概 要

基礎数学を複素数を中心に第 1 部で学んできた。ここでは現代的な課題を追及する準備として再び数学的内容を中心に学ぶ。空間を把握していくために行列、群、曲面の基本について学び、多様体とという重要な概念の基本を学習する。物理現象が連続していくためファーバーや接続をはじめリーマン多様体は現実の物理現象の舞台になる。多様体上での微分形式は複雑になる物理の概念に統一的なイメージを構成する手助けになる。第 5 部では本部のリーマン多様体から計量を導入して相対性理論へと接続していく。本部は未完成部分が多く、今後加筆修正する予定である。参考文献を見て学習に役立ててほしい。

1　群

1.1　群

定義 1. 群

群 (group) であるとは G が次の条件を満たす場合をいう。[9]

- 集合 G の任意の元 a, b に対し、積 ab が定義され、ab も G の元である。
- 集合 G の任意の元 a, b, c に対し、結合律 $a(bc) = (ab)c$ が成り立つ。
- 集合 G には単位元が存在し、全ての元 $a \in G$ に対し、$ae = ea = a$ が成り立つ。
- 集合 G には逆元が存在し、任意の $a \in G$ に対し、$aa^{-1} = a^{-1}a = e$ が成り立つ。

また群にふくまれる元の数を**位数** (order) という。

定義 2. 部分群

H が G の**部分群** (subgroup) であるとは G が次の条件を満たす場合をいう。

- $h_1, h_2 \in H \to h_1 h_2 \in H$
- $h \in H \to h^{-1} \in H$

2 つの群 G, G' があり $g \in G,\ g' \in G'$ の間に 1 対 1 の対応があり、

$$g_1 g_2 = g \in G \leftrightarrow g'_1 g'_2 = g' \in G' \tag{1.1}$$

が成り立てば同型であるという。また G と G' の対応において全ての要素の行き先が決まっていれば全射あり、

かつ 1 対 1 の対応があれば全単射である。

定義 3. 準同型写像

G と G' への写像 f が全射であり

$$f(g_i)f(g_j) = f(g_i g_j)\ :\ g_i, g_j \in G \tag{1.2}$$

を満たす時、f を**準同型写像** (homomorphism) という。

この時次のように表現する。

$$G \sim G' \tag{1.3}$$

特に f が全単射であれば**同型写像** (isomorphism) という。

また群 G から G 自身への準同型写像を **bb**(automorphism) という。

次の図のように G と G' への準同型写像 f によって G' の単位元 e' に写像されるような $\mathbf{R}$ の元の集合 K を写像 f の**核** (kernel) という。

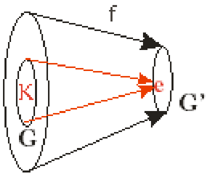

図 1.1: 単位元への写像　核

For$G$ の元 a に対して

$$gag^{-1} \in G \tag{1.4}$$

となる元 a を**共役類** (conjugacy_class) という。共役類には推移則が成り立つ、すなわち

$$b = gag^{-1}, c = hbh^{-1} \tag{1.5}$$

であれば

$$c = hbh^{-1} = hgag^{-1}h^{-1} = hga\,(hg)^{-1} \tag{1.6}$$

となるので a, b と b, c が共役なら c と a も共役になる。元 b が a の共役類に属していれば b の共役類は a の共役類と一致し、逆に元 b が a の共役類に属さなければ 2 つの共役類は完全に分離していて共通の元を持たない。

また

$$b = gag^{-1}, c = gbg^{-1} \tag{1.7}$$

であれば

$$bc = gag^{-1}gbg^{-1} = gabg^{-1} \tag{1.8}$$

となり積も同じ部分群に属する。そこで

$$gHg^{-1} = H \tag{1.9}$$

となる部分群 H を正規部分群、または G の**不変部分群** (inuariant_subgroup) という。

不変部分群は部分群でありながら類の和になっている。

1.1.1　群の作用例 [50]

ここでいくつかの群の作用例をみていこう。

例１：置換群

単純な $1, 2, 3, 4$ の点列をとると、この順序で $4!$ の要素を持つ群をつくれる。

この時図のような置換を考えるとこれは前節の群の条件を満たす。

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

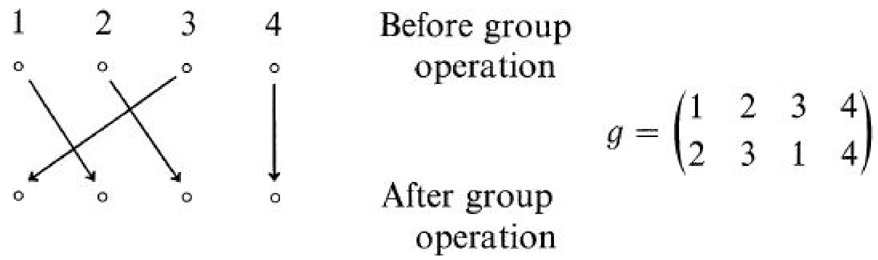

図 1.2: [50] より

例 2：位数群

図のように 2π を n 等分することを考えるとこれも群の条件を満たす。これは order n 群という。

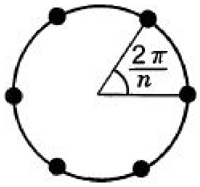

図 1.3: [50] より

例 3：連続群

これまでは不連続な要素であったが、次のような θ も次のように区間を限定すれば 1 対 1 に対応し、群の条件を満たす。

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

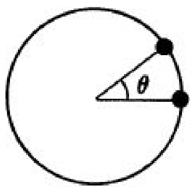

図 1.4: [50] より

例 4：距離

次の図のような直線上に原点を決め、そこからの距離を定義すれば次の区間

$$-\infty < a < \infty$$

の範囲で 1 対 1 に対応し、a は群の条件を満たす。

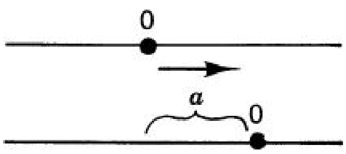

図 1.5: [50] より

例 5：実数と複素数
0 を含む実数、複素数は群になり、積の恒等演算子は 1 で、和の恒等演算子は 0 である。
例 6：行列
行列式が 0 ではない $n \times n$ の正方行列は行列の積が $GL(n,r)$ と呼ばれる**一般線型群**になる。もし、行列式が 1 であれば**特殊線型群**をなし、$SL(n,r)$ で表す。また、ユニタリ行列 $U(n)$ も同様に群をなす。

1.1.2 可換群

群の条件に

$$g_i \circ g_j = g_j \circ g_i, \ \forall g_i, g_j \in G$$

が成り立てば**可喚群** (abelian group) という。
写像で表すと

$$f : X \to Y$$
$$g : Y \to Z$$

において合成写像

$$g \circ f : X \to Z \tag{1.10}$$

が定義できる。次の写像の合成図式においてどの集合間の写像も合成の仕方に依存しない時、その図式は可換であるという。

$$\begin{array}{ccc} X & \overset{f}{\rightarrow} & Y \\ \downarrow_j & \searrow_k & \downarrow_g \\ W & \overset{h}{\rightarrow} & Z \end{array} \tag{1.11}$$

この時、

$$g \circ f = j \circ h = k \tag{1.12}$$

が成り立つ。

1.1.3 基底 [50]

群だけではなく、ベクトル場や代数においいては基底が重要でそれぞれで表現が異なる。そこで基底がそれぞれの場合にどう表現されるかを見ていこう。
1. 群の場合　次のように群を表す。

$$g_k = g_{i_1} g_{i_2} \cdots g_{i_s}$$

これらが積について群をなしていると、**生成子** (generators) と呼ばれる群演算子をつくることができる。例えば前節で見た置換演算子が簡単な例で P_4 は $4! = 24$ の要素を持つが、基底となるのは P_{12}, P_{23}, P_{34} の 3 つである。

$$P_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$P_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$P_{34} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

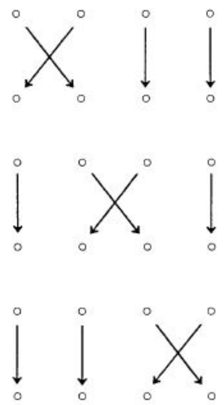

図 1.6: [50] より

2. 場の場合

例えば 4 元数 $(\lambda_0 = 1, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ を用いて

$$q = q_0 1 + q_1\lambda_1 + q_2\lambda_2 + q_3\lambda_3$$

で表すことができる。

2.　ベクトル場の場合

次のような、列ベクトル $(N \times 1$ 行列$)$ を単位ベクトルとして基底をとる。

$$\mathbf{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots \mathbf{e_n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

3.　代数の場合

例えば次のような演算子 □ を用いて

$$\mathbf{e_i} \Box \mathbf{e_j} = \sum C_{ij}^k \mathbf{e}_k$$

と表すことができ、C_{ij}^k は構造定数である。
例えば任意のベクトルが

$$\mathbf{A} = \sum \alpha^i \mathbf{e}_i$$

$$\mathbf{B} = \sum \beta^j \mathbf{e}_j$$

とすると □ は双線型で

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \Box \mathbf{B} &= \left(\sum \alpha^i \mathbf{e}_i\right) \Box \left(\sum \beta^j \mathbf{e}_j\right) \\ &= \sum_i \sum_j \alpha^i \beta^j C_{ij}^k \mathbf{e}_k \end{aligned}$$

で表すことができる。

1.1.4 環

環 $\mathfrak{R}$ とは群の性質を満たし、加法についえ可換群でありさらに乗法について次の演算が成り立つものをいう。

- 環 $\mathfrak{R}$ の任意の元 a, b, c に対し、結合律 $a(bc) = (ab)c$ が成り立つ。
- 環 $\mathfrak{R}$ の任意の元 a, b, c に対し、左分配律 $a(b + c) = (ab) + (ac)$ が成り立つ。
- 環 $\mathfrak{R}$ の任意の元 a, b, c に対し、右分配律 $(b + c)a = (ba) + (ca)$ が成り立つ。

さらに次を満たせばユニタリ環という。

- $a\,1 = 1\,a$

環 $\mathfrak{R}$ とは群の部分集合 I が加法について閉じていて

$$x \in \mathfrak{R},\ \ y \in I \to xy, yx \in I \tag{1.13}$$

である時、I を両側**イデアル**という。イデアル I が与えられると環 $\mathfrak{R}$ に次の関係で

$$x - y \in I \tag{1.14}$$

同値関係を定義できる。これにより同値類がつくられ重要な剰余環

$$R/I \tag{1.15}$$

が定義できる。

環の例としては有理数全体の集合 Q 複素数全体の集合 C、さらに正の整数 n を法として整数の集合 Z/nZ も環をなす。

環準同型とは環における乗法と加法に対して可換な写像 f である。

- $f(a + b) = f(a) + f(b)$
- $f(ab) = f(a)f(b)$
- $f(1) = 1$

準同型の核はイデアルになり次の準同型定理が成り立つ

- $\mathfrak{R}/Ker\, f$ と $img\, f$ とは互いに同型である。

可換環であり加群としての構造と両立する積の構造をもてば多元環という。多元環と準同型であるためには

- $f(ax + by) = af(a) + bf(y)$
- $f(xy) = f(x)f(y)$

G が群であり G 上の自己準同型 f,g に対し

$$f(x)g(y) = g(y)f(x) \tag{1.16}$$

がどんな $x, y \in G$ に対して成り立つなら f と g は加法可能であるといい、

$$(f + g)(x) := f(x)g(x)\ \ x \in G \tag{1.17}$$

とおける。さらに G が可換群であれば G 上の自己準同型の全体を $End(G)$ と書き、$End(G)$ で加法が定義され、これが環になる。

これを G の**自己準同型環**という。

1.1.5 体 (filed)

集合 $\mathfrak{F}$ がを満たすとき、$\mathfrak{F}$ を体 (field) という。

- 体 $\mathfrak{F}$ の任意の元 a, b, c に対し、和の結合律 $a + (b + c) = (a + b) + c$ が成り立つ。
- 体 $\mathfrak{F}$ の任意の元 a, b, c に対し、和の交換律 $a + b = b + a$ が成り立つ。
- For$\mathfrak{F}$ の任意の元 a, b, c に対し、積の結合律 $a(bc) = (ab)c$ が成り立つ。
- 体 $\mathfrak{F}$ の任意の元 a, b に対し、積の交換律 $ab = ba$ が成り立つ。
- 体 $\mathfrak{F}$ の任意の元 a, b, c に対し、分配律 $(a + b)c = ac + bc$ が成り立つ。
- 体 $\mathfrak{F}$ の任意の a に対し、零元の存在 $0 + a = a$ が成り立つ $0 \in \mathfrak{F}$ がただ 1 つ存在する。
- 体 $\mathfrak{F}$ の任意の a に対し、単位の存在 $1a = a$ が成り立つ $1 \in \mathfrak{F}$ がただ 1 つ存在する。
- 体 $\mathfrak{F}$ の任意の a に対し、逆元の存在 $aa' = 1$ が成り立つ $a' \in \mathfrak{F}$ がただ 1 つ存在する。
- 体 $\mathfrak{F}$ の任意の a に対し、負元の存在 $a + a' = 0$ が成り立つ $a' \in \mathfrak{F}$ がただ 1 つ存在する。

1.1.6 加群

定義 4. 部分群

x を群 G の元として $n \in \mathbb{Z}$ に対して nx は $n > 0$ の時、

$$\overbrace{x + \cdots + x}^{n}$$

を表し、$n = 0$ ならば

$$0x = 0$$

である。G の r 個の元 $x_1 \cdots x_r$ について

$$n_1 x_1 + \cdots n_r x_r \ (n_i \in \mathbb{Z}, 1 \leq i \leq r)$$

は G の部分群になる。これを H で表すと
H **は生成元** $x_1 \cdots x_r$ **で生成される** G **の部分群である**という。

有限個の x_i から生成されれば**有限生成**という。

定義 5. 自由加群

特に

$$n_1 x_1 + \cdots n_r x_r = 0$$

が成り立つのが

$$n_1 = \cdots = n_r = 0$$

であれば **1 次独立**という。個数 r の 1 次独立な元から成り立てば階数 r の**自由加群**（アーベル群）という。
特に次のように表されれば階数 r の自由加群である。

$$\overbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}^{r}$$

1.1.7 巡回群

定義 6. 巡回群

G が 1 つの元 x で生成されると

$$G = \{0, \pm x, \pm 2x, \cdots\}$$

とかけて、この G を巡回群という。任意の $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ に対して

$$nx \neq 0$$

ならば、無限巡回群になる。

G が巡回群で

$$f : \mathbb{Z} \to G;\ f(m) = mx$$

となる f を準同型写像とする。(f は全射だが、単射であるとは限らない)
このとき G は次の商群と同相になる。

$$G \simeq \mathbb{Z}/\ker f \tag{1.18}$$

N を $Nx = 0$ であるような最小の自然数とし

$$\ker f = \{0, \pm N, \pm 2N, \cdots\} = N\mathbb{Z}$$

となるので、

$$G \simeq \frac{\mathbb{Z}}{N\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Z}_N$$

と表される。従って G が無限巡回群であれば

$$\ker f = \{0\}$$

であり、

$$G \simeq \mathbb{Z}$$

となる。また、有限巡回群であれば

$$G \simeq \mathbb{Z}_N$$

になる。
有限生成のアーベル群を G とすると G の r 個の生成元の中から

$$H \simeq k_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus k_p\mathbb{Z}$$

とかければ G の階数を r として

$$G \simeq \overbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}^{r} \oplus \mathbb{Z}_{k_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{k_p}$$

と表すことができる。この証明は $m = r + p$ として写像 f を

$$f : \overbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}^{m} \to G$$

として全射準同型

$$f(n_1 \cdots n_m) = n_1 x_1 + \cdots n_m x_m$$

と表すことができるとする。式 1.18 から

$$\frac{\overbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}^{m}}{\ker f} \simeq G$$

であり、$\ker f$ は

$$\overbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}^{m}$$

の部分群なので生成元をうまく選べば

$$\ker f \simeq k_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus k_p\mathbb{Z}$$

とできる。よって

$$\begin{aligned} G &\simeq \overbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}^{m} / \ker f \\ &\simeq \overbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}^{m} / k_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus k_p\mathbb{Z} \\ &\simeq \overbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}^{m-p} \oplus \mathbb{Z}_{k_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{k_p} \end{aligned}$$

となる。

1.1.8 ねじれ加群

定義 7. ねじれ元

M を $\mathbf{R}$ の加群として 0_M を M の零元として、M の元 x が自由元であるとは $r \in \mathbf{R}$ に対して

$$rx = 0_M \to r = 0_R$$

が成り立つことをいう。これは x が $\mathbf{R}$ 上で 1 次独立であることと同じである。
元 x がねじれ元であるとは

$$rx = 0_M \to r \neq 0_R$$

が成り立つ場合である。

例えば自明であるのは x が零元 0_M の場合である。

1.1.9 剰余類

定義 8. 剰余類

群 G の部分群 H のある元 $g \in G$ を右から掛けて得られる集合 Hg を群 G の H による右剰余類 (right coset)、また同様に左から掛けて得られる集合 gH を左剰余類 (right coset) という。

剰余類が異なれば共通の元を持たない例えば $g_1 \neq g_2$ として、右剰余類 Hg_1, Hg_2 に共通な元 $hg_1, h'g_2$ があるとすると

$$hg_1 = h'g_2 \ \ h, \ \ h' \in H \tag{1.19}$$

が成り立つことになるがこれは

$$g_1 = h^{-1}h'g_2 \ \ h^{-1}, \ \ h' \in H \tag{1.20}$$

とすることができるので $g_1 \neq g_2$ としていることに反する。
これから剰余類を使うと次の図のように G を分割することができる。

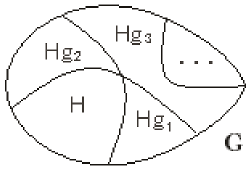

図 1.7: G の左剰余類による分割

$$G = H \cup Hg_1 \cup Hg_2 \cup \cdots \quad g_1 \neq g_2 \neq g_3 \cdots \tag{1.21}$$

これは右剰余類を用いても同様である。しかし不変部分群であれば

$$gHg^{-1} = H \tag{1.22}$$

が成り立つので $gH = Hg$ であり両者は区別できない。また、群が積については閉じていたので不変部分群であれば

$$\begin{aligned}(hg_i)(h'g_j) &= hg_ih'g_j \\ &= hh'g_ig_j \\ &= h''g_ig_j \quad h, h', h'' \in H\end{aligned}$$

となるので次が成り立つ。

定義 9. 商群

$$(Hg_i)(Hg_j) = Hg_ig_j \tag{1.23}$$

とすることができる。同じ剰余類はまとめてしまうことができるのでこのような群を**剰余類群** (residue class group) または**商群 (quotient group)** ともいい次のように表す。

$$G/H \tag{1.24}$$

この剰余類群の単位元は不変部分群 H である。一般に群 G から剰余類 G/H の上への写像を

$$f : G \to G/H; \quad f(g_i) = Hg_i \tag{1.25}$$

とすると式 1.23 より

$$f(g_i)f(g_j) = f(g_ig_j) \tag{1.26}$$

が成り立つので f は準同型写像であるといえる。よって G と G/H は準同型である。

この時、不変部分群 H は写像 f の核になっている。次の準同型定理が成り立つ。

定義 10. 準同型定理

G と G' が準同型であれば準同型写像 $f : G \to G'$ の核を H とすると H は G の不変部分群である。

そこで剰余類群 G/H から G' の上への写像 $\bar{f} : G/H \to G'$ を $\bar{f}(Hg_i) = f(g_i)$ と定義すれば $\bar{f}$ は同型写像である。

