i}\bar{\delta}q^i(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\bar{\delta}\dot{q}^i(t) + \frac{\partial L}{\partial t}\delta t$$

よって作用積分の変分は式 8.5 から

$$\begin{aligned} \delta J[q, t] &= \int_{t_1}^{t_2} dt(L' - L + L \frac{d}{dt}\delta t) \\ \delta J[q, t] &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \left( \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \right) \delta q^i + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \bar{\delta}q^i + L\delta t \right) \right\} \end{aligned} \quad (8.11)$$

座標と時間を共に変化させた作用の変分は括弧内の第 1 項であるラグランジュの方程式に加えて第 2 項が入ってくる。作用積分が不変であることは

$$\delta J[q, t] = 0 \quad (8.12)$$

が成り立つから第 2 項に関して式 8.8 から

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \bar{\delta}q^i + L\delta t \right) = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i - \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - L \right) \right\} \delta t = 0 \quad (8.13)$$

が得られる。このように作用積分から時間的な保存量が導ける。これをネーターの第一定理という。

ラグランジュの方程式を消さないで残せば式 4.50 と対象的に次のように  $\delta q^i$  と  $\delta t$  の項に分けられる。

$$\frac{d\Theta}{dt} = \left( \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \right) \delta q^i + \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i - \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - L \right) \right\} \delta t \quad (8.14)$$

となるので作用積分の不変性から  $\Theta$  は時間的な保存量になる。

独立な微小  $\alpha$  個のパラメータにより時間と空間の変分は共通係数を持ち、次のような連続関数で表そう。

$$\delta q^i = \epsilon^\alpha \phi_\alpha^i(q, \dot{q}, t) \quad (8.15)$$

$$\delta t = \epsilon^\alpha \tau_\alpha(t) \quad (8.16)$$

この時  $\alpha$  は独立な  $R$  個のパラメータを表す。

### 8.2.1 循環座標

ラグランジアン  $L$  に依存しない座標  $q_a$  が見つければこれを循環座標という。ラグランジュの方程式

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{dL}{dq_i} \right) - \frac{dL}{dq_i} = 0$$

において  $i = a$  の時第 2 項が 0 になるならばすぐに正準方程式から

$$\frac{dL}{dq_a} = p_a = Const$$

であり、共役運動量は保存量になる。よって  $L$  がある特定の  $q^\nu$  を含まないなら  $q^\nu$  を循環座標という。この時  $q^\nu$  のみを定数だけ変化させるような変換で  $\dot{q}^\nu$  は不変になる。

$$q^\nu = q^\nu + \epsilon \quad (\dot{\epsilon} = 0)$$

$$\phi_i^\nu = \delta_i^\nu \quad \tau_i = 0$$

上式の  $\delta$  はクロネッカーの  $\delta$  である。これから次のように循環座標に共役な一般化運動量も保存する。

$$p_\nu = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\nu} = Const$$

例えば 2 次元空間で中心力のみ働くような調和振動子の場合のラグランジアンは次のようにあからさまに  $\theta$  をまない。これが循環座標になるから

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r)$$

これから  $\theta$  に共役な運動量は

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$$

となりこれは角運動量の保存を表している。

ところがネーターの定理にもあいまいさを含めることができる。

つまり厳密に式 8.12 が成り立たなくても次のように積分記号の中で時間の全微分になっている場合

$$\delta J[q, t] = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dF(q, t)}{dt} dt = F(q(t_2), \epsilon) - F(q(t_1), \epsilon) \quad (8.17)$$

この時  $\delta J$  は準不変という。この場合は式 8.13 に変わって

$$\frac{d(\Theta - F)}{dt} = 0 \quad (8.18)$$

となる。つまり保存量は  $\Theta - F$  である。式 8.17 から両端では  $\epsilon$  は 0 となるので  $F$  は効かない。古典的なガリレイ変換の場合でみる。n 質点系において時間の一斉変換は

$$t' = t + \epsilon$$

である。この時

$$\phi^i = 0$$

$$\tau = 0$$

$$E = Const$$

これから式 4.47 から

$$L = \sum_{j,k}^n \frac{1}{2} m_j \dot{r}_j^2 - V(|r_j - r_k|) \quad (8.19)$$

この時、

$$r_j \mapsto r'_j = r_j + \epsilon \quad (8.20)$$

とすると

$$\phi^i = 1 \quad (8.21)$$

$$\tau = 0 \quad (8.22)$$

$$\delta r_j = \epsilon \quad (8.23)$$

式 4.47 から

$$\sum p_j = Const \quad (8.24)$$

を得る。つまり空間の微小変化に対する不変性が運動量保存則を導く。さらに 2 つの系が相対速度  $\epsilon$  で結ばれているとするとガリレイ変換は

$$\delta r_j = \epsilon t$$

$$\delta t = 0$$

よって式 8.19 から

$$\delta L = L' - L = \sum m_j \epsilon \dot{r}_j$$

となり右辺については全微分の形になっているので

$$F = \sum m_j \epsilon r \quad (8.25)$$

である。従って式 4.23 より

$$\Theta_L(t) = p_i(q, \dot{q}) \delta q^i(t) - E(q, \dot{q}) \delta t = \sum m_j \epsilon r_j t \quad (8.26)$$

となるので式 8.18 に対応する関係式は  $\epsilon$  が共通しているので

$$\frac{\Theta_L(t) - F}{\epsilon} = \sum m_j (r_j t - r_j) = Const \quad (8.27)$$

となり、これは系全体の運動量保存則を表している。

### 8.2.2 モーメント関数

先に見たように  $q^n$  が循環座標だとすると  $q^n$  の原点をずらしても  $q^n$  の値に変化はない。これはラグランジアンが次の変換に不変になった。

$$q^n \rightarrow Q^n = q^n + \tau \quad (8.28)$$

これは同時にこの  $q^n$  の方向への保存量があることであり、 $q^n$  に共役な運動量が保存される。このとき  $q^n$  には対称性があるという。ネーターの定理でみたようにこの対称性があれば対応した保存量がある。これは回転とか座標変換のような自明なものに限らず一般に成り立つことが重要である。

配位空間  $N$  上の点  $Q = q$  に連続なパラメータ  $\tau$  で恒等変換と連続的につながる微分可能な写像  $\phi$  を

$$\phi : N \rightarrow N : q \rightarrow \phi(\tau; q) \quad \phi(0; q) = q \quad (8.29)$$

とおく。すると配位空間  $N$  上に点  $Q$  を始点とする曲線が描かれる。この曲線上の点  $Q$  での接ベクトルは任意の関数  $h$  の方向微分を用いて

$$u_\tau[h(q)] = \frac{d}{d\tau} h(\phi(\tau; q))|_{\tau=0} = \frac{d}{d\tau} \phi^i(\tau; q)|_{\tau=0} \frac{\partial h(q)}{\partial q^i} \quad (8.30)$$

となる。最後の項には  $i$  での和が含まれていることに注意する。ここで写像  $\phi$  の  $\tau=0$  での微分係数を

$$\left. \frac{d\phi^i(\tau; q)}{d\tau} \right|_{\tau=0} = f^i(q)$$

とおくと次のような配位空間をつくる接ベクトルを定義できる

$$(u_\tau)_Q = f^i(q) \frac{\partial}{\partial q^i}$$

さらに点  $Q$  が  $N$  上をくまなく移動すれば  $N$  上にベクトル場

$$u_\tau = f^i(q) \frac{\partial}{\partial q^i} : Q \rightarrow (u_\tau)_Q \quad (8.31)$$

が得られる。そしてこの配位空間  $N$  から状態空間である接空間  $TN$  への写像とベクトル場が次のように導入できる。

$$\bar{\phi} : N \rightarrow TN : (q, \dot{q}) \rightarrow (\phi(\tau, q), \dot{\phi}(\tau, q))$$

$$\bar{u}_\tau = f^i(q) \frac{\partial}{\partial q^i} + \dot{f}^i(q) \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}$$

これが後節で見るファイバー束になる。

この時、 $\bar{u}_\tau$  の積分曲線に沿った方向微分が次のように表現できる。

$$\begin{aligned} \bar{u}_\tau[L(q, \dot{q})] &= \left( f^i(q) \frac{\partial}{\partial q^i} + \dot{f}^i(q) \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} \right) L(q, \dot{q}) \\ &= f^i(q) \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) + \dot{f}^i(q) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - f^i(q) \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} \right) \end{aligned}$$

これは式 8.29 の恒等変換とつながる写像  $\phi$  に対するラグランジアンの変化率を表している。

ここで

$$[L]_i = \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \quad (8.32)$$

とおく。これをオイラー微分という。

$$\bar{u}_\tau[L(q, \dot{q})] = \frac{d}{dt} \left( f^i(q) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) + f^i(q) [L]_i$$

これにより  $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = p_i$  とおくと次の恒等式が得られる。

$$\frac{d}{dt} (f^i(q) p_i) = \bar{u}_\tau[L] - f^i(q) [L]_i \quad (8.33)$$

これは式 4.23 と関係している。

$\phi$  に対し系が対称を持つと  $\phi$  が導く  $\bar{\phi}$  に対してラグランジアンは不変になる。すなわち次が成り立つとすると

$$L(q, \dot{q}) = L(\phi(\tau, q), \dot{\phi}(\tau, q))$$

このとき

$$\bar{u}_\tau[L(q, \dot{q})] = 0$$

$[L]_i = 0$  を満たす経路があり（これが後節の切断に相当する）式 8.33 より

$$F(q, \dot{q}) \equiv f^i(q) p_i(q, \dot{q}) = \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right]_{\partial \tau} = Const \quad (8.34)$$

となる。この  $F(q, \dot{q})$  をモーメント関数 (**momentum function**) という。

これは前節の 8.13 と関係している。  $\phi$  が導く  $\bar{\phi}$  に対してラグランジアンは不変であればモーメント関数は第一積分になる。

これはネーターの定理の別表現でもある。注意すべきは恒等変換の近く、いわば局所的なところでの不変性から保存量が得られていることである。

例えば次は恒等式として成り立つので

$$\frac{dL}{dt} - \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{d}{dt} \left\{ \dot{q}^i \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \right\} + \dot{q}^i [L]_i \quad (8.35)$$

よって

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - L \right) = -\dot{q}^i [L]_i - \frac{\partial L}{\partial t}$$

時間の平行移動が

$$q(t) \rightarrow q(t + \tau)$$

のようにおこなえば

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

なので  $[L]_i = 0$  ならば

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - L = \text{Const}$$

であり、第一積分になる。そこでハミルトニアンを

$$H \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - L \quad (8.36)$$

とおくわけである。つまりハミルトニアンは時間の対称性から導かれる。

### 8.2.3 N 次元調和振動子の隠れた対称性

対称性と保存則の関係をよく知られた調和振動子で考えよう。

$$L(q^k, \dot{q}^k) = \sum_k \frac{m}{2} \left\{ (\dot{q}^k)^2 - \omega^2 (q^k)^2 \right\}$$

$(q^i, q^j)$  の平面での無限小回転は

$$q^{i'} = q^i - \epsilon q^j$$

$$q^{j'} = q^j + \epsilon q^i$$

でありモーメント関数は式 8.34 より

$$\begin{aligned} M^{ij} &= \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} \left\{ \sum_k \frac{m}{2} \left\{ (\dot{q}^k)^2 - \omega^2 (q^k)^2 \right\} \right\} \right]_{\tau=0} \\ &= m(q^i \dot{q}^j - q^j \dot{q}^i) \end{aligned}$$

これは角運動量の成分で保存される。しかしこれ以外に次の  $q, \dot{q}$  が混合された変換

$$Q^k = q^k + \frac{\epsilon_{ij}}{2} (\dot{q}^i \delta^{kj} + \dot{q}^j \delta^{ki}) := q^k + \epsilon_{ij} \phi^{ijk}$$

とするとこの変換でラグランジアンの変化は

$$\begin{aligned}\delta[L] &= \epsilon_{ij} \left( \frac{\partial L}{\partial q^k} \phi^{ijk} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \phi^{ijk} \right) \\ &= \epsilon_{ij} \left( -\frac{\omega^2}{2} m (q^i \dot{q}^j + q^j \dot{q}^i) + \frac{1}{2} m (\ddot{q}^i \dot{q}^j + \ddot{q}^j \dot{q}^i) \right)\end{aligned}$$

となり、調和振動子の対称性が浮き彫りになる。また、 $\omega$  の時間推進としての作用が読みとれるかたちで表される。さらにラグランジュの方程式が成り立てば

$$\ddot{q}^i = -\omega^2 q^i$$

となるわけだからこれは次のようにまとまる。

$$\begin{aligned}\delta[L] &= -\epsilon_{ij} m \omega^2 (q^i \dot{q}^j + q^j \dot{q}^i) \\ &= -\frac{d}{dt} (\epsilon_{ij} m \omega^2 q^i q^j)\end{aligned}$$

これによって全微分で表すことができたので  $t$  方向へのネーターカレントが式 8.13 より次のように求まる。

$$\begin{aligned}J^{ij} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} f^{ijk} - \int \delta[L] dt \\ &= m \dot{q}^k \times \frac{1}{2} (\dot{q}^i \delta^{kj} + \dot{q}^j \delta^{ki}) + m \omega^2 q^i q^j \\ &= m (\dot{q}^i \dot{q}^j + \omega^2 q^i q^j)\end{aligned}$$

前節 8.27 に対応してこれはエネルギー保存則である。

### 8.3 ネーターの第二定理

これまで式 8.15 のように  $\epsilon$  を全体に共通なパラメータとして利用してきた。そこで次にこの  $\epsilon$  を座標 (時間) に依存したものとしてみよう。先のモーメント関数を考慮し、式 8.15、式 8.16 の代わりに次のように置く。

$$\delta q^i = \epsilon^\alpha(t) \phi_\alpha^i(q, \dot{q}) + \dot{\epsilon}^\alpha(t) \psi_\alpha^i(q, \dot{q}) \quad (8.37)$$

$$\delta t = \epsilon^\alpha(t) \tau_\alpha(q, \dot{q}) \quad (\alpha = 1 \sim R) \quad (8.38)$$

1 回微分までをここでは考えた。作用積分も同じように 1 次微分まで考える。ただし、ここでも端点を仮定し、作用積分が準不変である条件を次のようにおこう。

$$\delta J[q, t] = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \{ \epsilon^\alpha(t) \zeta_\alpha(q, \dot{q}) + \dot{\epsilon}^\alpha \eta_\alpha(q, \dot{q}) \} \quad (8.39)$$

ただし、 $\zeta$ 、 $\eta$  は式 8.18 の  $\Theta$  や  $F$  のように  $L$  によって決められる関数になる。

この場合は単純に保存則だけでなく、局所的な影響を加えているのでラグランジュの方程式にも影響が出てくると考えられる。

したがって  $N$  個の運動方程は独立ではなくその解  $q^i$  は一義には決まらない。いわば何らかの局所的な相互作用が考えられる。

式 8.11 に代入すると

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \left[ \epsilon^\alpha \left\{ [L]_i (\phi_\alpha^i - \dot{q}\tau_\alpha) - \frac{d}{dt} (\psi_\alpha^i [L]_i) \right\} + \frac{d}{dt} \{ \epsilon^\alpha \psi_\alpha^i [L]_i + p_i \delta q^i - E\delta t - \epsilon^\alpha(t)\zeta_\alpha + \dot{\epsilon}^\alpha \eta_\alpha \} \right] = 0$$

となる。 $\epsilon^\alpha(t)$  は任意なので端点において次のように式 4.58、8.38、8.37 から

$$\epsilon^\alpha(t_1) = \epsilon^\alpha(t_2) = \dot{\epsilon}^\alpha(t_1) = \dot{\epsilon}^\alpha(t_2) = 0 \quad (8.40)$$

が成り立つ。 $\epsilon^\alpha(t)$  の端点以外での任意性から  $\alpha = 1 \sim R$  について

$$[L]_i (\phi_\alpha^i - \dot{q}\tau_\alpha) - \frac{d}{dt} (\psi_\alpha^i [L]_i) = 0 \quad (8.41)$$

を得る。式 8.38、8.37 から端点以外でも次を満たさないといけない。

$$\epsilon^\alpha \psi_\alpha^i [L]_i + p_i (\epsilon^\alpha(t) \phi_\alpha^i(q, \dot{q}) + \dot{\epsilon}^\alpha(t) \psi_\alpha^i(q, \dot{q})) - E \epsilon^\alpha(t) \tau_\alpha(q, \dot{q}) - \epsilon^\alpha(t) \zeta_\alpha - \dot{\epsilon}^\alpha \eta_\alpha = 0$$

$$\epsilon^\alpha (\psi_\alpha^i [L]_i + p_i \phi_\alpha^i(q, \dot{q}) - E \tau_\alpha(q, \dot{q}) - \zeta_\alpha) + \dot{\epsilon}^\alpha (p_i \psi_\alpha^i(q, \dot{q}) - \eta_\alpha) = 0$$

ここで  $\epsilon^\alpha, \dot{\epsilon}^\alpha$  は独立なので括弧の中はそれぞれ 0 とおける。そこで得られた次の関係式がネーターの第 2 定理である。

$$\psi_\alpha^i [L]_i + p_i \phi_\alpha^i(q, \dot{q}) - E \tau_\alpha(q, \dot{q}) - \zeta_\alpha = 0 \quad (8.42)$$

$$p_i \psi_\alpha^i(q, \dot{q}) - \eta_\alpha = 0 \quad (8.43)$$

この式は

式 8.42 からラグランジュの方程式  $[L]_i = 0$  とおけば

$$p_i \phi_\alpha^i(q, \dot{q}) - E \tau_\alpha(q, \dot{q}) - \zeta_\alpha = 0 \quad (8.44)$$

が得られる。この関係式には  $\ddot{q}$  が含まれない。ラグランジュの方程式の拘束条件であり 1 次拘束条件という。また式 8.43 はラグランジュの方程式に無関係で  $L$  から決まる。これを 2 次拘束条件という。これらはゲージ理論と関係している。

さらに式 8.42 は  $\dot{q}$  を含むが  $q$  の微分がそれぞれ独立であるとする他に 2 階微分をもつものがないので  $\ddot{q}$  の係数は 0 である。よって式 4.28 からヘシアン行列について

$$A_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \quad (8.45)$$

$$A_{ij} \psi_\alpha^i = 0 \quad (8.46)$$

よって  $\psi_\alpha^i = 0$  でなければヘシアン行列は最高  $R$  個のゼロ固有値とゼロ固有ベクトルを持つ。これから  $A_{ij}$  の rank は  $N - R$  である。

ただし式 8.41 から

$$\phi_\alpha^i - \dot{q}\tau_\alpha \neq 0 \quad (8.47)$$

でなければならない。ヘシアンが正則でなければ  $p_i$  は  $\dot{q}$  について独立ではない。これは位相空間の間に  $R$  個の関係式が生じることを示している。

### 8.3.1 自由度 2 の系の例

例えば簡単な自由度 2 の次の系を考えよう。

$$L = \frac{1}{2}(\xi^1 - q^2)^2$$

正準運動量は

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \xi^1}$$
$$p_2 = 0$$

よってこの時の拘束条件は 1 つのみで

$$\Phi = p_2 = 0$$

また、

$$\delta q^1 = \epsilon(t)$$
$$\delta q^2 = \dot{\epsilon}(t)$$

とおくと式 8.38、8.37 から

$$\phi^1 = 1, \psi^1 = 0$$
$$\phi^2 = 0, \psi^2 = 1$$

よって式 8.44 から

$$p_1 = 0$$

を得るがこれは 2 次拘束条件である。

### 8.3.2 電磁場の例

もう一つ電磁場を例にとってみよう。電磁場のラグランジュ関数を  $x = 0, 1, 2, 3$  として

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} \right)^2 = (\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu)^2$$

とおくとこれは

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \epsilon(x)$$

の変換で不変である。共役運動量は

$$\pi_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{A}_\mu} = \partial_0 A_\mu - \partial_\mu A_0 \quad (8.48)$$

これから 1 次拘束条件は

$$\Phi = \pi_0 = 0 \quad (8.49)$$

である。

## 8.4 4次元での作用積分

ここで式を拡張して4次元での作用積分を考える。一般的な場  $\phi$  を次のようにおく

$$\partial_\mu \phi(x) = (\dot{\phi}/c, \nabla \phi) \quad (8.50)$$

またラグランジアン密度は  $\mathcal{L}$  は

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\partial_\mu \phi(x), \phi) \quad (8.51)$$

$$L = \int \mathbf{d}^3 \mathbf{x} \mathcal{L}(\partial_\mu \phi(x), \phi) \quad (8.52)$$

さらに作用  $J$  は次のようになる。

$$J = \int_\Omega d^4 x \mathcal{L}(\partial_\mu \phi(x), \phi) \quad (8.53)$$

次のように座標と場の無限小変化をおく。

$$x^{\mu'} = x^\mu + \delta x^\mu \quad (8.54)$$

$$\phi'(x') = \phi(x) + \delta \phi(x) \quad (8.55)$$

また同じ座標での変化量、リー微分を次のように定義できた。

$$\delta_L \phi(x) = \phi'(x) - \phi(x) = \delta \phi(x) - \delta x^\mu \partial_\mu \phi(x) \quad (8.56)$$

よって

$$\delta J = \int_{\Omega'} d^4 x' \mathcal{L}(\partial'_\mu \phi'(x'), \phi'(x')) - \int_\Omega d^4 x \mathcal{L}(\partial_\mu \phi(x), \phi) \quad (8.57)$$

変換の Jacobian は式 8.54 から

$$\begin{aligned} d^4 x' &= \left| \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu} \right| d^4 x = \left| \frac{\partial x^{\mu'} + \delta x^{\mu'}}{\partial x^\nu} \right| d^4 x \\ &= \det(\delta_\mu^\nu + \partial_\nu \delta x^\mu) d^4 x = (1 + \partial_\mu \delta x^\mu) d^4 x \end{aligned}$$

であり、さらに式 8.55 から

$$\begin{aligned} \partial'_\mu \phi'(x') &= \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\mu'}} (\partial_\nu \phi(x) + \partial_\nu \delta \phi(x)) = \frac{\partial x^{\nu'} - \delta x^{\nu'}}{\partial x^{\mu'}} (\partial_\nu \phi(x) + \partial_\nu \delta \phi(x)) \\ &= (\delta_\mu^\nu - \partial_\mu \delta x^\nu) (\partial_\nu \phi(x) + \partial_\nu \delta \phi(x)) = \partial_\mu \phi(x) + \partial_\mu \delta \phi(x) - (\partial_\mu \delta x^\nu) \partial_\nu \phi(x) \end{aligned}$$

となる。これらを式 8.57 に代入する  $\delta$  の2次以上を無視すると

$$\begin{aligned} \delta J &= \int_\Omega (1 + \partial_\mu \delta x^\mu) d^4 x \{ \mathcal{L}(\partial_\mu \phi(x) + \partial_\mu \delta \phi(x) - (\partial_\mu \delta x^\nu) \partial_\nu \phi(x), \phi(x) + \delta \phi(x)) \} \\ &\quad - \int_\Omega d^4 x \mathcal{L}(\partial_\mu \phi(x), \phi) \end{aligned}$$

$$\delta J = \int_{\Omega} d^4x \left[ \{ \partial_{\mu} \delta \phi(x) - (\partial_{\mu} \delta x^{\nu}) \partial_{\nu} \phi(x) \} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi(x))} + \delta \phi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} + (\partial_{\mu} \delta x^{\mu}) \mathcal{L}(\partial_{\mu} \phi(x), \phi) \right] \quad (8.58)$$

式 8.56 を用いると

$$\delta \phi(x) = \delta_L \phi(x) + \delta x^{\mu} \partial_{\mu} \phi(x) \quad (8.59)$$

で置き換えられるから

$$\delta J = \int_{\Omega} d^4x \left[ \{ \partial_{\mu} \delta_L \phi(x) + \delta x^{\mu} \partial_{\mu} \partial_{\mu} \phi(x) \} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi(x))} + (\delta_L \phi(x) + \delta x^{\mu} \partial_{\mu} \phi(x)) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} + (\partial_{\mu} \delta x^{\mu}) \mathcal{L}(\partial_{\mu} \phi(x), \phi) \right]$$

ここで

$$[\partial_{\mu} \delta_L \phi(x)] \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi(x))} = \partial_{\mu} \left[ \delta_L \phi(x) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi(x))} \right] - \delta \phi(x) \partial_{\mu} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi(x))} \right]$$

$$\partial_{\mu} [\delta x^{\mu} \mathcal{L}] = (\partial_{\mu} \delta x^{\mu}) \mathcal{L} + \delta x^{\mu} \partial_{\mu} \partial_{\nu} \phi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi)} + \delta x^{\mu} \partial_{\mu} \phi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}$$

となるから、これらを代入すると

$$\begin{aligned} \delta J &= \int_{\Omega} d^4x \left[ \delta_L \phi(x) \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi)} \right\} + \partial_{\mu} \left\{ \delta \phi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi)} - \delta x^{\nu} (\partial_{\nu} \phi) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi)} + \delta x^{\mu} \mathcal{L} \right\} \right] \quad (8.60) \\ &= \int_{\Omega} d^4x \left[ \delta_L \phi(x) \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi)} \right\} + \partial_{\mu} \left\{ \delta_L \phi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi)} + \delta x^{\mu} \mathcal{L} \right\} \right] \end{aligned}$$

を得る。この式の括弧内の第 1 項は括弧内の第 1 項はラグランジュの方程式であり、これを 0 とすると変分が 0 である条件はネーターのカレントを  $N^{\mu}$  として

$$N^{\mu} = \delta_L \phi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi)} + \delta x^{\mu} \mathcal{L} \quad (8.61)$$

とすると

時間の連続性

$$\partial_{\mu} N^{\mu} = 0 \quad (8.62)$$

である。これは次のように空間、時間成分に分けることができる。

$$\partial_0 N^0 = \partial_k N^k \quad (8.63)$$

$$\int d^3x N^0 = ic\mathbf{N} \quad (8.64)$$

通常  $x \rightarrow \infty$  で  $\mathbf{N}=0$  とするとネーターのカレントの時間成分は全空間で不変になる。

式 8.60 の第 2 括弧を  $\delta J^{\mu}$ 、エネルギー運動量テンソルを  $T^{\mu\nu}$  とおくと

$$\delta J^{\mu} = \delta \phi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi)} - \delta x_{\nu} T^{\mu\nu} \quad (8.65)$$