従って $G/H \sim G'$ である。

1.2 変換群

定義 11. 一般線形変換群

n 次元正則行列は行列式が 0 ではなく、逆行列を持つ。また行列の積

$$(AB)_{ik} = \sum_j A_{ij} B_{jk} \tag{1.27}$$

に関して閉じていてこのような集合も群を成し、これを**一般線形変換群** GL(n,C) という。

群 G と群 V があり、行列 G が存在するとき、

定義 12. 表現

群 G から群 $V(y)$ の中への準同型写像 D を行列 G の表現という。
n 行 n 列の正則行列 $D(g_i)$ が与えられていて群の元に

$$g_i g_j = g_k \tag{1.28}$$

に対応して

$$D(g_i)D(g_j) = D(g_k) \tag{1.29}$$

$$D(g^{-1}) = D(g)^{-1} \tag{1.30}$$

$$D(1) = 1 \tag{1.31}$$

が成り立っている場合 D を群 G **の表現**という。
また行列のサイズ n を**表現の次元**という。

また、

定義 13. 忠実な表現

1 次変換 D の作用するベクトル空間を表現空間といい、$D(g_k)$ を表現行列という。
群 G との対応は 1 対 1 とは限らないが 1 対 1 であれば忠実な表現という。

群 G に 2 つの表現がるとき、

定義 14. 同値変換

群 G の 2 つの表現 D, D' が正則行列 V によって

$$D'(g) = V^{-1} D(g) V \tag{1.32}$$

で結ばれていれば D' と D は同値であるといい。この変換を同値変換という。
さらに

定義 15. 可約、既約

この同値変換によって D' を次のようにブロック対角化できれば

$$D'(g) = \begin{pmatrix} D_1(g) & 0 \\ 0 & D_2(g) \end{pmatrix} \tag{1.33}$$

表現 D は**可約** (reducible) という。可約ではない表現は**既約** (irreducible) という。

定理 1. *Schur* の定理

群 G の表現 D が既約であるために必要十分な条件は全ての $D(g)\,(g \in G)$ と可換な *1* 次変換 A が $a1\,(a \in C)$ に限られることである。

これは *Schur's Lennma* である。

Proof. 証明

次のように簡単に証明する。

1 は単位行列、a を固有値として

$$B = A - a1 \tag{1.34}$$

とすると

$$det(B) = det(a - a) = 0$$

である。この時全ての $g \in G$ に対し、

$$BD(g) = D(g)B$$

をみたすので B は同型写像であるか $B = 0$ である。しかし、$det(B) = 0$ なので同型写像ではない。

よって式 1.34 から

$$A = a1 \tag{1.35}$$

逆に十分条件は表現 D が既約ではないときは全ての $D(g)$ と可換であって $A = a1$ でないものがあることをいえばよい。

D が可約である時は既約な不変部分空間 V の和で表すことができて任意のベクトル $\mathbf{x}$ は次のように表すことができる。

$$\mathbf{x} = \mathbf{x_1} + \mathbf{x_2} + \cdots + \mathbf{x_n} \ \ \mathbf{x_i} \in V \tag{1.36}$$

そこで V 上の 1 次変換を

$$A\mathbf{x} = a_1\mathbf{x_1} + a_2\mathbf{x_2} + \cdots + a_n\mathbf{x_n} \tag{1.37}$$

とするとこの A は全ての $D(g)$ と可換であるが $A = a1$ ではない。従って Schur's Lennma が証明できた。 □

これは既約な表現であるということと固有ベクトルの可換性が密接に関係していることを示している。

1.2.1 陰関数定理

定理 2. 陰関数定理

関数 $F(x, y)$ は点 $p(a, b)$ のある近傍 $U \subset \mathbb{R}^2$ で連続微分可能であり、

$$F(a, b) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = F_y(a, b) \neq 0$$

の時、十分小さい a の近傍 $(a - \delta < x < a + \delta)$ にいて

$$F(x, f(x)) = 0$$

を満たす連続な陰関数 $f(x)$ が唯一存在し、

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}$$

を満たす。

Proof. これは

$$F(x, f(x)) = 0$$

を x で微分すれば $y = f(x)$ とおいて

$$F_x(x, f(x)) + F_y(x, f(x))f'(x) = 0$$

から簡単に得られる。 □

つまり、陰関数とを零点を満たす時の x, y の関係である。

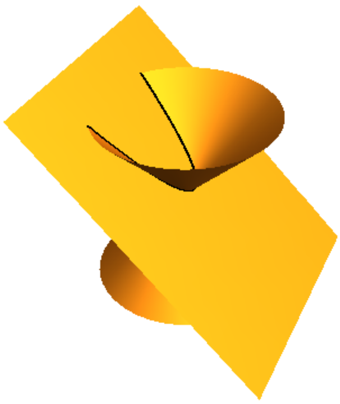

図 1.8: コーンの切り口の角度によっては双曲線、楕円、放物線などの陰関数が得られる。

1.2.2 ユニタリ変換

複素ベクトル空間において内積 (u, v) を一定に保つような 1 次変換を考えるとこれを**ユニタリ変換 (unitary transformation)** という。変換行列を U とするとベクトルの成分は

$$u'_i = \sum_{j=1}^{n} U_{ij} u_j$$
$$v'_i = \sum_{j=1}^{n} U_{ij} v_j$$

とおける。内積が保存される時

$$(u'_i, v'_i) = \sum_{j,k}^{n} \left(\sum_i U_{ij} \cdot U_{ik} \right) u_j \cdot v_k = (u, v) \tag{1.38}$$

が成り立つ必要がある。よって

$$\sum_i U_{ij} \cdot U_{ik} = \delta_{jk} \tag{1.39}$$

が成り立つ。

定義 16. ユニタリ群
そこで U の転置複素共役な行列を**エルミート共役 (Helmite conjyugate)** な行列を $U^\dagger$ とすると

$$\left(U^\dagger\right)_{ji} = U_{ij}^* \tag{1.40}$$

となるので式 1.39 が成り立つためには

$$U^\dagger U = UU^\dagger = 1 \tag{1.41}$$

である必要があるため、

$$U^\dagger = U^{-1} \tag{1.42}$$

という関係が成り立つ。
つまりユニタリな行列はエルミート共役が逆行列になっている時であり、この時この行列を**ユニタリ行列 (unitary matrix)** という。
この変換によって内積は変化しない。
ユニタリ行列の積も内積を保ち、単位元、逆元も存在するのでこの行列の集合が群をつくる。
これを n 次元**ユニタリ群** (unitary group) といい $U(n)$ で表す。
たユニタリ変換 U の行列式は ϕ を実数として

$$detU = e^{i\phi} \tag{1.43}$$

と書ける。

さらに、次の場合は今後重要になる。

定義 17. 特殊ユニタリ群
この群の中で行列式が 1 のものは**特殊ユニタリ群 (spcial unitary group)** といい $SU(n)$ で表す。
特殊ユニタリ群は一般には非可換で

$$U_1U_2 \neq U_2U_1 \tag{1.44}$$

となる。$SU(n)$ はエルミート行列 $T_a,\ (a = 1, 2, \cdots N^2 - 1)$ として

$$U = exp\left(i\sum_{a=1}^{N^2-1}\theta_a(x)T_a\right) \equiv exp(i\theta) \tag{1.45}$$

とかける。

T_a は $N \times N$ リー代数を満たす。行列式が 1 になるので次元は 1 つ減る。

定義 18. 特殊直交群
複素空間を実空間にしぼると内積の不変性は式 1.39 から転置のみ関係

$$O^TO = OO^T = 1 \tag{1.46}$$

となる。この行列 O を**直交行列 (orthogonal matrix)** といい。
この行列も群をつくり、直交群 (orthogonal group) といい $O(n)$ で表す。
また特に行列式が 1 となる場合は回転を表し、**特殊直交群 (special orthogonal group)**$SO(n)$ という。

さらに、特殊ユニタリ群の中で

定義 19. 随伴表現
$SU(N)$ の表現行列の内その次元が $n = N$ のものを基本表現、次元が $n = N^2 - 1$ のものを**随伴表現**という。

1.2.3 量子力学

対称性を保つ変換は一般に群をつくる。これは量子力学の中でも見ることができる。
シュレディンガー方程式は

$$H\phi = E\phi \tag{1.47}$$

で与えられるような場合を考える。
この物理系が $\mathbf{u}$ だけ平行移動する場合は一般に

$$\phi'(\mathbf{r}) = \phi(\mathbf{r}-\mathbf{u}) \tag{1.48}$$

であるから平行移動の演算子を U とすると

$$U(\mathbf{u})\phi(\mathbf{r}) = \phi(\mathbf{r}-\mathbf{u}) \tag{1.49}$$

が成り立つことになる。そこで $\phi(\mathbf{r}-\mathbf{u})$ をテーラー展開すると x 方向の変位のみ考えれば

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{r}-\mathbf{u}) &= \left(1 - u\frac{\partial}{\partial x} + \frac{u^2}{2!}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \cdots\right)\phi(\mathbf{r}) \\ &= \exp\left(-u\frac{\partial}{\partial x}\right)\phi(\mathbf{r})\end{aligned}$$

となるので一般には

$$\phi(\mathbf{r}-\mathbf{u}) = \exp\left(-\mathbf{u}\cdot\nabla\right)\phi(\mathbf{r}) \tag{1.50}$$

である。量子力学では

$$p = -i\hbar\nabla \tag{1.51}$$

であることから演算子 U が

$$U(\mathbf{u}) = \exp(-i\mathbf{u}\cdot\mathbf{p}/\hbar) \tag{1.52}$$

で与えられこれはユニタリ演算子である。よって

$$U(\mathbf{u})^t = U(\mathbf{u})^{-1} \tag{1.53}$$

である。よって平行移動後も同じシュレディンガー方程式を満たすとすると式 1.47 より
左から $U(\mathbf{u})$ を作用させて

$$\begin{aligned}U(\mathbf{u})H\phi(\mathbf{r}) &= U(\mathbf{u})E\phi(\mathbf{r}) \\ U(\mathbf{u})HU(\mathbf{u})^{-1}\phi'(\mathbf{r}) &= E\phi'(\mathbf{r})\end{aligned}$$

となるので次が成り立つ必要がある。

$$U(\mathbf{u})HU(\mathbf{u})^{-1} = H \tag{1.54}$$

式 1.52 から式 1.55 の交換関係は次と同等である。次と同等である。

$$[U(\mathbf{u}), H] = 0 \tag{1.55}$$

つまり交換積が 0 になることには次の図のような関係がある。

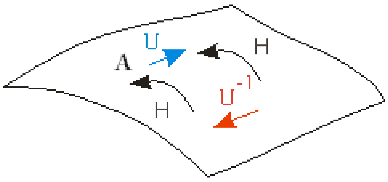

図 1.9: $[U(\mathbf{u}), H] = 0$ を満たす関係

次に微小回転 $\delta\theta$ についても同じように示すことができる。微小回転の演算子として U を定義しなおせば先と同じようにテーラー展開を施して

$$
\begin{aligned}
U(\delta\theta)\phi(\mathbf{r}) &= \phi'(\mathbf{r}) \\
&= \phi(\mathbf{r} - \delta\theta \times \mathbf{r}) \\
&= \left\{1 - (\delta\theta \times \mathbf{r}) \cdot \nabla + \frac{1}{2!}\left((\delta\theta \times \mathbf{r}) \cdot \nabla\right)^2 - \frac{1}{3!}\left((\delta\theta \times \mathbf{r}) \cdot \nabla\right)^3 + \cdots\right\}\phi(\mathbf{r})
\end{aligned}
$$

となるが一般に

$$(\delta\theta \times \mathbf{r}) \cdot \nabla = \delta\theta \cdot (\mathbf{r} \times \nabla) \tag{1.56}$$

が成り立つので
$y^e ginalign*U(\delta\theta) = exp(-\frac{i}{\hbar}\delta\theta \cdot \mathbf{L})\mathbf{L} = -i\hbar\mathbf{r} \times \nabla align*$
よって空間回転の不変性は

$$[\mathbf{L}, H] = 0 \tag{1.57}$$

となり、よく知られた角運動量保存則である。
一般に波動関数 ϕ に対してユニタリ変換 U が H と可換であれば U の固有値は保存される。
物理系は U のもとで不変であり、この変換が群をなすのである。例えば H と可換な変換の集合を

$$G = \{U, V, W, \cdots\} \tag{1.58}$$

のように無数におくと

$$(UV)\,H\,(UV)^{-1} = UVHV^{-1}U^{-1} = H \tag{1.59}$$

が成り立つので積 UV も同じ群 G の要素である。平行移動全体の群は並進群、回転運動全体の群は回転群と呼ばれる。

このような連続的な変換に対し、不連続な変換の例として空間反転 P と時間反転 T がある。どちらも 2 回繰り返すと元にもどることから

$$
\begin{aligned}
P^2 &= 1 \\
T^2 &= 1
\end{aligned}
$$

を満たす。例えばシュレディンガー方程式 1.47 は $\phi^*(r, -t)$ についても同じように成り立つので

$$T\phi(\mathbf{r}, t) = \phi'(\mathbf{r}, t) = \phi^*(\mathbf{r}, -t) \tag{1.60}$$

のように時間反転と共に複素共役をとる演算子である。このような演算子は**反ユニタリ演算子** (antiunitary) とよばれる。

2　位相空間

現代では数学的な空間は位相空間をさす。多様体は任意の場所に局所座標系をつくれるような空間とみなせる。

この空間についてここで学んでおく。重要な役割を**開集合**が果たす。

これは空間を分けようと考えた時に、閉集合でわけようとすると、どうしても共有部分が出てくる事情がある。

閉集合は後に見るように開集合の補集合として定義する。

これは興味あることに境界のない様々な開集合を無限に足し合わせると境界が見えてくることでもある。

我々の外には境界が明瞭としてあるが、内を見ると悶々とするのはこのせいだろうか。

2.1　位相空間

極限をとるという操作が開集合に対しては無限に続けられる。まず、連続性の定義から次の $\epsilon\delta$ 法を見ておこう。

2.1.1　イプシロン-デルタ法 [32]

f は n 次元 R 空間から R への関数とし、ここで次の意味を考えてみる。

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y$$

これは連続性の定義でもある。

$f(x)\, x \in R$ は連続であるとは、微小な $\varepsilon > 0$ についてある $\delta > 0$ を選んで全ての y について

$$|y - x| < \delta$$

とおければ

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

が成り立つことであった。そこで次の図のように ε の誤差をもって $x - \delta, x + \delta$ の定義で $f(x)$ が定義されるとき、

ε をどこまでも小さくとることができるなら連続である。こえは開集合となじみやすい。

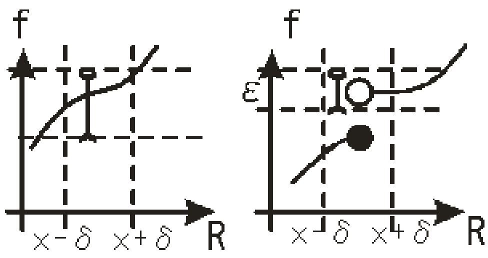

図 2.1: 連続性

例えば次のような f 軸上に飛びのある関数を用意する。

$$f(x) = \begin{cases} -x + 1 & (x \leq 0) \\ -x + \frac{1}{2} & (x > 0) \end{cases}$$

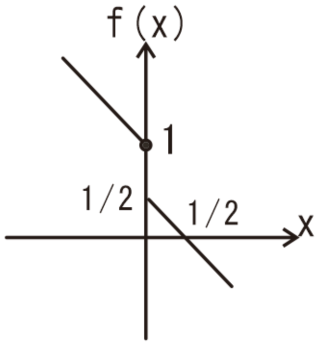

図 2.2: $x=0$ で飛びのある関数

この関数の引数に通常の変数に変えて変数の領域を入れることを考えよう。

例えば f 軸上の $(5,17)$ の開集合に対応する x 軸上の開集合は f が単調増加なので

$$f^{-1}\{(5,17)\}=(-16,-4)$$

と対応している。しかし、$f=1$ 周辺の f 軸上の集合を値域として ϵ,δ 法を用いると $x=0$ で特別なことが起きる。

$\epsilon>0$ とすると $f=1$ 周辺の開集合 $(1-\epsilon,1+\epsilon)$ の値域は f の逆関数によって
次の定義域に写される。

$$f^{-1}\{(1-\epsilon,1+\epsilon)\}=(-\epsilon,0]$$

のように定義域は $-\epsilon$ は含まないが 0 は含まれる集合になる。つまり、開集合が開集合に写らない。

2.1.2 境界と内部

次のように X 上の位相空間 T を

$$T=(a,b)\times(c,d)$$

とおく。開区間 $U\in X$ と閉区間 $\bar{U}$ を次のようにおく。

$$U=(a,b),\ \ \bar{U}=[a,b]$$

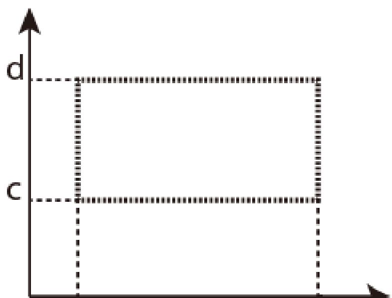

図 2.3: 境界と内部

この時、$X-U$ は閉区間になる。また、$X-\bar{U}$ は次のようになる。

$$(-\infty,a)\cup(b,\infty)$$

また、U が部分開集合 O_α の和で構成されてるとき

$$U^0 = \cup_\alpha O_\alpha$$

として U^0 は境界を含まない内部である。よってもし、U が開集合であれば $U^0 = U$ である。
ここで境界集合を次で定義する

$$b(U) = \bar{U} - U^0$$

例えば $U^0 = (a, b),\ \ \bar{U} = [a, b]$ であれば

$$\bar{U} - U^0 = \{a, b\}$$

のように点要素が出てくる。これから空集合を ϕ として

$$U \cap b(U) = \phi \Leftrightarrow U\, is\, Open$$

$$b(U) \subset U \Leftrightarrow U\, is\, Closed$$

となることがわかる。

2.1.3 同一視

はじめに**同一視**という方法を幾何的に見る。次の図のように可縮な折り紙を記号の向きに沿って張り合わせることを考えよう。
次の左図のように aa, bb を矢印を合わせて貼り付ける。すると球面 S^2 ができる。
ところが右図のように張り合わせるとメビウスの帯ができる。これらはどれも a と a、b と b を同一視しているわけである。
しかし張り合わせかたによってねじったり、ねじらなかったりできるわけであるがこれが第 2 部で学んだ接続という概念の必要性になる。

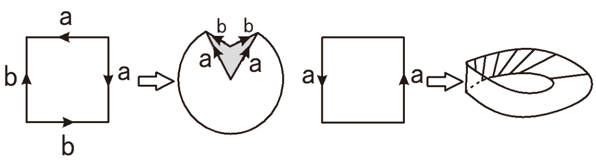

図 2.4: 左 S^2 右はメビウスの帯で表裏がない

ねじりが加わることで表裏がなくなる例を次のクラインの壺でも見ておこう。

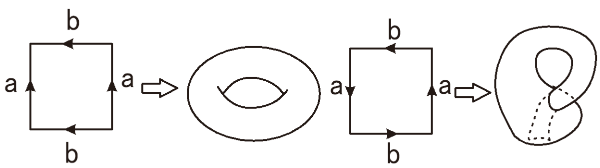

図 2.5: 左 T^2 右はクラインの壺で表裏がない

さらに物理ではよく登場する射影空間を見てみよう。原点を通る線分群の端点を同一視して得られることを見たがここでも球面を作成する時にひねりを加えるとできる。次の図が射影平面 $\mathbf{R}P^2$ を作る過程である。

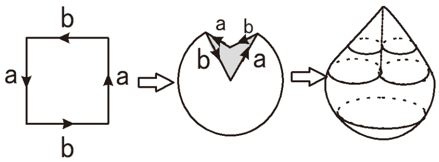

図 2.6: 射影平面 $\mathbf{R}P^2$

この射影面を見ると切り込みがあるように見える。これを自己交差と呼ぶ。この自己交差は第 1 部で学んだリーマン葉と関係している。下の図は複素数を z とした $\sqrt{z}$ のリーマン葉を表している。

この空間上では図の右のように点 p から出発すると $\theta = 2\pi$ の回転で点 r に行く。

この点は図では点 P の近傍に見えるが途中の q 点の方が p には近い。元の p 点に戻ろうとすると $\theta = 4\pi$ の回転が必要である。

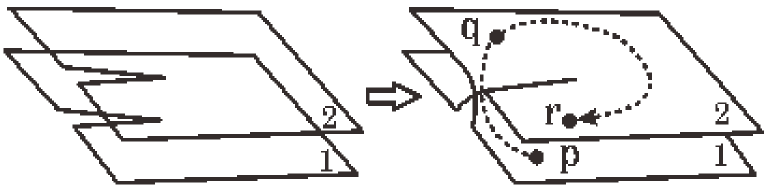

図 2.7: $\sqrt{z}$ のリーマン葉

このように近い、遠いは距離を定義しないと論議にならない。

しかし、厳密に距離を定義すると自由に引き伸ばしたり、縮めたりができない。

伸長を許す曖昧な距離の定義はできないものか？古来から**とりあえず近くのものは囲めるという着想**がある。

これを数学的に表現したものが次の**位相空間 (topological space)** の定義になる。

位相を的確に表現することができないので次の定義でごまかすことにする。

2.1.4 定義

集合 X の開部分集合族 θ が次の条件を満たせば X と θ の組 (X, θ) を**位相空間**という。

1. $\emptyset, X \in \theta$
2. $U_1, U_2 \in \theta \to U_1 \cap U_2 \in \theta$
3. $U_\lambda \in \theta \to \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \theta$

これを文章にすると次のようになる。

1. **全体集合と空集合は開集合**である。
2. **開集合の有限個の共通部分も開集合**である。
3. **開集合の任意個の和集合も開集合**である。

この条件により X は単なる集合ではなくて開集合族 θ が備わったことになる。

つまり、位相空間は集合と、その組み合わせを全て網羅したようなものである。

集合とは異なるので注意がいる。例えば数直線 $\mathbf{R}$ に**通常と異なる位相** θ をいれてみる。

実数 a に対して、

$$U_a = \{x \in \mathbf{R} | a < x\}$$

とおくと、これは a より大きな集合全体で $\mathbf{R}$ の部分集合である。そこで

$$\tilde{\theta} = \{U_a\}_{a\in R} \cup \{\emptyset, \mathbf{R}\} \tag{2.1}$$

とすれば、これで位相の条件を満たす。よって $(\mathbf{R}, \tilde{\theta})$ は 1 つの位相空間である。
しかし、開区間 (a,b) をとると、たとえ実数 $\mathbf{R}$ 内であっても、実数全体ではないので $\tilde{\theta}$ に属さない。
さらに、U_a でもないので開区間 (a,b) は**開集合ではない**。ことになる。
また、$(\mathbf{R}, \tilde{\theta})$ の空ではない開集合は $\mathbf{R}$ 自身か U_α になる。これは 2 つの空でない開集合は必ず交わるという性質をもつ。

定義 20. 開集合
開集合族 θ は全てではないが X の部分集合を適当に集めたものであるから

$$U \in \theta \to U \subset X$$

が成り立つのではじめの条件は θ の元 U は**開集合 (open set)** という。

2 つ目の条件は開集合の交わりもまた開集合になることを表しているし、3 つ目の条件は任意の開集合を合併しても開集合になることを表す。これに対して**閉集合は開集合の補集合**として定義される。
さて、ここで重要なのは**無限で考えた時の交わりと合併の違い**である。
例えば $n \in \mathbf{N}$ として次のような開区間の族を定義する。

$$U_n = \left(0, 1 + \frac{1}{n}\right) = \left\{x \in \mathbf{R} | 0 < x < 1 + \frac{1}{n}\right\}$$

無限大で合併すると

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = (0,2) = \{x \in \mathbf{R} | 0 < x < 2\}$$

となり開区間であるが、交わりは

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = (0,1] = \{x \in \mathbf{R} | 0 < x \leq 1\}$$

となり、無限個では開区間にならない。**無限個で境界が生じる**のである。

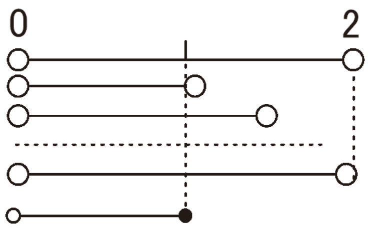

図 2.8: 無限個の場合、図の下のように $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = (0,1]$ が成り立つ

具体的に次のような例を考えよう。集合 $X\{1,2,3\}$ の場合を次の図に示す。

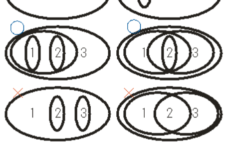

図 2.9: 集合{1,2,3}における、開集合の公理を満たす部分集合の族や満たさない族の例。

上二段の例はそれぞれ開集合の公理を満たしているが、最下段の例は、左側は{2}と{3}の和集合である{2,3}が入っていないため、右側は{1,2}と{2,3}の共通部分である{2}が入っていないため、どちらも開集合の公理を満たしていない。

2.1.5　位相の強弱

集合 X に $\mathcal{O}_1$ と $\mathcal{O}_2$ の位相が与えられて、

$$\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$$

であれば $\mathcal{O}_1 \in X$ であれば、自動的に $\mathcal{O}_2 \in X$ となる。そこで、この時 $\mathcal{O}_1$ は $\mathcal{O}_2$ より**弱い位相**という。
つまり、含まれる開集合の数が強さを決める。少なければ弱くなる。
例えば前節の $X = \{1,2,3\}$ と空集合 $\{\emptyset\}$ のみからなる集合は**密着集合**と呼ばれ、最弱の位相になる。

2.1.6　部分空間 [118]

図のように (X, θ) を位相空間とし、A を X の任意の部分集合とする。
この時、次のように A 自身をひとつの位相空間とみなすことができる。
まず、A の部分集合族 θ_A を次のように定める。

$$\theta_A = \{U \cap A | U \in \theta\}$$

すなわち、X の開集合 U と A の共通部分 $U \cap A$ で表される A の部分集合を全部集めたものが θ_A である。

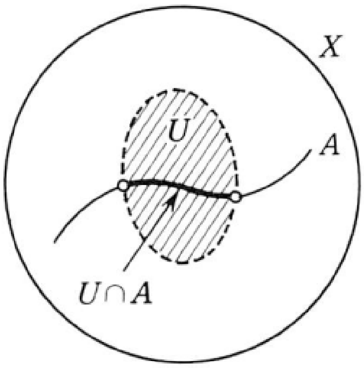

図 2.10: [118] より：部分空間

この時 θ_A を X の位相 θ から導かれた A の相対位相と呼び、位相空間 (A, θ_A) を位相空間 (X, θ) の**部分空間**という。
この空間から物理現象を表現していくことができる。それは数学的には、微分や積分を定義していくことになる。
そこで U は $\mathbf{R}^m$ 上の開集合として、f を U 上の実数値関数 $\mathbf{a}(a_1, \cdots a_m)$ で 1 点を表す。これは位置ベクトルのようなものである。
これから**パラメタ** t **を用意して、偏微分**を次のように定義する。

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(a_1 \cdots, a_i + t, \cdots a_m) - f(a_1 \cdots, a_m)}{t} \equiv \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_i} \tag{2.2}$$

これはある、単位ベクトルの係数みたいなものであることに注意する。微分係数はスカラーであれば

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

だから偏微分の表現には**ある方向**が意味されていることがわかる。

単位ベクトル $\mathbf{e}_i = (0, \cdots 0, 1, 0, \cdots 0)$ は i 成分のみ 0 ではないので

$$t\mathbf{e}_i = \Delta \boldsymbol{x_i}$$

として、図のように開集合 U の中に直線を引くことになる。

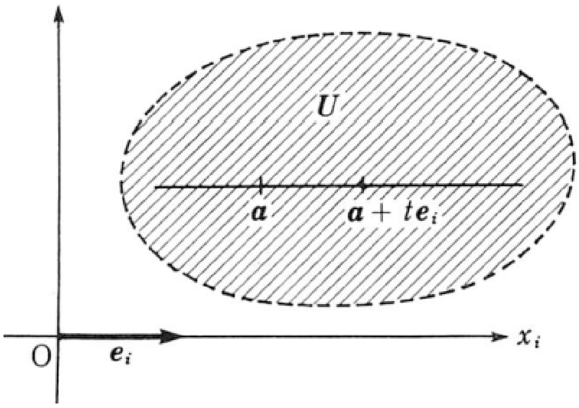

図 2.11: [118] より：U 内につくる直線

よって

$$\begin{aligned}(a_1 \cdots, a_i + t, \cdots a_m) &= (a_1 \cdots, a_m) + (0, \cdots, t, \cdots 0) \\ &= \mathbf{a} + t\mathbf{e}_i\end{aligned}$$

とかける。つまり $\mathbf{a} + t\mathbf{e}_i$ はある成分 x_i にのみスカラー値 t の変化量を与えるので、この方向のみを見ればこれを x_i' とみなせる。

従って関数 f の変化量は

$$df(x_i) = f(x_i^{'}) - f(x_i) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{a})$$

となる。しかし、

$$\boldsymbol{dx}_i = x_i' - x_i = \mathbf{a} + t\mathbf{e}_i - \mathbf{a} = t\mathbf{e}_i$$

は x_I 軸方向のベクトルである。てこの大きさが常に $|\boldsymbol{dx_i}| = t$ であるから、式 2.2 は

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{a})}{t}$$

となり、$\mathbf{a} + t\mathbf{e}_i$ は点 $\mathbf{a}$ を通り、ベクトル $\mathbf{e}_i$ に平行な $\mathbf{R}^m$ 内の**媒介変数表示**である。よって

$$\frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_i} = \frac{d}{dt} f(\mathbf{a} + t\mathbf{e}_i)|_{t=0}$$

とかける。i 成分と異なる j 成分においても

$$\boldsymbol{dx}_j = t\mathbf{e}_j$$

なので

$$\boldsymbol{dx}_j \cdot \boldsymbol{dx}_i = 0$$

であるが

$$|\boldsymbol{dx_j}| = \boldsymbol{dx_i}| = t$$

であり、このパラメタ t が領域 U に対して一様に決められていることになる。

ここでの導関数の定義は $r \geq 1$ に拡大することができ、高次の導関数を導く。この微分可能な関数を **C^r 級関数**という。

2.1.7 商位相 [118]

位相空間を (X,θ) とし、単なる集合として Y を用意する。X から Y への上への写像

$$f:X\to Y$$

が与えられているとする。X の位相 θ と、この写像 f を用いて、集合 Y の上に新しく位相をつくることを考える。

そこで Y の部分集合族 θ_f を

$$\theta_f=\left\{U\subset Y|f^{-1}(U)\in\theta\right\}$$

で定義する。よって Y の部分集合族 U が θ_f に属する必要十分条件は θ に逆像 f^{-1} が存在することである。

$f^{-1}(U)$ は開集合になる 1 ことを以下で示せば θ_f は位相空間とみなせる。

C を Y の閉集合とすると $Y-C$ が開集合になる。よって

$$f^{-1}(Y-C)$$

が X 上の開集合である。この時

$$f^{-1}(Y-C)=X-f^{-1}\left(C\right)$$

とかける。よってこれが開集合なら $f^{-1}\left(C\right)$ は X の閉集合でないといけない。

逆に C が Y の閉集合であれば $f^{-1}\left(C\right)$ が X の閉集合になると仮定する。

U が Y の開集合なら $Y-U$ は Y の閉集合になる。そこで $C=Y-U$ として仮定を利用すると $f^{-1}(Y-U)$ は X の閉集合になる。

よって

$$f^{-1}(Y-U)=X-f^{-1}(U)$$

が閉集合だから $f^{-1}(U)$ は開集合になる。

そこで θ_f を $X\to Y$ による θ の**商位相** (quotient topology) という。

位相空間 (Y,θ_f) を (X,θ) の**商空間**という。

2.2 連続と連結

2.2.1 連続写像

U,V を $\mathbf{R}^m,\mathbf{R}^n$ の開集合とする。写像

$$f:U\to V$$

が点 $\mathbf{a}\in U$ で**連続**であるとは U 内の任意の点列 $\{\mathbf{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ について

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{x}_n=\mathbf{a}\to\lim_{n\to\infty}f(\mathbf{x}_n)=f(\mathbf{a})$$

が成り立つことである。

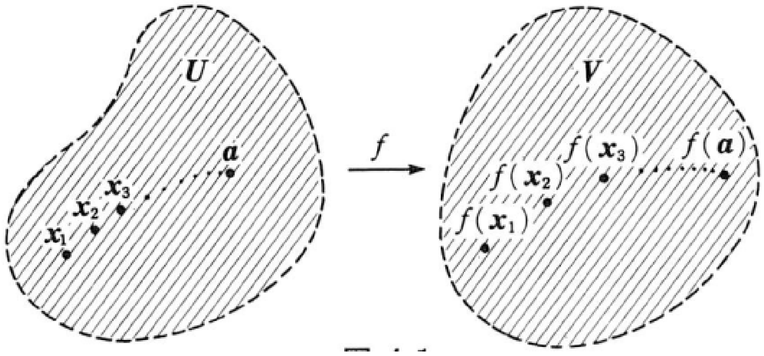

図 2.12: [118] より：関数の点列の収束

この時 f は連続写像になる。特に $V = \mathbf{R}$ であれば

$$f : U \to \mathbf{R}$$

は**実数値連続関数**であり、U を f の**定義域**という。
さらに U, V, W が開集合で

$$f : U \to V, g : V \to W$$

が連続写像であれば**合成写像** $g \circ f$ を

$$g \circ f(x) \equiv g(f(x)), \, (\forall \mathbf{x} \in U)$$

で定義すれば、合成写像も連続になる。
2 つの位相空間 $(X, \theta_X), (Y, \theta_Y)$ が定義できると位相空間にも写像

$$f : X \to Y$$

が定義できる。この時、Y の任意の開集合 U について、その逆像 f^{-1} が X の開集合になるとき、**連続写像**であるという。このようにほとんどの場合**逆が存在しないと定義できない**。
逆像 $f^{-1}(B)$ は次のように定義できる。

$$f^{-1}(B) = \{p \in X | f(p) \in B\}$$

つまり、図のように f で写せば B に入るような X の点 p の全体からなる集合が f による B の逆像 $f^{-1}(B)$ になる。

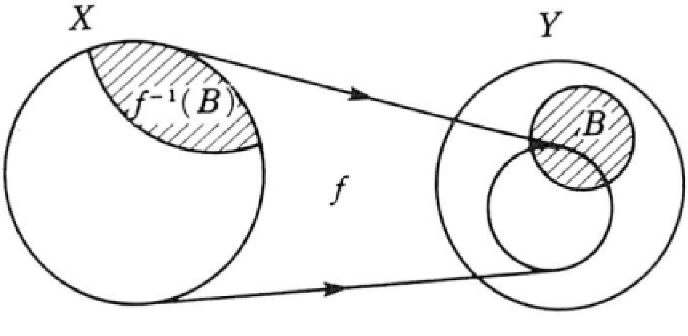

図 2.13: [118] より：逆像；B に入らない部分は逆像になれない

ここで次が連続になるためには

$$f : (V, \theta_V) \to (W, \theta_W)$$

U を W の任意の開集合とし、$f^{-1}(U)$ が V の開集合になればよい。そこで任意の点として

$$\mathbf{a} \in f^{-1}(U)$$

をとる。逆像の定義から

$$f(\mathbf{a}) \in U$$

である。ここで U が $\mathbf{R}^n$ の開集合であることから十分小さな $\epsilon > 0$ を選べば N を近傍集合として、

$$N_\epsilon \left(f(\mathbf{a}); \mathbf{R}^n\right) \subset U$$

である。

2.2.2 連結

位相空間 X が空でない 2 つの開集合の非交和に表すことができる時、非連結といい、そうでない時は**連結**(connected) である。

これは次のように表すこともできる。

1. 位相空間 X を交わりを持たない 2 つの閉集合に分けることはできない。
2. 空集合と X 以外に開かつ閉である部分集合は存在しない。
3. **境界を持たない部分集合は空集合と全体集合 X の他にない。**

位相空間 X において任意の 2 点 a,b を結ぶ道をとることができる時、**弧状連結 (path-connected)** という。弧状連結な位相空間は常に連結である。

a,b を結ぶ道 (path) とは

$$f(0) = a, \quad f(1) = b \tag{2.3}$$

を満たす単位閉区間 $[0, 1]$ から X への連続写像 f のことである。よって

$$\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

は連結であるが弧状連結ではない。$\boldsymbol{R^n}$,$\boldsymbol{C^n}$ の連結な開部分空間の集合は弧状連結である。

有限集合を位相に入れても連結性と弧状連結は同値である。

さらに強い意味で弧状連結空間の任意の 2 つの点を結ぶ道 f として弧 $[0, 1]$ と像 $f[0, 1]$ との間に同相写像がとれれば**弧連結 (arc-connected)** という。

位相空間 X の部分集合の族 β であるとは開集合 U の各点 x に対して x を中心とする十分小さい円盤を B_x とすると

$$\{U\} = \bigcup_{x \in X} B_x \tag{2.4}$$

のように U を表す。このような全て開集合であって X の任意の開集合Uに対して β の適当な部分集合 β' をとると

$$U = \bigcup \beta' \tag{2.5}$$

を満たせば**開基**である。

連結集合からなる開基を**局所連結 (locally-connected)** という。
弧状連結な部分集合からなる開基は**局所弧状連結 (locally-path-connected)** である。
$\boldsymbol{R^n}$,$\boldsymbol{C^n}$ の開部分集合はこの条件を満たす。
n 次元ユークリッド空間の部分集合 U が次の性質を持つ時、U は y に対し星型であるという。
任意の $\boldsymbol{x} \in U$ に対し、線分 l_x が

$$l_x = \{(1-t)\boldsymbol{y} + t\boldsymbol{x} : (0 \leqq t \leqq 1)\} \subset U \tag{2.6}$$

星型であれば

$$F(\boldsymbol{x}) = \int_{l_x} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \right) \tag{2.7}$$

は全微分

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \tag{2.8}$$

を満たす。

2.2.3 ハウスドルフ空間 (Hausdorff space)

物理学の基本として 2 つのものを分けられるということはとても基本的である。その基本がハウスドルフ空間である。
χ を位相空間とする。X 上の任意の相違なる 2 点 x, y に対して、

$$U \cap V = \phi(\text{空集合})$$

であるような x の開近傍 U および y の開近傍 V が必ず存在するとき、X は**ハウスドルフ空間** (Hausdorff_space) であるといわれる。以下のような条件がある。

- X における任意のフィルター（または有向点族）の収束先が高々一つである。
- X の任意の一点からなる単集合はその近傍たちの共通分になっている。
- 直積集合 $X \times X$ の対角部分集合 $\triangle = \{(x, x)|x \in X\}$ が直積位相に関して閉集合になっている。

実数の集合は、その上に通常定義される位相構造によってハウスドルフ空間になっている。
幾何学などで扱われる位相多様体や距離空間、あるいは解析学などで扱われるノルム空間やその上で弱位相を考えた空間など様々な空間がハウスドルフ空間になる。
ユークリッド空間やトーラスの表面、球面もハウスドルフ空間になる。
一方で、**ハウスドルフ空間にならないのは**

- 代数学におけるザリスキ位相を考えた代数多様体や、可換環のスペクトルなどの位相空間はしばしばハウスドルフ空間にならない。
- **ハウスドルフ空間の部分空間や直積空間は、ハウスドルフ空間になる。**
- しかし、ハウスドルフ空間上で同値関係を考えたときに得られる商空間はハウスドルフになるとは限らない。実際のところ、任意の位相空間はハウスドルフ空間の商として実現できる。