ただし

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi)} \partial^{\nu} \phi - \frac{\delta x^{\mu}}{\delta x_{\nu}} \mathcal{L} \quad (8.66)$$

であるが

$$\delta x^{\mu} = g^{\mu\nu} \delta x_{\nu}$$

なので

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (8.67)$$

となる。これは

$$H(q, p) = p_i \dot{q}^i - L \quad (8.68)$$

の一般化とみることができる。

## 8.5 4次元でのネーターカレント [53]

4次元での作用が不変であれば式 8.65 から 4次元でのネータのカレントを改めて

$$J^\mu = \left( g_\nu^\mu L - \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \partial_\nu \phi_i \right) \delta x^\nu + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \delta \phi_i \quad (8.69)$$

とおけ、 $\partial_\mu J^\mu = 0$  を満たす。これは一般に成立するが、例えば電荷を

$$Q = \int dx^3 J^0$$

のように定義すると

$$\partial_t Q = 0$$

であり、保存電荷であることがわかる。重要なのはこの電荷が変換の生成子として働くことで、交換積が変化量

$$i[Q, \phi_i] = \delta \phi_i \quad (8.70)$$

を満たすことになる。これは次のように確認できる。簡単のために  $\delta x = 0$  とする。正準共役量  $\pi_i$  を用いて電磁気に関係なく一般的な電荷を

$$Q = \int dx^3 \delta \phi_i \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} = \int dx^3 \delta \phi_i \pi_i$$

で表す。これから  $\delta \phi, \hbar = 1$  は数値として

$$\begin{aligned} [Q, \phi_j] &= \int dx^3 \delta \phi_i [\pi_i, \phi_j] \\ [\pi_i(x), \phi_j(y)] &= -i \delta_{ij} \delta(x - y) \end{aligned}$$

であるから式 8.70 となる。

具体的に 4次元ユークリッド空間の場合は  $\delta \phi = 0, \delta x_\mu = \epsilon_\mu$  の時、エネルギー運動量テンソルは

$$T_\nu^\mu = g_\nu^\mu L - \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \partial_\nu \phi_i \quad (8.71)$$

となるので式 8.69 から

$$J^\mu = T_\nu^\mu \epsilon^\nu$$

よって明らかに

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$$

となり時間的にエネルギー運動量は保存される。従って対称性が時間方向に存在し

$$\epsilon^\mu = \epsilon \delta^{\mu 0}$$

とすると、保存電荷が式 8.71 から

$$J^0 = T_\nu^0 \epsilon \delta^{\nu 0} = \epsilon (g_0^0 L - \pi \partial_0 \phi_i)$$

だから

$$\frac{Q}{\epsilon} = \frac{1}{\epsilon} \int dx^3 J^0 = \int d^3 x (\pi_i \partial_t \phi_i - L) = H$$

となり、ハミルトニアンが導かれる。これはハミルトニアン  $H$  そのものが時間推進の演算子であることになり、同じように空間方向の対称性を見るために

$$\epsilon^\mu = \epsilon \delta^{\mu i}$$

として

$$Q = \int dx^3 J^i = \int d^3 x T_i^\mu \epsilon \delta^{\mu i} = \epsilon \int d^3 x T_i^0 \delta^{0i} = \epsilon P$$

で運動量を表す。

## 9 ポアソン括弧とラグランジュ括弧

### 9.1 1 助変数正準変換

前部の多様体のところで 1 助変数変換群を扱った。多様体  $M$  上で  $p$  の近傍の座標  $\{x^1, x^2, \dots, x^n\}$  についてベクトル場を

$$X = \sum_{i=1}^n \xi^i(x^1, x^2, \dots, x^n) \frac{\partial}{\partial x^i} \in T_p(M) \quad (9.1)$$

とした時  $\phi_t(q)$  の座標を表す関数

$$\phi^i(t, q) \quad i \leq i \leq n \quad (9.2)$$

が次の微分方程式を満たす。

$$\frac{d\phi^i}{dt} = \xi^i(\phi^1(t, q), \phi^2(t, q), \dots, \phi^n(t, q)) \quad i \leq i \leq n \quad (9.3)$$

かつ初期条件として点  $q$  の座標を  $\{q^1, q^2, \dots, q^n\}$  としてこの微分方程式の解を

$$\phi_t(q) = (\phi^1(t, q), \phi^2(t, q), \dots, \phi^n(t, q)) \quad i \leq i \leq n \quad (9.4)$$

とおける。

またベクトル場  $X, Y$  の局所的 1 助変数変換群の  $\{\phi_t\}, \{\psi_t\}$  があれば

$$[X_p, Y_p] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Y_p - ((\phi_t)_* Y)_p}{t} \quad (9.5)$$

と括弧積をおけた。

ただし  $(\phi_t)_* Y$  は図に示すように曲線  $\phi_t$  の  $t=0$  における接ベクトルである。

$$((\phi_t)_* Y)_p = (\phi_t)_* \phi_t^{-1}(p) (Y_{\phi_t^{-1}(p)}) \quad (9.6)$$

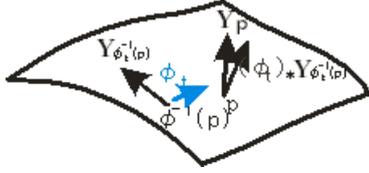


図 9.1:  $p$  を  $\phi^{-1}(p)$  で戻し、そこでのベクトル場  $Y$  を得る。次にそのベクトル場を  $\phi$  で移して  $(\phi_t)_* Y_{\phi^{-1}(p)}$  を得る。

括弧積はこの  $(\phi_t)_* Y_{\phi^{-1}(p)}$  に対する  $Y_p$  のパラメタ  $t$  の変化率である。

ただし重要な注意点は式 9.3 が解をもつための条件は一般的には制限され

$$\{0\} \times M \in R \times M \quad (9.7)$$

の適当な場所でなければならなかった。1 助変数局所座標群はこれを満足する。そこで

$$\Psi : G \times M \rightarrow M (a \in G, P \in M) \rightarrow \Psi(a, P) = Q \in M$$

となるような変換群  $G$  を考える。さらに相空間の局所座標を  $P = z = \{q^i, p_j\} = \{z^{2n}\}$  として

$$\begin{aligned} \Psi(e, P) &= P \\ \Psi(z^2, \Psi(z^1, P)) &= \Psi(z^2 z^1, P) \end{aligned}$$

を満たすとするとこれは左移動を表し、変換群  $G$  がリー群であれば多様体上の連続曲線を  $c$  とし

$$c(0) = e$$

を単位元として単位元での接ベクトルを

$$x = \left. \frac{dc(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} \in (TG)_e$$

として左不変のベクトル場  $V_x$  が決まり、単位元を通る積分曲線が

$$c : \mathbf{R} \rightarrow G : \lambda \in \mathbf{R} \rightarrow c(\lambda) \in G$$

となる 1 パラメタ変換の部分群  $c_x(\lambda) = \exp(\lambda x)$  で表すことができた。

多様体  $M$  上で点  $P = z$  を通る曲線への作用を

$$\Psi : (c_x(\lambda), z) \rightarrow z' = \Psi(\exp(\lambda x), z) \equiv \Psi_x(\lambda; z) \quad (9.8)$$

とすると点  $P = z$  での接ベクトルが  $M$  上の任意の関数  $f$  のこの曲線に沿った方向微分

$$v_x[f(x)] = \left. \frac{d}{d\lambda} f(\Psi_x(\lambda; z)) \right|_{\lambda=0} = \left. \frac{d}{d\lambda} \Psi_x(\lambda; z) \right|_{\lambda=0} \frac{\partial f(z)}{\partial z^\mu} \quad (9.9)$$

を考えると

$$(v_x)_P = \left. \frac{d}{d\lambda} \Psi_x^\mu(\lambda; z) \right|_{\lambda=0} \frac{\partial}{\partial z^\mu}$$

点  $P$  が  $M$  上をくまなく移動することでベクトル場  $v_x$  が構成される。逆に

$$\frac{dz^\mu}{d\lambda} = v_x[z^\mu] \quad (\mu = 1, 2, \dots, 2n)$$

の解として積分曲線が得られる。ベクトル場  $v_x$  が定める 1 パラメタ変換が  $\Psi_x(\lambda; z)$  となる。

そこでこの 1 助変数局所座標群の中で正準変換となる条件を考えよう。

変換を成分表示すると

$$\frac{d\Psi_x^\alpha(\lambda; z)}{d\lambda} = v_x[\Psi_x^\alpha(\lambda; z)] \quad (\alpha = 1, 2, \dots, 2n)$$

この両辺を  $z^\beta$  ( $\beta = 1, \dots, 2n$ ) で微分し、

$$\frac{d}{d\lambda} \left( \frac{\partial \Psi_x^\alpha}{\partial z^\beta} \right) = \frac{\partial v_x[\Psi_x^\alpha]}{\partial \Psi_x^\gamma} \frac{\partial \Psi_x^\gamma}{\partial z^\beta} \quad (9.10)$$

となる。ただし、

$$v_x[z^\alpha] = v_x^\mu(z) \partial_\mu z^\alpha = v_x^\alpha(z)$$

であるから  $v_x[\Psi_x^\alpha]$  は  $v_x = v_x^\mu \partial_\mu$  の  $z = \Psi_x$  での  $\alpha$  成分を表す。  
もう少し簡単にするために変換行列を

$$\hat{M} = (M_\beta^\alpha) = \left( \frac{\partial \Psi_x^\alpha}{\partial z^\beta} \right)$$

とし、さらに

$$\hat{V} = (V_\gamma^\alpha) = \left( \frac{\partial v_x[\Psi_x^\alpha]}{\partial \Psi_x^\gamma} \right) \quad (9.11)$$

として式 9.10 は次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} M_\beta^\alpha &= V_\gamma^\alpha M_\beta^\gamma \\ \frac{d}{d\lambda} {}^t \hat{M} &= {}^t \hat{M} {}^t \hat{V} \end{aligned}$$

となるので

$$\frac{d}{d\lambda} ({}^t \hat{M} \hat{\Omega} \hat{M}) = {}^t \hat{M} ({}^t \hat{V} \hat{\Omega} + \hat{\Omega} \hat{V}) \hat{M} \quad (9.12)$$

となる。もし、式 9.8 が正準変換であれば前節からシンプレクティック条件を満たすから

$$\frac{d}{d\lambda} ({}^t \hat{M} \hat{\Omega} \hat{M}) = \frac{d}{d\lambda} \hat{\Omega} = 0$$

であり

$$\det \hat{M} \neq 0$$

であるから  $-\hat{\Omega} = {}^t \hat{\Omega}$  だから

$${}^t \hat{V} \hat{\Omega} + \hat{\Omega} \hat{V} = -{}^t (\hat{\Omega} \hat{V}) + (\hat{\Omega} \hat{V}) = 0$$

でなくてはならない。成分で表すと

$$-\Omega_{\mu\rho} \frac{\partial v_x[\Psi_x^\rho]}{\partial \Psi_x^\nu} + \Omega_{\nu\rho} \frac{\partial v_x[\Psi_x^\rho]}{\partial \Psi_x^\mu} = 0$$

となるが式 9.8 から  $\lambda$  が任意だから任意の  $z$  について

$$\frac{\partial}{\partial z^\nu} (\Omega_{\mu\rho} v_x[z^\rho]) = \frac{\partial}{\partial z^\mu} (\Omega_{\nu\rho} v_x[z^\rho])$$

が成り立つことである。これは 1 形式

$$f = \Omega_{\mu\rho} v_x[z^\rho] dz^\mu \quad (9.13)$$

とおいたとき

$$df = 0$$

が成り立つことになる。よってポアンカレの補題から

$$f = dF_x = \partial_\mu F_x dz^\mu$$

となる  $F_x(z)$  が存在することになり式 9.13 より

$$\Omega_{\mu\rho} v_x[z^\rho] = \partial_\mu F_x$$

$$\Omega_{\mu\rho} v_x^\rho(z) = \frac{\partial F_x(z)}{\partial z^\mu}$$

が成り立つことになる。よってベクトル場が次のように決まる。

$$\begin{aligned} v_x &= v_x^\rho(z) \frac{\partial}{\partial z^\rho} = \Omega^{\rho\mu} \frac{\partial F_x(z)}{\partial z^\mu} \frac{\partial}{\partial z^\rho} \\ &= \frac{\partial F_x}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial F_x}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i} \end{aligned} \quad (9.14)$$

これは式 5.12 であり、このベクトル場がハミルトニアン・ベクトル場になる。逆にベクトル場がハミルトニアン・ベクトル場であれば式 9.11 から

$$V_\gamma^\alpha = \frac{\partial v_x[\Psi_x^\alpha]}{\partial \Psi_x^\gamma}, \quad (v_x)_P = \frac{d}{d\lambda} \Psi_x^\mu(\lambda; z) \Big|_{\lambda=0} \frac{\partial}{\partial z^\mu}$$

であったので

$$V_\beta^\alpha = \Omega^{\alpha\rho} O_{\beta\rho} \quad O_{\beta\rho} = O_{\rho\beta} := \frac{\partial^2 F_x(z')}{\partial z'^\beta \partial z'^\rho} \Big|_{z'=\Psi_x(\lambda; z)}$$

と表現できる。これを用いて

$$\begin{aligned} \left( {}^t \hat{V} \hat{\Omega} + \hat{\Omega} \hat{V} \right)_{\alpha\beta} &= V_\alpha^\rho \Omega_{\rho\beta} + \Omega_{\alpha\rho} V_\beta^\rho \\ &= \Omega_{\rho\beta} \Omega^{\rho\nu} O_{\alpha\nu} + \Omega_{\alpha\rho} \Omega^{\rho\nu} O_{\beta\nu} \\ &= O_{\alpha\beta} + O_{\beta\alpha} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる。よって式 9.12 より

$$\frac{d}{d\lambda} \left( {}^t \hat{M} \hat{\Omega} \hat{M} \right) = 0$$

を得る。よって  ${}^t \hat{M} \hat{\Omega} \hat{M}$  が  $\lambda$  に依存しない。これから

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \hat{M} = \hat{I}, \quad \left[ {}^t \hat{M} \hat{\Omega} \hat{M} \right]_{\lambda=0} = \hat{\Omega}$$

であるから変換行列  $\hat{M}$  はつねにシンプレクティック条件  ${}^t \hat{M} \hat{\Omega} \hat{M} = 0$  を満たしている。つまり 1 助変数変換がハミルトニアン・ベクトル場により生成されていれば正準変換である。よって 1 助変数正準変換は

$$\frac{dz^\rho}{d\lambda} = \Omega^{\rho\mu} \frac{\partial F(z)}{\partial z^\mu} \quad (\rho = 1, 2, \dots, 2n)$$

の解である。これは無限小変換

$$q^i(\epsilon) = q^i(0) + \epsilon \frac{\partial F(q, p)}{\partial p_i} \Big|_{(q, p) = (q(0), p(0))}$$

$$p_j(\epsilon) = p_j(0) - \epsilon \frac{\partial F(q, p)}{\partial p_i} \Big|_{(q, p) = (q(0), p(0))}$$

が成り立つことでもある。しかし、

$$\Psi_F : M \rightarrow M : z(0) \rightarrow z(\lambda; z(0))$$

が  $F$  を生成関数とする 1 パラメタにより連続発展されればよい。これらの全体  $\{\Psi_F | \lambda \in \mathbf{R}\}$  を 1 助変数変換群という。これは  $F$  により生成されるハミルトニアン・フローである。この内、時間発展がハミルトニアンそのものが生成関数になる。

## 9.2 モーメント関数

ここで空間 (回転、移動) を考える。配位空間を  $N$  として、点変換を引き起こすあるリー群  $G$  を考える。1 パラメタ変換を用いて

$$\Phi : (\exp(\lambda x), q) \rightarrow q' = \Phi(\exp(\lambda x), q) \equiv \Phi_x(\lambda; q)$$

を考える。この変換により、 $N$  上に点  $Q$  を通るなめらかな曲線が描かれる。点  $Q$  での接ベクトルとして式 9.11 から基底も表現し、次のように定義する。

$$(u_x)_Q = \frac{d}{d\lambda} \Phi_x^i(\lambda; q) \Big|_{\lambda=0} \frac{\partial}{\partial q^i} := f_x^i(q) \frac{\partial}{\partial q^i} \quad (9.15)$$

点  $Q$  が配位空間上で自由に動けばベクトル場

$$u_{\lambda, x} = u_x = f_x^i \partial_i$$

で表される。ここで 1 パラメタ変数  $\exp(\lambda x)$  により引き起こされる相空間上の連続変換を

$$(q, p) \rightarrow (q', p') = (\Phi_x(\lambda, q), \Pi_x(\lambda, p))$$

を考えるとこの相空間上の点  $P = (q, p)$  での接ベクトルは一般に

$$(v_x)_P = \frac{d\Phi_x^i}{d\lambda} \Big|_{\lambda=0} \frac{\partial}{\partial q^i} + \frac{d\Pi_x^i}{d\lambda} \Big|_{\lambda=0} \frac{\partial}{\partial p_i} \quad (9.16)$$

となる。この変換が正準 1 形式  $\theta$  が不変である要請をすると

$$\theta = p'_i dq'^i = \Pi_{xi}(\lambda; q) \frac{\partial \Phi_x^i}{\partial q^j} dq^j = p_j dq^j$$

である必要があるから

$$\Pi_{xi}(0, q) = p_j = \Pi_{xi}(\lambda; q) \frac{\partial \Phi_x^i}{\partial q^j}$$

でなくてはならない。この式を  $\lambda$  で微分した後  $\lambda = 0$  とする  $\lambda$  が微小であれば

$$\Phi_x^i = q^i + \lambda f_x^i(q) + O(\lambda^2)$$

$$\frac{\partial \Phi_x^i}{\partial q^j} = \delta_j^i + \lambda \frac{\partial f_x^i(q)}{\partial q^j} + O(\lambda^2)$$

となるから式 9.15 から

$$0 = \left[ \frac{d\Pi_{xi}}{d\lambda} \frac{\partial \Phi_x^i}{\partial q^j} + \Pi_{xi} \frac{d}{d\lambda} \frac{\partial \Phi_x^i}{\partial q^j} \right]_{\lambda=0} = \frac{d\Pi_{xi}}{d\lambda} \Big|_{\lambda=0} + p_i \frac{\partial f_x^i}{\partial q^j}$$

したがって接ベクトルは  $\frac{d\Pi_{xi}}{d\lambda}|_{\lambda=0}$  が決まり式 9.16 から

$$(v_x)_P = f_x^i(q) \frac{\partial}{\partial q^i} - p_k \frac{\partial f_x^i(q)}{\partial q^j} \frac{\partial}{\partial p_i}$$

となる。

そこでモーメント関数  $F_x$

$$F_x(q, p) := \langle \theta | u_x \rangle = p_i f_x^i(q)$$

を定義するとベクトル場  $v_x$  は

$$\begin{aligned} v_x &= f_x^i(q) \frac{\partial}{\partial q^i} - p_k \frac{\partial f_x^i(q)}{\partial q^j} \frac{\partial}{\partial p_i} \\ &= \frac{\partial F_x}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial F_x}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} \end{aligned}$$

となり、モーメント関数  $F_x$  が生成関数である。

変換群の配位空間  $N$  への作用は相空間  $M$  に引き上げられ、

配位空間の 1 助変数変換が 1 助変数正準変換として引き上げられる。

配位空間の回転や移動などの対称変換は相空間ではモーメント関数により生成されるハミルトニアン・ベクトル場が与える。

これらの古典的な抽象は次のポアソン括弧と括弧積の対応で量子力学に応用される。

### 9.3 ポアソンの括弧

位相空間における力学量  $f(q, p)$  の運動方程式は式 8.29 から

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \tag{9.17}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q^i} \tag{9.18}$$

となる。ここで次をポアソン括弧として定義する。

$$\frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q^i} \equiv \{f, H\}_p$$

このポアソン括弧は反対称行列  $\Omega$  を用いて次のように簡単に多次元化できる。

$$\begin{aligned} \{f, g\}_p &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial q^i} & \frac{\partial f}{\partial p_i} \end{pmatrix} \Omega \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial q^i} \\ \frac{\partial g}{\partial p_i} \end{pmatrix} \\ \Omega &= \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{9.19}$$

ポアソン括弧で正準方程式も簡単に次のように表現できる。

$$\dot{q}^i = \{q^i, H\}_p$$

$$\dot{p}_i = \{p_i, H\}_p$$

また次の関係式も成り立つ。

$$\begin{aligned}\{q^i, q^j\}_p &= \{p_i, p_j\}_p = 0 \\ \{q^i, p_j\}_p &= \delta_j^i\end{aligned}\tag{9.20}$$

これは交換積との対応は

$$\begin{aligned}[\hat{q}_i, \hat{p}_j]\psi(q) &= \hat{q}_i\hat{p}_j\psi(q) - \hat{p}_j\hat{q}_i\psi(q) \\ &= q_i \left( \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q_j} \psi(q) \right) - \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q_j} (q_i\psi(q)) \\ &= q_i \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q_j} \psi(q) - \frac{\hbar}{i} \left( \frac{\partial q_i}{\partial q_j} \psi(q) + q_i \frac{\partial}{\partial q_j} \psi(q) \right) \\ &= i\hbar\delta_{ij}\psi(q)\end{aligned}\tag{9.21}$$

となるので

$$[\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\hbar \{ \hat{q}_i, \hat{p}_j \}_p$$

が成り立つ。

また、 $a_i$  を実数とし、ユニタリ演算子

$$\hat{U}(a) = \exp\left(\frac{1}{i\hbar} \sum_{i=1}^n a_i \hat{p}_i\right)\tag{9.22}$$

として次の演算を考えよう。

$$\hat{U}(a)^{-1} \hat{q}_i \hat{U}(a)$$

一般に演算子  $\hat{A}, \hat{B}$  について

$$e^{\hat{A}} \hat{B} e^{-\hat{A}} = \hat{B} + [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{2!} [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \dots\tag{9.23}$$

が成り立つので

$$\hat{A} = -\frac{1}{i\hbar} \sum_{i=1}^n a_i \hat{p}_i, \hat{B} = q_i$$

とおくと式  $i$  のみが値を持ち式 9.21 から

$$[\hat{A}, \hat{B}] = a_i$$

となるので無限に和が続いた式 9.23 は最初に 2 項で切れる。よって

$$\hat{U}(a)^{-1} \hat{q}_i \hat{U}(a) = \hat{q}_i + a_i$$

である。これは空間的な平行移動を表すが、無限和を有限でカットすることから得られることは興味深い。

エルミートであれば可換である。これは同時に対角可できることでもある。

同時固有状態のうちの 1 つを  $|\psi_0\rangle$  とし、同時固有値を  $q_i^{(0)}$  とする。

$$\hat{q}_i |\psi_0\rangle = q_i^{(0)} |\psi_0\rangle, \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n)$$

あらたに  $q'_i (i = 1, 2, 3, \dots, n)$  の  $n$  個の変数により決まるケットベクトルを次のように定義する。

$$|q'\rangle = \hat{U}(q' - q^{(0)}) |\psi_0\rangle$$

すると次のように  $q'_i$  が同時固有値になる。

$$\hat{q}_i |q'\rangle = \hat{q}_i \hat{U}(q' - q^{(0)}) |\psi_0\rangle = q'_i |q'\rangle$$

よって次のように状態ベクトルを変化させる

$$\hat{U}(a)|q' \rangle = \hat{U}(a)\hat{U}(q' - q^{(0)})|\psi_0 \rangle = \hat{U}(a + q' - q^{(0)})|\psi_0 \rangle = |a + q' \rangle$$

つまり、 $\hat{U}$  は状態ベクトルを微小変化させるものとみなせる。式 9.22 からベクトル  $|a + q' \rangle$  は次のような状態ベクトルの線形和となる。

$$\hat{U}(a)|q' \rangle = |a + q' \rangle = \left(1 + \sum_{n=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial q_i'}\right) |q' \rangle$$

これから  $a_i = \epsilon_i$  とし微小量として 1 次の項だけ取り出すと扱おうと固有方程式

$$\hat{U}(a)|q' \rangle = \left(1 + \frac{1}{i\hbar} \sum_{n=1}^n \epsilon_i \hat{p}_i\right) |q' \rangle = \left(1 + \sum_{n=1}^n \epsilon_i \frac{\partial}{\partial q_i'}\right) |q' \rangle$$

これは

$$\hat{p}_i |q' \rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial q_i'} |q' \rangle \quad (9.24)$$

であり、運動量の演算子を決めることになる。さらに位置状態と運動量状態のベクトルを変換する演算子もみつけてみる。

運動量演算子から微分演算子が出るので

$$|p' \rangle (2\pi\hbar)^{-n/2} \int d^n q' \exp\left(\frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^n p_i' q_i'\right) |q' \rangle$$

とおくと部分積分を用いて式 9.24 より

$$\begin{aligned} \hat{p}_i |p' \rangle &= (2\pi\hbar)^{-n/2} \int d^n q' \exp\left(\frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^n p_i' q_i'\right) i\hbar \frac{\partial}{\partial q_i'} |q' \rangle \\ &= (2\pi\hbar)^{-n/2} \left\{ i\hbar \exp\left(\frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^n p_i' q_i'\right) - \int d^n q' \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial q_i'} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^n p_i' q_i'\right) \right) \right\} |q' \rangle \\ &= (2\pi\hbar)^{-n/2} \int d^n q' \left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial q_i'} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^n p_i' q_i'\right) \right) |q' \rangle \\ &= p_i' |p' \rangle \end{aligned}$$

となる。結局次の関数が運動量状態と位置状態のベクトルを相互に変換する。

$$\phi_{pq} = (2\pi\hbar)^{-n/2} \int d^n q' \exp\left(\frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^n p_i' q_i'\right)$$

よって逆変換の場合は

$$\phi_{qp} = (2\pi\hbar)^{-n/2} \int d^n p' \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^n p_i' q_i'\right)$$