例えば式 2.1 の a より大きい実数 $\mathbf{R}$ の全体 U_a に空集合と $\mathbf{R}$ 自身を加えた $(\mathbf{R}, \tilde{\theta})$ は開集合が必ず交わりを持ったからハウスドルフ空間ではない。
ハウスドルフ空間は $T1$ 空間であり、その中で一点集合は閉集合になっている。

さらに、ハウスドルフ空間のコンパクト部分集合は閉集合である。ハウスドルフ空間における 2 つの交わらないコンパクト部分集合はそれらの近傍によって分離できる。ハウスドルフ空間上で定義された、あるいハウスドルフ空間を値域とするような連続写像に関して以下のような性質が知られている。

$$f: X \to Y \tag{2.9}$$

をハウスドルフ空間への連続写像とするとき、そのグラフ $\{(x, f(x))|x \in X\}$ は直積空間 $X \times Y$
式 2.9 を写像、$X \times X$ の部分集合

$$ker(f) = \{(x, x')|f(x) = f(x')\} \tag{2.10}$$

をその核とするとき、次の性質がある。

- f が連続で Y がハウスドルフならば $ker(f)$ は閉集合
- f が全射開写像で $ker(f)$ が閉集合ならば Y はハウスドルフ
- f が全射連続開写像のとき、Y がハウスドルフであることと $Ker(f)$ が閉であることは同値になる
- $f, g, X \to Y$ が連続写像で Y がハウスドルフ空間のとき、それらの等化域

$$eq(f, g) = \{x|f(x) = g(x)\} \tag{2.11}$$

  X の中で閉じている。とくに、f と g が稠密な集合上一致していたらそれらは全空間上で一致していることになる。

式 2.9 が全射閉写像でかつ任意の $y \in Y$ について $f^{-1}(y)$ がコンパクトであるとする。このとき X が閉集合ならば Y はハウスドルフ空間になる。
式 2.9 がが全射開連続写像で X がコンパクトハウスドルフ空間のとき、以下は同値である。

- Y がハウスドルフである
- f が閉である
- $ker(f)$ が閉である

ハウスドルフ空間 (Hausdorff_Space) を多様体上で考える。これは位相空間 X を考え、この位相空間の任意の要素 x, y について x の開近傍を U、y の開近傍 V をもってきた場合に

$$U \cap V = \emptyset$$

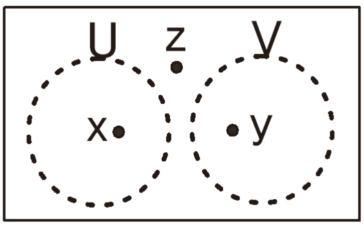

図 2.14: U,u の開被覆に x,y は含まれるが z はどちらにも含まれない

となるような U, V が必ずとれればハウスドルフ空間であった。この場合、開被覆であることが重要であり、境界線がない。
例えば実数の集合はハウスドルフ空間である。また物理で重要な距離空間やノルムの空間はハウスドルフ空間である。
重要な点は共にハウスドルフ空間である X, Y があってもその商空間 X/Y はハウスドルフ空間になるとは限らない

2.3 計量空間

位相空間 X 内の点 $p \in X$ と部分集合 $V \subset X$ に対して

$$p \in U \subset V$$

が成り立つような**開集合** U が存在すれば V は p の**近傍** (neighborhood) という。

集合 X の要素 x, y が " 近く " にあるとはどういうことだろうか。

これは点列 $(x_1, x_2, \cdots)$ の収束性が問題になる。位相空間の構造として**収束性**が第一に重要になる。これを見ていこう。

複素空間 $\mathbb{C}$ を考える。次の図のように微小半径 ϵ で中心 z の円板を考え、点列

$$z_1, z_2 \cdots$$

が z に収束するとし

$$|z_n - z| < \epsilon$$

とする。

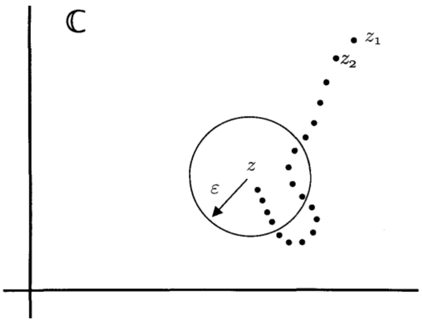

図 2.15: 収束する点列 [48] より

この時円板を

$$B_\epsilon(z) := \{z' \in \mathbb{C} |\, |z - z'| < \epsilon\}$$

とするとこの円板は点列をトラップする。これは次のように表現できる。

収束の条件は全ての $\forall\epsilon$ について $n > n_0$ となるような n_0 が存在し、

$$z_n \in B_\epsilon(z)$$

を満たす。あるいは最後尾の項

$$T_n := \{z_k | k > n\}$$

とし、全ての $\forall\epsilon$ について次を満たす n_0 が存在する。

$$T_{n_0} \subset B_\epsilon(z)$$

が条件となる。このような収束性があれば次の距離が定義できる。

$$d(\vec{x}, \vec{y}) := \sqrt{(\vec{x} - \vec{y}) \cdot (\vec{x} - \vec{y})}$$

これから先の円板も

$$B_\epsilon(\vec{x}) := \{\vec{y} \in \mathbb{R}^n | d(\vec{x}, \vec{y}) < \epsilon\}$$

と書くことができるのでベクトル列 $\vec{x_n} \to \vec{x}$ の収束条件として

全ての $\forall\epsilon$ について $n > n_0$ となるような n_0 が存在し、

$$\vec{x}_n \in B_\epsilon(\vec{x})$$

が成り立つことである。

2.3.1 距離空間

集合 X と写像 d： $X \times X \to \mathcal{R}$ にたして (X, d) が**距離空間**であるとは次の公理が満たされる場合をいう。

1. $d(P,Q) = d(Q,P)$
2. $d(P,Q) \geq 0$ が任意の $P, Q \in X$ に対して成り立つ
3. $d(P,Q) = 0$ であるのは $P = Q$ の時で、その時に限る。
4. 任意の $P, Q, R \in X$ に対して 3 角不等式 $d(P,Q) + d(Q,R) \geq d(P,R)$ が成り立つ。

点列の収束からユークリッド平面での距離空間 $d(\vec{x}, \vec{y})$ を決めることができる。
集合 X 上の計量を $d : X \times X \to \mathbb{R}, \forall x, y, z \in X$ として次の条件を満たすものとする。

$$\begin{aligned} d(x,y) &= d(y,x) \\ d(x,y) &\geq 0, \ = 0, if, and\, only\, if, x = y \\ d(x,y) &\leq d(x,z) + d(z,y) \end{aligned}$$

2.3.2 コンパクト (compact)

位相空間の部分集合において任意の**開被覆**が有限部分被覆を持てばコンパクトである。
例えば数直線上の閉区間やユークリッド空間内の有界閉集合はコンパクトである。
また n 次元球は通常の位相に対し、コンパクトである。
$\mathcal{O}$ をその開集合系とする位相空間（特に距離空間）

$$(X, \mathcal{O}) \tag{2.12}$$

の部分集合に対し、

$$A \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \ (O_\lambda \in \mathcal{O}) \tag{2.13}$$

となるならば有限個の λ_n を選び

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{n} O_{\lambda_k} \ (O_{\lambda_k} \in \mathcal{O}) \tag{2.14}$$

とすることができれば A は X のコンパクト集合である。

2.3.3 積分と体積

U 上の n 形式を次のようにおく、

$$\omega = f dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n \tag{2.15}$$

この時 n 組のベクトルが次のように決まる。区間 U を次のように微小区間に等分し

$$\left\{ \Delta x^1 \frac{\partial}{\partial x^1}, \Delta x^2 \frac{\partial}{\partial x^2}, \cdots \Delta x^n \frac{\partial}{\partial x^n} \right\} \tag{2.16}$$

ここで $\{\Delta x^i\}$ は非常に小さい数値とみなせる。そこでこれらの積を

$$\Delta x^1 \Delta x^2 \cdots \Delta x^n = \left[dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n \right] \left(\Delta x^1 \frac{\partial}{\partial x^1}, \Delta x^2 \frac{\partial}{\partial x^2}, \cdots \Delta x^n \frac{\partial}{\partial x^n} \right) \tag{2.17}$$

として表すとこの領域の積分が

$$\int_V f(x^1, \cdots x^n) d^n x \cong \omega \tag{2.18}$$

と書ける。

3 写像

3.1 定義

集合 X, Y, Z があって、写像 $f : X \mapsto Y,\ g : Y \mapsto Z$ がある時、各元 $x \in X$ に対して

$$(g \circ f)(x) := g(f(x))$$

を対応させる写像 $g \circ f : X \mapsto Z$ を f, g の**合成写像** (composite) という。さらに $h : Z \mapsto W$ があれば合成写像

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) : X \mapsto W$$

が成り立つ。特に集合 X から X への写像を**恒等写像** (idntity mapping) という。次のように id を用いて表わす。任意の $f : X \mapsto Y$ に対して

$$f \circ id_X = f,\ \ id_Y \circ f = f$$

3.1.1 直積・直和

一般に元 a, b があって組 (a, b) を作る。また、一方で元 c, d から組 (c, d) を作る。この時

$$(a, b) = (c, d)$$

であるとは

$$a = b\ \cap\ b = d$$

であると決めよう。すると $a \neq b$ ならば $(a, b) \neq (b, a)$ であるので交換しても等しくならない。
つまり、順序が決められるのでこのような組 (a, b) を**順序対** (order pair) という。
２つの集合 X, Y が与えられたとき、X の元と Y の元の順序対の全体のなす集合

$$X \times Y := \{(x, y) | x \in X,\ \ y \in Y\}$$

を X と Y の直積集合 (direct_product set) という。

有限集合の直積集合の濃度については

$$\overline{\overline{X \times Y}} = \overline{\overline{X}} + \overline{\overline{Y}}$$

が成り立つ。

集合 X, Y について $X \cap Y = \emptyset$ の時に X と Y は互いに素 (disjoint) という。

この時の合併集合 $X \cup Y$ を $X + Y$ と書き、直和集合 (disjoint union) という。

直和と直積について次の関係が成り立つ

$$Z^{X \times Y} = (Z^Y)^X = (Z^X)^Y$$

$$Z^{X+Y} = Z^X + Z^Y$$

$$(Y \times Z)^X = Y^X \times Z^X$$

これらの関係から写像を作ることができる。例えば $(f, g) \in Z^X + Z^Y$

が写像 $f : X \to Z,\ \ g : Y \to Z$ から $h : X + Y \to Z$ を

$$h(a) \quad = \quad \begin{cases} f(a) & (a \in X) \\ g(a) & (a \in Y) \end{cases}$$

と決めることができる。

3.1.2　同値類 [12]

集合 $X \times Y$ 上の特性関数 R のことを X, Y 上の関係 (relation) という。

例えば 2 つの元 $x \in X,\ y \in Y$ に対して $R(x, y) = 1$ ならば x は y に関係 R を持つという。これを

$$x\,R\,y$$

と書く。$R(x, y) = 0$ ならば関係をもたないといい、

$$x \ \not R\ y$$

のように書く。この R を関係子という。

集合 X と Y が積や和が定義され、写像 $f : X \to Y$ がこの演算を保つなら f は**準同型写像**といわれる。この時

$$f(ab) = f(a)f(b) \tag{3.1}$$

が成り立つ。写像 f が全単射であるなら f を同型写像、また X と Y は同型であるといい

$$X \simeq Y \tag{3.2}$$

と書く。集合 X における関係 R は X^2 の部分集合である。点 $(a, b) \in X^2$ が R の元である時

$$a\,R\,b \tag{3.3}$$

と表現する。例えば関係$>$は $(a, b) \in >$ であれば

$$a > b \tag{3.4}$$

1. 反射律　$a \sim a$

2. 対称律　$a \sim b$ ならば $b \sim a$

3. 推移律　$a \sim b, b \sim c$ ならば $a \sim c$

式 3.1 は別々に積をつくっても個々で積をしても同じだということなのでいいかえると商のイメージを広げていることになる。

例えば整数を 2 で割るあまりは 0 と 1 である。2 つの整数 m と n が同じあまりを持つ時 $m \sim n$ と書き、3 つの条件が満たされることがわかる。

このように集合 X に同値関係が定義されるとこの集合 X はこの規則を元に交わりを持たないように分類することができる。

この部分集合を同値類という。同値類 $[a]$ は $x \sim a$ を満たす全ての元の集合である。

$$[a] = \{x \in X \mid x \sim a\} \tag{3.5}$$

全ての同値類の集合を**商集合**とよび

$$X/\sim \tag{3.6}$$

のように表現する。例えば整数全体の集合を Z とすると代表元は偶数を 0、奇数を 1 と選べる。この商集合を $Z/\sim$ とおけば位数 2 の巡回群 Z_2 に同型になる。

3.1.3　台 (supp)

C^∞ 級の多様体 M のコンパクトな部分集合 K と K を含む開集合 U が与えられた時、

$$\nu : M \to \mathbb{R},\ \ 0 \leq \nu(x) \leq 1, \nu|K = 1 \cap \sup \nu$$

は U のコンパクト部分集合となるものが存在する。

ただし、C^∞ 級の多様体 M 上の関数 f に対し、f の**台 (support)** は

$$\sup f = \overline{\{x \in M | f(x) \neq 0\}}$$

である。つまり、台の外では常に $f(x) = 0$ である。

3.1.4　準同型定理

準同型写像 (homomorphism) とは同類である 2 つの代数系 $(A, R), (B, S), (R = \{\alpha_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}, S = \{B_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$ に対して

$$(f, F) : (A, R) \to (B, S)(F = \{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$$

が台集合の間の写像 $f : A \to B$ であって R, S の各々に対応する演算 $\alpha_\lambda, \beta_\lambda$ を可換（両立）させる写像 f_λ を引きおこすものである。すなわち

$$f \circ \alpha_\lambda = \beta_\lambda \circ f_\lambda,\ \ f_\lambda\left((x_i)_{i\in I_\lambda}\right) := \left(f\left(x_i\right)\right)_{i\in I_\lambda}$$

となる写像の組 (f, F) を準同型写像という。

Abel 群 G_1, G_2 がある時、写像 $f : G_1 \to G_2$ が任意の $x, y \in G_1$ に対して

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

を満たす時、f を**準同型写像**という。さらに f が全単射であれば f は**同型写像**である。このとき $G_1 \simeq G_2$ と表現する。例えば

$$f(2n) = 0,\ \ f(2n + 1) = 0$$

で表される写像

$$f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}_2 = \{0,1\}$$

は準同型写像である。実際に $m,n \in \mathbf{Z}$ の時

$$f(2m+2n) = f\left(2\left(m+n\right)\right) = 0 = 0+0 = f(2m)+f(2n)$$

$$f(2m+1+2n+1) = f\left(2\left(m+n+1\right)\right) = 0 = 1+1 = f(2m+1)+f(2n+1)$$

であり、

$$f(2m+1+2n) = f\left(2\left(m+n\right)+1\right) = 1 = 1+0 = f(2m+1)+f(2n)$$

となる。
これから次の準同型定理が導ける。$f : G_1 \to G_2$ が準同型写像であれば

$$G_1/\ker f \simeq imgf$$

これは両辺とも群だから x が属する同値類を $[x]$ のように表し、

$$\phi : G_1/\ker f \to Imgf$$

を

$$\phi([x]) = f(x)$$

で表すことにする。f は準同型写像なので $x' \in [x]$ に対して

$$x' = x + h$$

となる $h \in Kerf$ が存在し、

$$f(x') = f(x+h) = f(x)+f(h) = f(x)$$

となる。よって

$$\begin{aligned}\phi\left([x]+[y]\right) &= \phi\left([x+y]\right) = f(x+y)\\ &= f(x)+f(y)\\ &= \phi\left([x]\right)+\phi\left([y]\right)\end{aligned}$$

となるので ϕ は準同型写像である。
次に

$$\phi([x]) = \phi([y])$$

であれば

$$f(x) = f(y)$$

でるから

$$f(x) - f(y) = f(x-y) = 0$$

とおける。よって

$$x - y \in Kerf$$

となり、これは

$$[x] = [y]$$

を意味するから ϕ は単射である。さらに $y \in Img\, f$ であれば

$$f(x) = y = \phi([x])$$

である元 $x \in G_1$ が存在するので ϕ は全射でもある。これで ϕ の全単射が示されたので $\phi([x]) = f(x)$ が成り立つ。

3.2 外延と内包 [36]

平面上の円が次のようにパラメタ t で表示されているとする。

$$\begin{cases} x &= \cos t \\ y &= \sin t \end{cases}$$

これを**外延的定義** (extensional definition) という。
一方で同じ円を

$$x^2 + y^2 = 1$$

で定義するのは**内包的定義** (comprehension) と呼ばれる。
別の例では

$$B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

が集合の外延的記述であり、

$$B = \{x | 1 \leq x \leq 20, mod\, 2, x \in \mathbb{Z}\}$$

は内包的記述である。
つまり、集合の元を羅列することで集合全体を表現するのが外延で、集合の満たす条件や性質を記述するのが内包である。
トポロジーの世界では**両者が区別される場合**がある。

3.3 完全系列

線型空間 V_i と線形写像 A_i の系列が次のようにあるとする。

$$\cdots \xrightarrow{A_{i-1}} V_i \xrightarrow{A_i} V_{i+1} \xrightarrow{A_{i+1}} \cdots$$

この系列が完全であるためには

$$Ker A_i = Im\, A_{i-1}$$

が成り立つことである。

3.4 同相と微分同相

一般に集合 X,Y において 1 対 1 で上への写像 h があるとする。

$$h : X \to Y \tag{3.7}$$

この時、その逆像

$$h^{-1} Y \to X \tag{3.8}$$

が存在し、共に連続写像であれば同相写像という。また、X と Y が微分同相であるとはさらに h も h^{-1} も共に C^∞ である場合をいう。従って**微分同相のほうが条件は厳しい**。連続でも微分できないような曲面はいくらでも存在する。

3.5 層

位相空間 M 上の可換群の層 S とは次の性質を満たす 3 つの組 (S,π,M) である。

- S と M は位相空間で $\pi : S \to M$ は全射局所同相写像である。
- 各 $p \in M$ に対して、$S_p := \pi^{-1}(p)$ は可換群である。S_p を p 上の茎という。
- $\alpha,\beta \in S_p$ に対し、$\alpha+\beta \in S_p$ および、$\alpha-\beta \in S_p$ を対応させる 2 つの写像 $S \times_\pi S \to S$ は連続である。

ここで

$$S \times_\pi S = \{(\alpha,\beta) \in S \times S | \pi(\alpha) = \pi(\beta)\}$$

であり、$S \times S$ から相対位相を入れたものである。(S,π,M) と (S',π',M) を同じ M の層とする。
f は連続で

$$f : S \to S',\ \ \pi = \pi' \circ f$$

を満たし、制限 $f|_{S_p} : S_p \to S'_p$ が準同型であれば f は層準同型であるという。
$E \to M$ を可微分多様体上の C^∞ 級ベクトル束とする。$p \in M$ を 1 つ固定する。p の近傍 U 上の E の C^∞ 級切断 s と、もう一つの近傍 V 上の C^∞ 級切断 t は $U \cap V$ 上で一致する時に同値であるとする。この同値類を p における C^∞ 級切断の芽という。s の属する同値類を $[s]_p$ で表す。$\tilde{E}_p$ を p における C^∞ 級芽の集合とし

$$C^\infty(E) = \bigcup_{p \in M} \tilde{E}_p$$

とおく。

4 行列 [121][125]

線形代数を効率的に扱うため、だけではなく、今後、特に量子論において行列が本質的な役割を担うことが多くなる。
そのため行列の基礎を復習しておこう。本章では行列記号が多いので特にボールド体にしないことが多い。
また、単位行列は主に I_r を用いる。時に $\mathbf{1}$ と表記する場合がある。