である。

これから状態ベクトルはフーリエ変換のように積  $p_i' q_i'$  を足し合わせ、もう一度  $n$  積分する。

さらに次のヤコビ恒等式も成立する。

$$\{f, \{g, h_p\}\}_p + \{g, \{h, f\}\}_p + \{h, \{f, g\}\}_p \equiv 0$$

また、反対称性、分配則、を満たし、これとヤコビの恒等式を満足する場合は **Lee 環** の条件を満たすという。

$$\{f, g\}_p = -\{g, f\}_p$$

さらに次の性質を満たす。

$$\{F, g\}_p = \frac{\partial F}{\partial f_k} \{f_k, g\}_p$$

また任意の関数の入る場所空白にして次のように微分演算子  $X_f$  とみなすことができる。

$$\{f, \} = \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} \equiv X_f \quad (9.25)$$

よって運動方程式はこの演算子を左から作用させて

$$X_f H = \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q^i} \quad (9.26)$$

と書くことができる。この演算子は次の交換子積の条件を満たしている。

$$[X_f, X_g] \equiv X_f X_g - X_g X_f = X_{\{f, g\}} \quad (9.27)$$

## 9.4 斜交積

要素  $z = (q, p)$  を持つ、相空間  $M$  上の任意の2個のベクトル場を次のように置く。

$$u = u^\mu \partial_\mu = u^i \partial_i + u_i \partial^i$$

$$v = v^\mu \partial_\mu = v^i \partial_i + v_i \partial^i$$

とすると斜交積として式 5.5 から

$$\langle \Omega | u, v \rangle = u^\mu \Omega_{\mu\nu} v^\nu = u_i v^i - u^i v_i \quad (9.28)$$

と定義できた。相空間上で  $u$  は双対成分を持ったので斜交積はスカラー値となる。

$u, v$  がハミルトニアン・ベクトル場であれば

$$u_f = \Omega^{\nu\mu} \frac{\partial f}{\partial z^\mu} \frac{\partial}{\partial z^\nu}$$

$$u_g = \Omega^{\nu\mu} \frac{\partial g}{\partial z^\mu} \frac{\partial}{\partial z^\nu}$$

となれば式 9.14 からこれらのベクトル場から生成される1パラメタ変数変換は正準変換になった。

この場合の  $f, g$  のポアソン括弧が次のように斜交積として定義できる。

$$\{f, g\} := \langle \Omega | v_g, u_f \rangle$$

これは  $z = (q, p)$  として

$$\frac{1}{2} \Omega_{\mu\nu} dz^\mu \wedge dz^\nu = dp_i \wedge dq^i$$

とした時、

$$\begin{aligned}
\{f, g\} &= \langle \Omega | v_g, u_f \rangle \\
&= \left( \Omega^{\mu\sigma} \frac{\partial g}{\partial z^\sigma} \right) \Omega_{\mu\nu} \left( \Omega^{\nu\rho} \frac{\partial f}{\partial z^\rho} \right) \\
&= \frac{\partial f}{\partial z^\rho} \Omega^{\rho\sigma} \frac{\partial g}{\partial z^\sigma} \\
&= \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q^i}
\end{aligned}$$

となり式 9.25 が導かれる。特に  $f = z^\alpha, g = z^\beta$  とすれば変換行列が

$$\{z^\alpha, z^\beta\}_z = \Omega^{\alpha\beta}$$

と求まる。これは式 9.20 と共に基本ポアソン括弧 (fundamental\_Poisson\_brackets) という。この基本ポアソン括弧の不変性は変換が正準変換であるための必要十分条件になる。

## 9.5 ラグランジュの括弧

次にラグランジュの括弧を次で定義する。

$$\{f, g\}_L \equiv \frac{\partial q^i}{\partial f} \frac{\partial p_i}{\partial g} - \frac{\partial q^i}{\partial g} \frac{\partial p_i}{\partial f} \quad (9.29)$$

ポアソンの括弧と同じように次の関係が成り立つ。

$$\{q^i, q^j\}_L = \{p_i, p_j\}_L = 0 \quad (9.30)$$

$$\{q^i, p_j\}_L = \delta_j^i \quad (9.31)$$

$$\{f, g\}_L = -\{g, f\}_L \quad (9.32)$$

ポアソン括弧と同様にして行列  $S$  を用いて次のように簡単に多次元化できる。

$$\{f, g\}_L = \begin{pmatrix} \frac{\partial q^i}{\partial f} & \frac{\partial p_i}{\partial f} \end{pmatrix} S \begin{pmatrix} \frac{\partial q^i}{\partial g} \\ \frac{\partial p_i}{\partial g} \end{pmatrix} \quad (9.33)$$

$$S = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \quad (9.34)$$

よってこの2つの関係は互いに逆行列に似た次の関係があることがわかる。

$$\sum_j \{q^i, p_j\}_p \{q^j, p_k\}_L = -\delta^{ik} \quad (9.35)$$

$$\sum_j \{p_i, q^j\}_p \{q^j, p_k\}_L = -\delta_{ik} \quad (9.36)$$

これは  $p, q$  を1つの記号で次のように扱おうと

$$(z^1, z^2 \dots z^N, z^{N+1} \dots z^{2N}) = (q^1, q^2 \dots q^N, p_{N+1} \dots p_{2N}) \quad (9.37)$$

次のようにまとめて表現できる。

$$\sum_{m=1}^{2N} \{z^l, z^m\}_p \{z^m, z^n\}_L = -\delta^{ln} \quad (9.38)$$

次のような正準変換において

$$(q^i, p_j) \rightarrow (Q^i, P_j) \quad (9.39)$$

$(Q^i, P_j)$  のハミルトン関数は  $K$  で表すと正準方程式は

$$\dot{Q}^i = \frac{\partial K}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} \quad (9.40)$$

式 4.49 から

$$\delta J[q, p] = [p_i \delta q^i]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} dt \left( -\dot{p}_i \delta q^i + \dot{q}^i \delta p_i - \frac{\partial H}{\partial q^i} \delta q^i - \frac{\partial H}{\partial p^i} \delta p^i \right) \quad (9.41)$$

式 4.48 から

$$\delta J[q, p] = \int_{t_1}^{t_2} dt (p_i \dot{q}^i - H) = 0 \quad (9.42)$$

が成り立つ。よって

$$\delta J[q, p] = [P_i \delta Q^i]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} dt \left( -\dot{P}_i \delta Q^i + \dot{Q}^i \delta P_i - \frac{\partial K}{\partial Q^i} \delta Q^i - \frac{\partial K}{\partial P^i} \delta P^i \right) \quad (9.43)$$

ところが異なる位相空間において時空間も変化すると考えると式 8.11 が成り立つのでラグランジアンは不定性を持ち

$$\delta J[Q, P] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left( P_i \dot{Q}^i - K + \frac{dW}{dt} \right) = 0 \quad (9.44)$$

となる。

## 9.6 ポアソン括弧と正準方程式

$G$  から生成されるハミルトニアン・ベクトル場  $v_G$  の 1 形式を  $dF = \langle \Omega |_{\circ}, v_F \rangle$

とすると関数  $F, G$  のポアソン括弧 9.28 から

$$\{F, G\} = \langle \Omega |_{v_g}, v_F \rangle = \langle dF |_{v_G} \rangle$$

のように 1 形式と接ベクトルの内積表現になる。これは前部のリー微分  $\mathcal{L}$  を用いて

$$\{F, G\} = v_G[F] = \mathcal{L}_{v_G}(F)$$

と表すことができる。これはベクトル場  $v_G$  の積分に沿った関数  $F$  の変化率とみることができる。

$$\begin{aligned} \frac{dF}{ds} &= \frac{\partial F}{\partial s} + \frac{\partial F}{\partial z^\mu} \frac{dz^\mu}{ds} \\ &= \frac{\partial F}{\partial s} + v_G[F] \\ &= \frac{\partial F}{\partial s} + \{F, G\} \end{aligned}$$

相空間上で式 9.17 からポアソン括弧で正準方程式を表すと

$$\begin{aligned}\frac{dz^\mu}{dt} &= \Omega^{\mu\nu} \frac{\partial H}{\partial z^\nu} = v_H[z^\mu], \quad (\mu = 1, 2, 3 \cdots 2n) \\ &= \{z^\mu, H\}\end{aligned}$$

のようにハミルトニアンとポアソン括弧の組をつくれればよい。この式は量子力学への移行を簡単にする。

## 9.7 指数写像

ポアソン括弧の表現の有用なところをもう少し見てみよう。

$G$  から生成されるハミルトニアン・ベクトル場  $v_G$  から導かれる点の運動が正準方程式

$$\frac{dz^\mu}{dt} = v_G[z^\mu] = \{z^\mu, G(z)\}_z, \quad (\mu = 1, 2, 3 \cdots 2n) \quad (9.45)$$

の解になる。この時前節の 1 パラメタ変数変換として  $s = 0, z(0) = 0$  を始点として

$$\Psi_G : z(0) \rightarrow \Psi_G(s, z(0))$$

が正準方程式の解になる。そこで次のように原点でテーラー展開をすると

$$z^\mu(s) = z^\mu(0) + s \frac{dz^\mu(s)}{ds} \Big|_{s=0} + \frac{s^2}{2!} \frac{d^2 z^\mu(s)}{ds^2} \Big|_{s=0} + \cdots$$

ところが式 9.45 より

$$\frac{dz^\mu(s)}{ds} \Big|_{s=0} = v_G[z^\mu(0)] = \{z^\mu(0), G_0\}_{z(0)}$$

であるから相空間上の曲線は次のようにポアソン括弧の入れ子構造で表現できる。

$$\Psi_G(s, z(0)) = z^\mu(s) = z^\mu(0) + s \{z^\mu(0), G_0\} + \frac{s^2}{2!} \{\{z^\mu(0), G_0\}, G_0\} + \cdots$$

これは観測者の視点が全体を見る立場に移行しており、指数関数を用いれば

$$\begin{aligned}\Psi_G(s, z(0)) &= \left( 1 + s v_{G_0} + \frac{s^2}{2!} v_{G_0}^2 + \cdots \right) [z^\mu(0)] \\ &= \exp(s v_{G_0}) [z^\mu(0)]\end{aligned}$$

と表すことができる。

これから次のようにハミルトニアン・フローを指数写像で表すことができる。

$$z^\mu(0) \rightarrow z^\mu(s) = \exp(s v_{G_0}) [z^\mu(0)]$$

$$z^\mu(s) \rightarrow z^\mu(\sigma + s) = \exp(\sigma v_{G_0}) [z^\mu(0)]$$

## 9.8 古典場での時間変化

具体的に古典場での時間変化を例にしてみよう。一様な重量場でハミルトニアンを

$$H = \frac{p^2}{2m} + mgq$$

とすると  $H$  自身によるハミルトニアン・ベクトル場は

$$\begin{aligned}
 v_H &= \frac{\partial H(z)}{\partial z^\sigma} \Omega^{\rho\sigma} \frac{\partial}{\partial z^\rho} \\
 &= \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial}{\partial p} \\
 &= \frac{p}{m} \frac{\partial}{\partial q} - mg \frac{\partial}{\partial p}
 \end{aligned} \tag{9.46}$$

となり、 $q, p$  の接ベクトルを基底にしている。したがって時間発展は正準方程式

$$\begin{aligned}
 \dot{q} &= v_H(q) = \frac{p}{m} \\
 \dot{p} &= v_H(p) = -mg
 \end{aligned} \tag{9.47}$$

を得る。しかし

$$\begin{aligned}
 v_H \cdot v_H &= \left( \frac{p}{m} \frac{\partial}{\partial q} - mg \frac{\partial}{\partial p} \right) \cdot \left( \frac{p}{m} \frac{\partial}{\partial q} - mg \frac{\partial}{\partial p} \right) \\
 &= \frac{p}{m} \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{p}{m} \frac{\partial}{\partial q} - mg \frac{\partial}{\partial p} \right) - mg \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{p}{m} \frac{\partial}{\partial q} - mg \frac{\partial}{\partial p} \right) \\
 &= -g \frac{\partial}{\partial q}
 \end{aligned}$$

が 0 にならず残るので

$$v_H^2(q) = -g$$

である。これから指数関数は実際に有限に展開され位置は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 q(t) &= \exp(tv_{H_0})[q_0] = \left( 1 + tv_{H_0} + \frac{t^2}{2!} v_{H_0}^2 \right) [q_0] \\
 &= q_0 + \frac{p_0}{m} t - \frac{g}{2} t^2
 \end{aligned}$$

とよく知られた 2 次関数になる。式 9.47 から相空間において正準方程式を

$$\dot{z}^\mu = \Omega^{\mu\nu} \partial_\nu H$$

とまとめることができる。反対称の行列  $\Omega^{\mu\nu}$  が重要な働きをしている。つまりハミルトニアンによるハミルトニアン・ベクトル場は

$$v_H = (\Omega^{\mu\nu} \partial_\nu H) \partial_\mu = \dot{z}^\mu \partial_\mu = d/dt$$

と表される。これは時間微分の中身を表している。

この時の指数写像はパラメタを  $\tau$  として相空間上の任意の関数  $F(\{q\}, \{p\})$  に対して

$$\begin{aligned}
 \exp(\tau v_H) F(\{q\}, \{p\}) &= \left\{ 1 + \tau \frac{d}{dt} + \frac{\tau^2}{2!} \left( \frac{d}{dt} \right)^2 + \dots \right\} F(\{q\}, \{p\}) \\
 &= F\{z(\tau+t)\}
 \end{aligned}$$

となる。つまりハミルトニアンそのもののベクトル場は指数写像として無限級数に展開される。一方運動量は次のように  $t$  の 1 次で実質展開は止まる。

$$\begin{aligned}
 p(t) &= \exp(tv_{H_0})[p_0] = (1 + tv_{H_0})[p_0] \\
 &= p_0 - mgt
 \end{aligned}$$

これもよく知られた力積の式である。

初等的な方法に比べて運動量、位置の基底成分のやりとりがここでは明瞭になる。

ハミルトニアン・ベクトル場は共役な運動量と位置により相空間をなすが、指数写像としては極めてラフで荒い像である。これは次の量子力学への大きな示唆である。

## 9.9 古典場での空間変化

次に相空間上で正準運動量成分  $p_i$  による 1 パラメタ変換群のつくるハミルトニアン・ベクトル場を考える。

$$\begin{aligned} v_{p_i} &= \frac{\partial p_i}{\partial z^\sigma} \Omega^{\rho\sigma} \frac{\partial}{\partial z^\rho} \\ &= \frac{\partial p_i}{\partial p_j} \frac{\partial}{\partial q^j} \\ &= \frac{\partial}{\partial q^i} \end{aligned}$$

となるので正準方程式は

$$\begin{aligned} \frac{dz^\mu}{d\lambda} &= v_{p_i}(z^\mu) \\ &= \begin{cases} v_{p_i}(q^j) = \delta_j^i \\ v_{p_i}(p_j) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

したがって位置は次のようになる

$$\begin{aligned} q^j &= \exp(\lambda v_{p_i}) [q_0^j] \\ &= q_0^j + \delta_i^j \lambda \end{aligned}$$

となる。これは  $i$  番目の座標の  $q^i$  を  $\lambda$  だけ進めることになる。

この時の指数写像はパラメタを  $\lambda$  として相空間上の任意の関数  $F(\{q\}, \{p\})$  に対して

$$\exp(\lambda v_{p_i}) F(\{q\}, \{p\}) = F(\{q^1, q^2, \dots, q^i + \lambda + \dots, +q^n\}, \{p\})$$

となる。

一方運動量は

$$\begin{aligned} p_j &= \exp(\lambda v_{p_i}) [p_{j0}] \\ &= p_{j0} \end{aligned}$$

となり、初期値から変化はしない。

よって  $v_{p_i}$  のつくるハミルトニアン・ベクトル場は運動量に関しては一定値をとるように位置を進めていくことになる。 $p_i$  を  $\mathbf{R}^3$  の運動量成分  $p_x$  とすれば  $x$  方向への平行移動を表す。また、 $p_i$  を角運動量の第 3 成分  $M_3$  とすれば  $q^i$  は第 3 軸回りの回転角である。これをポアソン括弧を用いて表すと

相空間上で任意の関数  $f(q, p)$  の座標  $q^i$  を  $\delta\lambda$  だけ変化させると

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial q^i} \delta\lambda = v_{p_i}[f] \delta\lambda = \{f, p_i\} \delta\lambda$$

となることから次の関係が導ける。

$$\{f, p_i\} = \frac{\partial f}{\partial q^i}$$

例えば

$$\{f, p_x\} = \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\{f, M_z\} = \frac{\partial f}{\partial \phi}$$

$$\{p_i, p_j\} = 0$$

$$\{p_i, M_j\} = \epsilon_{ij}^k p_k$$

$$\{M_i, M_j\} = \epsilon_{ij}^k M_k$$

これらは運動量成分や角運動量成分がポアソン括弧を積とするリー代数を構成し、正準方程式の解を  $z = z(s)$  と表示すると

$$z(s) \rightarrow z(\sigma + s)$$

$$F(z(s)) \rightarrow F(z(\sigma + s))$$

の変換は次のリー変換になる。(Lie transformation)

$$F(z(\sigma + s)) = F(\exp(\sigma v_G)[z(s)]) = \exp(\sigma v_G) F(z(s))$$

## 9.10 調和振動子

ハミルトニアン・ベクトル場が線形写像であれば線形微分方程式が得られる。これを調和振動子を例にしてみよう。

$$H = \frac{p^2}{2m} + \gamma\omega pq + \frac{m}{2}\omega^2 q^2$$

でハミルトニアンを定義できる調和振動子を考える。これから得られるハミルトニアン・ベクトル場は

$$v_H = \frac{\partial H(z)}{\partial z^\sigma} \Omega^{\rho\sigma} \frac{\partial}{\partial z^\rho} = \left(\gamma\omega q + \frac{p}{m}\right) \frac{\partial}{\partial q} - (\gamma\omega p + m\omega^2 q^2) \frac{\partial}{\partial p}$$

となるのでこれを微分作用素とみなせば

$$v_H[q] = \gamma\omega q + \frac{p}{m}$$

$$v_H[p] = -(\gamma\omega p + m\omega^2 q^2)$$

なので行列表現すると

$$\hat{v}_H = \begin{pmatrix} \gamma\omega & 1/m \\ -m\omega^2 & -\gamma\omega \end{pmatrix}$$

$$z = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$$

とすれば正準方程式は

$$\frac{dz}{dt} = \hat{v}_H z$$

となる。これは  $\Omega = \omega\sqrt{1-r^2}$  として

$$\begin{aligned}\hat{v}_{H0}^2 &= \begin{pmatrix} \gamma\omega & 1/m \\ -m\omega^2 & -\gamma\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma\omega & 1/m \\ -m\omega^2 & -\gamma\omega \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\gamma\omega)^2 - \omega^2 & 0 \\ 0 & (\gamma\omega)^2 - \omega^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\Omega^2 & 0 \\ 0 & -\Omega^2 \end{pmatrix} \\ &= -\Omega^2 \hat{I}\end{aligned}$$

さらに

$$\hat{v}_{H0}^3 = -\Omega^2 \hat{v}_{H0}$$

$$\hat{v}_{H0}^4 = \Omega^4 \hat{I}$$

$$\hat{v}_{H0}^5 = \Omega^4 \hat{v}_{H0}$$

...

となるのであたかも  $\Omega$  が虚数単位のようにふるまい

$$\begin{aligned}\exp(t\hat{v}_{H0}) &= \hat{I} + t\hat{v}_{H0} + \frac{t^2}{2!}\hat{v}_{H0}^2 + \frac{t^3}{3!}\hat{v}_{H0}^3 + \dots \\ &= \left\{ 1 - \frac{(\Omega t)^2}{2!} + \frac{(\Omega t)^4}{4!} - \frac{(\Omega t)^6}{6!} \right\} \hat{I} + \left\{ \Omega t - \frac{(\Omega t)^3}{3!} + \frac{(\Omega t)^5}{5!} - \frac{(\Omega t)^7}{7!} \right\} \frac{\hat{v}_{H0}}{\Omega} \\ &= \cos(\Omega t) \hat{I} + \frac{1}{\Omega} \sin(\Omega t) \hat{v}_{H0}\end{aligned}$$

となる。よって解は

$$\begin{aligned}z(t) &= \begin{pmatrix} q(t) \\ p(t) \end{pmatrix} \\ &= \exp(t\hat{v}_{H0}) \begin{pmatrix} q(0) \\ p(0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\Omega t) + \gamma\omega \sin(\Omega t)/\Omega & \sin(\Omega t)/m\Omega \\ -m\omega^2 \sin(\Omega t)/\Omega & \cos(\Omega t) - \gamma\omega \sin(\Omega t)/\Omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q(0) \\ p(0) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となる。これは変換行列を

$$\hat{M} = \exp(t\hat{v}_{H0})$$

とすると

$$\det \hat{M} = \det\{\exp(t\hat{v}_{H0})\} = \exp\{t \text{Tr}(\hat{v}_{H0})\} = 1$$

をみだし、体積変化がないリュビルの定理を表している。

## 9.11 ポアソンの定理

2つの関数  $F, G$  が

$$\{F, G\} = 0$$

であれば  $F$  と  $G$  はポアソン可換 (**Poisson commutable**) であるという。

特に  $G$  を系のハミルトニアン  $H$ 、パラメタ  $s$  を時間  $t$  とみなし、関数  $F$  を  $f(z(t), t)$  とすると式 9.20 から

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\}$$

とかける。よって  $f$  が陽に  $t$  に依存せず、 $H$  がポアソン可換であれば  $f$  が一定になる。これを方向微分とリー微分を用いて

$$v_H[f] = \mathcal{L}_{v_H}(f) = 0 \rightarrow f = \text{Const}$$

と表すことができる。これは  $f$  が系の運動に沿って保存される第一積分になることでもある。

例えば次のような関係が成り立てば

$$\frac{\partial H}{\partial q^i} = \frac{\partial H}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial q^i}, \quad \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{\partial H}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial p_i}$$

ポアソン括弧は

$$\begin{aligned} \{f, H\} &= \sum_i^k \left( \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q^i} \right) \\ &= \sum_i^k \left( \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial H}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial q^i} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

この時、 $f$  は第一積分になる。例えば中心力場の質点の運動は

$$H = \frac{1}{2m} \left\{ p_r^2 + \frac{1}{r^2} \left( p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2 \theta} \right) \right\} + U(|\mathbf{r}|)$$

の場合の第一積分は

$$M^2 = p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2 \theta}$$

である。一般化すると  $F(z), G(z)$  がともに  $s$  に陽に依存しないならば  $G$  により生成されるハミルトニアンフローに沿った  $F$  の変化率は

$$\frac{dF}{ds} = v_G[F] = \{F, G\}, \quad \mathcal{L}_{v_G}(F) = \{F, G\}$$

となる。ここで  $G = F$  とすると  $v_F[F] = 0$  であり、 $F$  により生成されるハミルトニアンフローでは  $F$  自身が保存される。これをポアソンの定理という。従ってハミルトニアン  $H$  が  $t$  の陽な関数でなければ  $H$  自身が第一積分になる。時間の平行移動がハミルトニアンで、空間の平行移動が運動量で生成され、どちらも第一積分になる。この直観的なイメージを2次元で考えると次のようになる。

相空間上の関数を  $F(q, p)$  に対して次のような勾配ベクトル場を考える。

$$\nabla F(q, p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial q} \\ \frac{\partial F}{\partial p} \end{pmatrix}$$

これは  $F(q, p) = \text{Const}$  という  $F$  の等高線を表す曲線  $c$  に直交している。しかし前節でも登場した変換行列

$$\hat{\Omega}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

は2次元平面の $-90^\circ$ の回転である。よってこれを作用させたハミルトニアンベクトル場は

$$v_F = \hat{\Omega}' \nabla F(q, p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial p} \\ -\frac{\partial F}{\partial q} \end{pmatrix}$$

は $\nabla F(q, p)$ を $-90^\circ$ の回転を与えるので $F(q, p) = Const$ に沿ったものであり、一般にハミルトニアンベクトル場は超曲面 $F(q, p) = Const$ に接していることがわかる。

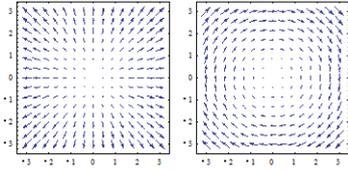


図 9.2: 勾配ベクトル場左とハミルトニアンベクトル場右

これから次の定理が成り立つ。

$G$  とポアソン可換な物理量  $F$  は  $G$  により生成されるハミルトニアンフローで保存量となる。

$$\{F, G\} = 0 \rightarrow v_G[F] = dF/ds = 0 \quad (9.48)$$

これは $v_G$ の積分曲線は $F = Const$ ,  $G = Const$ の2つの領域の交わりによって決まる相空間の中にあることになる。互いにポアソン可換な第一成分が相空間の不変集合をさだめている。

## 9.12 ネーターの定理

式 9.48 から  $F$  が保存量になることから次のような反対称な関係が導ける。

$$v_F[H] = \{H, F\} = -v_H[F]$$

よって

$$v_F[H] = 0 \iff v_H[F] = 0$$

例えばある軸のまわりの回転でハミルトニアンが保存されることはその回転の生成関数である角運動量のその軸成分が保存される。これは前部でのネーターの定理の相空間上への応用とみなせる。

ある変換群  $G = \{g\}$  の相空間  $M$  への作用を

$$\Psi : G \times M \rightarrow M : z \rightarrow \Psi(g, z)$$

と表現する。この  $G$  の単位元の接空間の基底を  $\{x_k\}$  とする。この時各  $x_k$  によって1パラメタ  $s$  の変換群により、相空間上でファイバーで見たように次のように各上げする。

$$z \rightarrow z' = \Psi(\exp(sx_k), z), \quad (k = 1, 2, \dots, l)$$

これを変換とみなして正準変換になるためには対応するベクトル場がハミルトニアン・ベクトル場として

$$v_{F_k} = \frac{d}{ds} \Psi^\mu(\exp(sx_k), z) \Big|_{s=0} \frac{\partial}{\partial z^\mu} = \Omega^{\mu\nu} \frac{\partial F_k}{\partial z^\nu} \frac{\partial}{\partial z^\mu}$$

のように接ベクトルで表されている。式 9.19 の反対称の行列  $\Omega^{\mu\nu}$  が運動量と位置の関係を都合よく割り振る役割をはたして、平面での $-90^\circ$ の回転で入れ替わる関係を保ちながら常に連続性を保つ。この時接ベクトル  $v_F[H]$  はハミルトニアンフローに沿った  $H$  の変化率である。

$$v_{F_k}[H] = \frac{d}{ds} H(\Psi^\mu(\exp(sx_k), z)) \Big|_{s=0} = \{H, F_k\}$$

よって  $H$  が一定であればこの接ベクトルは一定になる。一般的な正準変換を

$$z \rightarrow z' = \Psi(z)$$

として、その逆変換を

$$z' \rightarrow z = \psi(z')$$

とすればハミルトニアンは時間を陽に含まないならば

$$H(z) \rightarrow K(z') = H(\psi(z'))$$

特に  $K(z') = H(z')$  すなわち、

$$H(\Psi(z)) = H(z)$$

であればハミルトニアンは変換  $z \rightarrow z' = \Psi(z)$  で不変であるという。この時  $g \in G$  に対して

$$H(\Psi(g, z)) = H(z)$$

従って、

$$H(\Psi^\mu(\exp(sx_k), z)) = H(z)$$

である。この時のハミルトニアンは  $G$  不変 ( $G$ -invariant) であるという。

$G$  不変であれば  $F_1, F_2, \dots, F_l$  が第一積分になり

$$v_F[H] = 0, \quad v_H[F] = 0$$

が満たされる。従って古典力学の観測可能な量は相空間上の実関数  $F$  であり、相空間上でハミルトニアン・ベクトル場を構成する。指数写像  $\exp(sv_F)$  を生成し、正準変換を引き起こす。

量子力学との対応を考えると観測可能な量は無限次元のヒルベルト空間上の自己共役な演算子  $\hat{F}$  がユニタリ変換

$$\Psi = \exp\left(i\lambda\hat{F}/\hbar\right)$$

を引き起こす。運動方程式は古典場が

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H\}$$

で表されたのに対し、

$$\frac{d\hat{F}}{dt} = [\hat{F}, \hat{H}] / i\hbar$$

というハイゼンベルグの運動方程式になる。

### 9.13 固有値問題

相空間上に  $g, h$  という連続な関数を用意する。

$$f \rightarrow g = \{H, f\}$$

という関数上の変換を考える。この時、次の固有方程式が成り立つとする。

$$\{H, f\} = \lambda f$$

今、固有関数  $f_\alpha, f_\beta$  に固有値  $\lambda_\alpha, \lambda_\beta$  が対応するとする。

この時、次のような関数を考える

$$F = (f_\alpha)^\kappa (f_\beta)^\rho$$

するとポアソン括弧はライプニッツ則をみたすので

$$\begin{aligned}
 \{H, F\} &= \{H, (f_\alpha)^\kappa\} (f_\beta)^\rho + (f_\alpha)^\kappa \{H, (f_\beta)^\rho\} \\
 &= \kappa (f_\alpha)^{(\kappa-1)} \{H, f_\alpha\} (f_\beta)^\rho + (f_\alpha)^\kappa \{H, f_\beta\} \rho (f_\alpha)^{(\rho-1)} \\
 &= \kappa \lambda_\alpha (f_\alpha)^\kappa (f_\beta)^\rho + \rho \lambda_\beta (f_\alpha)^\kappa (f_\beta)^\rho \\
 &= (\kappa \lambda_\alpha + \rho \lambda_\beta) F
 \end{aligned}$$

となる。それゆえ

$$\frac{\kappa}{\rho} = -\frac{\lambda_\beta}{\lambda_\alpha}$$

のように固有値の比とすると

$$\{H, F\} = 0$$

となる。よって  $F = (f_\alpha)^\kappa (f_\beta)^\rho$  を第一積分とすることができる。

ポアソンの定理があるのである第一積分のいくつかの  $\{F_1, F_2 \dots\}$  がわかっているならばポアソンの定理により  $\{F_1, F_2\}$  を作れば新しい第一積分ができる。この操作を繰り返して、 $\{F_1, F_2 \dots\} = \mathcal{F}$  は、ベクトル空間をなし、ポアソンの括弧に関し閉じた群をつくる。これは構造定数を  $c_{\alpha\beta}^\gamma$  として

$$\{F_\alpha, F_\beta\} = c_{\alpha\beta}^\gamma F_\gamma = \mathcal{F}$$

と表され、リー代数をなすことがわかる。

## 10 角運動量の再考

古典論に登場する角運動量は運動量保存則と独立して成立した。しかし、基底をつくる角度  $\theta$  は無次元であり、モーメントは次元だけとればエネルギーと同じである。これからもベクトル空間は単純ではなく何等かの構造を持っていると考えられる。これが量子力学に拡張されるとさらに回転が量子化され、あらゆる方向から見ても物理学が同じようにするための方策はスピンという古典論では考えられない概念を必要とした。このあたりの歴史的な背景は朝永氏の「スピンはめぐる」に詳しい。さらにこの回転の考え方は量子ビットの基本的な表現に対応していく。J.J 桜井氏の「現代の量子力学」では量子力学の導入に無限小回転を基礎として展開され多くの示唆を与えている。また、シューウインガー氏の「シューウインガー量子力学」では観測の効果を量子力学の原点に取り入れ、回転との関係を示している。これらの優れた教科書を中心に著者の独断を混ぜて角運動量の考えを深めていきたい。

### 10.1 交換関係

基本的な物質について並進運動と回転は基本的な自由度である。熱力学的にはこれらの自由度にエネルギーが分配される。角運動量は量子化されていく中で単なる回転のイメージから位相空間へと飛躍していく。

まず、古典的に角運動量の量子化を復習する。次で角運動量  $l$  を定義する。

$$\mathbf{l} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

これはベクトル量であるので空間的に角運動量は次の交換関係で示される。

$$[l_i, l_j] = i l_k \quad (10.1)$$

ただし、 $i, j, k = 1, 2, 3$  で巡回群をつくる。つまり、各成分が互いに交換することなく虚数単位側に残りの成分が現れる。これは複素空間での回転を表していて角運動量の特徴である。

角運動量は3次元で定義されるので

$$l^2 = l_x^2 + l_y^2 + l_z^2$$

であるが、これはスカラーであるので保存される。

$$[l_i, l^2] = 0$$

よって同時対角可能ができる。ここで  $N$  粒子系を考え、添え字が多いので次のように表現する。全角運動量を  $\mathbf{L}$  とすると

$$\mathbf{L} = \sum_{n=1}^N \mathbf{l}^{(n)}$$

よって式 10.1 は次のようになる。

$$[L_x, L_y] = \sum_{n'} \sum_n [l_x^{(n)}, l_y^{(n')}] = \sum_n [l_x^{(n)}, l_y^{(n)}] = i \sum_n l_z^{(n)} = iL_z$$

一つ有用なベクトル公式を紹介して練習問題とする。 $\mathbf{J}$  を角運動量として  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  をベクトルとすると

$$[(\mathbf{a} \cdot \mathbf{J}), (\mathbf{b} \cdot \mathbf{J})] = i((\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{J})$$

が成り立つ。

## 10.2 有限回転と無限小回転

2次元の回転は可換であるが3次元ではそうでない。これは実際に机の上で板のような直方体を回転させてみるとよくわかる。まず、この回転の様子を表現しよう。同じ直方体の板から出発し、矢印の軸で回転  $\pi/2$  だけ回転させる。z 軸の回転を  $R_z(\pi/2)$ 、x 軸の回転を  $R_x(\pi/2)$  とおく、赤色の矢印のようにはじめに  $R_z(\pi/2)$  をする場合と、青色の矢印のようにはじめに  $R_x(\pi/2)$  とするのでは下図の一番手前の結果が異なる。

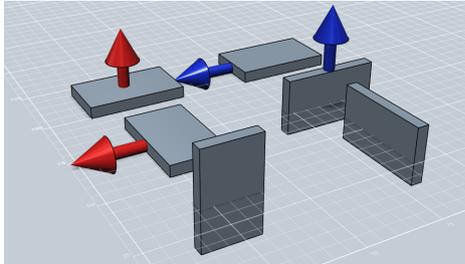


図 10.1: z 軸、x 軸の回転の順番を変えると結果が異なる。

これを数式で表現する。3次元のベクトルを考え、この回転  $R$  によって移る様子を

$$\mathbf{V}' = R\mathbf{V}$$

とおく、この時直交条件として

$$RR^T = R^T R = 1$$

とすれば、ベクトルの大きさは保たれ

$$\sqrt{V_x'^2 + V_y'^2 + V_z'^2} = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$$

が成り立つ。このような回転群は第2部で学んだ  $SO(3)$  に属する。具体的に  $R_z(\phi)$  は

z 軸の負方向からみた反時計回りの回転を  $\phi$  と選んだ時、

$$R_z(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となるので微小角  $\epsilon$  では各軸回りの微小回転が次のようになる。

$$R_x(\epsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{\epsilon^2}{2} & -\epsilon \\ 0 & \epsilon & 1 - \frac{\epsilon^2}{2} \end{pmatrix}, R_y(\epsilon) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\epsilon^2}{2} & -\epsilon & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\epsilon & 0 & 1 - \frac{\epsilon^2}{2} \end{pmatrix}, R_z(\epsilon) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\epsilon^2}{2} & -\epsilon & 0 \\ \epsilon & 1 - \frac{\epsilon^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

これから実際の交換積をつくると

$$R_x(\epsilon)R_y(\epsilon) - R_y(\epsilon)R_x(\epsilon) = \begin{pmatrix} 0 & -\epsilon^2 & 0 \\ \epsilon^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R_z(\epsilon^2) - 1 = R_z(\epsilon^2) - R_{all}(0) \quad (10.2)$$

となり。図の手前の 2 つの直方体の差が現れる。

これは量子力学の角運動量の交換関係に対応する。量子力学に拡張するため、回転の演算子を  $U(R)$  として

$$|\alpha\rangle_R = U(R) |\alpha\rangle$$

とするが逆回転が元に戻るため  $UU^\dagger = 1$  を満たす  $U$  はユニタリ行列である。

この時一般的な無限小変換が  $G$  をエルミート行列 ( $G = G^*$ ) として

$$U_\epsilon = 1 - \epsilon G \quad (10.3)$$

と表すことができた。無限小移動では次の置き換え

$$G \rightarrow \frac{p_x}{\hbar}, \quad \epsilon \rightarrow dx$$

;

であるし、無限小時間推進は

$$G \rightarrow \frac{H}{\hbar}, \quad \epsilon \rightarrow dt$$

である。従って回転では  $k$  軸回りの  $d\phi$  の微小回転を

$$G \rightarrow \frac{J_k}{\hbar}, \quad \epsilon \rightarrow d\phi$$

となるように角運動量を演算子  $J_k$  を定義する。注意すべきは古典的に  $J = x \times p$  という定義はあえて用いない。かわりに式 10.3 から  $\mathbf{n}$  軸まわりの無限小回転演算子を次のようにおく。

$$D(\hat{\mathbf{n}}, d\phi) = 1 - i \frac{\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}}}{\hbar} d\phi \quad (10.4)$$

これから有限回転  $\phi$  はこの演算子をかけていけばいい。つまり、 $\phi/N$  を微小変化  $d\phi$  と置き換えて

$$\begin{aligned} D_z(\phi) &= \lim \left[ 1 - i \left( \frac{J_z}{\hbar} \right) \left( \frac{\phi}{N} \right) \right]^N \\ &= \exp \left( \frac{-i J_z \phi}{\hbar} \right) \\ &= 1 - \frac{i J_z \phi}{\hbar} - \frac{J_z^2 \phi^2}{2\hbar^2} + \dots \end{aligned}$$

となる。展開したものを使い  $x, y$  軸で次のように交換関係を求めてみる。

$$\begin{aligned} [D_x(\phi), D_y(\phi)] &= \left(1 - \frac{iJ_x\phi}{\hbar} - \frac{J_x^2\phi^2}{2\hbar^2} + \dots\right) \left(1 - \frac{iJ_y\phi}{\hbar} - \frac{J_y^2\phi^2}{2\hbar^2} + \dots\right) \\ &\quad - \left(1 - \frac{iJ_y\phi}{\hbar} - \frac{J_y^2\phi^2}{2\hbar^2} + \dots\right) \left(1 - \frac{iJ_x\phi}{\hbar} - \frac{J_x^2\phi^2}{2\hbar^2} + \dots\right) \\ &= 1 - 1 - \frac{i(J_x + J_y - J_x - J_y)\phi}{\hbar} - \frac{[J_x, J_y]\phi^2}{\hbar^2} + \dots \end{aligned}$$

よって1次まででは交換するが2次までの近似では次のようになる。

$$[D_x(\phi), D_y(\phi)] = -\frac{[J_x, J_y]\phi^2}{\hbar^2} \quad (10.5)$$

そこで

$$[J_x, J_y] = i\hbar J_z$$

とおけば式 10.2 に対応して

$$[D_x(\phi), D_y(\phi)] = -\frac{iJ_z\phi^2}{\hbar} \quad (10.6)$$

が成り立つ。さらに一般化すれば

$$[J_i, J_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}J_k \quad (10.7)$$

である。ここには量子論の特徴である  $\hbar$  が入っている。しかし、この非可換な関係が式 10.2 のように実3次元の回転に対応している。最初に見たように  $J_k$  が  $k$ -軸回りの回転を表している。

そして、異なる軸回りの回転は交換しないのである。

### 10.3 スピン

式 10.7 を満足する演算子として2つの  $\pm$  の状態を組み合わせた次のような演算子をつくることができる。

$$S_x = \frac{\hbar}{2} \{|+\rangle\langle -| + |-\rangle\langle +|\}$$

$$S_y = \frac{i\hbar}{2} \{-|+\rangle\langle -| + |-\rangle\langle +|\}$$

$$S_z = \frac{\hbar}{2} \{|+\rangle\langle +| - |-\rangle\langle -|\}$$

よくみればこれはパウリ行列であらわすことができる。Pauli 行列  $\sigma$  を用いて

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ S_k &= \frac{\hbar}{2}\sigma_k \end{aligned} \quad (10.8)$$

この演算子を用いて  $z$  軸回りの  $\phi$  の回転を考えると回転後の状態には添え字  $R$  をつけることにして、

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle_R &= D_z(\phi)|\alpha\rangle \\ D_z(\phi) &= \exp\left(\frac{-iS_z\phi}{\hbar}\right) \end{aligned}$$

となる。この回転を具体的にみると

$${}_R \langle \alpha | S_x | \alpha \rangle_R = \langle \alpha | D_z^\dagger(\phi) S_x D_z(\phi) | \alpha \rangle$$

となるので土の状態に戻して計算すると

$$\begin{aligned} S_z &= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \exp\left(\frac{iS_z\phi}{\hbar}\right) S_z &= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} e^{i\phi/2} & 0 \\ 0 & -e^{i\phi/2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (10.9)$$

となるから

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{iS_z\phi}{\hbar}\right) S_x \exp\left(\frac{-iS_z\phi}{\hbar}\right) &= \frac{\hbar}{2} \exp\left(\frac{iS_z\phi}{\hbar}\right) \{|+\rangle\langle -| + |-\rangle\langle +|\} \exp\left(\frac{-iS_z\phi}{\hbar}\right) \\ &= \frac{\hbar}{2} \left( e^{i\phi/2} |+\rangle\langle -| e^{i\phi/2} + e^{-i\phi/2} |-\rangle\langle +| e^{-i\phi/2} \right) \\ &= \frac{\hbar}{2} \left[ \{|+\rangle\langle -| + |-\rangle\langle +|\} \cos\phi \right. \\ &\quad \left. + i \{|+\rangle\langle -| - |-\rangle\langle +|\} \sin\phi \right] \\ &= S_x \cos\phi - S_y \sin\phi \end{aligned}$$

が得られ  $y$  軸回転が出現する。

同じ計算を交換関係を用いて示すとベーカー・ハウドルフの補助定理から  $G$  がエルミートであれば

$$\exp(iG\phi) A \exp(-iG\phi) = A + i\theta [G, A] + \left(\frac{i^2\theta^2}{2!}\right) [G, [G, A]] + \cdots + \left(\frac{i^n\theta^n}{n!}\right) [G, [G, \cdots [G, A] \cdots]] + \cdots$$

が成り立つ、よって

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{iS_z\phi}{\hbar}\right) S_x \exp\left(\frac{-iS_z\phi}{\hbar}\right) &= S_x + \left(\frac{i\phi}{\hbar}\right) [S_z, S_x] + \left(\frac{1}{2!}\right) \left(\frac{i\phi}{\hbar}\right)^2 [S_z, [S_z, S_x]] \\ &\quad + \left(\frac{1}{3!}\right) \left(\frac{i\phi}{\hbar}\right)^3 [S_z, [S_z, [S_z, S_x]]] + \cdots \end{aligned}$$

となるが各項に

$$\begin{aligned} [S_z, S_x] &= i\hbar S_y \\ [S_z, [S_z, S_x]] &= \hbar^2 S_x \\ [S_z, [S_z, [S_z, S_x]]] &= i\hbar^3 S_y \end{aligned}$$

を代入すると結局  $x, y$  成分が残り

$$\exp\left(\frac{iS_z\phi}{\hbar}\right) S_x \exp\left(\frac{-iS_z\phi}{\hbar}\right) = S_x \cos\phi - S_y \sin\phi \quad (10.10)$$

が得られ、同じ結果になる。興味深いことに 3次元回転  $X, Y, Z$  のうちの 2つの回転の組み合わせを入れ子上にして繰り返すと固定した軸以外の 2軸の回転のみが現れる。

スピン 1/2 の系では各成分が回転後の状態でどういった期待値をとるか次で計算してみよう。

$z$  軸回りの  $\phi$  の回転を考えれば

$${}_R \langle \alpha | S_x | \alpha \rangle_R = \langle S_x \rangle \cos\phi - \langle S_y \rangle \sin\phi$$

$${}_R \langle \alpha | S_y | \alpha \rangle_R = \langle S_y \rangle \cos \phi + \langle S_x \rangle \sin \phi$$

$${}_R \langle \alpha | S_z | \alpha \rangle_R = \langle S_z \rangle \quad (10.11)$$

となるので古典的な回転のようにふるまうことがわかる。従って一般的な期待値は  $3 \times 3$  の直交行列  $R_{kl}$  を用いて

$$\langle S_k \rangle = \sum_l R_{kl} \langle S_l \rangle$$

と書ける。

ところが複素数として位相が量子力学的な状態にはかけることができる。そこで一般的な状態ベクトル

$$|\alpha\rangle = |+\rangle \langle + | \alpha \rangle + |-\rangle \langle - | \alpha \rangle \quad (10.12)$$

これに回転演算子を作用させると式 10.9 より

$$\exp\left(\frac{-iS_z\phi}{\hbar}\right) |\alpha\rangle = e^{-i\phi/2} |+\rangle \langle + | \alpha \rangle + e^{i\phi/2} |-\rangle \langle - | \alpha \rangle \quad (10.13)$$

ここで指数に  $\phi/2$  が出てくることから古典的には考えられないことが起きる。つまり  $z$  軸回りの  $2\pi$  の回転を考えると

$$|\alpha\rangle_{R_z(2\pi)} = -|\alpha\rangle$$

であり、元に戻すには  $4\pi$  の回転が必要になる。

### 10.3.1 スピン歳差運動

この回転の相違がどう観測かわかるかをみるためにスピンの歳差運動を考える。 $z$  軸回りの回転のハミルトニアンを次のようにおく。 $\omega$  はボーア振動子として

$$H = -\left(\frac{e}{m_e c}\right) \mathbf{S} \cdot \mathbf{B} = \omega S_z$$

$$\omega \equiv \frac{|e|B}{m_e c}$$

この時の時間発展 ( $t=0 \rightarrow t=t$ ) は次のユニタリ演算子

$$U(t, 0) = \exp\left(\frac{-iHt}{\hbar}\right) = \exp\left(\frac{-iS_z\omega t}{\hbar}\right)$$

で表される。これはちょうど式 10.9 を  $\phi = \omega t$  と置き換えたものである。これにより式 10.11 が次のような時間発展で置き換えることができる。

$$\langle |S_x| \rangle_t = \langle S_x \rangle_{t=0} \cos \omega t - \langle S_y \rangle_{t=0} \sin \omega t$$

$$\langle |S_y| \rangle_t = \langle S_y \rangle_{t=0} \cos \omega t + \langle S_x \rangle_{t=0} \sin \omega t$$

$$\langle |S_z| \rangle_t = \langle S_z \rangle_{t=0} \quad (10.14)$$

従ってスピンは  $t = 2\pi/\omega$  の 1 周期だけ時間経過すれば元にもどる。ところが状態ケットの時間変化をみると式 10.13 から

$$|\alpha, t = 0\rangle = e^{-i\omega t/2} |+\rangle \langle +|\alpha\rangle + e^{i\omega t/2} |-\rangle \langle -|\alpha\rangle$$

であるのではじめの状態に戻るまでは  $t = 4\pi/\omega$  まで待つ必要がある。つまり状態ケットの周期  $T_K$  はスピン歳差運動の周期  $T_S$  の2倍である。すなわち

$$\begin{aligned} T_S &= \frac{2\pi}{\omega} \\ T_K &= \frac{4\pi}{\omega} \end{aligned}$$

である。

この相違は量子力学独特のものである。これは実際に中性子干渉実験により確認された。

次の図のようにエネルギーの揃った熱中性子線を2つの経路AとBに分ける。この内Bの経路には途中に磁場  $\mathbf{B}$  をかけた領域がある。この領域を通る時間を  $T$  とすると状態ケットは

$$\phi_B = e^{\pm i\omega T/2}$$

の位相変化を受ける。ただし、熱中性子線の角振動数は構造定数  $g_n$  として

$$\omega = \frac{g_n e B}{m_p c} \quad (10.15)$$

から求められる。

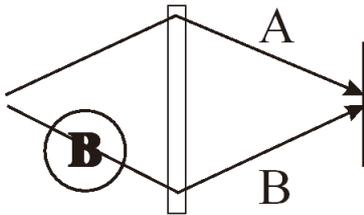


図 10.2: 磁場  $\mathbf{B}$  の領域が B の経路にはある。中性子線は干渉模様を作る

この位相差によりスクリーンでの干渉がおこり強度ははじめに位相差  $\delta$  があるとする

$$\cos\left(\frac{\mp\omega T}{2} + \delta\right)$$

を示す。実験では  $B \neq 0$  の領域を通る時間  $T$  を固定し、磁場  $B$  の強さを変化させ、歳差運動の角振動数  $\omega$  を変化させる。この時の干渉模様の強度  $I$  は  $\mathbf{B}$  の関数である周期関数になると予想される。

そこでこの曲線の丁度1波長分の  $\mathbf{B}$  の変化量を  $\Delta B$  とおくと式 10.15 から

$$\Delta B = \frac{m_p c}{e g_n} \Delta\omega \quad (10.16)$$

ここで

$$m_p c = \hbar k = \hbar/\lambda$$

でおきかえ、 $B \neq 0$  の領域を通る経路を  $l$  として

$$\Delta\omega = 2\pi\Delta f = 2n\pi\frac{c}{l}$$

を式 10.16 に代入すると

$$\Delta B = n \frac{2\pi\hbar c}{e g_n \lambda l} \quad (10.17)$$

となる。ここで  $n$  は状態ケットがスピンの回転周期の何倍になっているかを表す整数である。もし、これまでの考察のように量子力学の予言が正しければ  $n = 2$  であり、古典的には  $n = 1$  である。これまでの実験では全て  $n = 2$  が正しいことを示している。すなわち

$$T_K = 2T_S \quad (10.18)$$

### 10.3.2 パウリ行列

前節でみた 2 成分の物理量はスピノル (spinor) として定式化できる。これを次に  $\psi$  で表すことにする。

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \psi_+$$

$$|-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \psi_-$$

$$\langle +| = (1, 0) = \psi_+^\dagger$$

$$\langle -| = (0, 1) = \psi_-^\dagger$$

数学的に複素共役と転置をとる操作が物理的に  $\pm$  のスピンの状態の違いを表すわけである。さらに 10.12 から

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle &= |+\rangle \langle +|\alpha\rangle + |-\rangle \langle -|\alpha\rangle \\ &= \begin{pmatrix} \langle +|\alpha\rangle \\ \langle -|\alpha\rangle \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \alpha| &= \langle \alpha|+\rangle \langle +| + \langle \alpha|-\rangle \langle -| \\ &= (\langle \alpha|+, \langle \alpha|-) \end{aligned}$$

第 2 部のテンソルで見たように  $\langle \pm|$  と  $|\pm\rangle$  は双対な基底ベクトルのようにふるまう。スピノル  $\psi$  は次のように複素数の係数  $c_\pm$  を用いて

$$\psi = \begin{pmatrix} \langle +|\alpha\rangle \\ \langle -|\alpha\rangle \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} c_+ \\ c_- \end{pmatrix} = c_+ \psi_+ + c_- \psi_-$$

$$\psi^\dagger = (\langle \alpha|+, \langle \alpha|-) \equiv (c_+^*, c_-^*) = c_+^* \psi_+^\dagger + c_-^* \psi_-^\dagger \quad (10.19)$$

と表すことができる。古典物理では登場しない複素数が重要な働きをすることがわかるだろう。しかし、こうした複素数への拡張は式 10.18 のように周期が整数倍になる条件が関わるということが重要になる。演算子がいくつか定義できたのでこれから観測されるスピンの期待値が次のように計算できる。

$$\langle \alpha|S_k|\alpha\rangle \equiv \sum_{a'=+,-} \sum_{a''=+,-} \langle \alpha|a'\rangle \langle a'|S_k|a''\rangle \langle a''|\alpha\rangle \quad (10.20)$$

ここにも古典論と量子論の決定的な相違がある。量子論がある物理量の観測は確率的な計算と同じ方法をたどる。あらゆる観測可能な状態をあらかじめセットし、その足し合わせで目的の期待値を得るわけである。これに対し、古典論では目的の観測量以外の他の状態を知る必要はない。スピンのように 2 つの異なる状態があ