4.1 不変部分空間 [125]

これまでに何度かベクトル空間に触れたが、ここではさらに多元化して、ベクトルから行列の扱いを学ぶ。
構成次元が拡張するので圧倒的に増える自由度にどういう規則がつくか、不変性を見いだしておくことは取り扱いに見通しを持つことになる。

4.1.1 線形空間

前章の群のところで見たように体 (Field)$\mathbb{F}$ は和積の結合律、交換律を満たし、単位元、逆元が存在した。
さらにこの体 $\mathbb{F}$ に線形ベクトル空間 $\mathbb{L}$ をつくることができる。
この時、線形ベクトル空間 $\mathbf{L}$ から線形ベクトル空間 $\mathbf{L}'$ への線形写像全体のなす集合を

$$Hom\,(\mathbf{L},\mathbf{L}')$$

とする。この $Hom\,(\mathbf{L},\mathbf{L}')$ は零写像を零ベクトルとして体 $\mathbb{F}$ 上に線形空間の構造を持つ。
よって、体 $\mathbb{F}$ 自身を体 $\mathbb{F}$ 上の線形空間とみなすと、この集合は

$$Hom\,(\mathbf{L},\mathbb{F})$$

と書くことができて、この元を $\mathbf{L}$ 上の**線形汎関数** (liner function) と呼ぶ。
このように線形変換でつくられた線形汎関数の集合は

$$\mathbf{L} \to Hom\left(\mathbf{L}, \mathbb{F}\right) \equiv \mathbf{L}^*$$

と表され、この $\mathbf{L}^*$ を $\mathbf{L}$ の**双対空間** (dual supace) という。
線形変換は例えば多項式 f の微分を $D(f)$ とした時に

$$D(f) = f'$$

$$D : \mathbb{F}[x] \to \mathbb{F}[x]$$

が成り立つので線形変換である。
特に線形写像 T において T が全単射の時に**同型写像** (linear isomorphism) という。
また、同型写像であれば逆像や合成もまた同型になる。ただし、同型は同値ではない。**全単射**になればいいので注意する。
特にここでの双対性は大雑把であるが、体 $\mathbb{F}$ という、共通の土台を考えたことにより、ベクトルから行列のつなぎが見やすいくなる。
つまり、横並びの行ベクトルと、縦並びの列ベクトルからなる (m, n) 型の行列は次のように線形空間として同型になる。

$$M(m, n : \mathbb{F}) \sim M(m, n : \mathbb{F})$$

この時の線形変換が転置という操作になる。

4.1.2 部分空間と補空間

線形空間 $\mathbf{L}$ の 2 つの部分空間を $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2$ としたとき

$$\mathbf{L} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2$$

$$\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_2 = \{\mathbf{0}\}$$

が成り立つ時、$\mathbf{L}$ は $\mathbf{M}_1$ と $\mathbf{M}_2$ の**直和** (direct sum) といい

$$\mathbf{L} = \mathbf{M}_1 \oplus \mathbf{M}_2$$

で表す。また、この時の $\mathbf{M}_1$ は $\mathbf{M}_2$ の**補空間** (complementary subspace) という。
ただし、補空間が一意に決まるとはかぎらない。
例えば次のように転置をとると、負符号がつく、つかないで分類すると、

$$\mathbf{L} = M_n\left(\mathbb{F}\right)$$

$$\mathbf{M}_1 = \left\{A | A \in M_n\left(\mathbb{F}\right), {}^t A = A\right\}$$

$$\mathbf{M}_2 = \left\{A | A \in M_n\left(\mathbb{F}\right), {}^t A = -A\right\}$$

この時、

$$A_1 = \frac{1}{2}\left(A + {}^t A\right)$$

$$A_2 = \frac{1}{2}\left(A - {}^t A\right)$$

とおくと、転置の転置は元にもどるので

$$A_1 \in \mathbf{M}_1$$

$$A_2 \in \mathbf{M}_2$$

であり、

$$A = A_1 + A_2$$

を満たし、さらに $A \in \mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_2$ とすると

$$A =^t A = -A$$

となるので

$$A = O$$

である。よって

$$\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_2 = \{\mathbf{0}\}$$

を満たすので

$$\mathbf{L} = \mathbf{M}_1 \oplus \mathbf{M}_2$$

である。さらに補空間は別にとることができて、次のように下半分が 0 になる上三角行列を考える。

$$\mathbf{M}_3 = \{A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{F}) \,| a_{ij} = 0 \, (j \leq i)\}$$

この $\mathbf{M}_3$ も $M_n(\mathbb{F})$ の部分空間であり、$,^t A \neq A$ だから

$$\mathbf{L} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_3$$

$$\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_3 = \{\mathbf{0}\}$$

である。そこで $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{F})$ に対して次のような行列 B, C を定義する。

$$b_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & (j \leq i) \\ a_{ji} & (j > i) \end{cases}$$

$$c_{ij} = \begin{cases} 0 & (j \leq i) \\ a_{ij} - a_{ji} & (j > i) \end{cases}$$

とすると

$$B \in \mathbf{M}_1, C \in \mathbf{M}_3$$

$$A = B + C$$

を満たす。よって

$$\mathbf{L} = \mathbf{M}_1 \oplus \mathbf{M}_3$$

となり、$\mathbf{M}_2, \mathbf{M}_3$ 共に $\mathbf{M}_1$ の補空間であり、これらが直和でかけることになる。

また、$\mathbb{F}$ の元として n 次の正方行列において、$\mathbf{M}_0$ を対角行列とし、$\mathbf{M}_+$ を対角成分が全て 0 である上三角行列、

$\mathbf{M}_-$ を対角成分が全て 0 である下三角行列とすれば

$$M_n(\mathbb{F}) = \mathbf{M}_0 \oplus \mathbf{M}_+ \oplus \mathbf{M}_-$$

となる。

さらに一般化し、

$$\mathbf{L} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \cdots + \mathbf{M}_k$$

$$\mathbf{M}_i \cap (\mathbf{M}_1 + \cdots + \mathbf{M}_{i-1} + \mathbf{M}_{i+1} + \cdots + \mathbf{M}_k) = \{\mathbf{0}\}$$

が成り立てば $\mathbf{L}$ は $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \cdots, \mathbf{M}_k$ の直和になり

$$\mathbf{L} = \mathbf{M}_1 \oplus \mathbf{M}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{M}_k$$

のようにかける。
このように $\mathbf{L}$ をいくつかの部分空間の直和で表すことを $\mathbf{L}$ の**直和分解** (direct sum decomposition) という。

4.1.3 射影作用素

射影の重要さは後の節でも紹介する。ここでは前小節から部分空間とその補空間にわける方法を見たが、この関係は次の射影作用素を定義すると便利になる。
線形変換 $P : \mathbf{L} \to \mathbf{L}$ が

$$P^2 = P$$

を満たせば**射影作用素** (projection) という。
射影作用素 P はこの時、

$$P(I - P) = O$$

を満たすので

$$\mathrm{Img}(I - P) \subset \ker P$$

である。一方で $\mathbf{x} \in \ker P$ とすると

$$P\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x} - P\mathbf{x} = (I - P)\,\mathbf{x}$$

ともかけるので

$$\mathbf{x} \in \mathrm{Img}(I - P)$$

となるので

$$\mathrm{Img}\,(I - P) = \ker P$$

である。これは単位行列から射影を引いたものの像は射影の核に等しいことを表す。
つまり任意のベクトル $\mathbf{x} \in \mathbf{L}$ について、**射影をとると、その補空間との和で表される**ということになる。
これを証明しよう。

$$\mathbf{x} = P\mathbf{x} + (I - P)\mathbf{x}$$

よって線形変換に拡張すると

$$\mathbf{L} = \mathrm{Img} P + \ker P$$

と表すことができる。
さらに、

$$\mathbf{x} \in \mathrm{Img} P \cap \ker P$$

とすると、

$$\mathbf{x} = P\mathbf{y}$$

となる元 $\mathbf{y} \in \mathbf{L}$ が存在するが $P\mathbf{x} = 0$ だから

$$\mathbf{0} = P\mathbf{x} = P\,(P\mathbf{y}) = P^2\mathbf{y} = P\mathbf{y} = \mathbf{x}$$

となるので結局

$$\mathbf{x} = 0$$

である。従って

$$\mathrm{Img} P \cap \ker P = \{\mathbf{0}\}$$

となるので

$$\mathbf{L} = \mathrm{Img} P \oplus \ker P$$

となり、テンソル和で構成されていることがわかる。
また、これは

$$(I - P)^2 = I - P - P + P^2 = I - P$$

なので補空間もまた、射影の性質をもっている。

4.1.4　不変部分空間

線形写像 $T : V \to V$ において V の部分空間 W が

$$T(W) \subset W$$

を満たす時、W を T の**不変部分空間**と呼ぶ。
例として

4.2　固有空間 [125]

4.2.1　特性多項式

$\mathbb{F}$ を例えば $(\mathbb{Q}\mathbb{R}\mathbb{C})$ のような体とする。$\mathbf{L}$ を $\mathbb{F}$ 上の有限次元線形空間とし、

$$T : \mathbf{L} \to \mathbf{L}$$

を線形変換とする。

$$T\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x} \tag{4.1}$$

を満たす複素数 λ と $0 \neq x \in \mathbb{C}^n$ をみたすベクトル $\boldsymbol{x}$ が存在するとき、
この時の λ を**固有値**、対応する x を**固有ベクトル**という。
正方行列 $A \in M_n(\mathbb{F})$ の固有値と固有ベクトルは

$$T_A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$$

として

$$A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}, \mathbf{x} \in \mathbb{F}^n$$

が成り立つ時、どの体で考えているかを区別して、λ を $\mathbb{F}$ 上の固有値ということがある。
固有方程式 4.1 を変形し、

$$\pi(x) = \det(\boldsymbol{x}\boldsymbol{I} - \boldsymbol{T}) \tag{4.2}$$

として $\pi(x) = 0$ を**特性多項式**と呼ぶ。また、この解を**特性根 (characteristic root)** という。
$\lambda \in \mathbb{F}$ として、

$$\mathbf{E}(\lambda) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{L} | T\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}\} = \mathrm{Ker}(T - \lambda I)$$

となるとき、$\mathbf{E}(\lambda)$ は $\mathbf{L}$ の**線形部分空間**である。

この時、$\mathbf{E}(\lambda) \neq \{\mathbf{0}\}$ となっていれば $\mathbf{E}(\lambda)$ を固有値 λ の**固有空間 (eigenspace)** という。
異なる固有値 $\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_m$ のつくる固有空間の和は**直和**になる。

$$\mathbf{E}(\lambda_1) + \mathbf{E}(\lambda_2) + \cdots + \mathbf{E}(\lambda_m)$$

しかし、これが元の $\mathbf{L}$ と一致するとは限らない。この例を確認しておこう。$T_A : \mathbb{F}^2 \to \mathbb{F}^2$ として

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

とすると特性方程式は

$$(\lambda - x)^2 = 0$$

だから、固有値は

$$x = \lambda$$

のみなので、

$$\mathbf{E}(\lambda) = \left\{ {}^t(x, 0) \in \mathbb{F}^2 | x \in \mathbb{F} \right\} \neq \mathbb{F}^2$$

である。一般に縮退があれば固有空間の次数も下がってしまい、部分空間と一致しない。
特性多項式が次のように ℓ 次の因数で分解できたとする。この ℓ を**指標**と呼ぶ。

$$\pi(x) = (x - \lambda_1)^{\ell_1} (x - \lambda_2)^{\ell_2} \cdots (x - \lambda_m)^{\ell_m} \tag{4.3}$$

この時、**重複度**を $m(\lambda)$ として、これを**代数的多重度**ともいう。

$$\dim \mathbf{E}(\lambda_i) = l_i \leq m(\lambda_i)$$

である。
一方で**幾何的多重度** g とは固有値 λ に付随できる独立な固有ベクトルの最大数で

$$g = \dim [\ker (A - \lambda I)]$$

である。この時

$$g \leq m$$

が成り立つ。
特に $m(\lambda) = 1$ の場合を**単純**ということがある。そうで無い場合は**多重**という。
代数的多重度と幾何的多重度が等しく $m = g$ であれば**半単純**という。
また、半単純ではない固有値は**欠陥**があるという。

4.2.2 対角化 [125]

行列の対角化について今後よく利用する定理を示す。

定理. 対角化　行列 T が対角化可能であるためには T が対角行列による行列表示ができることである。

さらに

定理. 対角化　線形変換 $T : \mathbf{L} \to \mathbf{L}$ が対角化可能であるためには T の特性根 λ の全てが $\mathbb{F}$ に属し、重複度 $m(\lambda)$ が λ の固有空間の次元と一致することである。

$$m(\lambda) = \dim (\mathbf{E}(\lambda))$$

さらに次の条件は同値になる。

定理. 対角化 $T:\mathbf{L}\to\mathbf{L}$ が対角化可能であれば $\lambda_1,\lambda_2\cdots\lambda_m\in\mathbb{F}$ とし、$\mathbf{L}$ の射影作用素 $P_1,P_2,\cdots P_m$ として

$$1)\ I=P_1+P_2+\cdots+P_m,\ P_iP_j=O\,(i\neq j)$$

$$2)\ T=\lambda_1P_1+\lambda_2P_2+\cdots\lambda_mP_m$$

を満たすものが存在する。このときの射影作用素は T により一意に決まる。

簡単に証明する。

Proof. T が対角化可能であれば $\lambda_1,\lambda_2\cdots\lambda_m$ を T の固有値として、固有空間 $\mathbf{E}(\lambda_m)$ への射影演算子を P_i とすれば 1), 2) が満たされる。逆に、1), 2) が満たす $P_1,P_2\cdots,P_m$ に対して、全ての i に対して

$$\mathrm{Image}P_i\subset\mathbf{E}\left(\lambda_i\right)$$

となるから

$$\mathbf{L}=\mathbf{E}\left(\lambda_1\right)+\mathbf{E}\left(\lambda_2\right)+\cdots+\mathbf{E}\left(\lambda_m\right)$$

$$\mathrm{Image}P_i=\mathbf{E}\left(\lambda_i\right)$$

となるので、一意性も明らかである。 □

例. 対角化例

例えば $\mathbb{F}=\mathbb{Q}$ の時、$A\in M_n\left(\mathbb{Q}\right)$ が次で与えられた時、対角行列をつくる。

$$A=\begin{pmatrix}4&0&-6\\3&-2&-3\\3&0&-5\end{pmatrix}$$

まず、この特性方程式は

$$\begin{aligned}\pi(x)&=\det\left(xI-A\right)\\&=\det\begin{pmatrix}4-x&0&-6\\3&-2-x&-3\\3&0&-5-x\end{pmatrix}\\&=\left(4-x\right)\left(-2-x\right)\left(-5-x\right)-3(2+x)\cdot6\\&=\left(x+2\right)^2\left(x-1\right)\end{aligned}$$

となるので $x=-2$ の時、$Ax=-2x$ として

$$\left(A+2I\right)\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}6&0&-6\\3&0&-3\\3&0&-3\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=0$$

を満たす零でない独立なベクトルは、単純にして

$$\mathbf{p}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\mathbf{p}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

の 2 つあり、

$x=1$ の時は $Ax=x$ として

$$(A-I)\,\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}3&0&-6\\3&-3&-3\\3&0&-6\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=0$$

から

$$\mathbf{p}_1=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$$

となるので、このベクトルを列ベクトルに持つ次の行列をつくると

$$\begin{aligned}P&=[\mathbf{p}_1,\mathbf{p_2},\mathbf{p_3}] \qquad (4.4)\\&=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

A は次のように各固有値で対角化される。

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

4.2.3 固有多項式 [125]

はじめに次のケーリー・ハミルトンの定理を示そう

定理. 任意の行列 A について次が成り立つ

$$A^2-\,Tr[A]A+(\det A)\,I=0 \qquad (4.5)$$

Proof. 例えば

$$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$$

と置くと

$$\begin{aligned}A^2-\mathrm{Tr}\,[A]\,A&=A^2-(a+d)A\\&=A\,(A-(a+d)\,I)\\&=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-d&b\\c&-a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-ad+bc&0\\0&cb-ad\end{pmatrix}\\&=-\,(ad-bc)\,I=-\det A\,I\end{aligned}$$

となる。 □

これから次の重要な関係が導ける。

定理. 任意の行列 $A\neq 0$ において $n\geq 2$ の自然数について

$$A^n=0$$

となる条件は

$$Tr[A]=0,\det A=0$$

である。

Proof. $\mathrm{Tr}[A]=0, \det A=0$ であれば、ケーリー・ハミルトンの公式から、まず

$$A^2 = \mathrm{Tr}[A]A + (\det A)\, I = 0$$

である。さらに $\det A = 0$ であれば両辺に A を次々にかけていっても $A^2 = \mathrm{Tr}[A]A$ とおけるから

$$A^3 = \mathrm{Tr}[A]A^2 = (\mathrm{Tr}[A])^2 A = 0$$

$$A^4 = (\mathrm{Tr}[A])^2 A^2 = (\mathrm{Tr}[A])^3 A = 0$$

$$\vdots$$

$$A^n = (\mathrm{Tr}[A])^{n-1} A = 0$$

である。仮定から $A \neq 0$ だから

$$(\mathrm{Tr}[A])^{n-1} = 0$$

すなわち、

$$\mathrm{Tr}[A] = 0$$

であればよい。 □

これから式 4.2 を改めて、次を**特性多項式 (characteristic polynomical)** と呼ぶ。

$$\det(xI - A) = x^2 - \mathrm{Tr}\,[A]\, x + \det A$$

また

$$\det(xI - A) = 0$$

の解が**特性根**である。また、ケーリー・ハミルトンの公式から A の特性根を λ_1, λ_2 とすると

$$(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I) = 0$$

となる。これは

$$\mathrm{Tr}\,[A] = \lambda_1 + \lambda_2, \det A = \lambda_1 \lambda_2$$

から明らかである。

例. 例として次の回転行列の特性根を求めてみよう。

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

固有方程式をつくらなくても、特性多項式から

$$\begin{aligned} \det(xI - A) &= \begin{vmatrix} x - \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & x - \cos\theta \end{vmatrix} \\ &= x^2 - 2(\cos\theta)\, x + 1 = 0 \end{aligned}$$

を解くと、

$$\begin{aligned} x &= \cos\theta \pm \sqrt{\cos^2\theta - 1} \\ &= \cos\theta \pm i \sin\theta \\ &= e^{\pm i\theta} \end{aligned}$$

となり、著名なオイラーの公式が特性根である。

4.3 ノルム

4.3.1 ヒルベルト-シュミットの内積

前節でみたように体 $\mathbb{F}$ に線形ベクトル空間 $\mathbb{L}$ をつくることができ、(m,n) 型の行列が定義できて、$M(m,n,\mathbb{F})$ とする。

$M \in A, B$ に対して、次でヒルベルト-シュミットの内積を定義する。

$$\langle A, B \rangle = \mathrm{Tr}\,[B^* A]$$

4.3.2 ノルム

ベクトル自身の長さとしてノルムを定義したがここでは、いくつかの種類に分ける。

複素数の成分 $(\xi_i)_1^n$ の**列ベクトル** x からなる空間を $\mathbb{C}^n$ とする。このとき x^* は複素共役 $\left(\bar{\xi_i}\right)$ を成分とする**行ベクトル**である。

従ってこの行ベクトルと列ベクトルからスカラーが定義される。

$$s = x \cdot x^*$$

この章ではよく知られているユークリッド空間としての**ノルム**は $\mathbb{C}^n$ 空間において次のように $||_2$ をつける。

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi|^2 \right)^{1/2}$$

また、次数が 1 の場合のノルムは

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|$$

である。また、$\mathbb{C}^n$ 空間の基底を

$$\{x_i\}_1^n$$

として任意のベクトル x は**正規直交基底**であれば

$$x = \sum_{1}^{n} (x, x_i)\, x_i$$

と表される。**正規直交基底ではない**ときは別の基底

$$\{y_i\}_1^n$$

として、

$$x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i = \sum_{i=1}^{n} (x, y_i)\, x_i, (i = 1, \cdots, n)$$