るわけではなく、はじめから1つの状態でしかないわけなので確率の入る要素がない。しかし、量子論では異なる状態があり、実際にこれらは古典的なヤングの実験のように干渉する。

$\langle \alpha | a' \rangle$  は波動関数  $\psi(a')$  として振る舞うのである。この関係にはさらに物理として必要な力学が存在する。式 10.20 は式 10.8 のパウリ行列を用いて次のようにもかける。

$$\langle \alpha | S_k | \alpha \rangle = \frac{\hbar}{2} \psi^\dagger \sigma_k \psi \quad (10.21)$$

前部の数学準備のパウリ行列でみたようにパウリ行列は一般に

$$2\sigma_i \sigma_j = \{\sigma_i, \sigma_j\} + [\sigma_i, \sigma_j], \quad i, j = 1, 2, 3$$

を満たす。そこで  $a, b$  を3次元ベクトルとすると

$$\sigma \cdot a = \sum_k a_k \sigma_k = \begin{pmatrix} +a_3 & a_1 - ia_3 \\ a_1 + ia_2 & -a_3 \end{pmatrix}$$

となるので

$$\begin{aligned} (\sigma \cdot a)(\sigma \cdot b) &= \sum_j a_j \sigma_j \sum_k b_k \sigma_k \\ &= \sum_{i,j} \left( \frac{1}{2} \{\sigma_j, \sigma_k\} + \frac{1}{2} [\sigma_j, \sigma_k] \right) a_j b_k \\ &= \sum_{i,j} (\delta_{jk} + i\epsilon_{jkl} \sigma_l) a_j b_k \end{aligned}$$

よって次の重要な関係が成り立つ

$$(\sigma \cdot a)(\sigma \cdot b) = a \cdot b + i\sigma \cdot (a \times b)$$

これは仮に  $\sigma$  を基底に見れば  $a, b$  を成分にもつものの積が実方向にスカラー、虚方向に外積成分を持つことを示す。これが式 10.18 を満たすように構成されることが物理的な意味を持つものになる。

また、次の有用な関係が成り立つ

$$\begin{aligned} \sigma_k^\dagger &= \sigma_k \\ \det \sigma_k &= -1 \\ Tr(\sigma_k) &= 0 \end{aligned} \quad (10.22)$$

これから  $\sigma_k$  は向きを変える。また、 $a$  が実数であれば

$$(\sigma \cdot a)^2 = |a|^2$$

であるので大きさをとると、実ベクトルとの区別が見えない。また、次のように単位ベクトル  $n$  との間に関係がある。

$$(\sigma \cdot n)^m \begin{cases} 1 & m : \text{even} \\ \sigma \cdot n & m : \text{odd} \end{cases}$$

これからオイラーの公式の拡張として

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{-i\sigma \cdot n\phi}{2}\right) &= 1 \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - i\sigma \cdot n \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \\ &= \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - in_z \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) & (-in_x - n_y) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \\ (-in_x + n_y) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) & \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + in_z \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (10.23)$$

が得られる。似たような回転演算子が登場したが  $\exp(-i\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}\phi/\hbar)$  は状態  $|\alpha\rangle$  に作用し、 $2 \times 2$  の行列なので  $\exp(-i\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}\phi/\hbar)$  はスピノル  $\psi$  に作用する。ここで回転の操作に対し、ベクトルの的に振る舞うのはパウリ行列  $\boldsymbol{\sigma}$  ではないことに注意する。式 10.21 のようにはさまれたものがベクトルとして振る舞う、つまり

$$\psi^\dagger \sigma_k \psi \rightarrow \sum_l R_{kl} \psi^\dagger \sigma_l \psi$$

であり、実際に

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{i\sigma_3\phi}{2}\right) \sigma_1 \exp\left(\frac{-i\sigma_3\phi}{2}\right) &= \sigma_1 \cos \phi - \sigma_2 \sin \phi \\ &= R_{31} \exp\left(\frac{i\sigma_3\phi}{2}\right) \sigma_1 \exp\left(\frac{-i\sigma_3\phi}{2}\right) \\ &+ R_{32} \exp\left(\frac{i\sigma_3\phi}{2}\right) \sigma_2 \exp\left(\frac{-i\sigma_3\phi}{2}\right) \\ &+ R_{33} \exp\left(\frac{i\sigma_3\phi}{2}\right) \sigma_3 \exp\left(\frac{-i\sigma_3\phi}{2}\right) \end{aligned}$$

となる。

さて、ここで前節のシュテルン・ゲルラッハの実験で任意の方向  $\mathbf{n}(n_x, n_y, n_z)$  に観測器を置く場合を考えよう。 $\mathbf{n}$  の向きを下図のようにとる。

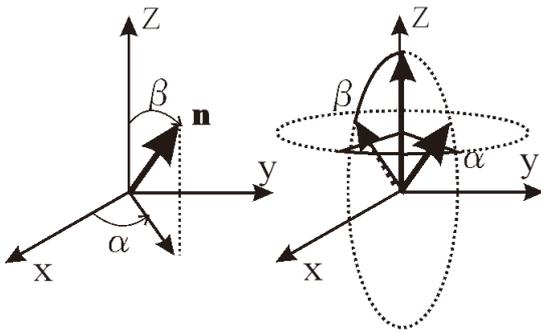


図 10.3: 任意の回転はまず  $\alpha, \beta$  の角度で軸ベクトルを決め、 $\phi$  だけ回転させる。

この時の回転演算子は  $\phi = 2\pi$  に対して次のように反転し、元にはもどらない。

$$\exp\left(\frac{-i\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}2\pi}{2}\right) = -1$$

これが実際に何を示すかを見るために次の固有方程式を考える。

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \psi = \psi$$

スピンの状態に書き換えれば

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{n} |\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}; +\rangle = \frac{\hbar}{2} |\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}; +\rangle$$

を満たす固有状態ベクトルを求めることを考える。そのために上図においてはじめに  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  の上向きスピノルを考える。これを  $y$  軸の周りに  $\beta$ 、 $z$  軸の周りに  $\alpha$  だけ回転させれば  $\mathbf{n}$  の向きになる。この操作は

$$\exp\left(-i\sigma_3 \frac{\alpha}{2}\right) \exp\left(-i\sigma_2 \frac{\beta}{2}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とかける。式 10.10 から

$$\begin{aligned}
 \psi &= \left[ \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - i\sigma_3 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right] \left[ \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) - i\sigma_2 \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \right] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - i\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) & 0 \\ 0 & \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{-i\alpha/2} \\ \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{+i\alpha/2} \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{10.24}$$

であることがわかる。この結果は一般的に成り立つ重要な内容を持つので次節で取り上げる。

## 10.4 SU(2) 回転

前節でみたように一般の回転を表すには軸の傾きを表すべき、 $\alpha, \beta$  と回転角  $\phi$  が必要である。

これは一般的な直交行列  $R$  を用いても表すことができるはずである。3次元空間ではこの行列は  $3 \times 3$  の 9成分を持つことになるが直交性の条件から

$$RR^T = R^T R = 1$$

があるのでこれから 6 個の独立した方程式が得られ、独立成分は 3 個である。これらは前部でも述べた  $O(3)$  の群をつくる。

ところが前節では回転の表現に 2 成分のスピンルを用いた。これは式 10.23 の  $2 \times 2$  の行列になる。

$$U \equiv \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - in_z \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) & (-in_x - n_y) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \\ (-in_x + n_y) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) & \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + in_z \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \end{pmatrix} \tag{10.25}$$

これから式 10.19 のように

$$\psi = c_+ \psi_+ + c_- \psi_-$$

と表すことができたが、 $\psi$  がユニタリであるためにはこの複素数の係数  $c_{\pm}$  は次のような性質を持つ。

$$|c_+|^2 + |c_-|^2 = 1$$

これは  $U$  がユニモジュラー (Unitary であり modular) であることを表す。一般に

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}$$

であり、次のようにユニタリーになる。

$$U(a, b)^\dagger U(a, b) = \begin{pmatrix} a^* & -b \\ b^* & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} = 1$$

Matrix という形になったせいで複素共役だけではなく、転置という操作がないと単位元がつかれない。つまり、式 10.22 のようなひねりがないといけないことになる。式 10.25 は具体的に次のように対応する。

$$Re[a] = \cos\frac{\phi}{2}, \quad Im[a] = -n_z \sin\frac{\phi}{2}$$

$$Re[b] = -n_y \sin\frac{\phi}{2}, \quad Im[b] = -n_x \sin\frac{\phi}{2}$$

これらはユニモジュラー性を満たしている。

これらは複素空間での回転とみなすことができる。2つの複素数  $a, b$  はケーリー・クラインのパラメタと呼ばれている。これは量子力学以前のジャイロスコープの運動を記述する際に既に使われていたものである。この演算子の積をつくると複素数を持つことで興味ある性質が出てくる。

$$U(a_1, b_1)U(a_2, b_2) = U(a_1a_2 - b_1b_2^*, a_1b_2 + a_2^*b_1)$$

すなわち積もユニモジュラー性を満たす。

$$|a_1a_2 - b_1b_2^*|^2 + |a_1b_2 + a_2^*b_1|^2 = 1$$

また、 $U$  の逆行列は次のようになる。

$$U^{-1}(a, b) = U(a^*, -b)$$

これは前節でみた群の中の  $U(2)$  の部分群である群  $SU(2)$  とみなすことができる。

先の回転が  $O(3)$  であったことから  $U(2)$  と  $O(3)$  は同型であるが1対1の対応ではなく、1対2の対応になっている。 $U(a, b)$  と  $U(-a, -b)$  は  $O(3)$  では1つの  $3 \times 3$  の行列になるが  $SU(2)$  では区別される。

しかし、この2つが局所的には同型であることが重要になる。逆に局所性を定義するのにもこの2つの群の対応が重要になることを後に見る。

## 10.5 オイラー回転

先の剛体の回転は古典的にオイラーの回転と呼ばれる  $t$  次の3段階の方法でも記述できる。空間にある軸  $x, y, z$  に対して、剛体と共に回転する軸を  $x', y', z'$  と呼ぶことにしよう。これは回転の度に変化するので次の回転では  $x'', y'', z''$  軸になるとする。

1.  $z$  軸まわりに角度  $\alpha$  だけ  $z$  軸の正方向から見て反時計回りに回転させる。
2. 次に剛体に付随した  $y'$  軸まわりに角度  $\beta$  だけ回す。
3. 最後に  $z'$  軸回りに  $\gamma$  だけ回転させる。

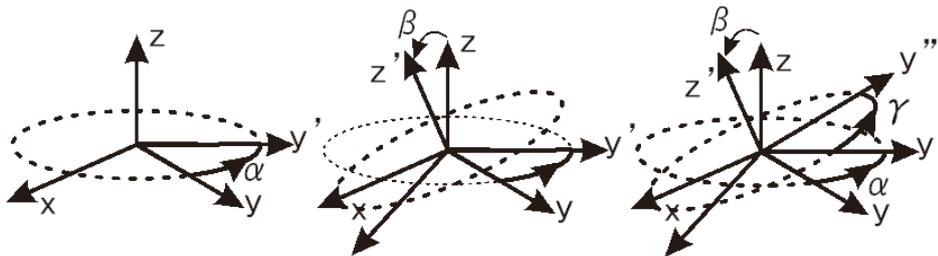


図 10.4: オイラーの回転

この回転を次のように表すことにする。

$$R(\alpha, \beta, \gamma) \equiv R_{z'}(\gamma)R_{y'}(\beta)R_z(\alpha)$$

この回転では  $y'$  軸回りの回転と  $y$  軸回りの回転は次のような関係がある。

$$R_{y'}(\beta) = R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z^{-1}(\alpha) \tag{10.26}$$

つまり、剛体に固定したプライムの座標軸は空間に固定したプライムのない軸回りの回転の合成で表すことができる。この場合、剛体の  $y'$  軸をまず  $z$  軸回りに  $z$  軸の正方向から見て時計回りに回転させて  $y'$  軸を元の

$y$  軸にもどす ( $R_z^{-1}(\alpha)$ )。次に  $y$  軸まわりに  $\beta$  だけ回転させる ( $R_y(\beta)$ )。最後に剛体の  $y$  軸を空間の  $z$  軸回りに  $\alpha$  だけ回転させ、 $y'$  軸方向に戻す ( $R_z(\alpha)$ )。プライムのない空間固定の 3 回の回転の合成がプライムのある剛体に固定したプライムのある 1 つの回転を表す。

全く同様に軸を変えて  $y'$  軸回りの  $\beta$  回転を考えれば次も成り立つ。

$$R_{z'}(\gamma) = R_{y'}(\beta)R_z(\gamma)R_{y'}^{-1}(\beta) \quad (10.27)$$

従って式 10.26, 10.27 から同軸回りの回転は交換することを利用すると

$$\begin{aligned} R(\alpha, \beta, \gamma) &= R_{z'}(\gamma)R_{y'}(\beta)R_z(\alpha) = R_{y'}(\beta)R_z(\gamma)R_{y'}^{-1}(\beta)R_{y'}(\beta)R_z(\alpha) \\ &= R_{y'}(\beta)R_z(\gamma)R_z(\alpha) \\ &= R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z^{-1}(\alpha)R_z(\gamma)R_z(\alpha) \\ &= R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z^{-1}(\alpha)R_z(\alpha)R_z(\gamma) \\ &= R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z(\gamma) \end{aligned}$$

となり、全てプライムのない回転で表すことができる。

これをそのまま式 10.46 の回転の演算子で書き直す。

Pauli 行列  $\sigma$  を用いて

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

次のように表す。

$$\begin{aligned} D(\alpha, \beta, \gamma) &= D_z(\alpha)D_y(\beta)D_z(\gamma) \\ &= \exp\left(-i\frac{1}{2}\sigma_3\alpha\right)\exp\left(-i\frac{1}{2}\sigma_2\beta\right)\exp\left(-i\frac{1}{2}\sigma_3\gamma\right) \\ &= \begin{pmatrix} e^{-i\alpha/2} & \\ & e^{i\alpha/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\beta/2) & -\sin(\beta/2) \\ \sin(\beta/2) & \cos(\beta/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\gamma/2} & \\ & e^{i\gamma/2} \end{pmatrix} \quad (10.28) \\ &= \begin{pmatrix} e^{-i(\alpha+\gamma)/2}\cos(\beta/2) & -e^{-i(\alpha-\gamma)/2}\sin(\beta/2) \\ e^{i(\alpha-\gamma)/2}\sin(\beta/2) & e^{i(\alpha+\gamma)/2}\cos(\beta/2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

これはユニモジュラー行列になっている。

注意すべきは第 2 の回転  $\exp(-i\frac{1}{2}\sigma_2\beta)$  は  $\sigma_2$  が純虚数なので実数の回転角を持つ。

他の軸を選ぶとこうなならない。 $j = 1/2$  の既約表現として行列要素を書き出すと

$$D_{m'm}^{j=1/2}(\alpha, \beta, \gamma) = \langle j = \frac{1}{2}, m' | \exp(-i\frac{1}{2}\sigma_3\alpha) \exp(-i\frac{1}{2}\sigma_2\beta) \exp(-i\frac{1}{2}\sigma_3\gamma) | j = \frac{1}{2}, m \rangle$$

## 10.6 昇降演算子

角運動量が量子場の世界で飛び飛びになることは重要な基礎物理現象である。

この節で見ると、空間的な  $x, y$  方向の角運動量の複素化から昇降演算子演算子が定義できて、無限に稠密広がっているはずの  $z$  方向を整数に制限するのである。この興味ある関係は並進と回転という独立した自由度に極めて普遍的な関係をつくる。まず、基礎的な角運動量でこの関係をみていこう。

角運動量は  $J_x, J_y, J_z$  がエルミートであったのでその線形結合もまたエルミートである。

式 10.1 を満たす演算子から次のエルミートではない演算子を次のように定義できる。

$$\begin{aligned} J_+ &= J_x + iJ_y \\ J_- &= J_x - iJ_y \end{aligned} \quad (10.29)$$

これからもう一つの  $J_z$  との交換関係は

$$[J_z, J_+] = \hbar J_+ \quad (10.30)$$

$$[J_z, J_-] = -\hbar J_- \quad (10.31)$$

$$[J_+, J_-] = 2\hbar J_z \quad (10.32)$$

これから  $J^2$  との交換関係も次のように求まる。

$$[J^2, J_+] = [J^2, J_-] = [J^2, J_z] = 0$$

また、

$$\begin{aligned} J^2 &= J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 \\ &= \frac{1}{2}(J_+J_- + J_-J_+) + J_z^2 \\ &= \frac{1}{2}\{J_+, J_-\} + J_z^2 \end{aligned} \quad (10.33)$$

さらにこれから

$$\{J_+, J_-\} = 2(J^2 - J_z^2)$$

となるので式 10.32 に代入し、

$$\begin{aligned} J_+J_- &= 2J_z + J_-J_+ = 2J_z - J_+J_- + 2(J^2 - J_z^2) \\ J_+J_- &= J^2 - J_z(J_z - 1) \end{aligned} \quad (10.34)$$

同様にして

$$J_-J_+ = J^2 - J_z(J_z + 1) \quad (10.35)$$

を得ることができる。後に角運動量  $J$  は我々にとっては常識的ではないが  $J_+, J_-, J_z$

の基底の組は式 10.30, 10.31 を満たすように直線状の反転である。交換関係の式が  $J_x, J_y, J_z$  の取り方より本質的であることを後に見る。 $J_+, J_-$  を昇降演算子という。この名称は式 10.33 をよくみると  $J_+J_- + J_-J_+$  の期待値は常に 0 か正でなくてはならない。また式 10.30, 10.31 から

$$J_+J_z = J_zJ_+ + J_z = J_z(J_+ + 1)$$

$$J_-J_z = J_zJ_- - J_z = J_z(J_- - 1) \quad (10.36)$$

$J_+$  は  $J^2$  の固有値は変化させないで  $J_z$  の固有値を 1 つ増し、 $J_-$  は  $J^2$  の固有値は変化させないで  $J_z$  の固有値を 1 つ減らしていることから来ている。

これから  $J^2$  の固有値は物理的に意味を持ったものになるだろう。そこで次に固有値を求めてみる。

ここからは固有値で  $j, m$  等を使うので演算子には  $\hat{\phantom{x}}$  記号を付け区別する。

$\hat{J}^2$  が角運動量の各成分と交換する。さらに昇降演算子  $\hat{J}_+, \hat{J}_-$  も

$$[\hat{J}^2, \hat{J}_\pm] = 0$$

を満たす。これは昇降演算子が  $\hat{J}^2$  の固有値に影響を与えないことでもある。まず  $j_z$  の固有方程式を

$$\hat{J}_z |\phi\rangle = j |\phi\rangle$$

とおく。さらに  $\hat{J}^2$  の固有値が今最大の状態であるとして、この状態に  $\hat{J}_+$  を作用させても 0 であるから

$$\hat{J}_+ |\phi\rangle = 0$$

を満たす。式 10.35 から

$$\hat{J}^2 = \hat{J}_z(\hat{J}_z + 1) + \hat{J}_- \hat{J}_+ \quad (10.37)$$

となるから状態  $|\phi\rangle$  に作用させると

$$\begin{aligned} \hat{J}^2 |\phi\rangle &= \hat{J}_z(\hat{J}_z + 1) |\phi\rangle + \hat{J}_- \hat{J}_+ |\phi\rangle \\ &= j(j+1) |\phi\rangle \end{aligned}$$

であることが得られる。さて我々ははじめ、固有値  $j$  については実数であることしか仮定していない。

しかし、昇降演算子はこの固有値を  $\pm 1$  するので、これから得られるものは整数ということになる。

さらに興味あることに  $\hat{J}^2$  の固有値は常に  $j(j+1)$  すなわち、連続した 2 整数の積である。

ある数の 2 乗ではない。この連続性をつくるのが角運動量演算子の重要なポイントである。

また、逆にこの整数の性質から  $\hat{J}_-$  を順に作用させていくと  $\hat{J}_z$  の固有値は  $j, j-1, j-2, \dots$  のように 1 ずつ小さくなる。しかし、 $\hat{J}_z$  の固有値の 2 乗は  $\hat{J}^2$  の固有値を越えられない。よってある正の整数  $k$  が存在し、次の関係が成り立つ。

$$(\hat{J}_-)^{k-1} |\phi\rangle \neq 0$$

$$(\hat{J}_-)^k |\phi\rangle = 0$$

この様子を  $j$  を決めて規格化された状態ベクトルで表し、全て書き出すと

$$|j, j\rangle, |j, j-1\rangle, \dots, |j, j-k+1\rangle$$

となる。これは

$$\hat{J}_- |j, j-k+1\rangle = 0 \quad (10.38)$$

であり全部で  $k$  個ある。式 10.37 から

$$\hat{J}^2 = \hat{J}_z(\hat{J}_z - 1) + \hat{J}_+ \hat{J}_-$$

として状態  $|j, j-k+1\rangle$  に作用させると

$$\hat{J}^2 |j, j-k+1\rangle = (\hat{J}_z(\hat{J}_z - 1) + \hat{J}_+ \hat{J}_-) |j, j-k+1\rangle$$

固有方程式に書き換えると式 10.38 を使えば

$$\begin{aligned} j(j+1) &= (j-k+1)(j-k+1-1) \\ &= (j-k+1)(j-k) \end{aligned}$$

$k > 0$  としてこれを解くと

$$\begin{aligned} j^2 + j &= j^2 - kj + j - kj + k^2 - k \\ k(k-2j-1) &= 0 \end{aligned}$$

$$k = 2j + 1 \quad (10.39)$$

となることから  $\hat{J}_z$  の固有値は  $-j$  から  $+j$  までの  $2j + 1$  個あることがわかる。  
そこで以後  $\hat{J}_z$  の固有値を  $m (m = j, j - 1, \dots, -j)$  で表し、

$$\hat{J}_z |j, m\rangle = m\hbar |j, m\rangle$$

$$\hat{J}_- |j, m\rangle = c_m |j, m - 1\rangle \quad (10.40)$$

として両辺のノルムをとれば係数  $c_m$  が次のように求まる。式 10.34 から

$$\langle j, m | \hat{J}_+ \hat{J}_- |j, m\rangle = c_m^2$$

$$\langle j, m | \hat{J}^2 - \hat{J}_z(\hat{J}_z - 1) |j, m\rangle = c_m^2$$

よって

$$\begin{aligned} j(j+1) - m(m-1) &= c_m^2 \\ c_m &= \sqrt{j(j+1) - m(m-1)} \end{aligned} \quad (10.41)$$

となることがわかる。

これと式 10.40 から  $m \rightarrow m + 1$  とすると

$$\hat{J}_- |j, m + 1\rangle = c_{m+1} |j, m\rangle$$

よって

$$|j, m\rangle = \frac{1}{c_{m+1}} \hat{J}_- |j, m + 1\rangle$$

両辺に  $\hat{J}_+$  を作用させると

$$\hat{J}_+ |j, m\rangle = \frac{1}{c_{m+1}} \hat{J}_+ \hat{J}_- |j, m + 1\rangle$$

式 10.34 から  $m + 1$  の状態に作用するから

$$\begin{aligned} \hat{J}_+ |j, m\rangle &= \frac{1}{c_{m+1}} \left\{ \hat{J}^2 - \hat{J}_z(\hat{J}_z - 1) \right\} |j, m + 1\rangle \\ &= \frac{1}{c_{m+1}} \{ j(j+1) - m(m+1) \} |j, m + 1\rangle \end{aligned}$$

よって式 10.41 から昇降演算子の固有方程式が次のようにまとまる。

$$\hat{J}_+ |j, m\rangle = \hbar \sqrt{j(j+1) - m(m+1)} |j, m + 1\rangle$$

$$\hat{J}_- |j, m\rangle = \hbar \sqrt{j(j+1) - m(m-1)} |j, m - 1\rangle$$

さらに  $\hat{J}^2, \hat{J}_z$  の固有方程式もまとめると

$$\hat{J}^2 |j, m\rangle = j(j+1)\hbar^2 |j, m\rangle$$

$$\hat{J}_z |j, m\rangle = m\hbar |j, m\rangle \quad m : -j, -j+1, \dots, 0, \dots, j-1, j$$

となる。これから  $|j, m\rangle$  は  $2j+1$  次元の部分空間を張る。特に  $\hat{J}_z$  が特別な向きであるわけではない。空間のどの状態ベクトルをもってきてもその状態ベクトルに  $\hat{J}$  を作用させても同じ部分空間に収まるはずである。

また、 $\hat{J}$  はエルミートであったので、部分空間の直交補空間についても同じように閉じている。

これはある基底を選べば、 $\hat{J}_x, \hat{J}_y, \hat{J}_z$  は同時に対角可ができるということである。

また、この  $2j+1$  次元の空間は  $\hat{J}$  に対して既約であるのでさらに2つのブロックに分けた対角可はできない。

これから  $\hat{J}_\pm$  の行列要素が次のように求まる。

$$\begin{aligned} \langle j', m' | \hat{J}_\pm | j, m \rangle &= \hbar \sqrt{(j+1) - m(m \pm 1)} \delta_{j'j} \delta_{m'm \pm 1} \\ &= \hbar \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} \delta_{j'j} \delta_{m'm \pm 1} \end{aligned} \quad (10.42)$$

## 10.7 角運動量の合成

一般に3次元空間で次のような角運動量の合成を考えよう

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2 \quad (10.43)$$

この時の交換関係は次のようになる。異なる角運動量は交換するが、各方向については外積関係を満たす。

$$[J_{1i}, J_{1j}] = i \sum_k \epsilon_{ijk} J_{1k}$$

$$[J_{2i}, J_{2j}] = i \sum_k \epsilon_{ijk} J_{2k}$$

$$[J_{1i}, J_{2j}] = 0$$

2つの粒子が結合している場合は前節の結果から演算子記号 $\hat{\phantom{x}}$ を省略して  $j_z$  の固有値を  $m$  とすると

$$\mathbf{J}_i^2 |j_i m_i\rangle = j_i(j_i + 1) |j_i m_i\rangle, (i = 1, 2)$$

$$\mathbf{J}_{iz} |j_i m_i\rangle = m_i |j_i m_i\rangle, (i = 1, 2)$$

となった。また、 $\mathbf{J}^2$  と可換な演算子が

$$[\mathbf{J}^2, J_z] = [\mathbf{J}^2, \mathbf{J}_1^2] = [\mathbf{J}^2, \mathbf{J}_2^2] = 0$$