となる。ただし、この時、

$$(x_i, y_i) = \delta_{ij}$$

であり、基底 $\{x_i\}_1^n$ と $\{y_i\}_1^n$ は直交している。

また、基底 $\{x_i\}_1^n$ と $\{y_i\}_1^n$ を**随伴基底**と呼ぶこともある。

$\mathbb{C}^n$ 空間の r 個のベクトルの集合

$$\{a_j\}_1^r$$

と書き、これを**列ベクトル**として $n \times r$ 型の行列 A が次のようにつくられる。ただし、ここでは $r \leq n$ とする。

$$A = [a_1, \cdots a_r]$$

ただし、a_j の要素は

$$a_j = (a_{ij})_{i=1}^n = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{3j} \end{pmatrix}$$

となる。これらから行列 A は成分で

$$A = (a_{ij})$$

と表す。$\{a_j\}_1^r$ によって生成されるベクトル空間を線形空間として Lin

$$ImA = \mathrm{Lin}(a_1, \cdots, a_r)$$

で表すと、この空間が A の像である。

この章では転置行列は ${}^tA$ で表し、転置共役行列を A^* であらわし、対角和は $Tr[A]$ であらわす。

$$A^* = (\bar{a}_{ji})$$

$$Tr[A] = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

また次が成り立てば**正規行列**という。

$$AA^* = A^*A$$

さらに**エルミート**であれば転置複素共役に対して不変である。

$$A = A^*$$

また、行列が**正定値**であるとは

$$x \neq 0 \Rightarrow x^*Ax > 0$$

行列が**半正定値**であるとは

$$x \neq 0 \Rightarrow x^*Ax \geq 0$$

である。**直交行列**である場合は

$$A^*A = AA^* = I_r$$

なのでユニタリ行列は直交行列でもある。従ってやや重要な内容として

ユニタリ行列の列ベクトルは $\mathbb{C}^n$ の正規直交基底を成す。

従って、複素空間 $\mathbb{C}$ 上に $n \times r$ 型の行列全体の集合を $\mathbb{C}^{n \times r}$ で表す。これを線形写像 $\mathcal{L}$ を用いて

$$\mathcal{L}(\mathbb{C}^r, \mathbb{C}^n) : \mathbb{C}^r \to \mathbb{C}^n$$

とすると、両者が同型になる。すなわち向きに注意して、

$$\mathbb{C}^{n \times r} \sim \mathcal{L}(\mathbb{C}^r, \mathbb{C}^n)$$

と考えることができる。空間内の次元を分けて、こうした操作ができる多様性が行列により作られたわけである。

これからノルムをベクトルから行列に引き上げることができて次のように定義する。

$$\|A\| = \max_{0 \neq x \in C^r} \frac{\|Ax\|_{C^n}}{\|x\|_{C^r}}$$

これを**従属ノルム (hypotaxis norm)** という。

つまり、行列のノルムは局所的にしか決まらない。次のような性質がある。

$$\begin{cases} \|A\|_1 = \max_{0\le j\le r} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| & (\|x\|_{C^r} = \|x\|_1 \,, \|y\|_{C^r} = \|y\|_1) \\ \|A\|_\infty = \max_{0\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} \|A^*\|_1 & (\|x\|_{C^r} = \|x\|_\infty \,, \|y\|_{C^r} = \|y\|_\infty) \\ \|A\|_2 = \|A^*\|_2 \end{cases}$$

これらから行列のノルムは**劣乗法的**である。

$$\|AB\| \le \|A\| \, \|B\|$$

4.3.3 スペクトル [124]

以下では行列記号が多いので特にボールド体にしない。n 次複素正方行列 A の**条件数**を

$$\mathrm{cond}(A)$$

で表し、

$$\mathrm{cond}(A) = \|A\| = \left\|A^{-1}\right\|$$

で定義する。と $0 \neq x \in \mathbb{C}^n$ をみたすベクトル x とし、**特性多項式**を次でおく、

$$\pi(\lambda) = \det(\lambda I - A)$$

$\pi(\lambda) = 0$ は λ が $\det(\lambda I - A)$ の**零点**であることを示す。
この n 個**の零点の集合**を A の**スペクトル**といい、

$$\mathrm{sp}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}\}$$

で表す。実数 $\rho(A)$ を**スペクトル半径**と呼び、次で定義する。

$$\rho(A) = \max\{|\lambda|; \lambda \in sp(A)\}$$

部分ベクトル空間 M が A により不変であれば

$$AM \subseteq M$$

とすることができる。特に、固有ベクトルにより生成される次の**固有部分空間**

$$\ker(A - \lambda I)$$

は A **により不変**である。正方ではない場合、
$n \times r$ 型の矩形行列の**特異値**は r 次正方行列 A^*A の r 個の**固有値の平方根**のことで正値をとる。
よって A のノルムは $\mathbb{C}^n$ 上のノルムと $\mathbb{C}^r$ 上のノルムから 次のように作られる

$$\|A\|_2 = \rho^{1/2}(A^*A) \equiv \sqrt{\rho(A^*A)}$$

これを A の**スペクトル・ノルム**と呼ぶ。
また**フロベニウス・ノルム** $\|A\|_F$ を次で定義する。

$$\|A\|_F = (\mathrm{Tr}[A^*A])^{1/2} \equiv \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r} |a_{ij}|^2}$$

この時次の重要な関係がある。

$$\|A\|_2 \le \|A\|_F$$

このフロベニウス・ノルムは Schur_Norm,Hilbert-Schmidt_Norm とも呼ばれ、$\mathbb{C}^{nr}$ ベクトル空間での**ユークリッドノルム**である。
つまり、$\|A\|_2$ は A の最大特異値に等しく、$\|A\|_F$ は特異値の 2 乗和の平方根に等しい。

4.4 射影

4.4.1 正準角

M, N を $\mathbb{C}^n$ の 2 つの r 次元部分ベクトル空間とする。この 2 つの部分ベクトル空間の相対的な位置関係を考えよう。

そこでまず、部分ベクトル空間 M, N の正規直交基底 Q, U が与えられているとする。つまり、

$$Q^*Q = U^*U = I$$

である。特に

$$Q^*Q = Y^*Q = I \tag{4.6}$$

となるような基底は**随伴基底**と呼ばれる。

簡単には、ある行列が与えられた時に**単位行列をつくる左側の相棒**が随伴基底になる。

ここで U^*Q の特異値を考えよう。固有値の平方根が特異値であったから、この特異値を

$$c_i \ (i = 1, \cdots r,)$$

として

$$0 \leq c_i^2 \leq \rho\left(Q^*U\,UQ^*\right) = \|U^*Q\|_2^2 \leq \|U\|_2^2\,\|Q\|_2^2 = \rho\left(U^*U\right)\rho\left(Q^*Q\right) = 1$$

となるので U^*Q **の特異値は 0 と 1 の間にある**ことがわかる。

よって次で**正準角**を定義する。

$$c_i = \cos\theta_i \tag{4.7}$$

$$0 \leq \theta_i \leq \frac{\pi}{2}$$

で定義される r 個の角 θ_i を部分ベクトル空間 M と N と間の**正準角**という。

慣例として c_i を小さい順に並べる。これは式 4.7 から対応する角 θ_i は大きい順に並ぶ。

$$\frac{\pi}{2} \geq \theta_1 \geq \theta_2 \geq \cdots \geq \theta_t \geq 0$$

ここで、**対角行列**を Θ として

$$\Theta = diag\left(\theta_1, \cdots \theta_r\right)$$

で定義しておく。M と N の間の正準角の中で最も大きいものを θ_{max}=θ_1 を**最大角**と呼ぶ。

さらに、任意の三角関数 τ に対して

$$\tau\Theta = diag\left(\tau\theta_1, \cdots \tau\theta_r\right)$$

とおく、これにより U^*Q の特異値は

$$\cos\Theta = diag\left(\cos\theta_i\right)$$

の特異値である。この時、**同じ特異値をもてば同値関係**が成り立つとし、

$$U^*Q \sim \cos\Theta \tag{4.8}$$

と表す。特に

$$\|U^*Q\|_p \leq \|\cos\Theta\|_p$$

ただし、p は 2 または F でユークリッドノルムかフロベニウスノルムである。

これらから

定理. M と N に互いに随伴基底が存在するための必要十分条件として M と N との間の最大角 θ_{max} が次を満たす時である

$$\theta_{max} < \frac{\pi}{2}$$

Proof. Q と U を M と N の正規直交基底とする。このとき

$$Y = UB, Y^*Q = I$$

を満たす r 次の正則行列 B が存在したとすると

$$B^*U^*Q = I$$

でないといけない。ところが U^*Q が逆行列を持つための必要十分条件は

$$\cos\theta_{mac} > 0$$

であるから、この時に

$$B^{-1} = (U^*Q)^* = Q^*U$$

により B が決められ、正規直交基底を持てる。 □

定理. M と N の *2* 組の随伴基底を X, Y と X', Y' とすると

$$X' = XC, Y' = Y\left(C^{-1}\right)^* \tag{4.9}$$

を満たす r 次正方行列 C が存在する。

Proof. $X' = XC, Y' = YD$ とし、C, D は r 次正方行列とする。このとき随伴基底になるためには式 4.6 より

$$Y'^*X' = D^*Y^*XC = D^*C = I$$

でないといけない。これは

$$D^* = C^{-1}, D = \left(C^{-1}\right)^*$$

と同じである。 □

以上から次の幾何的な関係が成り立つ。

命題. 部分ベクトル空間 M, N の随伴基底 Q, U、X, Y とする。この時、次が成り立つ。

$$Y \sim (\cos\Theta)^{-1}, Q - Y \sim \tan\Theta$$

Proof. 先の定理から

$$Y^*Y = B^*U^*UB = B^*B$$

従って Y の特異値は U^*Q の特異値の逆数である。式 4.8 から

$$Y = (U^*Q)^{-1} = \frac{1}{\cos\theta}$$

また、

$$(Q^* - Y^*)(Q - Y) = Q^*Q - Y^*Q - Q^*Y + Y^*Y = Y^*Y - I$$

が成り立つので $Q - Y$ を任意の三角関数 τ_i とすると、この式は

$$\tau_i^2 = \frac{1}{\cos^2\theta_i} - 1 = \tan^2\theta_i$$

となる。これは次の図のように鋭角を持つ 2 直線 M, N の間の幾何的関係である。

$$\|q\|_2 = \|u\|_2 = 1,$$
$$\|q-u\|_2 = 2\sin\frac{\theta}{2},$$
$$\|y\|_2 = \frac{1}{\cos\theta}, \qquad \|q-y\|_2 = \tan\theta,$$
$$\|t\|_2 = \cos\theta, \qquad \|q-t\|_2 = \sin\theta.$$

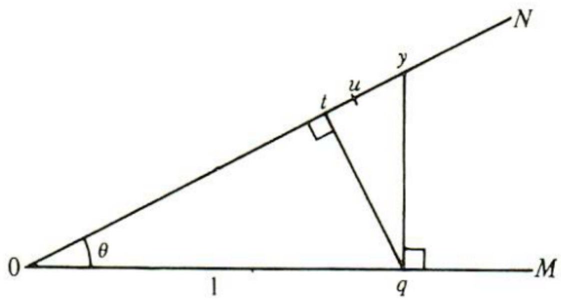

図 4.1: [121] より：NM の正準角 θ;$\|u-q\|_2 = 2\sin\theta/2$ の関係がある。

□

このように行列の固有値とベクトルの間の関係が幾何的な図形とその長さとの関係になっていることが確かめられる。

4.4.2　射影

冪が等しくなる線形写像

$$P^2 = P$$

を**射影**という。射影 P は $\mathbb{C}^n$ の直和分解が対応する。

$$\mathbb{C}^n = M \oplus W$$

ただし、

$$M = Im\,P, W = \ker P$$

である。つまり、射影の像と核で $\mathbb{C}^n$ 空間は余りなく分けられる。
この時、P **は** W **に沿った** M **の上への写像**という。
また、$\ker P$ に直交する空間を $W^\perp$ とする。$y \in W^\perp$ をもってくると

$$W = \left\{x \in \mathbb{C}^n; y \in W^\perp : x^* y = 0\right\}$$

つまり、この関係が成り立つ空間が W である。
また、次の N という記号を導入すると

$$N = W^\perp, W = N^\perp$$

と書ける。そこで次の定理が成り立つ。

定理．直和分解

空間 $\mathbb{C}^n$ が $\mathbb{C}^n = M \oplus N^{\perp}$ と直和分解されるための必要十分条件は θ_{max} を M と N の間の最大正準角として

$$\theta_{max} < \frac{\pi}{2}$$

となることである。

Proof. これは $\theta_{max} = \frac{\pi}{2}$ とすると M のベクトルで 0 でないもので $N^{\perp}$ に属するものがあることである。ことと等価であるが

下図のように $N \perp M$ であればこのベクトルを $N^{\perp}$ 面に見つけることは簡単であるが、$\theta_{max} < \frac{\pi}{2}$ の時は見つけられない。

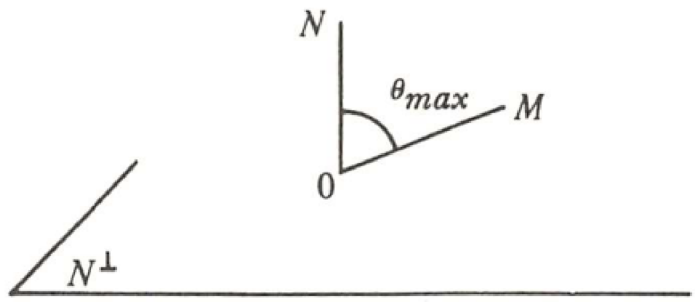

図 4.2: [121] より：$\mathbb{C}^n$ を $M, N^{\perp}$ に直和分解すると M と N の間に $\pi/2$ より小さい正準角がとれる。

□

従って X, Y を M, N における随伴基底とすると、このような X, Y は $\theta_{max} < \frac{\pi}{2}$ のときのみに存在する。
これから 射影 P の核 $\ker P$ となる面 $N^{\perp}$ に沿って、射影 P は M の上に射影像をつくることになり、
この像と N のなす角は $\pi/2$ を超えない、よって次の有用な命題が成り立つ。

命題 1. 、$P = XY^*$ は $\mathbb{C}^n$ の標準基底に対して $N^{\perp}$ に沿っての M の上への射影を表す行列になる。

Proof. $1P = XY^*$ を x に作用させるのを成分で表すと

$$Px = \sum_{i=1}^{r} (y_i^* x)\, x_i$$

だから

$$P^2 = P, \mathrm{Im}P = M, \ker P = N^{\perp}, P$$

は M, N の随伴基底の選び方に依存しない。なぜなら $C \in \mathbb{C}^n 4.9$ より

$$X' = XC, Y' = Y(C^{-1})^*$$

をもう一組の随伴基底とすれば

$$\begin{aligned} X'Y'^* &= XC\left(C^{-1}\right)Y^* \\ &= XY^* \end{aligned}$$

となる。 □

つまり、簡単には基準面と相方面の随伴基底を右共役にして積をとったものが射影である。
これは物理でよく利用するエルミート行列に対しイメージを与えてくれる。
$M = N$ の場合は M の上への直交射影は唯一に決まり、これを $P^{\perp}$ とする。

$$P^{\perp} = XX^{*}$$

となるが、同時に X は M の正規直交基底であるから

$$X^{*}X = I$$

$$\|X^{*}X\| = 1$$

であるので XX^{*} は Hermite 行列である。これは

$$P^{\perp 2} = XX^{*}XX^{*} = I$$

$$\left\|P^{\perp}\right\|_2^2 = 1$$

を満たす。

4.4.3 ベクトル空間の開き

複素数値空間の M, N のノルムと射影 π_M, π_N が定義できたので、M, N の次元が等しく無い場合を考える。
この M と N の開き ω を次のノルムで定義する、

$$\omega(M, N) \equiv \|\pi_M - \pi_N\|_2$$

これも行列の括弧積にイメージを与える。X, Y が正方行列であれば

$$\pi_M = XY^{*}$$

$$\pi_N = YX^{*}$$

とおけたとして、

$$\Omega(X, Y) = XY^{*} - YX^{*}$$

として

$$\omega = \|\Omega\|_2$$

である。
ここで幾何的な関係を見ると、距離 $dist$ を用いて、$x^{*}x = y^{*}y = 1$ の時、次が成り立つ

$$\omega(N, N) = \max\left[\max_{x \in M} dist(x, N), \max_{y \in N} dist(y, M)\right] \tag{4.10}$$

下図で M 上に x,N 上に y をとり、その射影 $\pi_N x$ と $\pi_M y$ を図示する。

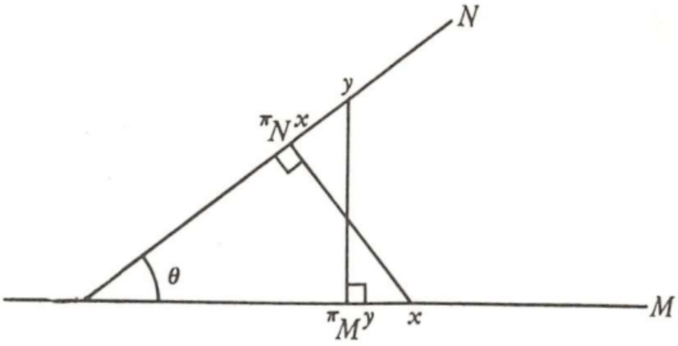

図 4.3: [121] より：射影 $\pi_N x, \pi_M y$

よって $\|x\| = \|y\|$ であれば

$$\|\pi_N x\| = \|\pi_M y\|$$

である。

Proof. ノルムの定理から次が成り立つ。

$$\max\left[\|(|\pi_M - \pi_N)\pi_M\|_2 , \|(\pi_N - \pi_M)\pi_N\|_2\right] \le \max\left[\|(I - \pi_N)\pi_M\|_2 , \|(I - \pi_N)\pi_M\|_2\right] \le \|\pi_M - \pi_N\|_2$$

また、逆に射影が冪同値であるので

$$\begin{aligned}\pi_M - \pi_N &= (\pi_M + I - \pi_M)(\pi_M - I + I - \pi_N) \\ &= \pi_M(I - \pi_N) - (I - \pi_M)\pi_N\end{aligned}$$

である。従って、

$$\pi_M = \pi_M^2 = \pi_M^*, \|A\|_2 = \|A^*\|_2$$

が一般に成り立つから、$x \in \mathbb{C}^n$ に対して

$$\begin{aligned}\|(\pi_M - \pi_N)x\|_2^2 &\le \|\pi_M(I - \pi_N)\|_2^2 \|(I - \pi_N)x\|_2^2 + \|(I - \pi_M)\pi_N\|_2^2 \|\pi_N x\|_2^2 \\ &\le \max\left[\|(I - \pi_N)\pi_M\|_2^2 , \|(I - \pi_M)\pi_N\|_2^2\right]\left(\|(I - \pi_N)x\|_2^2 + \|\pi_N x\|_2^2\right) \\ &= \max\left[\|(I - \pi_N)\pi_M\|_2^2 , \|(I - \pi_N)\pi_M\|_2^2\right]\|x\|_2^2\end{aligned}$$

とかける。この式の各項は正値だから式 4.10 が成り立つ。 □

これから射影の開きを検討することができるようになって、次の定理が成り立つ。
これによって開きが 1 より小さければ両者の次元が一致する。

定理. 射影の開き
P, P' を M, N への射影とすると $\|P - P'\| < 1$ であれば

$$\dim M = \dim N$$

となる。

Proof. まず、$\|P - P'\| < 1$ であれば $\dim M \le \dim N$ を示す
これは $\{x_i\}_1^r$ を M の基底とした時、$\{P'x_i\}_1^r$ が独立となれば P' が N への射影だから $\dim M \le \dim N$ となるはずである。