となるが  $\mathbf{J}^2$  は各  $J_{iz}$  とは交換しない。したがって  $J_{iz}$  の固有値  $m_i$  より、合成した場合の量子数をとる方が便利である。

そこで積の波動関数  $|j_1 m_1, j_2 m_2\rangle$  を考えて

$$|jm\rangle = \sum_{m_1 m_2} \langle j_1 m_1, j_2 m_2 | jm \rangle |j_1 m_1, j_2 m_2\rangle \quad (10.44)$$

と変換される。この時の変換係数  $\langle j_1 m_1, j_2 m_2 | jm \rangle$  をクレブシュ-ゴルダン係数 (Clebsch-Gordan coefficient) という。

式 10.44 はユニタリーだから次のように和をとると

$$\sum_{m_1 m_2} \langle j_1 m_1, j_2 m_2 | jm \rangle \langle j_1 m_1, j_2 m_2 | j' m' \rangle = \delta_{jj'} \delta_{mm'}$$

$$\sum_{jm} \langle j_1 m_1, j_2 m_2 | jm \rangle \langle j_1 m'_1, j_2 m'_2 | jm \rangle = \delta_{m_1 m'_1} \delta_{m_2 m'_2}$$

これを利用し、逆変換すると式 10.44 に左から  $\langle j_1 m_1, j_2 m_2 | jm \rangle$  を作用させ、 $jm$  で和をとると

$$\begin{aligned} \sum_{jm} \langle j_1 m_1, j_2 m_2 | jm \rangle |jm\rangle &= \sum_{jm} \langle j_1 m_1, j_2 m_2 | jm \rangle \sum_{m_1 m_2} \langle j_1 m_1, j_2 m_2 | j_1 m'_1, j_2 m'_2 \rangle \langle j_1 m'_1, j_2 m'_2 | jm \rangle |j_1 m_1, j_2 m_2\rangle \\ &= \delta_{m_1 m'_1} \delta_{m_2 m'_2} \sum_{m_1 m_2} \langle j_1 m_1, j_2 m_2 | j_1 m'_1, j_2 m'_2 \rangle |j_1 m_1, j_2 m_2\rangle \end{aligned}$$

よって左右入れ替えて

$$|j_1 m_1, j_2 m_2\rangle = \sum_{jm} \langle j_1 m_1, j_2 m_2 | jm \rangle |jm\rangle \quad (10.45)$$

となる。波動関数  $\psi$  を用いて次のように書き直すこともできる。

$$\psi_{j_1 m_1} \psi_{j_2 m_2} = \sum_{jm} \langle j_1 m_1, j_2 m_2 | jm \rangle \psi_{jm}$$

$m$  について和をとるが、全角運動量が

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 \cdot I_2 + I_1 \cdot \mathbf{J}_2$$

とかけ、積の波動関数は  $I$  が単位行列のように振る舞うことに留意すると

$$\begin{aligned} J_z \psi_{j_1 m_1} \psi_{j_2 m_2} &= (J_{1z} \psi_{j_1 m_1}) (I \psi_{j_2 m_2}) + (I \psi_{j_1 m_1}) (J_{2z} \psi_{j_2 m_2}) \\ &= m_1 \psi_{j_1 m_1} \psi_{j_2 m_2} + m_2 \psi_{j_1 m_1} \psi_{j_2 m_2} \\ &= (m_1 + m_2) \psi_{j_1 m_1} \psi_{j_2 m_2} \end{aligned}$$

となるので次のように  $m_1 + m_2 = m$  が成り立たないと 0 であり、角運動量の  $z$  軸方向への射影は保存される。

$$\langle j_1 m_1, j_2 m_2 | jm \rangle = 0, m_1 + m_2 \neq m$$

従って式 10.45 は  $m = m_1 + m_2$  となる以外の係数は 0 になる。これは式 10.45 が  $SU(2)$  の 2 つの規約表現

$$\{\psi_{j_1 m_1}\} \quad m_1 = -j_1, -j_1 + 1, \dots, j_1 - 1, j_1$$

$$\{\psi_{j_2 m_2}\} \quad m_2 = -j_2, -j_2 + 1, \dots, j_2 - 1, j_2$$

の  $2j_1 + 1$ ,  $2j_2 + 1$  個の表現の直積が規約表現  $2j_1 + 1$  個の直和になっているところがおもしろい。

$$\{\psi_{jm}\} \quad m = -j, -j + 1, \dots, j - 1, j$$

例えば  $j_1 = 1$  の  $2j_1 + 1 = 3$  表現と  $j_2 = 5/2$  の  $2j_2 + 1 = 6$  表現の直積は群論では

$$j = \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}$$

であり、 $2j + 1$  はそれぞれ 4 表現、6 表現、8 表現の直和になる。

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{6} = \mathbf{4} \oplus \mathbf{6} \oplus \mathbf{8}$$

とかける。

## 10.8 ウィグナー関数 [87]

昇降演算子を定義したので次に前節で登場した回転の演算子の行列要素を  $j, m$  で具体的に書き下すことができるようになる。

$$D_{m,m'}^j(R) = \langle j, m' | \exp\left(\frac{-i\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}}\phi}{\hbar}\right) | j, m \rangle \quad (10.46)$$

この関数は量子力学の回転について先駆的な研究をおこなった E.P.Wigner にちなんでウィグナー関数と呼ばれる。これを見ると異なる  $j$  を持つ要素は全て値を持たない。

これは式 10.5 からウィグナー関数が  $\mathbf{J}^2$  と交換するので  $D(R)|j, m\rangle$  をつくと

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^2 D(R)|j, m\rangle &= D(R)\mathbf{J}^2 |j, m\rangle \\ &= j(j+1)\hbar^2 [D(R)|j, m\rangle] \end{aligned}$$

となり固有値に変化はない。つまり、回転の操作で  $j$  を変えることができないことを意味する。回転軸が保存される理由がここにある。さらに式 10.39 から  $m, m'$  の取りうる範囲が決められる。よってこれからこの回転行列は  $(2j+1) \times (2j+1)$  の正方行列になることがわかる。さらにこの行列は回転が既約表現であることから、より小さな正方行列に分けることができない。

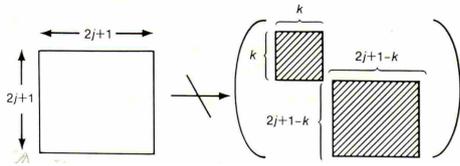


図 10.5: [87] より：既約表現の行列はより小さな行列に分けることができない

また、反回転が逆行列を表すから

$$D_{m'm}(R^{-1}) = D_{mm'}^*(R)$$

が成り立つ。つまり逆行列は反回転であるので回転軸方向  $\mathbf{n}$  を変えない。これはユニタリ行列であることを表している。回転軸を変えない連続回転は

$$\sum_{m''} D_{m''m'}^j(R_1) D_{m''m}^j(R_2) = D_{m''m}^j(R_1 R_2)$$

と表される。

この簡単な回転の抽象が量子力学的な状態に作用すると状態  $|j, m\rangle$  にある時、この演算子によって状態  $|j, m'\rangle$  に見出す確率振幅として

$$\begin{aligned} D(R)|j, m\rangle &= \sum_{m'} |j, m'\rangle \langle j, m' | D(R)|j, m\rangle \\ &= \sum_{m'} |j, m'\rangle D_{m'm}^j(R) \end{aligned}$$

のように行列要素が対応するわけである。ここで古典的な前節のオイラー回転は式??から

$$D_{m'm}^{j=1/2}(\alpha, \beta, \gamma) =$$

$$= \langle j = \frac{1}{2}, m' | \exp(-i\frac{1}{2}J_3\alpha) \exp(-i\frac{1}{2}J_2\beta) \exp(-i\frac{1}{2}J_3\gamma) | j = \frac{1}{2}, m \rangle \quad (10.47)$$

$$= e^{-i(m'\alpha+m\gamma)} \langle j, m' | \exp\left(\frac{-iJ_y\beta}{\hbar}\right) | j, m \rangle \quad (10.48)$$

であった。ここで  $y$  軸回りの回転を表す次の演算子を定義する。

$$d_{m'm}^j(\beta) \equiv \langle j, m' | \exp\left(\frac{-iJ_y\beta}{\hbar}\right) | j, m \rangle$$

すると、 $j = 1/2$  の場合は  $2j + 1 = 2$ ,  $2 \times 2$  の行列であり、

$$J_y = \frac{\hbar}{2}\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

として式 10.28 から

$$d^{j=1/2} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \end{pmatrix}$$

となり、平面の  $\beta/2$  の回転を表す。

次に  $j = 1$  の場合を考える。この時は  $2j + 1 = 3$ ,  $3 \times 3$  の行列になる。式 10.29 から

$$J_y = \frac{J_+ - J_-}{2i}$$

となる。 $m$  についての成分は対角行列は 0 になるから  $-j \leq m \leq j$  として式 10.42 から

$$\begin{aligned} m_i &= 1, 0, -1 \\ m'_j &= m_i + 1, m_i, m_i - 1 \end{aligned}$$

となるから  $(i, j)$  成分表示すると

$$\begin{aligned} J_y^{j=1} &= \frac{\hbar}{2i} \left( \sqrt{(1-m)(1+m+1)} - \sqrt{(1+m)(1-m+1)} \right) \\ &= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2}i & 2 \\ \sqrt{2}i & 0 & -\sqrt{2}i \\ -2 & \sqrt{2}i & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるが  $\delta_{m', m \pm 1}$  が式 10.42 にあるために  $(1, 3), (3, 1)$  成分も 0 になる必要がある。すなわち

$$J_y^{j=1} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2}i & 0 \\ \sqrt{2}i & 0 & -\sqrt{2}i \\ 0 & \sqrt{2}i & 0 \end{pmatrix}$$

でなくてはならない。つまり

$$\text{Tr}[J_y] = \text{Tr}[J_y^t] = 0$$

が成り立つ。

次に実際に回転演算子  $\exp(-iJ_y\beta/\hbar)$  は  $j = 1$  の場合は単純にオイラーの公式を利用して実成分と、虚成分にわけることができない。 $j = 1/2$  であれば

$$\left(\frac{J_y}{\hbar}\right)^2 = \left(\frac{J_y}{\hbar}\right)$$

であり、 $j = 1$  であれば次が成り立つ。

$$\left(\frac{J_y}{\hbar}\right)^3 = \left(\frac{J_y}{\hbar}\right)$$

テイラー展開するこ4次までとった結果を示す。

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{-iJ_y\beta}{\hbar}\right) &= 1 + \left(\frac{-iJ_y\beta}{\hbar}\right) + \frac{1}{2!} \left(\frac{-iJ_y\beta}{\hbar}\right)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{-iJ_y\beta}{\hbar}\right)^3 + \dots \\ &= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \frac{\beta^4}{48} - \frac{\beta^2}{4} + 1 \dots & \frac{\beta^3}{6\sqrt{2}} - \frac{\beta}{\sqrt{2}} \dots & \frac{\beta^2}{4} - \frac{\beta^4}{48} \dots \\ \frac{\beta}{\sqrt{2}} - \frac{\beta^3}{6\sqrt{2}} \dots & \frac{\beta^4}{24} - \frac{\beta^2}{2} + 1 \dots & \frac{\beta^3}{6\sqrt{2}} - \frac{\beta}{\sqrt{2}} \dots \\ \frac{\beta^2}{4} - \frac{\beta^4}{48} \dots & \frac{\beta}{\sqrt{2}} - \frac{\beta^3}{6\sqrt{2}} \dots & \frac{\beta^4}{48} - \frac{\beta^2}{4} + 1 \dots \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$j = 1$  であれば

$$\exp\left(\frac{-iJ_y\beta}{\hbar}\right) \rightarrow 1 - \left(\frac{J_y}{\hbar}\right) (1 - \cos\beta) - i \left(\frac{J_y}{\hbar}\right) \sin\beta$$

を用いて、次の表現に一致する。

$$\exp\left(\frac{-iJ_y\beta}{\hbar}\right) = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1 + \cos\beta) & -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin\beta & \frac{1}{2}(1 - \cos\beta) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\beta & \cos\beta & -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin\beta \\ \frac{1}{2}(1 - \cos\beta) & \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\beta & \frac{1}{2}(1 + \cos\beta) \end{pmatrix}$$

さらに一般化することは次節で考える。

## 10.9 軌道角運動量

無限小の回転演算子から角運動量を考えてきたが、古典的な粒子の角運動量は

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad (10.49)$$

という外積で表すことができた。これは先の角運動量の交換関係

$$[L_i, L_j] = i\epsilon_{ijk} \hbar L_k \quad (10.50)$$

を次のように満たすことがわかる。

$$\begin{aligned} [L_x, L_y] &= [yp_z - zp_y, zp_x - xp_z] \\ &= [yp_z, zp_x] + [zp_y, xp_z] \\ &= yp_x [p_z, z] + p_y x [z, p_z] \\ &= i\hbar (xp_y - yp_x) \\ &= i\hbar L_z \end{aligned}$$

前節の式 10.4 からこの場合の無限小回転は

$$1 - i \frac{\delta\phi}{\hbar} L_z = 1 - i \frac{\delta\phi}{\hbar} (xp_y - yp_x)$$

となるから任意の位置ケットに作用させ、 $z$  軸まわりの回転をあらわすか試してみよう。

まず、運動量演算子は平行移動を与えたので

$$\left[1 - i \frac{p_x}{\hbar} \delta\phi\right] |x\rangle = |x' - \delta\phi\rangle$$

のように状態ベクトルを変化させたから

$$\begin{aligned} \left[1 - i \frac{\delta\phi}{\hbar} (xp_y - yp_x)\right] |x', y', z'\rangle &= \left[1 - i \frac{p_y}{\hbar} (\delta\phi x') + i \frac{p_x}{\hbar} (\delta\phi y')\right] |x', y', z'\rangle \\ &= |x' - y' \delta\phi, y' + x' \delta\phi, z'\rangle \end{aligned}$$

とかけるので、これは z 軸回りの回転を表す。スピン 0 の任意の状態ベクトルを  $\langle x', y', z' | \alpha \rangle$  とすると z 軸まわりの回転は

$$\langle x', y', z' | \left[ 1 - i \frac{\delta\phi}{\hbar} L_z \right] | \alpha \rangle = \langle x' + y' \delta\phi, y' - x' \delta\phi, z | \alpha \rangle$$

である。ここで極座標に基底を変えると z 軸回りの  $\delta\phi$  の回転だから

$$\langle x', y', z' | \alpha \rangle \rightarrow \langle r, \theta, \phi | \alpha \rangle$$

$$\begin{aligned} \langle r, \theta, \phi | \left[ 1 - i \frac{\delta\phi}{\hbar} L_z \right] | \alpha \rangle &= \langle r, \theta, \phi - \delta\phi | \alpha \rangle \\ &= \langle r, \theta, \phi | \alpha \rangle - \delta\phi \frac{\partial}{\partial \phi} \langle r, \theta, \phi | \alpha \rangle \end{aligned}$$

これから  $L_z$  が次の演算子のようふるまっていることがわかる。

$$\langle x' | L_z | \alpha \rangle = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} \langle x' | \alpha \rangle$$

次に x 軸回りの  $\delta\phi_x$  の回転を考える。先の結果から

$$\langle x', y', z' | \left[ 1 - i \frac{\delta\phi_x}{\hbar} L_x \right] | \alpha \rangle = \langle x' + z' \delta\phi_x, y' - y' \delta\phi_x, z' | \alpha \rangle$$

となる。球座標を使うと

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$x = r \sin \theta \cos \phi$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi$$

$$z = r \cos \theta$$

として

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \sin \theta \cos \phi$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin \theta \sin \phi$$

$$\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r} = \cos \theta$$

となる。さらに次が成り立つ

$$\tan \phi = \frac{y}{x}$$

$$\tan^2 \theta = \frac{x^2 + y^2}{z^2}$$

が成り立つのでこれを x,y,z でさらに微分すると

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{1}{\tan \theta \sec^2 \theta} \frac{x}{z^2} = \frac{1}{r} \cos \theta \cos \phi$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{\tan \theta \sec^2 \theta} \frac{y}{z^2} = \frac{1}{r} \cos \theta \sin \phi$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{1}{\tan \theta \sec^2 \theta} \frac{x^2 + y^2}{z^3} = -\frac{1}{r} \sin \theta$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{1}{\sec^2 \phi} \frac{y}{x^2} = -\frac{1}{r} \frac{\sin \phi}{\sin \theta}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{1}{\sec^2 \phi} \frac{1}{x} = \frac{1}{r} \frac{\cos \phi}{\sin \theta}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$$

が成り立つから

$$\begin{aligned} L_x &= i\hbar \left( y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ &= i\hbar r \sin \theta \sin \phi \left( -\frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \\ &\quad - i\hbar r \cos \theta \left( \frac{1}{r} \cos \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\cos \phi}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \\ &= i\hbar \left( -\sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \end{aligned}$$

となるので

$$\langle x' | L_x | \alpha \rangle = -i\hbar \left( -\sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \langle x' | \alpha \rangle$$

が成り立つ。 $L_y$  についても同様に

$$\langle x' | L_y | \alpha \rangle = -i\hbar \left( -\cos \phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \langle x' | \alpha \rangle$$

が成り立つ。 $\partial/\partial\theta, \partial/\partial\phi$  を基底として見ると係数  $\cot \theta \cos \phi$  がつくる曲面は次のよう  $\cot \theta$  のせいで極端な振る舞いをする。

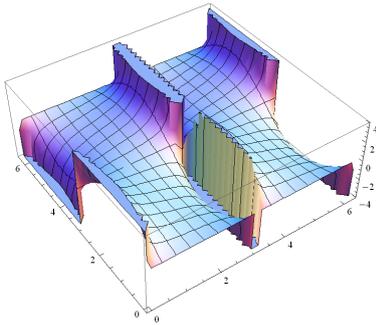


図 10.6:  $\cot \theta \cos \phi$  の曲面

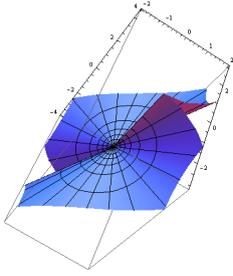


図 10.7:  $(\cot \theta \sin \phi, \cot \theta \cos \phi)$  のつくる曲面  $\theta = \pi, \phi = \pi$  まで

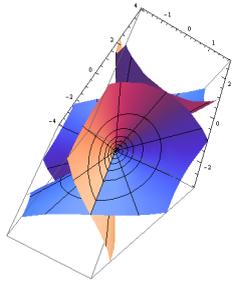


図 10.8:  $(\cot \theta \sin \phi, \cot \theta \cos \phi)$  のつくる曲面  $\theta = \pi, \phi = 2\pi$  まで

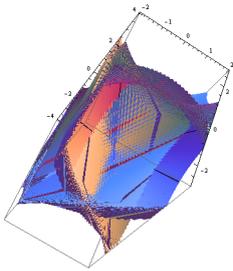


図 10.9:  $(\cot \theta \sin \phi, \cot \theta \cos \phi)$  のつくる曲面  $\theta = \pi + 0.001, \phi = 2\pi$  まで

$\theta$  が  $\pi$  を超える前までは螺旋を描くように曲面は発展するが、 $\pi$  を超えると連続性が見えなくなる。さらにこれらから昇降演算子の行列要素も求めることができる。

$$\langle x' | L_{\pm} | \alpha \rangle = -i\hbar e^{\pm i\phi} \left( \pm i \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \langle x' | \alpha \rangle$$

さらに興味あるのは  $L^2$  の演算子である。この固有値は保存則と関係した。前節から

$$L^2 = L_z^2 + \frac{1}{2} (L_+ L_- + L_- L_+)$$

だから

$$\langle x' | L^2 | \alpha \rangle = -\hbar^2 \left( \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right) \langle x' | \alpha \rangle$$

が得られる。

これは第 1 部で紹介したラプラス方程式の角度部分  $Y(\theta, \phi)$  である。

従って球面調和関数を解に持つ。

また、式 10.49、10.50 から

$$L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

また、交換関係

$$[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$$

を用いると  $L^2$  は次のように成分表示し、整理すると次のように  $xp$  単位で分割できる。

$$\begin{aligned} L^2 &= \sum_{ijklmk} \epsilon_{ijk} x_i p_j \epsilon_{lmk} x_l p_m \\ &= \sum_{ijlm} (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) x_i p_j x_l p_m \\ &= \sum_{ijlm} \delta_{il}\delta_{jm} x_i (x_l p_j - i\hbar\delta_{jl}) p_m - \delta_{im}\delta_{jl} x_i p_j (p_m x_l + i\hbar\delta_{lm}) \\ &= \mathbf{x}^2 \mathbf{p}^2 - i\hbar \mathbf{x} \cdot \mathbf{p} - \sum_{ijlm} \delta_{im}\delta_{jl} [x_i p_m (x_l p_j - i\hbar\delta_{jl}) + i\hbar\delta_{im} x_j p_j] \\ &= \mathbf{x}^2 \mathbf{p}^2 - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{p})^2 + i\hbar \mathbf{x} \cdot \mathbf{p} \end{aligned}$$

また、 $x \cdot p$  は演算子として次のように前に出して作用する。

$$\begin{aligned} \langle x' | x \cdot p | \alpha \rangle &= x' \cdot (-i\hbar \nabla' \langle x' | \alpha \rangle) \\ &= -i\hbar r \frac{\partial}{\partial r} \langle x' | \alpha \rangle \end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned} \langle x' | (x \cdot p)^2 | \alpha \rangle &= -\hbar^2 r \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \langle x' | \alpha \rangle \right) \\ &= -\hbar^2 \left( r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} \langle x' | \alpha \rangle + r \frac{\partial}{\partial r} \langle x' | \alpha \rangle \right) \end{aligned}$$

となるから  $L^2$  の値が求めることができ

$$\langle x' | L^2 | \alpha \rangle = r^2 \langle x' | p^2 | \alpha \rangle + \hbar^2 \left( r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} \langle x' | \alpha \rangle + 2r \frac{\partial}{\partial r} \langle x' | \alpha \rangle \right)$$

となる。これは運動エネルギーとの関係を明らかにして  $2mr^2$  で割り、変形すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m} \langle x' | p^2 | \alpha \rangle &= \left( \frac{\hbar^2}{2m} \right) \nabla'^2 \langle x' | \alpha \rangle \\ &= - \left( \frac{\hbar^2}{2m} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} \langle x' | \alpha \rangle + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \langle x' | \alpha \rangle - \frac{1}{\hbar^2 r^2} \langle x' | L^2 | \alpha \rangle \right) \end{aligned}$$

となる。これは運動エネルギーの演算子がはじめの2項で動径部分、最後の項がラプラシアン の角度部分 を表している。

## 11 正準化

### 11.1 場の基本量

前節で紹介した作用原理は古典的には作用積分からラグランジュの方程式によりニュートンの運動方程式を導いたように現代物理学においても場の量を定義し、そのラグランジアン密度からラグランジュ方程式を用い

てクラインゴルドンの方程式やディラックの方程式を得ることになるし、質量の生成の関与する Higgs 機構にも使われる。ここには時間と空間を対等にあつかう一般相対性原理が自然に取り込まれる。しかし古典的な作用がラグランジアン  $L$  を

$$L_{cl} = T - V \quad (11.1)$$

で決めたのに対して量子論に適したラグランジアンは場の量の共変性から作られる。例えばスカラー関数  $\phi$  に対してラグランジアン密度は場の量  $\phi$  とその変化量  $\partial_\mu \phi$  の関数として

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left\{ (\partial^\mu \phi)^\dagger (\partial_\mu \phi) - \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \phi^\dagger \phi \right\} \quad (11.2)$$

のようにラグランジアン密度をおく。それぞれの作用を  $S_{cl}, S$  とすると

$$S_{cl} = \int L_{cl} dt$$

ラグランジアンは

$$L = \int_V \mathbf{d}^3 \mathbf{x} \mathcal{L}(\partial_\mu \phi(x), \phi)$$

作用は

$$S = \int_\Omega d^4 x \mathcal{L}(\partial_\mu \phi(x), \phi) = \int_T dt L(\partial_\mu \phi(x), \phi)$$

となる。空間的な積分をした  $L$  は古典的な  $L_{cl}$  と近似できるはずである。ラグランジアン密度は次元でみるとエネルギーを空間体積で割ったものになるから  $(\frac{mc}{\hbar})^2$  の次元が  $(1/\text{長さ})^2$  である。これから  $|\phi|^2$  の次元は (エネルギー/長さ) であることになる。

またラグランジアン密度  $\mathcal{L}$  が 0 になるような場合は

$$\partial_\mu \phi = -i \frac{mc}{\hbar} \phi$$

から

$$\phi = A e^{-i \frac{mc}{\hbar} x_\mu}$$

となる。

## 11.2 正準 1 形式

はじめにボソンを考える。このボソンの場を  $\phi_r(x)$  で表す。

座標  $x$  に加え、添え字  $r$  がベクトル場やテンソル場などの情報を表す、内部指数とみなせる。

そしてラグランジアン  $L$  はこの  $\phi_r(x)$  の時空間の微分を含むスカラー関数である。

微分は変化をどれだけ詳細にみるかだが、ここでは高々 2 階までの時空間に関する微分であるとする。(より高階を含むと非物理的な負のノルムを持つモードが出てくる)

時空領域を  $\Sigma$  として空間領域を  $V$  とすると

$$\Sigma = V \times [t_f, t_i]$$

で表す。

この時空場に場  $\phi_r(x)$  は配位  $\phi_r(\mathbf{x}, t_i), \phi_r(\mathbf{x}, t_f)$  をつなぐ軌道が作用原理によって極地をとる場として古典的な軌道が決まらなければならない。

作用  $J$  はこの拡大された時空上で次のように表される。

$$J = \int_{\Sigma} d^4x L(\varphi_r, \partial\varphi_r) \quad (11.3)$$

ラグランジアン  $L$  を次のように変分し

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial \varphi_r} \delta \varphi_r + \frac{\partial L}{\partial (\partial_{\mu} \varphi_r)} \delta (\partial_{\mu} \varphi_r) \quad (11.4)$$

$\delta J=0$  となる条件を得るために前回の作用積分で用いた方法から上式を次のように変形する。

$$\delta L = \left( \frac{\partial L}{\partial \varphi_r} - \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial L}{\partial (\partial_{\mu} \varphi_r)} \right) \delta \varphi_r + \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \left( \frac{\partial L}{\partial (\partial_{\mu} \varphi_r)} \delta \varphi_r \right) \quad (11.5)$$

第2項の積分は端点が固定され空間体積の表面で0になる次の条件が成り立てば0になる。

$$\delta \varphi_r(t_i) = \delta \varphi_r(t_f) = 0 \quad (11.6)$$

$$\left[ \frac{\partial L}{\partial (\partial_{\mu} \varphi_r)} \delta \varphi_r \right]_{\partial V} = 0 \quad (11.7)$$

つまりこの条件が成立すれば運動方程式は決定され、粒子は古典軌道を描くことになる。

第2部でも考えたように端点を固定しない場合について考察しよう。

まず式 11.5 の第2項の積分を空間成分  $k$  と分けて次のようにおく。

$$\Phi(x) = \int d^{\mu} x \frac{\partial L}{\partial (\partial_{\mu} \varphi_r)} \delta \varphi_r = \int_t \int_V d^3x dt \left( \frac{\partial L}{\partial (\partial_k \varphi_r)} + \frac{\partial L}{\partial (\partial_0 \varphi_r)} \right) \delta \varphi_r \quad (11.8)$$

時間積分について  $[t_i, t_f] = \epsilon$  とすると

$$\Phi(x) = \epsilon \int_V d^3x \left( \frac{\partial L}{\partial (\partial_k \varphi_r)} + \frac{\partial L}{\partial (\partial_0 \varphi_r)} \right) \delta \varphi_r \quad (11.9)$$

とおけるが括弧内の第1項はガウスの定理から表面積分に置き換わり0になるとすると

$$\Phi(x) = \epsilon \int_V d^3x \frac{\partial L}{\partial \partial_0 \varphi_r} \delta \varphi_r = \epsilon \int_{\partial V} d^2x \frac{\partial L}{\partial \varphi_r} \delta \varphi_r = 0 \quad (11.10)$$

そこで第2項については次のように共役な運動量  $\pi_r$  を用いて改めて定義できる。ただし  $\epsilon \neq 0$  とする。

$$\Phi(x)/\epsilon = \Theta(t) = \int_V d^3x \frac{\partial L}{\partial (\partial_0 \varphi_r)} \delta \varphi_r = \int_V d^3x \pi_r \delta \varphi_r \quad (11.11)$$

$$\pi_r(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial L}{\partial (\partial_0 \varphi_r)} \quad (11.12)$$

この  $\Theta$  は1次の微分形式だから正準1形式と呼ばれる。

$\pi_r$  は  $\varphi_r$  に共役な運動量で古典的な軌道は  $\{\pi_r, \varphi_r\}$  で代表されることになる。

ここで一般的に拡張しよう。式 11.11 を相空間の座標  $\xi^i(\mathbf{x})$  に拡張する。

一般化すると正準1形式の作用を変分し、その表面項が

$$\Theta = \int_V d^3x A_i(\xi, \mathbf{x}) \delta \xi^i \quad (11.13)$$

として定義できる。ただし、 $A_i$  は  $\xi$  に依存し、 $i$  は相空間の成分を表す。スカラー場の場合

$$\xi^i = (\pi_r, \varphi_r) \quad (11.14)$$

$$A_i = (\pi_r, 0) \quad (11.15)$$

つまり、 $A_i$  は 1 成分のみである。さらにこれから異なる空間  $(x, x')$  において次の式を定義する。これは正準 2 形式で数学的にはシンプレクティック構造という。

$$\Omega_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{\delta}{\delta \xi^i(\mathbf{x})} A_j(\mathbf{x}') - \frac{\delta}{\delta \xi^j(\mathbf{x}')} A_i(\mathbf{x}) \quad (11.16)$$

$$= \partial_I A_J - \partial_J A_I = -\Omega_{ji}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) \quad (11.17)$$

ただし添え字は次のように要約する。

$$I = (i, x) \quad J = (j, x') \quad \partial_I = \frac{\delta}{\delta \xi^i(x)} \quad (11.18)$$

さらに  $\Omega$  は曲率の時に見た、次のビアンキ恒等式を満たす。

$$\partial_I \Omega_{JK} + \partial_J \Omega_{KI} + \partial_K \Omega_{IJ} = 0 \quad (11.19)$$

### 11.3 母関数

$\Omega$  の変化を考えると 1 つは相空間の座標  $\xi^i$  の変化に依存するため、もう 1 つは座標系の変化によるものである。

この座標と内部空間の変化を場の理論では考慮する必要がある。よって  $\Omega_{IJ}$  は座標変換では共変な 2 階テンソルになる。従って両方の変化を考えると

$$\delta \Omega_{IJ} = \partial_I \alpha_J - \partial_J \alpha_I \quad (11.20)$$

として

$$\delta \Omega_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{\delta}{\delta \xi^i(\mathbf{x})} \alpha_j(\mathbf{x}') - \frac{\delta}{\delta \xi^j(\mathbf{x}')} \alpha_i(\mathbf{x}) \quad (11.21)$$

を得る。ただし  $\Omega$  の変化量は他の  $\Omega$  で記述されるとし次のような和で表されるとする。

$$\alpha_I = a^K \Omega_{KI} \quad (11.22)$$

これは相空間の座標  $\xi$  の微小変化において

$$\xi^i \rightarrow \xi^i + a^i(\xi^i) \quad (11.23)$$

として、次のように空間を積分した結果である。

$$\alpha_i(\mathbf{x}) = \int_V d^3 x' a^k(\mathbf{x}') \Omega_{ki}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) \quad (11.24)$$

以上から式 11.17、式 11.19 が変換性を保つためには式 11.22 が次のように書かれることが条件になる。

$$\alpha_I = a^K \Omega_{KI} = -\partial_I G \quad (11.25)$$

ただし、 $G$  は相空間の変数に依存する。 $G$  のことを正準変換の母関数という。また前回の球面上の積分でみたように局所的に  $G$  が存在しても大局的に存在できるとは限らない。さらに相空間が自明ではないトポロジーを持つ場合も  $\delta \Omega = 0$  となる一般的な解が存在する。この場合については後節に考える。

前節でみたように全微分項  $\partial_\mu F^\mu$  をラグランジアンに加えた場合運動方程式には変化はない。

しかし式 11.11 から  $\Theta, A_I$  は次のような変換をうける。

$$\Theta \rightarrow \Theta + \delta \int d^3x F^0 \quad (11.26)$$

$$A_I \rightarrow A_I + \delta_I \int d^3x F^0 \quad (11.27)$$

となるがこれは式 11.25 を満たしていることがわかる。

ここで  $\Omega$  の逆元は次で定義できる。

$$(\Omega^{-1})^{IJ} \Omega_{IJ} = \delta_K^I$$

これを用いて、次のように展開できる。

$$\int_V d^3x' (\Omega^{-1})^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \Omega_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'') = \delta_j^i \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'')$$

$\Omega_{IJ}$  の可逆性は物理的に重要である。可逆ではない場合、ラグランジアンは特異 (singular) であるという。その 1 例がゲージ対称性である。

次部で扱うゲージ理論はゲージ固定という手法で余分な自由度を除外することができる。

$\Omega$  が逆行列を持てば式 11.22 から係数が次のように決められる。

$$a^I = (\Omega^{-1})^{IJ} \partial_I G \quad (11.28)$$

式 11.23 のもとでの汎関数微分演算子を次のようにおく。

$$V_a = a^I \partial_I$$

この変換の交換関係は次のようになる。

$$[V_a, V_b] = (a^J \partial_J b^I - b^J \partial_J a^I) \partial_I \quad (11.29)$$

さらに次のように相空間の母関数  $F(\pi, \varphi), G(\pi, \varphi)$  をもってくると 11.28 と同様に

$$a^I = (\Omega^{-1})^{IJ} \partial_I G$$

$$b^I = (\Omega^{-1})^{IJ} \partial_I F \quad (11.30)$$

が成り立つとすると、

$$\begin{aligned} a^J \partial_J b^I - b^J \partial_J a^I &= [(\Omega^{-1})^{JL} \partial_J (\Omega^{-1})^{IK} - (\Omega^{-1})^{JK} \partial_J (\Omega^{-1})^{IL}] \partial_L F \partial_K G \\ &+ (\Omega^{-1})^{JL} (\Omega^{-1})^{IK} [\partial_L F \partial_J \partial_K G - \partial_J \partial_K F \partial_L G] \end{aligned}$$

となるが式 11.19 より

$$\begin{aligned} (\Omega^{-1})^{JL} \partial_J (\Omega^{-1})^{IK} - (\Omega^{-1})^{JK} \partial_J (\Omega^{-1})^{IL} &= (\Omega^{-1})^{IM} (\Omega^{-1})^{JL} (\Omega^{-1})^{NK} \times [\partial_N \Omega_{MJ} + \partial_J \Omega_{NM}] \\ &= -(\Omega^{-1})^{IM} (\Omega^{-1})^{JL} (\Omega^{-1})^{NK} \partial_M \Omega_{JN} \\ &= (\Omega^{-1})^{IM} \partial_M (\Omega^{-1})^{KL} \end{aligned}$$

となる。これを代入して

$$a^J \partial_J b^I - b^J \partial_J a^I = (\Omega^{-1})^{IM} \partial_M [(\Omega^{-1})^{KL} \partial_K G \partial_L F]$$

$a, b$  は無限小変換を表していた。そこで  $a \leftrightarrow F, b \leftrightarrow G$  としてポアソン括弧  $\{ \}$  を用いて

$$\begin{aligned} \{F, G\} &= (\Omega^{-1})^{IJ} \partial_I F \partial_J G \\ &= \int \int d^3 x d^3 x' (\Omega^{-1})^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \frac{\delta F}{\delta \xi^i(\mathbf{x})} \frac{\delta G}{\delta \xi^j(\mathbf{x}')} \end{aligned}$$

で定義すると位相空間の座標変分のポアソン括弧は

$$\left\{ \xi^i(\mathbf{x}), \xi^j(\mathbf{x}') \right\} = (\Omega^{-1})^{IJ} \quad (11.31)$$

を表すことになる

式 11.14、11.15 から  $A$  がスカラーならば

$$\begin{aligned} \Omega_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') &= \frac{\delta \pi_r(\mathbf{x}')}{\delta \pi_r(\mathbf{x})} - \frac{\delta \pi_r(\mathbf{x})}{\delta \pi_r(\mathbf{x}')} \\ &= \frac{\delta \pi_r(\mathbf{x}')}{\delta \pi_r(\mathbf{x})} - \frac{\delta \pi_r(\mathbf{x})}{\delta \pi_r(\mathbf{x}')} \end{aligned}$$

がとなる。また

$$\frac{\delta \pi_r(\mathbf{x})}{\delta \pi_r(\mathbf{x}')} = \frac{\delta \varphi_r(\mathbf{x})}{\delta \varphi_r(\mathbf{x}')} = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (11.32)$$

$$\{ \pi_r(\mathbf{x}), \pi_r(\mathbf{x}') \} = \{ \varphi_r(\mathbf{x}), \varphi_r(\mathbf{x}') \} = 0 \quad (11.33)$$

が成り立つ。さらに

$$\{ \varphi_r(\mathbf{x}), \pi_r(\mathbf{x}') \} = \int d^3 \mathbf{x}'' \left( \frac{\delta \varphi_r(\mathbf{x})}{\delta \varphi_r(\mathbf{x}'')} \frac{\delta \pi_r(\mathbf{x}')}{\delta \pi_r(\mathbf{x}'')} - \frac{\delta \pi_r(\mathbf{x})}{\delta \varphi_r(\mathbf{x}'')} \frac{\delta \varphi_r(\mathbf{x}')}{\delta \pi_r(\mathbf{x}'')} \right) \quad (11.34)$$

は右辺の括弧内第 2 項は 0 になるから第 1 項のみが残り結局

$$\{ \varphi_r(\mathbf{x}), \pi_r(\mathbf{x}') \} = \int d^3 \mathbf{x}'' (\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'') \delta^3(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'')) \quad (11.35)$$

$$= \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (11.36)$$

となり積分が実行できる。よって式 11.31 から  $(\Omega^{-1})^{ij}$  は

$$(\Omega^{-1})^{ij} = \{ \varphi_r(\mathbf{x}), \pi_r(\mathbf{x}') \} = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

となるのでポアソン括弧は

$$\{F, G\} = \int_V d^3 \mathbf{x} \left( \frac{\delta F}{\delta \varphi_r(\mathbf{x})} \frac{\delta G}{\delta \pi_r(\mathbf{x}')} - \frac{\delta F}{\delta \pi_r(\mathbf{x})} \frac{\delta G}{\delta \varphi_r(\mathbf{x}')} \right) \quad (11.37)$$

とかける。次のポアソン括弧をとると

$$\{ \xi^I, G \} = \int \int d^3 x d^3 x' (\Omega^{-1})^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \frac{\delta G}{\delta \xi^j(\mathbf{x}')} = \delta \xi^I = a^I$$

である。 $\xi^i = (\pi_r, \varphi_r)$  の場合、

$$\{ \pi_r, G \} = \delta \xi^I = - \frac{\delta G}{\delta \varphi_r} \quad (11.38)$$

$$\{\varphi_r, G\} = \delta\xi^I = \frac{\delta G}{\delta\pi_r} \quad (11.39)$$

のように成分の位置で符号が変わり、正準変換をあらわす。従って一般に母関数  $G$  で生成される正準変換のもとで関数  $F$  の変化は次のようになる。

$$\delta F = a^I \partial_I F = (\Omega^{-1})^{IJ} \partial_I F \partial_J G = \{F, G\}$$

ハミルトニアン密度が

$$\mathcal{H} = \dot{\phi}\pi - \mathcal{L} \quad (11.40)$$

$$\mathcal{H}(\phi, \nabla\phi, \pi, \nabla\pi) \quad (11.41)$$

次のように微分を定義すると

$$\frac{\delta H}{\delta\phi} \equiv \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\phi} - \nabla \cdot \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\nabla\phi} \quad (11.42)$$

$$\frac{\delta H}{\delta\pi} \equiv \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\pi} - \nabla \cdot \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\nabla\pi} \quad (11.43)$$

正準方程式は次のように表される。

$$\dot{\phi} = \frac{\delta H}{\delta\pi} \quad (11.44)$$

$$\dot{\pi} = -\frac{\delta H}{\delta\phi} \quad (11.45)$$

これから変数の変換が正準変換であればその変化量は変数と変換の母関数とのポアソン括弧で表される。具体的に次のような変化の場合母関数が求まる。

### 11.3.1 $\varphi_r$ の変化

$$\varphi_r \rightarrow \varphi_r + a^i(\mathbf{x}) \quad (11.46)$$

$$G = \int_V d^3x a_r \pi_r$$

### 11.3.2 $\pi_r$ の変化

$$\pi_r \rightarrow \pi_r + a^i(\mathbf{x}) \quad (11.47)$$

$$G = -\int_V d^3x a_r \varphi_r$$

### 11.3.3 空間並進

$$x^i \rightarrow x^i + a^i \quad (11.48)$$

この時

$$\delta\varphi_r = a^i \partial_i \varphi_r$$

$$\delta\pi_r = a^i \partial_i \pi_r \quad (11.49)$$

であるから

$$G = \int_V d^3x a^i (\pi_r \partial_i \varphi_r + \varphi_r \partial_i \pi_r) = a^i \int_V d^3x \partial_i (\varphi_r \pi_r)$$

となるが次のように系の運動量を定義すれば

$$P_i = \int_V d^3x \partial_i (\varphi_r \pi_r) \quad (11.50)$$

$$G = a^i P_i \quad (11.51)$$

ポアソン括弧は 11.49 があると

$$\begin{aligned} \{x^i, G\} &= a^i \int_V d^3\mathbf{x} \left( \frac{\delta x^i}{\delta \varphi_r(\mathbf{x})} \frac{\delta P_i}{a^i \partial_i \pi_r} - \frac{\delta x^i}{\delta \pi_r(\mathbf{x})} \frac{\delta P_i}{a^i \partial_i \varphi_r} \right) \\ &= a^i \int_V d^3\mathbf{x} \left( \frac{\delta x^i}{\delta \varphi_r(\mathbf{x})} \delta \varphi_r + \frac{\delta x^i}{\delta \pi_r(\mathbf{x})} \delta \pi_r \right) \\ &= a^i \end{aligned}$$

となり空間変化が現れる。

### 11.3.4 時間並進

時間推進の母関数はハミルトニアン  $H$  そのものであった。これを確かめてみよう。  
次の変化に対して

$$t \rightarrow t + a \quad (11.52)$$

この時、作用積分を

$$S = \int d^3x dt (\pi_r \partial_0 \varphi_r) - \int H dt$$

として変分原理から

$$\partial_0 \varphi_r = \frac{\partial H}{\partial \pi_r}$$

$$\partial_0 \pi_r = -\frac{\partial H}{\partial \varphi_r} \quad (11.53)$$

となった。ただし

$$G = H = \int_V d^3x (\pi_r \partial_0 \varphi_r - L) \quad (11.54)$$

であった。ポアソン括弧は 11.53 があると

$$\begin{aligned} \{t, G\} &= \int_V d^3\mathbf{x} \left( \frac{\delta t}{\delta \varphi_r(\mathbf{x})} \frac{\delta G}{\delta \pi_r(\mathbf{x}')} - \frac{\delta t}{\delta \pi_r(\mathbf{x})} \frac{\delta G}{\delta \varphi_r(\mathbf{x}')} \right) \\ &= \int_V d^3\mathbf{x} \left( \frac{\delta t}{\delta \varphi_r(\mathbf{x})} \partial_0 \varphi_r + \frac{\delta t}{\delta \pi_r(\mathbf{x})} \partial_0 \pi_r \right) \\ &= \delta t \end{aligned}$$

となり時間変化が現れる。

前節で扱ったエネルギー運動量テンソル  $T_{\mu\nu}$  を用いる。ただしスピンの寄与からくる  $B_{\alpha\mu\nu}$  を加えた。

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi_r \frac{\partial L}{\partial (\partial^\nu \phi_r)} - \eta_{\mu\nu} L + \partial^\alpha B_{\alpha\mu\nu}$$

これにより母関数  $P$  は時間、空間推進をまとめて次のようにかける。

$$P_\mu = (H, P_i) = \int_V d^3x T_{\mu 0}$$

### 11.3.5 ローレンツ変換

ローレンツ変換は  $\delta x^\mu = \omega^{\mu\nu} x_\nu$  で表された。

この時、の母関数は

$$M_{\mu\nu} = \int_V d^3x (x_\mu T_{\nu 0} - x_\nu T_{\mu 0})$$

となる。

## 11.4 無限小変換の母関数

### 11.4.1 無限小回転

例えば無限小回転に対しては

$$\delta x_i = \epsilon_{ijk} x_j e_k \theta \quad (11.55)$$

なのでスカラー場  $\phi$  の回転に対する Lie 微分は

$$\delta_L \phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} (x_i \partial_j - x_j \partial_i) \phi(\mathbf{x}) e_k \theta \quad (11.56)$$

ベクトル場  $A$  に対しては

$$\delta_L A_l(\mathbf{x}) = \epsilon_{ljk} e_k \theta A_j - \epsilon_{ijk} x_j e_k \theta \partial_i A_l \quad (11.57)$$

$$= i(T_k)_{lj} \theta A_j e_k + \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} (x_i \partial_j - x_j \partial_i) A_l e_k \theta \quad (11.58)$$

ただし  $T$  は Hermite 行列で次のように定義される

$$(T_i)_{jk} = -\epsilon_{ijk} \quad (11.59)$$

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad (11.60)$$

$$T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (11.61)$$

$$T_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (11.62)$$

#### 11.4.2 Poisson 括弧と無限小変換

さらに無限小変換の母関数  $G$  を用いて

$$\delta_L \pi(x) \equiv \pi'(x) - \pi(x) = \epsilon \frac{\delta G}{\delta \phi} \quad (11.63)$$

を満たす。ただし  $G(t)$  はある密度関数  $\Gamma(\phi, \partial_i \phi, \pi, \partial_i \pi)$  を用いると次のような空間積分で表すことができる。

$$G(t) = \int d^3 \mathbf{x} \Gamma \quad (11.64)$$

これから例えば次ように汎関数微分が定義できる。

$$\frac{\delta G}{\delta \phi} \equiv \frac{\partial \Gamma(\mathbf{x})}{\partial \phi} - \partial_i \frac{\partial \Gamma(\mathbf{x})}{\partial \partial_i \phi} \quad (11.65)$$

をらに式 11.37 での Poisson の括弧をも用いれば

$$\delta_L \phi(x) = -\epsilon \{ \phi(x), G(t) \} \quad (11.66)$$

$$\delta_L \pi(x) = \epsilon \{ \pi(x), G(t) \} \quad (11.67)$$

無限小変化として次のように時間のみを選択すると

$$\delta x_i = 0 \quad (11.68)$$

$$\delta t = \epsilon \quad (11.69)$$

$$\delta_L \phi(\mathbf{x}) = -\epsilon \{ \phi(\mathbf{x}), G(t) \} = -\epsilon \partial_t \phi \quad (11.70)$$

$$\delta_L \pi(\mathbf{x}) = -\epsilon \{ \pi(\mathbf{x}), G(t) \} = -\epsilon \partial_t \phi \quad (11.71)$$

だから正準方程式から

$$G(t) = H \quad (11.72)$$

となりハミルトニアンに一致する。また  $H$  そのものの Lie 微分は

$$\delta_L H = -\epsilon \{ H, G(t) \} = -\epsilon \frac{dG}{dt} \quad (11.73)$$

よって変換がハミルトニアンを変化させない場合は母関数は保存されることになる。

### 11.4.3 無限小変換の母関数

ここでは前回の正準変換の関係を一般化し、母関数について考察する。場の量  $\phi$  とその正準運動量  $\pi$  が時間の関数であるとき次の関数を考える。

$$\frac{\delta G}{\delta \phi} \frac{\delta \phi}{\delta t} + \frac{\delta G}{\delta \pi} \frac{\delta \pi}{\delta t} \quad (11.74)$$

$\delta$  は関数の変化だから、

$$\delta t = \epsilon^\alpha \tau_\alpha(t) \quad (11.75)$$

$$\frac{\delta \phi}{\delta t} = \frac{d\phi}{dt} \quad (11.76)$$

これが次のように時間の全微分でかけるとする  
微小時間推進に対して未来、と過去側の和を次のようにとる。

$$\epsilon \left\{ \frac{\delta G}{\delta \phi} \left( \dot{\phi}(x) - \frac{\delta H}{\delta \pi} \right) + \frac{\delta G}{\delta \pi} \left( \dot{\pi}(x) + \frac{\delta H}{\delta \phi} \right) \right\} \quad (11.77)$$

$$\delta_L \pi(x) \left\{ \dot{\phi}(x) - \frac{\delta H}{\delta \pi} \right\} - \left\{ \dot{\pi}(x) + \frac{\delta H}{\delta \phi} \right\} \delta_L \phi(x) = \epsilon \left\{ \frac{\partial \Gamma(x)}{\partial t} + \nabla \cdot \Sigma(x) - q(\mathbf{x}) \right\} \quad (11.78)$$

この変換の母関数は  $G$  とおけて式 11.64 が成り立つ

$$G(t) = \int d^3 \mathbf{x} \Gamma \quad (11.79)$$

これは右辺の第 1 項について  $\Gamma(\phi, \partial_i \phi, \pi, \partial_i \pi)$  の時間微分が積の形になり

$$\epsilon \frac{\partial \Gamma(x)}{\partial t} = \epsilon \left\{ \frac{\partial \Gamma(x)}{\partial \phi} \dot{\phi}(x) + \frac{\partial \Gamma(x)}{\partial \nabla \phi} \nabla \dot{\phi}(x) \right\} \quad (11.80)$$

$$+ \epsilon \left\{ \frac{\partial \Gamma(x)}{\partial \pi} \dot{\pi}(x) + \frac{\partial \Gamma(x)}{\partial \nabla \pi} \nabla \dot{\pi}(x) \right\} \quad (11.81)$$

に書き換えると式 11.65 から関数の変化分からの項とまとめることができ次のようにまとめることができる。

$$\epsilon \frac{\partial \Gamma(x)}{\partial t} = \epsilon \left\{ \frac{\delta G(t)}{\delta \phi} \dot{\phi}(x) + \left( \nabla \frac{\partial \Gamma(x)}{\partial \nabla \phi} \right) \dot{\phi}(x) + \frac{\partial \Gamma(x)}{\partial \nabla \phi} \nabla \dot{\phi}(x) \right\} \quad (11.82)$$

$$+ \epsilon \left\{ \frac{\delta G(t)}{\delta \pi} \dot{\pi}(x) + \left( \nabla \frac{\partial \Gamma(x)}{\partial \nabla \pi} \right) \dot{\pi}(x) + \frac{\partial \Gamma(x)}{\partial \nabla \pi} \nabla \dot{\pi}(x) \right\} \quad (11.83)$$

$$= \epsilon \left\{ \frac{\delta G(t)}{\delta \phi} \dot{\phi}(x) + \frac{\delta G(t)}{\delta \pi} \dot{\pi}(x) + \nabla \left( \frac{\partial \Gamma(x)}{\partial \nabla \phi} \dot{\phi}(x) \right) + \nabla \left( \frac{\partial \Gamma(x)}{\partial \nabla \pi} \dot{\pi}(x) \right) \right\} \quad (11.84)$$

よって空間積分では後ろの 2 項について落とすことができるようになる。

一方で  $\dot{\phi}(x)$  と  $\dot{\pi}(x)$  が独立であればこれを式 11.78 に戻して  $\dot{\phi}(x)$  と  $\dot{\pi}(x)$

$$\delta_L \phi(x) = -\epsilon \frac{\delta G(t)}{\delta \pi} = -\epsilon \{ \phi(x), G(t) \} \quad (11.85)$$

$$\delta_L \pi(x) = \epsilon \frac{\delta G(t)}{\delta \phi} = -\epsilon \{ \pi(x), G(t) \} \quad (11.86)$$