そこで全ては 0 ではない α_i に対して

$$\sum_{i=1}^{r}\alpha_i P' x_i = 0$$

になったとする。つまり、この時は $\{P'x_i\}_1^r$ が従属している。

$$y = \sum_{i=1}^{r}\alpha_i x_i$$

とおくと

$$P'y = 0, (P - P')y = Py = y$$

となるので

$$\|(P - P')y\| = \|y\|$$

となる。ところが仮定から $y \neq 0$ だから

$$\|(P - P')y\| \leq \|P - P'\| \cdot \|y\| < \|y\|$$

となり、矛盾する。同様に M と N を入れ替えれば $\dim M \geq \dim N$ が示せる。
よって $\|P - P'\| < 1$ であれば $\dim M = \dim N$ である。 □

つまり

$$\omega(M, N) < 1 \to \dim M = \dim N$$

となる。
さらに次の定理が成り立つ。

定理. $\dim M = \dim N = r < \frac{n}{2}$ であるとする。$\pi_M - \pi_N$ の固有値のうち、$2r$ 個は *0* 常に *0* になるとは限らないが
これらは $\pm \sin\theta_i, i = 1, 2, \cdots r$ に等しい

Proof. 次元 $r \leq \frac{n}{2}$ の $\mathbb{C}^n$ の 2 つの部分空間を M と N とし、この間の正準角が作る対角行列を Θ とする。 □

5 スペクトル理論 [125]

前節で射影とジョルダン分解に面白い関係があることを見た。物理学では固有値を得ることは物理量の観測として重要になる。
第 1 部で複素関数や、解析接続について学んだが、さらに面白いことに行列の固有方程式を中心として、その展開とつながっていく。これらは数学的な極限や収束の考え方を物理的な空間と物質の関係に大きな示唆を与えるものである。

5.1 最小多項式

行列を用いた固有方程式が前節で登場した。これらは線形代数で学習した多項式になる。行列の多項式についてここで学習する。
体 $\mathbb{F}$ 上の有限次元線形空間を $\mathbf{L}$ とする。線形変換

$$T : \mathbf{L} \to \mathbf{L}$$

$$\dim \mathbf{L} = n$$

とし、多項式

$$f(x) = a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0 \ (\in \mathbb{F}[x])$$

が T によって

$$f(T) = a_m T^m + \cdots + a_1 T + a_0 I$$

にうつり、数を行列に写させる。この時の $f(T)$ も線形変換になる。さらにもう一つの関数 g を用意し、

$$f, g \in \mathbb{F}[x]$$

の時、これらは可換になり、

$$f(T)g(T) = g(T)f(T)$$

$$(f+g)(T) = f(T) + g(T)$$

となる。さらに $\mathbf{M}$ が T の不変部分空間であれば $\mathbf{M}$ は $f(T)$ の不変部分空間になる。

また、多項式 f, g が片方の倍数で表されないなら f, g は**互いに素**な多項式という。

また、多項式 f が既約な多項式 p_i の積に分解し

$$f = p_1 p_2 \cdots p_h,\ p_i \in \mathbb{F}[x]$$

であれば p_i を f の**既約因子**という。

そこで次の定理が成り立つ

定理 3. f, g が互いに素な多項式とし、$\mathbf{x} \in \mathbf{L}$ に対して

$$f(T)\mathbf{x} = g(T)\mathbf{x} = 0$$

とすると

$$\mathbf{x} = 0$$

である。

Proof. ある多項式をもってきて

$$h \cdot f + k \cdot g = 1$$

とする。これを線形変換して

$$h(T)f(T) + k(T)g(T) = I$$

とする。この時

$$\mathbf{x} = (h(T)f(T) + k(T)g(T))\,\mathbf{x} = h(T)f(T)\mathbf{x} + k(T)g(T)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

となる。 □

よって $\mathbb{F}[x]$ の部分集合を零行列を O として

$$\alpha = \{f \in \mathbb{F}[x] | f(T) = O\}$$

を考える。つまり、$f(T) = O$ となるが、0 ではない多項式 f が存在する。

詳しくみるために $\mathbf{L}$ の線形空間 $\mathrm{Hom}(\mathbf{L}, \mathbf{L})$ のベクトル列として、線形写像の k 乗の列

$$LT = \{I, T, T^2, \cdots T^k\}$$

を考える。$\mathrm{Hom}(\mathbf{L}, \mathbf{L})$ が有限次元

$$\dim(\mathrm{Hom}(\mathbf{L}, \mathbf{L})) = (\dim \mathbf{L})^2$$

となるので

$$k > \dim\left(\mathrm{Hom}(\mathbf{L},\mathbf{L})\right)$$

の時は LT が独立になれずに、線形従属でなくてはならない。

よって全て 0 ではない $\mathbb{F}$ の元 $a_0, a_1, \cdots, a_k$ が存在して

$$a_k T^k + \cdots + a_1 T^1 + a_0 I = O$$

となる。そこで

$$f(x) = a_k x^k + \cdots + a_1 x + a_0 \ (\in \mathbb{F}[x])$$

とすれば $f \neq 0$ であって

$$f(T) = O$$

となる。よって、両側からかけても O になり $\alpha(T)$ がイデアルである。イデアルであれば式 1.13 から

群の部分集合 α が加法について閉じていて

$$x \in \mathbb{F},\ \ y \in \alpha \to xy, yx \in \alpha$$

がなりたち

$$x = y \in \alpha$$

同値関係を定義できる。

よって

$$\alpha(T(x)) = \alpha(g(x))$$

となる多項式 $g(x)$ が存在し、g は

$$g(T) = O$$

となる最小な次数を持つ多項式になる。このような多項式で最高次数の係数を 1 としたものは一意に決まるので

これを Φ_T で表し、**最小多項式**と呼ぶ。

$$f(T) = O$$

であれば Φ_T は f の約数になる。$T = O$ の時は

$$\Phi_T(x) = x$$

であり、$\mathbf{L} = \{\mathbf{0}\}$ の時は

$$\Phi_T = 1$$

と約束しておく。

また、正方行列 $A \in M_n(\mathbb{F})$ に対して

$$T_A\,(\in \mathrm{Hom}(\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^n))$$

の最小多項式を A の最小多項式とする。

5.2 Schmit 分解

はじめに行列を分解する方法の 1 つとして Schmit 分解を紹介する。これは最小 Rank の正規直交行列を見いだすのに適している。

第 9 部で見るが、密度行列に有用な道具になる。

X を $n \times m$ 型の矩形行列 $(m < n)$ とする。階数を次のように定義する。

定義. **階数 (rank) は X の中の最大の正則な部分行列の次数である。**

つまり X の非零特異値の個数に等しい。

また、次のように X を **Schmidt 分解**することができる。$\mathrm{rank}(X) = m$ ならば

$$X = QR$$

ただし、Q は $n \times m$ 型の正規直交行列で、R は正則な m 次上三角行列とする。

また、さらに $\mathrm{rank}(X) = r < m$ の場合は次のような置換行列 Π が存在する。

$$X\Pi = QR$$

ただし、Q は正規直交行列で R は R_{11} を r 次の正則上三角行列として

$$R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

である。この Schmidt 分解を使うと部分ベクトル空間 $\mathbf{M}$ の基底 X から正規直交基底 Q を作ることができる。

ここでは列ベクトル V, U を縦に並べて行列 M をつくる操作を

$$M = [V, U] = \begin{pmatrix} V_1 & U_1 \\ V_2 & U_2 \end{pmatrix}$$

で表す。

また、行ベクトル P, Q を横に並べて行列 M を作る操作を

$$M = \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ Q_1 & Q_2 \end{pmatrix}$$

で表す。

零でない対角要素の数を **schmit 数**という。

5.3 Schur 形

全ての行列 A はユニタリ行列を用いた相似変換で次のような**上三角行列**に変換できる。

これを **Schur 形**という。

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

定理. Q^*AQ が対角要素に固有値 $\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_n$ が ' ならぶ上三角行列になるような、ユニタリ行列 Q が存在する。

Proof. 帰納法を用いると $n = 1$ の時は明らかだから $n - 1$ 次の行列について考える。
A と同じ固有値を持つ $n - 1$ 次の行列を次のようにつくる。A の 1 つの固有値 λ_1 に対して、

$$Ax_1 = \lambda_1 x_1 \tag{5.1}$$

$$||x_1||_2 = 1 \tag{5.2}$$

であるような A の固有ベクトル x_1 とし、$n \times (n-1)$ 型の行列 U を選んで $[x_1, U]$ がユニタリ行列になるようにすることができる。
この時の U の列はベクトル x_1 と直交するから

$$U^* x_1 = 0 \tag{5.3}$$

とおける。よって式 5.1 より

$$A\,[x_1, U] = [\lambda_1 x_1, AU]$$

が成り立ち、さらに式 5.3 から

$$\begin{aligned} {}^t\,[x_1, U]^*\,A\,[x_1, U] &= \begin{bmatrix} x_1^* \\ U^* \end{bmatrix} [\lambda_1 x_1, AU] \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & x_1^* AU \\ 0 & U^* AU \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となる。ここで $[x_1, U]^*\,A\,[x_1, U]$ は A に相似だから U^*AU は固有値 $\lambda_2 \cdots \lambda_n$ を持つ。 □

さらに A が実数行列で、直交変換を用いると、A を**上ブロック三角行列**にわけることができる。
この時の対角ブロックは 1×1 または 2×2 であり、対角ブロックは共役複素固有値を持つ。
同じ固有値を持つ行列を**相似**という。

5.4 特異値分解

次に行列の分解方法として、固有値の平方根を特異値として対角成分にもたせる方法がある。この特異値分解を紹介する。
A に許される変換を**同値変換 (ユニタリ行列で Q^*AP を作る)** も含めると、全ての行列は固有値の平方根、すなわち**特異値**を非対角要素として持つ対角行列に**ユニタリ同値**になる。
ここでは特異値を σ 固有値を λ で表すことが多い。

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$$

この特異値 σ_i を対角成分に持つ行列を Σ とすると
次を A の**特異値分解** (SIngular Value Decomposition)SVD という。

$$Q^*AP = \Sigma$$

ここで A を (m, n) 型の行列として

$$q = \min(m, n)$$

とする。前節の **Schur 形の定理**から次の定理が成り立つ

定理. *2* つの m, n 次のユニタリ行列 U, V とし、$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_q \geq 0$ として次が存在する。

$$U^*AV = diag(\sigma_i)$$

Proof. $\sigma_1 = ||A||_2 \geq 0$ とすると次が成り立つ $x \in \mathbb{C}^n, y \in \mathbb{C}^m$ を選べる。

$$||x||_2 = ||y||_2 = 1 \cap Ax = \sigma_1 y$$

ベクトル x, y に対して、

$$U = [y, U_1], V = [x, V_1]$$

をユニタリ行列になるように選ぶと U^*AV を A_1 として前節の **Schur 形の定理**か上三角行列にできて

$$\begin{aligned} A_1 &= U^*AV \\ &= \begin{bmatrix} y^* \\ U_1^* \end{bmatrix} A [x, V_1] \\ &= \begin{bmatrix} \sigma_1 & \omega^* \\ 0 & B \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{5.4}$$

とおける。ただし、

$$\omega^* = y^*AV_1$$

$$B = U_1^*AV_1$$

である。ユークリッドノルムから

$$\left\| A_1 \begin{bmatrix} \sigma_1^* \\ \omega^* \end{bmatrix} \right\|_2^2 \geq \sigma_1^2 + \omega^*\omega$$

となるが、

$$\sigma_1^2 = \|A\|_2^2 = \|A_1\|_2^2 \geq \sigma_1^2 + \omega^*\omega$$

から $\omega = 0$ である。よって式 5.4 は対角型になる。 □

有用な特異値分解の定理を次で表す。

定理. 特異値分解：一般に直交行列を U, V 対角行列を Σ とすると**特異値分解**により、任意の行列 A は

$$A = U\Sigma^tV$$

で表すことができる。対角行列 Σ は次のように特異値を対角成分に持つ。

$$A = U \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} {}^tV$$

Proof. 任意の行列 A において A^tA の固有値を λ_i とすると

$$A\left({}^tA\mathbf{u}_i\right) = \lambda_i \mathbf{u}_i \tag{5.5}$$

が成り立つ。そこで

$${}^tA\mathbf{u}_i = \mathbf{v}_i \tag{5.6}$$

として左から ${}^tA$ をかけると

$${}^tAA({}^tA\mathbf{u}_i) = \lambda_i \left({}^tA\mathbf{u}_i\right)$$

$${}^tAA\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$$

が成り立つから、${}^tAA$ と A^tA は同じ固有値を持つことがわかる。

そこで ${}^tAA$ の固有ベクトルを改めて $\mathbf{v}_i$ とすると

$$
\begin{aligned}
{}^tAA\mathbf{v}_i &= \lambda_i \mathbf{v}_i \\
A^tA\mathbf{u}_i &= \lambda_i \mathbf{u}_i
\end{aligned}
$$

となるので式 5.6 において定数 θ_i 倍も考慮し、

$$
\mathbf{v}_i = \theta_i {}^tA\mathbf{u}_i \tag{5.7}
$$

とすると $\mathbf{v}_i$ はベクトルなので横 1 行列のようにふるまい、

$$
\mathbf{v}_i =^t A\theta_i\mathbf{u}_i = \left({}^tAu_1, {}^tAu_2, \cdots\right)\begin{pmatrix} \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \theta_n \end{pmatrix} =^t A\left(u_1, \cdots u_n\right)\begin{pmatrix} \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \theta_n \end{pmatrix}
$$

とおなるのでこれを、

$$
\mathbf{V} =^t AU\Theta
$$

と表現すると

$$
\mathbf{V}\Theta^{-1} =^t AU
$$

これを式 5.5 に代入し、

$$
A\mathbf{V}\Theta^{-1} = \Lambda U
$$

ただし、

$$
\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}
$$

である。この Λ は U と交換する。よって

$$
A = U\Lambda\Theta\, {}^t\mathbf{V}
$$

ここで $\Lambda\Theta$ を評価することを考えると、共に対角行列なので式 5.7 から

$$
\begin{aligned}
||\mathbf{v}_i^2|| &= \theta_i^2\, {}^t\mathbf{u_i}A\, {}^tA\mathbf{u}_i \\
&= \theta_i^2\, {}^t\mathbf{u}_i\lambda_i\mathbf{u}_i \\
&= \theta_i^2\lambda_i||\mathbf{u}_i||^2
\end{aligned}
$$

従って $||\mathbf{v}_i^2|| = ||\mathbf{u}_i||^2 = 1$ を選べば

$$
\theta_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}
$$

という関係になるので結局 A は

$$
A = U\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} {}^tV
$$

となる。 □

これは第 9 部、第 6 部で考察するが、次のようにエルミートであれば分解ができることになり、量子論で重要な役割をはたす。

$$
A = U\Sigma V^\dagger = \left(U\Sigma^{1/2}\right)\left(V\Sigma^{1/2}\right)^\dagger = \tilde{U}\tilde{V}^\dagger
$$

これで任意の正方行列、欠陥のある行列であっても、必ずしもユニタリである変換を用いなくても、特殊な三角行列に変換する準備ができた。これを **Jordan 標準形**という。次節で扱う。

5.5 ジョルダン標準形 [125]

5.5.1 Jordan 標準形 [125]

複素行列の標準形を決めよう。ケーリー・ハミルトンの公式から A の特性根を λ_1, λ_2 とすると任意の可逆行列を P として、次が成り立つ。

定理. *Jordan の定理：$\lambda_1 \neq \lambda_2$ とすると次が存在する。*

$$PAP^{-1} = A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \tag{5.8}$$

$\lambda_1 = \lambda_2$ の場合は次が存在する。

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \tag{5.9}$$

この 2 つのパターンを **Jordan 標準形**または**狭義の上三角行列**という。

Proof. 次の固有方程式を満たす 0 でないベクトルを $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}$ とする。

$$A\mathbf{x}_1 = \lambda_1 \mathbf{x}_1 \tag{5.10}$$

$$A\mathbf{x}_2 = \lambda_2 \mathbf{x}_2 \tag{5.11}$$

まず、$\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}$ が線形独立であることをみる。

$$a\mathbf{x}_1 + b\mathbf{x}_2 = 0 \tag{5.12}$$

とすると式、5.10、5.11 から

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= A\left(a\mathbf{x}_1 + b\mathbf{x}_2\right) = aA\left(\mathbf{x}_1\right) + bA(\mathbf{x}_2) \\ &= a\lambda_1\mathbf{x}_1 + b\lambda_2\mathbf{x}_2 \end{aligned}$$

となるから式 5.12 から $\mathbf{x}_2$ を消すと

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \lambda_2\left(a\mathbf{x}_1 + b\mathbf{x}_2\right) - \left(a\lambda_1\mathbf{x}_1 + b\lambda_2\mathbf{x}_2\right) \\ &= a\left(\lambda_2 - \lambda_1\right)\mathbf{x}_1 \end{aligned}$$

となるから式 5.12 から $\mathbf{x}_1$ を消すと

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \lambda_2\left(a\mathbf{x}_1 + b\mathbf{x}_2\right) - \left(a\lambda_1\mathbf{x}_1 + b\lambda_2\mathbf{x}_2\right) \\ &= b\left(\lambda_1 - \lambda_2\right)\mathbf{x}_2 \end{aligned}$$

となる。$\lambda_1 \neq \lambda_2$ とすれば、$a = b = 0$
となるので $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}$ は線形独立である。
次に行列 $\mathbf{X}$ を $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}$ の列ベクトルを並べてつくると

$$\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2] \tag{5.13}$$

この $\mathbf{X}$ は可逆なので

$$\mathbf{P} = \mathbf{X}^{-1}$$

とおけば、$\boldsymbol{PX} = \boldsymbol{I}$ となるので、式 5.13 から

$$\begin{aligned}\boldsymbol{PAP^{-1}} &= \boldsymbol{PAX} = \boldsymbol{P}\left(A\mathbf{x}_1, A\mathbf{x}_2\right) \\ &= \boldsymbol{P}\left(\lambda_1\mathbf{x}_1, \lambda_2\mathbf{x}_2\right) \\ &= \boldsymbol{PX}\left(\begin{array}{cc}\lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2\end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{cc}\lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2\end{array}\right)\end{aligned}$$

となる。 □

5.5.2 2 階定数差分方程式

この性質は 2 階の定数差分方程式を解くのに便利であり、これは近接粒子のみの影響を考えるような物理モデルに応用できる。

離散数列 x_n を考え、

$$ax_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = 0, (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{5.14}$$

ただし、定数

$$a, c \neq 0$$

とする。これを $n \geq 2$ として

$$x_n = -a^{-1}\left(bx_{n-1} + cx_{n-2}\right) \tag{5.15}$$

とし、離散性を利用して、初期値さえきまれば以下は計算できる。

そこで、特性行列 A を x_0, x_1 について

$$A = \left(\begin{array}{cc}-b/a & -c/a \\ 1 & 0\end{array}\right)$$

とおく。この時の式 5.15 の解は次の関係を満たすことになる。

$$\left(\begin{array}{c}x_{n+2} \\ x_{n+1}\end{array}\right) = A\left(\begin{array}{c}x_{n+1} \\ x_n\end{array}\right)$$

これは数列の行列版と考えれば

$$\left(\begin{array}{c}x_n \\ x_{n-1}\end{array}\right) = A\left(\begin{array}{c}x_{n-1} \\ x_{n-2}\end{array}\right) = A^2\left(\begin{array}{c}x_{n-2} \\ x_{n-3}\end{array}\right) = \cdots = A^{n-1}\left(\begin{array}{c}x_1 \\ x_0\end{array}\right) \tag{5.16}$$