という Lie 微分と Poisson の関係式が再び得られる。

また、場の量を位相空間として  $\Phi(\phi, \pi)$  のように書ければ

$$\frac{\partial \Gamma(x)}{\partial t} = \frac{\delta G(t)}{\delta \Phi} \dot{\Phi}(x) + \nabla \left( \frac{\partial \Gamma(x)}{\partial \nabla \Phi} \dot{\Phi}(x) \right) \quad (11.87)$$

ただし、作用積分でもそうであったようにここでの  $\Gamma, \Sigma$  は不定性が残る。次のような変化を与えても式 11.78 は不変である。

$$\Gamma' = \Gamma + \nabla \chi \quad (11.88)$$

$$\Sigma' = \Sigma - \partial_t \chi \quad (11.89)$$

さらに  $q(x)$  には正準変数の時間微分の項は含んでいてはならない。つまり母関数の段階で空間と時間については分けられている。

これらの任意性は式 11.64 のように積分してしまえば見えなくなる。これは位相情報の粗視化である。

式 11.78 の微小空間変化と微小時間変化を考えてみよう。ここでは  $i, j(1, 2, 3)$  は空間成分  $t$  は空間成分として用いる。

まず微小空間変化については

$$\delta t = 0 \quad (11.90)$$

$$\delta x_i = \epsilon_i \quad (11.91)$$

だから式 11.78 について定義式から

$$\delta_L \phi(x) = -\epsilon_i \partial_i \phi \quad (11.92)$$

$$\delta_L \pi(x) = -\epsilon_i \partial_i \pi \quad (11.93)$$

$$\frac{\delta H}{\delta \phi} = \frac{\partial H}{\partial \phi} - \nabla \frac{\partial H}{\partial_i \nabla \phi} \quad (11.94)$$

$$\frac{\delta H}{\delta \pi} = \frac{\partial H}{\partial \pi} - \nabla \frac{\partial H}{\partial_i \nabla \pi} \quad (11.95)$$

$$\dot{\phi} = \frac{\delta H}{\delta \pi} \quad (11.96)$$

$$\dot{\pi} = -\frac{\delta H}{\delta \phi} \quad (11.97)$$

となるので式 11.78 は

$$\begin{aligned} & -\epsilon_i \partial_i \pi \left\{ \dot{\phi}(x) - \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi} - \nabla \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial_j \nabla \pi} \right) \right\} - \left\{ \dot{\pi}(x) + \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} - \nabla \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial_j \nabla \phi} \right) \right\} \epsilon_i \partial_i \phi \\ &= -\epsilon_i \left\{ -\partial_t (\pi \partial_i \phi) + \pi \partial_i \dot{\phi}(x) + \dot{\phi}(x) \partial_i \pi - \left( \partial_i \pi \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} \partial_i \phi \right) + \left( \partial_i \pi \left( \nabla \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial_i \nabla \pi} \right) + \left( \nabla \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial_i \nabla \phi} \right) \partial_i \phi \right) \right\} \\ &= -\epsilon_i \left\{ -\partial_t (\pi \partial_i \phi) + \partial_j (\pi \dot{\phi}) \delta_{ij} - \left( \partial_i \pi \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} \partial_i \phi + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \nabla \pi} \nabla \partial_i \pi + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \nabla \phi} \nabla \partial_i \phi \right) + \nabla \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \nabla \pi} \partial_i \pi + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \nabla \phi} \partial_i \phi \right) \right\} \end{aligned}$$

ここで括弧内の第3項は  $\mathcal{H}$  の全微分である。よって

$$\begin{aligned} &= -\epsilon_i \left\{ -\partial_t(\pi\partial_i\phi) + \partial_j \left( \pi\dot{\phi} - \mathcal{H} \right) \delta_{ij} + \nabla \left( \partial_i\pi \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\nabla\pi} + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\nabla\phi} \partial_i\phi \right) \right\} \\ &= -\epsilon_i \left\{ -\partial_t(\pi\partial_i\phi) + \partial_j \left( \left( \pi\dot{\phi} - \mathcal{H} \right) \delta_{ij} + \partial_i\pi \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\partial_j\pi} + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\partial_j\phi} \partial_i\phi \right) \right\} \end{aligned}$$

を得る。これから次のようにエネルギー-運動量テンソルの成分  $T_{ij}$  を決めることができる。

$$T_{0i} = -\Gamma(x) = -\pi(x)\partial_i\phi(x) \quad (11.98)$$

$$T_{ij} = -\Sigma_i(x) = \delta_{ij}(\pi(x)\dot{\phi}(x) - \mathcal{H}(x)) + \left( \partial_i\pi \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\partial_i\pi} + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\partial_i\phi} \partial_j\phi \right)$$

よって空間推進の母関数は

$$P_i \equiv - \int d^3x \Gamma(x) = \int d^3x T_{0i} \quad (11.99)$$

とすると Poisson 括弧を用いて

$$- \partial_i\phi(\mathbf{x}) = \{\phi(\mathbf{x}), P_i\} \quad (11.100)$$

$$- \partial_i\pi(\mathbf{x}) = \{\pi(\mathbf{x}), P_i\} \quad (11.101)$$

と表すことができる。次に無限小時間推進については

$$\delta t = \epsilon \quad (11.102)$$

$$\delta x_i = 0 \quad (11.103)$$

$$\delta_L\phi(x) = -\epsilon\partial_t\phi \quad (11.104)$$

$$\delta_L\pi(x) = -\epsilon\partial_t\pi \quad (11.105)$$

となるから式 11.78 は

$$-\epsilon\partial_t\pi \left\{ \dot{\phi}(x) - \left( \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\pi} - \nabla \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial_j\nabla\pi} \right) \right\} - \left\{ \dot{\pi}(x) + \left( \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\phi} - \nabla \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial_j\nabla\phi} \right) \right\} \epsilon\partial_t\phi \quad (11.106)$$

$$= \epsilon \left\{ \dot{\pi} \left( \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\pi} - \nabla \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial_j\nabla\pi} \right) + \left( \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\phi} - \nabla \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial_j\nabla\phi} \right) \dot{\phi} \right\} \quad (11.107)$$

$$= \epsilon \left\{ \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t} - \nabla \left( \dot{\pi} \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial_j\nabla\pi} + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial_j\nabla\phi} \dot{\phi} \right) \right\} \quad (11.108)$$

これから

$$T_{00} = \Gamma(x) = \mathcal{H}(x) \quad (11.109)$$

$$T_{i0} = \Sigma_i(x) = - \left( \dot{\pi} \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\partial_i\pi} + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\partial_i\phi} \dot{\phi} \right) \quad (11.110)$$

したがって時間推進の母関数は

$$H = \int d^3x \mathcal{H} = \int d^3x T_{00} \quad (11.111)$$

である。

これらの母関数は互いに動的に関わり合う必要がある。

$$T_{0i} = -\Gamma(x) = -\pi(x)\partial_i\phi(x) \quad (11.112)$$

$$T_{ij} = -\Sigma_i(x) = \delta_{ij}(\pi(x)\dot{\phi}(x) - \mathcal{H}(x)) + \left( \partial_i\pi \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\partial_i\pi} + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\partial_i\phi} \partial_j\phi \right) \quad (11.113)$$

そこで時空推進の母関数は4元の添え字  $\mu, \nu$  に戻して

$$T_{\mu\nu} = \partial_\nu\pi \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\partial_\mu\pi} + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\partial_\mu\phi} \partial_\nu\phi + \quad (11.114)$$

ここで  $\Sigma$  については

$$\epsilon(\Sigma' - \Sigma) = \delta\mathbf{x}\mathcal{H}(x) \quad (11.115)$$

## 11.5 量子化

量子力学の場合状態とはヒルベルト空間  $\mathcal{H}$  のベクトル (半直線) によって表現される。

関数は  $\psi_\alpha(x) = \langle x|\alpha\rangle$  というスカラー積で表される。

観測量は  $\mathcal{H}$  上の線形エルミート演算子であらわされる必要がある。

通常の演算子は常にエルミートであるとは限らない。

前節からヒルベルト空間の無限小ユニタリ変換は  $G$  を変換の演算子とし

$$\{F, G\} = \frac{\delta F}{\delta\varphi_r(\mathbf{x})} \frac{\delta G}{\delta\pi_r(\mathbf{x}')} - \frac{\delta F}{\delta\pi_r(\mathbf{x})} \frac{\delta G}{\delta\varphi_r(\mathbf{x}')}$$

に対応して、

$$i\delta F = [F, G] = FG - GF \quad (11.116)$$

で表される。たとえば正準変換の母関数を交換積に使うと

$$[\phi_r(x, t), \phi_s(x', t)] = [\pi_r(x, t), \pi_s(x', t)] = 0$$

$$[\phi_r(x, t), \pi_s(x', t)] = i\delta_{rs}\delta^{(3)}(x - x')$$

であり、これは正準交換関係である。プランク定数は出てこない。

一般には演算子のヘッダを用いて拡大された位相空間においては  $\delta$  が出るとは限らず、

$$[\xi^i(x, t), \xi^j(x', t)] = i(\Omega^{-1})^{ij}(x, x')$$

となる。従って、古典的な正準変換は無限小のユニタリ変換を受けていることがわかる。

これは観測そのものがヒルベルト空間上のユニタリ変換となることを表している。

ユニタリ変換を簡単に  $e^{iG}$  とおくとユニタリの条件

$$UU^\dagger = U^\dagger U$$

は

$$F' = e^{iG} F e^{-iG}$$

が成り立てばいい。この時の状態ベクトルの変換は

$$|\alpha'\rangle = e^{iG} |\alpha\rangle$$

のように結ばれる。式 11.116 からハミルトニアンとの関係を作れば

$$i \frac{\partial F}{\partial t} = [F, H]$$

である。

## 11.6 時間

ここで一般的なストークスの定理は  $M$  を境界のある多様体として次で表される

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega \quad (11.117)$$

これから式 11.11 の一般化を考えると

$$\xi_1 = \partial_0 \varphi_r \quad (11.118)$$

$$\xi_2 = \partial_k \varphi_r \quad (11.119)$$

とおく。ここで  $x^0$  が無限遠からみた時間を表すことから保存則をみたがむしろ時間の方向性が次のような  $\omega$  の向きと一致すると考えたほうが自然である。

空間での直交したベクトルを  $\xi_1, \xi_2$  とすると

$$\omega = \xi_1 \wedge \xi_2 \quad (11.120)$$

はベクトルを  $\xi_1, \xi_2$  が作る平面に直交している。この 1 形式として

$$d\omega = d\xi_1 \wedge \xi_2 - \xi_1 \wedge d\xi_2 \quad (11.121)$$

ここで次の 1 形式を考えよう。

$$I = L \cdot d\xi \quad (11.122)$$

接ベクトルの基底は微分演算子であった。ベクトル場があるところに関数をもってくれば自然にこのベクトル場により微分が次のように定義できる。  $X = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  として

$$\begin{aligned} X(f)(x) &= \left. \frac{d}{dt} f(x + tX(x)) \right|_{t=0} \\ &= \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \end{aligned}$$

1 行目において各空間に共通の変化量  $t$  があたかも成分のようにかかっているので 2 行目では  $t$  が消えるかのように見える。

さらに 2 行目は外微分  $df$  に  $X$  を代入した  $df(X)$  に等しい、従って

$$df(X) = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = X(f)(x) \quad (11.123)$$

である。一般化すると  $n$  次元接ベクトル  $v$

$$v(a_1, \dots, a_n) \in T_p R^n \quad (11.124)$$

これと可微分写像  $\phi$

$$\phi = (\phi_1, \dots, \phi_m) : R^n \rightarrow R^m \quad (11.125)$$

を用意すると点  $p$  を始点として  $v$  方向に写像  $\phi$  を微分したものとして

$$v(\phi) = \sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(p) = d\phi(v) \in T_{\phi(p)} R^m \quad (11.126)$$

と表すことができる。これは  $R^n$  上の曲線が

$$\begin{aligned} c(0) &= p \\ \frac{d}{dt}c(t)|_{t=0} &= v \in T_p R^n \end{aligned} \quad (11.127)$$

を満たすことになる。これは次の節で見るように局所 1 パラメタ変換群をつくる。局所となるのは

$$c : [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow R^n \quad (11.128)$$

でパラメタ  $t$  には制限がかかり、ある部分を見ていることに限定する必要があるからである。

$\phi \circ c$  としたものは  $R^m$  上の曲線に変換される。この時  $t = 0$  での接ベクトルは求めることができ

$$\frac{d}{dt}(\phi \circ c)|_{t=0} = \sum_i^m \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(c(0)) \frac{d}{dt}c_i(t)|_{t=0} \quad (11.129)$$

$$= \left\{ (d\phi_1)_p(v), \dots, (d\phi_m)_p(v) \right\} \quad (11.130)$$

$$= d\phi(v) \quad (11.131)$$

はじめ  $L$  は  $\xi$  と同じ成分を持つものとする。  $I$  の変化は

$$dI = d(L_1 d\xi_1 + L_2 d\xi_2) = \left( \frac{\partial L_2}{\partial \xi_1} - \frac{\partial L_1}{\partial \xi_2} \right) d\xi_1 \wedge d\xi_2 \quad (11.132)$$

となるから

$$\omega = \xi_1 \wedge \xi_2 = L \cdot d\xi = Ldt \quad (11.133)$$

とすると前部のストークスの定理式から

$$\int_D d\omega = \int_{\partial D} \omega$$

から  $V \times [t]$  の時空間で積分すると

$$\int_{V \times [t]} dI = \int_{V \times [t]} \left( \frac{\partial L_2}{\partial \xi_1} - \frac{\partial L_1}{\partial \xi_2} \right) d\xi_1 \wedge d\xi_2 = \int_V L d\xi \quad (11.134)$$

となる。

### 11.6.1 時間の連続性

先にみたように局所的な条件で

$$\begin{aligned}c(0) &= p \\ \frac{d}{dt}c(t)|_{t=0} &= v \in T_p R^n\end{aligned}$$

が決まる。これはパラメタ  $t$  が連続性を周期  $T$  のもとで構成されていくことをここでは考察する。 $U$  上にベクトル場  $X$  をつくり  $X$  の局所 1 パラメタ変換群  $\Phi$  を例えば簡単に次のようにおく

$$\Phi(x, t) = x + t \quad (11.135)$$

$x$  については开区間  $(0, 1)$  をとるとすると  $\Phi$  もまたこの区間にあるためには  $t$  の定義域が次のように限られる。

$$-1 < t < 1 \quad (11.136)$$

もちろんこれは  $\Phi$  に与えられた式により変化するが原点の付近である。そこで

$$V = (a, b) \in U \quad (11.137)$$

に対して正の微小量  $\varepsilon \in R$  を

$$\varepsilon = \min\{a, 1 - b\} \quad (11.138)$$

ととれば  $\Phi$  の定義域として

$$V \times (-\varepsilon, \varepsilon) \quad (11.139)$$

をとることができる。このように局所 1 パラメタ変換群  $\Phi$  は  $U$  の部分集合  $V$  から出発する必要がある。

## 参考文献

- [1] 菅野礼治 ゲージ理論の解析力学 2007
- [2] G.M. ザスラフスキー 三島信彦、斉藤徹也、新藤 茂 訳 1989 カオス-古典および量子力学系-
- [3] 内山龍雄 相対性理論 1977 岩波全書
- [4] Tristan Needham Visual complex analysis 1997 培風館
- [5] J.W.Noh, A.Fougères, and L.Mandel Operational approach to the phase of quantum field 1992 Physical Review A 45
- [6] D.T.Pegg, S.M.Barnett Phase properties of quantized single-mode electromagnetic field 1989 Physical Review A 39
- [7] 小林昭七 接続の微分幾何とゲージ理論 1989 裳華房
- [8] 野水克己 現代微分幾何入門 1969 裳華房
- [9] 佐藤光 群と物理 1992 丸善株式会社
- [10] Tristan Needham Visual Complex Analysis 1997 OXFORD
- [11] 小沢哲也 曲線・曲面と接続の幾何 1997 培風館

- [12] 中原幹生 理論物理学のための幾何学とトポロジー I,II 2000 ピアソン・エデュケーション
- [13] 丹羽雅昭 超伝導の基礎 2002 東京電機大学出版局
- [14] 矢吹治一 量子論における位相 1998 日本評論社
- [15] Tai Tsun Wu, Chen Ning Yang Concept of nonintegrable factors and global formulation of gauge fields 1975 Physical Review D 12
- [16] R.Glies Reconstruction of gauge potentials from Wilson loops 1981 Physical Review D 24
- [17] Pratul Bandyopadhyay Geometry, Topology and Quantum Field Theory
- [18] 深谷賢治 双曲幾何 岩波書店 2004
- [19] Shinichi Deguchi Kazuo Fujikawa Second-quantized formulation of geometric phases 2005 Physical Review A 72
- [20] 大貫義朗 鈴木増雄 柏太郎 経路積分の方法 岩波 現代の物理学
- [21] 柏 太郎 サイエンス社 新版 演習 場の量子論
- [22] J.David Jackson Classic Electrodynamics 2001
- [23] 中村 哲・須藤彰三 電磁気学 朝倉書店 2012
- [24] Matthew N.O. Elements of Eletromagnetic
- [25] Lectures on Clifford(Geometric) Algebras and Appliations Rafal Ablamowicz Garret Sobczyk 2003
- [26] Julian Schwinger シュウインガ—量子力学 Springer 2000
- [27] トポロジカル絶縁体・超伝導体の基礎理論 野村健太郎 September 11, 2013
- [28] トポロジカル絶縁体入門 安藤陽一 2014
- [29] Brian R. Greene STRING THEORY ON CALABI-YAU MANIFOLDS Columbia University
- [30] 深谷 賢治 ゲージ理論とトポロジー 1995 Springer
- [31] Joseph L.Birman Geometry, Particles, and Fields Springer
- [32] Charles Nash Sinddhartha Sen Topoloy and geometry for Physics Mineola, New York
- [33] 二木 昭人 微分幾何講義-一般理論と現代物理への応用 サイエンス社
- [34] Andre Weil ケーラー多様体論入門 1958 Springer
- [35] 天野勝利 Hopf 代数とは 筑波大学
- [36] 谷村省吾 トポロジー・圏論・微分幾何 サイエンス社 SGC-52
- [37] 坪井 俊 幾何学 3 微分形式 東京大学出版
- [38] Louis H.Kauffman KNOTS AND PHYICS World Sientific 1993
- [39] 服部昌夫 多様体のトポロジー 岩波 2003
- [40] David W. Lyons An Elementary Introduction to the Hopf Fibration Lebanon Valley College

- [41] Nicholas Wheeler Transformational principles latent in the theory of CLIFFORD ALGEBRAS  
Reed College Physics Department 2003
- [42] Mathematica Demonstration Richard Hennigan Rotating the Hopf Fibration  
<http://www.wolfram.com/>
- [43] Ana Cannas da Silva Lectures on Symplectic Geometry 2006
- [44] Rotations of the three-sphere and symmetry of the Clifford Torus John McCuan and Lafe Spietz  
October 5,1998
- [45] Maris Ozols Geometry of qubit 2007
- [47] Rupert Way Dynamics in the Hopf bundle, the geometric phase and implications for dynamical  
systems University of Surrey U.K 2008
- [48] Chris J Isham Modern Differential Geometry for Physicists
- [50] Robert Gilmore Lie Groups, Lie Algebras, and Some of Their Applications
- [51] Bo-Yu Hou, Bo-Yuan Hou DIFFERENTIAL GEOMETRY FOR PHYSICS World Scientific  
1997
- [52] Thomas J. Bridges The Orr-Sommerfeld equation on a manifold
- [53] 佐古彰史 超対称性ゲージ理論と幾何学 2007 日本評論社
- [54] 早川尚男 連続体力学 京都大学大学院 平成 17 年
- [55] 岡部洋一 電磁気学 放送大学 2015
- [56] Bjorn Felsager Geometry, Particles, and Fields Springer 1997
- [57] 及川正行 偏微分方程式 岩波書店 1955
- [60] 三尾典克 変形体の力学 東京大学
- [61] Daniel Z. Freedman and Antoine Van Proeyen Supergravity CAMBRIDGE
- [62] V.P Nair Quantum Field Theory 2005 Springer
- [63] Diagrammatica The Path to Feynman Rules Martinus Veltman 1995 Cambridge University Press
- [64] Martin Ammon Johanna Erdmenger Gauge/Gravity Duality: Foundations and Applications 2005  
Cambridge University Press
- [65] Kawamura Yoshiharu 相対論的量子力学 裳華房
- [66] 泰泉寺雅夫 数物系のためのミラー対称性入門 2014 サイエンス社
- [67] 堀川穎二 複素代数幾何学入門 岩波書店
- [68] Shiing-shen Chern Complex Manifolds Without Potential Theory 1995 Springer Verlag New  
York, LLC
- [69] 安藤哲也 コホモロジー 2002 日本評論社
- [70] Joseph Polchinski String Theory I, II Cambridge University Press 1998

- [71] 坂本真人 量子力学から超対称性へ SGC ライブラリ 96 2012 サイエンス社
- [72] Barton Zwiebach A First Course in STRING THEORY 2009 Cambridge University Press
- [73] 深谷 賢治 編 ミラー対称性入門 2009 日本評論社
- [74] 白水 徹也 アインシュタイン方程式 2012 SGO ライブラリ サイエンス社
- [75] 唐木田健一 ひとりで学べる一般相対性理論 講談社 2015
- [76] 深谷賢治 数学者による数学者のための StrigDuality 京都大学
- [77] 坪井 俊 幾何学Ⅷ ホモロジー入門 東京大学出版会
- [78] 佐藤秀司・佐藤周友 代数的サイクルとエタールコホモロジー Springer 2012
- [79] 石橋延幸・村上公一 弦の場の理論 2012 SGO ライブラリ サイエンス社
- [80] 伊藤克司 共形場理論 2011 SGO ライブラリ サイエンス社
- [81] 高柳 匡 ホログラフィー原理と量子エンタングルメント サイエンス社
- [82] 江沢 洋、渡辺敬二、鈴木増雄、田崎晴明 繰り込み群の方法 1999 岩波書店
- [83] 今村 洋介 超弦理論の基礎 2010 SGO ライブラリ サイエンス社
- [84] 江口 徹 菅原 祐二 共形場理論 2015 岩波書店
- [85] 西森 秀稔 相転移・臨界現象の統計物理学 倍風館
- [86] Michael E.Peskin, Daniel V.Schroeder An introduction to quantum Field Theory
- [87] Charles Kittel and Herbert Kroemer THERMAL PHYSICS W.H.Freeman and Company 1980
- [88] J.J Sakurai Modern Quantum Mechanics 1985 The Benjamin/Cumming Publishing Company, Inc.
- [89] 松田 哲 複素関数 理工系の基礎数学5 岩波書店 1995
- [90] 小林 昭七 複素幾何 岩波書店 2005
- [91] 早川 尚男 非平衡統計力学 サイエンス社 SGC ライブラリ 2006
- [92] Mukund Rangamani & Tadashi Takayanagi “Holographic Entanglement Entropy“ 2017
- [93] 松枝 宏明 量子系のエンタングルメントと幾何学 森北出版 2016
- [94] 治部真里 高橋康 添削形式による場の量子論 日本評論社 1997
- [95] V.P. ナイア著 阿部泰裕 磯暁 訳 現代的視点からの場の量子論 Springer 2005
- [96] 大津 元一 現代光科学 Ⅷ、Ⅷ 光の物理的基礎 朝倉書店 1994
- [97] 日置 善郎 相対論的量子場 吉岡書店 2008
- [98] 細谷 暁夫 量子コンピューターの基礎 サイエンス社 1999
- [99] Michael A. Nielsen & Isaac L. Chuang Quantum Computation and Quantum Information Cambridge University press 2010

- [100] Brian C.Hall Lie Groups,Lie Algebras, and Represetations An Elementary Introduction Springer 2015
- [101] 谷村省吾 ホロノミーと力学系 名古屋大学
- [102] Raffaele Rani On Parallel Transport and Curvature 2009
- [103] 塩濱 勝博, 成 慶明 曲面の微分幾何学 日本評論社 2005
- [104] 大槻 知忠 結び目の不変量 共立出版 2015
- [105] 鈴木 増雄 統計力学 岩波書店 1994
- [106] Anastasios Mallios MODERN DIFFERENTIAL GEOMETRY IN GAUGE THEPRIES Springer 2009
- [107] Lectures on Geometry Edited by N.M,J.WOODHOUSE OXFORD university press 2017
- [108] 田中利夫・村上齊 トポロジー入門 サイエンス社 SGC ライブラリ 42 2005
- [109] 川村嘉春 基礎物理から理解するゲージ理論 サイエンス社 SGC ライブラリ 42 2017
- [110] 細谷 裕 ゲージヒッグス統合理論 サイエンス社 SGC ライブラリ 42 2018
- [111] 堺井義秀 山田憲和 野尻美保子 素粒子物理学 KEK 2012
- [112] 鈴木 増雄 経路積分と量子解析 サイエンス社 2017
- [113] David Tong Quantum Field Theory Universith of Cambridge 2006
- [114] 並木美喜雄 大場一郎 散乱の量子力学 岩波書店 1997
- [115] 福田礼次郎 フーリエ解析 岩波書店 1995
- [116] Adam Lupu-Sax Quantum Scattering Theory and Applications Harvard University 1998
- [117] 佐藤文隆 児玉英雄 一般相対性理論 岩波書店 1992
- [118] 松本幸夫 多様体の基礎 東京大学出版 1989
- [119] Wulf Rossmann Lie Groups OXFORD 2002
- [120] 佐武一郎 リー群の話 日本評論社 1982
- [121] F. シャトラン 行列の固有値 Springer 1988
- [122] 生西明夫 中神 臣 作用素環入門 1 岩波 2006
- [123] 黒田成俊 関数解析 共立出版 1980
- [124] 堀田昌寛 量子情報と時空の物理 第2版 サイエンス社 2019