となるので次の特性方程式が得られる。

$$\det\left(xI - A\right) = \det\left(\begin{array}{cc}x + b/a & +c/a \\ -1 & x\end{array}\right) = a^{-1}\left(ax^2 + bx + x\right) = 0$$

Jordan の標準形を用いて固有値が $\lambda_1 \neq \lambda_2$ の時は、式 4.4 の処方を用いて固有ベクトル $\mathbf{p}$ を並べた

$$P = [\mathbf{p}_1, \mathbf{p_2}]$$

でつくられた P を用いて

$$PAP^{-1} = \left(\begin{array}{cc}\lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2\end{array}\right)$$

とできたので

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_0 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 \neq \lambda_2$ の時は式 5.16kara

$$\begin{aligned} P\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix} &= PA^{n-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix} = PA^{n-1}P^{-1}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_0 \end{pmatrix} = \left(PAP^{-1}\right)^{n-1}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1^{n-1} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{n-1} y_1 \\ \lambda_2^{n-1} y_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるので

$$\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1^{n-1} y_1 \\ \lambda_2^{n-1} y_0 \end{pmatrix} \tag{5.17}$$

固有値が重根を持つ場合でも $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ とおけば

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}^{n-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{n-1} & (n-1)\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda_2^{n-1} \end{pmatrix}$$

となるので

$$\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1^{n-1} y_1 + (n-1)\lambda^{n-2} y_0 \\ \lambda_2^{n-1} y_0 \end{pmatrix} \tag{5.18}$$

である。これから P を求めない場合でも
$\lambda_1 \neq \lambda_2$ の時は式 5.17 より、未知な複素数 α, β を用いて、

$$x_n = \lambda_1^{n-1}\alpha + \lambda_2^{n-1}\beta$$

とかけ、初期条件が

$$\begin{aligned} \lambda_1^{-1}\alpha + \lambda_2^{-1}\beta &= x_0 \\ \alpha + \beta &= x_1 \end{aligned}$$

を用いて

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(\lambda_2 x_0 - x_1\right) \\ \beta &= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(\lambda_1 x_0 - x_1\right) \end{aligned}$$

と求まり、解が

$$x_n = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\left\{\left(\lambda_1^n \lambda_2 - \lambda_2^n \lambda_1\right) x_0 + \left(\lambda_2^n - \lambda_1^n\right) x_1\right\} \tag{5.19}$$

となる。
$\lambda_1 = \lambda_2$ の時は式 5.18 より、未知な複素数 α, β を用いて、

$$x_n = \lambda^{n-1}\alpha + (n-1)\lambda^{n-1}\beta$$

とかけ、初期条件が

$$\begin{aligned} \lambda^{-1}\alpha - \lambda^{-2}\beta &= x_0 \\ \alpha &= x_1 \end{aligned}$$

を用いて

$$\alpha = x_1$$
$$\beta = \lambda\left(x_1 - \lambda x_0\right)$$

と求まり、解が

$$x_n = n\lambda^{n-1}x_1 - (n-1)\,\lambda^n x_0 \tag{5.20}$$

となる。

例として、著名なフィボナッチ数列を考えると $a = 1, b = c = -1$ として

$$x_{k+2} = x_{k+1} + x_k$$

となるので、初期値として

$$x_0 = 1, x_1 = 1$$

とすれば特性多項式が

$$x^2 - x - 1 = 0$$

となるので、固有値は異なる 2 解で

$$\lambda_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

よって式 5.19 から、この数列の収束点は

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right) + \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right)\right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)\right\} \end{aligned}$$

となる。

5.5.3 Jordan ブロック [125, 121]

ここでは Jordan 標準形を多次元に応用する。この時、行列を各ブロックにわける手法を用いる。
また、N は対角行列を表すとする。

定理. ブロック行列 : $U \in \mathbb{C}^{m\times m}$ が狭義上三角行列とする。この時、次の条件を満たす正則な行列 Y が存在する。

$$Y^{-1}UY = N = diag(E_j); j = 1, 2, \cdots, g$$

とすると次のブロック E_j が k_j の大きい順に並ぶ。

$$E_j = \begin{pmatrix} 0 & I_{k_j-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

証明の準備として $E \in \mathbb{C}^{k\times k}$ を

$$E = \begin{pmatrix} 0 & I_{k-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とすると、$E^k = 0, (i = 1, 2, \cdots k-1)$ に対して次が成り立つ。

定理．ブロック行列補助定理

$$
\begin{aligned}
Ee_{i+1} &= \begin{pmatrix} 0 & I_{k-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}(e_{i+1}) = e_i \\
E^T E &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I_{k-1} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & I_{k-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{k-1} \end{pmatrix} \\
I - E^T E &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & I - I_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & I - I_{k-1} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

具体的にみておこう。例えば次のようにブロック行列 E と単位行列 I、単位ベクトル e を用意する。

$$
I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots
$$

この時、

$$
Ee_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1
$$

となり、ブロック行列 E は生成消滅演算子のように単位ベクトルをずらしていく働きがある。
また、

$$
E^T E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{k-1} \end{pmatrix}
$$

となり、転置との積が射影演算のような役割をする。これも、量子論のエルミート行列の基礎をつくっている。

Proof. ブロック定理の証明をする。
帰納法を用いる。$m = 1$ に対して

$$
U \in C^{1\times 1}
$$

はスカラーなので成り立つとする。そこで次数 $d < m$ の狭義上三角行列で成り立つとする。

$$
U = \begin{pmatrix} 0 & u^T \\ 0 & U_1 \end{pmatrix}
$$

とおく。ただし、u^T は転置を表すとする。N は対角行列である。
仮定から

$$Y_1^{-1}U_1Y_1 = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & N_2 \end{pmatrix}, \quad N_2 = \mathrm{diag}\left(E_2, \cdots, E_g\right)$$

を満たす Y_1 が存在する。ここで $j \geq 2$ に対して

$$\dim(E_1) \geq \dim\left(E_j\right)$$

とする。これから次が成り立つ。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Y_1^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & u^T \\ 0 & U_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & u^TY_1 \\ 0 & Y^{-1}UY \end{pmatrix} \tag{5.21}$$

そこで $Y_1^{-1}U_1Y_1$ のブロックに分け、行ベクトル u^TY_1 を次のように分割する。

$$u^TY_1 = \left[u_1^T, u_2^T\right]$$

式 5.21 から次のようにすることができる。

$$\begin{pmatrix} 1 & -u_1^TE_1^T & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & u_1^T & u_2^T \\ 0 & E_1 & 0 \\ 0 & 0 & N_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u_1^TE_1^T & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & u_1^T(I-E_1^TE_1) & u_2^T \\ 0 & E_1 & 0 \\ 0 & 0 & N_2 \end{pmatrix}$$

ブロック行列の補助定理から

$$u_1^T(I-E_1^TE_1) = u_1^Te_1e_1^T = \sigma e_1^T$$

$$\sigma = u_1^Te_1$$

となる。よって $\sigma \neq 0$ に対しては最右、下で分割し、N を E_1 の次数より 1 大きい次数を持つ対角行列として、

$$\begin{pmatrix} \sigma^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^{-1}I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma e_1^T & u_2^T \\ 0 & E_1 & 0 \\ 0 & 0 & N_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \sigma I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e_1^T & u_2^T \\ 0 & E_1 & 0 \\ 0 & 0 & N_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N & e_1u_2^T \\ 0 & N_2 \end{pmatrix}$$

となる。$e_1u_2^T$ は列ベクトルと行ベクトルから作られる行列であることに注意する。
また、ブロック行列の補助定理から N_2 のブロックは次数の大きい順に並べられているので $i = 1, 2, \cdots k_2 + 1$ に対して、

$$N_2^{k_2} = 0$$

$$N_2^{i-1} = I$$

であり、

$$s_i^T \equiv u_2^TN_2^{i-1}$$

とすると

$$e_1s_1^T = e_1u_2^TN_2^{i-1} = e_1u_2^T$$

また、$i = 1, 2, \cdots k_2 - 1$ に対して、

$$\begin{pmatrix} I & e_{i+1}s_i^T \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N & e_is_i^T \\ 0 & N_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -e_{i+1}s_i^T \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N & e_{i+1}s_{i+1}^T \\ 0 & N_2 \end{pmatrix}$$

$s_{k_2}=0$ だから U は

$$\begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & N_2 \end{pmatrix}$$

と相似であり、N の次数は E_2 の次数より大きい。

$$\dim(N) > \dim(E_2)$$

□

定理. *Jordan* ブロック： 代数的多重度と幾何的多重度が等しくならない欠陥のある行列 $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ に対して、正則な行列 X が存在して、

$$X^{-1}AX = diag(J_{ij}); j = 1, 2, \cdots, g \tag{5.22}$$

とおける。ただし、

$$J_{ij} \equiv \lambda_i I + E_{ij},\ i = 1, \cdots, d(< n)$$

$$E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & I_{k_{ij-1}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

この J_{ij} を *Jordan* ブロックという。

Proof. A の Schur 形を $Q^*AQ = R$ とするブロック補助定理から、この R をブロック三角形に変形 B_i することができて

$$B_i = Y_i^{-1}(\lambda_i I + U_i) Y_i = \lambda_i I + \mathrm{diag}(E_{ij}) \tag{5.23}$$

とできる。 □

同じ固有値 λ_i に付随する Jordan ブロック $J_{ij}, (j = 1, 2, \cdots, g_i)$ を **Jordan 箱** B_i と呼ぶ
Jordan 箱の次元は m_i でこの中に g_i 個のブロックを持つので

$$g_i \le m_i$$

である。λ_i に付随する Jordan ブロック $J_{ij}, (j = 1, 2, \cdots, g_i)$ の次元は

$$\dim(J_{ij}) = l_i$$

とする。B_i の対角項の 1 つ上に $l_i - 1$ 個以下の連続する 1 があるので次の例の図のように

$$(B_i - \lambda_i I)^{l_i} = 0$$

とすることができる。
そこで $\{\lambda_i\}_1^d$ を A の相異なる d 個の固有値であるとする。ブロック補助定理は

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^{d} M_i$$

$$M_i = \ker(A - \lambda_i I)^{l_i}$$

$$\dim(M_i) = m_i$$

であることを意味し、Jordan 標準形は**固有値** λ_i **の特徴として普遍部分空間** M_i **を指標** l_i**、代数的多重度** m_i**、幾何的多重度** g_i **の 3 つの数値で表すことができる。**

例えば λ が $m = 7, g = 3, l = 3$ の固有値であれば、λ に付随する Jordan 箱は次の図の 2 つがあり、どちらもブロックの数は $g = 3$ 個あり、対角項の 1 つ上に $l - 1 = 2$ 個以下の 1 を持つ。

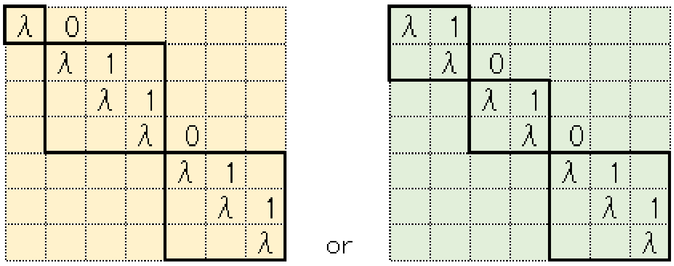

図 5.1: 代数的多重度 $m = 7$, 幾何的多重度 $g = 3$, 指標 $l = 3$ の固有値に付随する Jordan 箱

5.5.4 ジョルダン分解

ジョルダン分解を次の簡単な整数値行列を使っておこなってみよう。

$$A = \begin{pmatrix} 27 & 48 & 81 \\ -6 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

特性多項式が

$$\det |A - xI| = 0$$

から

$$x^3 - 30x^2 + 288x - 864 = (x-6)(x-12)^2 = 0$$

となるので、固有値は

$$x = 6, 12, 12$$

となる。固有値 λ と順に対応した固有ベクトルを横に並べた行列 P は

$$\lambda = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 18 & -9 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。重解があるので固有ベクトルの 1 つに零ベクトルが現れるのに注意する。
従って行列 P の行列式は 0 になる特異行列である。
従って重複があるのでジョルダンの定理 5.9 から、**固有値を対角に並べる行列 J をつくる。**
対角化や固有ベクトルを得る方法と異なり、対角に固有値を並べるのが Jordan 分解の特徴である。
この時重複している固有値を対角に並べ対角項の 1 つ上は 1 にする。

$$J = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 1 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

次に次のように零ではない固有ベクトルを縦に並べて行列 X をつくる。X_1, X_2, X_3 は未知としておく。

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 18 & X_1 \\ -3 & -9 & X_2 \\ 1 & 2 & X_3 \end{pmatrix} \tag{5.24}$$

Jordan の定理から

$$A = XJX^{-1}$$

が成り立つので

$$AX - XJ = 0$$

から未知な X_1, X_2, X_3 を決めると

$$\left\{X_1 \to -3, X_2 \to -9, X_3 \to -\frac{1}{4}\right\}$$

となり、

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 18 & 2 \\ -3 & -9 & -\frac{1}{4} \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

と決めることができる。
これを次章のスペクトル分解で一般化する。

5.6 スペクトル分解

ベクトルでは直交分解が中心であったが、ここでは固有値をつかった分解が重要になる。そこで、まず前節で導入した、スペクトル分解を学ぶ。$\{\lambda_i\}_1^d$ を行列 A の異なる固有値とする。直交射影に対応して、次のようなスペクトル射影が定義できる。

定義. スペクトル射影

スペクトル射影を P_i とは $\oplus_{j \neq i} M_j$ に沿っての不変部分空間 M_i の上への射影である。
この時、次の定理が成り立つ。

定理. スペクトル分解：行列 A はスペクトル分解

$$A = \sum_{i=1}^{d} (\lambda_i P_i + D_i),\ D_i^{l_i} = 0 \tag{5.25}$$

とすることができる。

Proof. Jordan ブロックの定理から

$$A = XJX^{-1}$$

とおける。ただし、J は d 個の Jordan 箱 $\{B_i\}_1^d$ からなるブロック対角行列、B_i は $m_i \times m_i$ 型で、

$$B_i = \lambda_i I_{m_i} + N_i$$

となる。X がエルミートであるとは限らない。
下図のように N_i は対角項の 1 つ上以外の要素が全て 0 で、対角項の 1 つ上には 0 か 1 がある行列である。
X_i は X の列のうち、λ_i に付随する m_i 個の要素からなる列（縦）ベクトルとする。
X_i のベクトルは M_i の基底をなし、式 5.24 のように正方行列 X は m_i 個の列ベクトル X_i からつくられる。

$$X = [X_1, \cdots X_m]$$

一方、X_{i*}^* は X^{-1} の行うち、λ_i に付随する m_i 個の要素からなる行（横）ベクトルとする。

X_{i*}^* のベクトルは M_i の双対基底をなし、正方行列 X^{-1} は m_i 個の行ベクトル X_{i*}^* からつくられる。

$$X^{-1} = \begin{bmatrix} X_1^* \\ \vdots \\ X_{m_i}^* \end{bmatrix}$$

ここではベクトルと行列の表記が類似しているので留意する。

A は下図のような行列である。

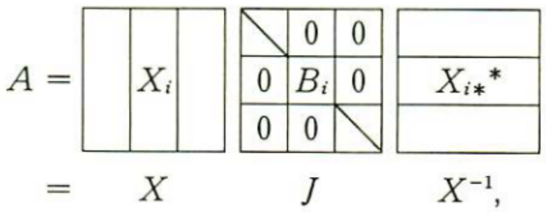

図 5.2: [125] より

この X と X^{-1} の行列ベクトルは面白いことに**積の順番で単位行列** I_m **と、射影行列** Pi が作られる。

これは $(m,1)$ 型の行ベクトル X_{i*}^* と $(1,m)$ 型の列ベクトル X_i のテンソル積になるので積順でスカラーと行列、すなわち作用素が作られる。

$$X_{i*}^* X_i = I_{m_i} \tag{5.26}$$

$$X_i X_{i*}^* = P_i \tag{5.27}$$

このとき、行列 $P_i = X_i X_{i*}^*$ は M_i の上への $\{x \in \mathbb{C}^n; X_{i*}{}^* x = 0\} = \oplus_{j \neq i} M_i\}$ に沿っての**射影**になる。

ただし、$i \leq m$ で単位行列のように次元 m_i に依存しないで m で一定である。

これが λ_i に付随する**スペクトル射影**である。

射影を P_i として、A を成分で表すと、次のようになる。

$$A = \sum_{i=1}^{d} \left(X_i \left(\lambda_i I_{m_i} + N_i \right) X_{i*}^* \right) = \sum_{i=1}^{d} \left(\lambda_i P_i + D_i \right) \tag{5.28}$$

ブロック化の定理から行列 N_i は対角項の 1 つ上に相続く 1 をたかだか $l_i - 1$ 個しかもたない。従って、

$$N_i^{l_i} = 0, D_i^{l_i} = X_i N_i^{l_i} X_{i*}^* = 0$$

となる。 □

例えば次のよう複素平面で回転成分で作られた行列を考えよう。（エルミートではない）

$$A = \begin{pmatrix} e^{\frac{i\pi}{4}} & i & e^{\frac{3i\pi}{4}} & -1 & e^{-\frac{1}{4}(3i\pi)} \\ i & e^{\frac{3i\pi}{4}} & -1 & e^{-\frac{1}{4}(3i\pi)} & -i \\ e^{\frac{3i\pi}{4}} & -1 & e^{-\frac{1}{4}(3i\pi)} & -i & e^{-\frac{1}{4}(i\pi)} \\ -1 & e^{-\frac{1}{4}(3i\pi)} & -i & e^{-\frac{1}{4}(i\pi)} & 1 \\ e^{-\frac{1}{4}(3i\pi)} & -i & e^{-\frac{1}{4}(i\pi)} & 1 & e^{\frac{i\pi}{4}} \end{pmatrix}$$

例. この行列の固有値は 0 と $\sqrt[4]{-1}$ であり、固有ベクトルを横に並べた行列は次のようになる。

$$\lambda = \begin{pmatrix} \sqrt[4]{-1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt[4]{-1} & -i & (3+i)\sqrt[4]{-1} - (2-3i)(-1)^{3/4} & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -(-1)^{3/4} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sqrt[4]{-1} & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

次に Jordan 分解をして

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt[4]{-1} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1-i}{\sqrt{2}} & -i & -\frac{1+i}{\sqrt{2}} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1+i}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1-i}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1+i}{\sqrt{2}} & i & -\frac{1-i}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1-i}{\sqrt{2}} & 1 & \frac{1+i}{\sqrt{2}} & 1+i & -\frac{1-i}{\sqrt{2}} \\ -i & \frac{1-i}{\sqrt{2}} & 2 & \frac{1+i}{\sqrt{2}} & i \\ -\frac{1+i}{\sqrt{2}} & 1-i & \frac{1-i}{\sqrt{2}} & 1 & \frac{1+i}{\sqrt{2}} \\ -1 & -\frac{1+i}{\sqrt{2}} & -i & \frac{1-i}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix}$$

従って、この時は

$$X_2 = \left(0, 0, 0, 1, -\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)$$

$$X_{2*}^{*} = \begin{pmatrix} \frac{1+i}{\sqrt{2}} \\ 1 \\ \frac{1-i}{\sqrt{2}} \\ 1-i \\ -\frac{1+i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

となるので

$$X_2 \cdot X_{2*}^{*} = 1$$

$$X_{2*}^{*} \cdot X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1+i}{\sqrt{2}} & -i \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1+i}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1+i}{\sqrt{2}} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1+i}{\sqrt{2}} & i \end{pmatrix}$$

のようにスペクト射影が求まる。

これに付随して次の関係も有用である。

$$P_i P_j = \delta_{ij} P_j$$

$$D_i P_j = \delta_{ij} D_i$$

$$D_i D_j = 0, (i \neq j)$$

$$AP_i = P_i A = P_i A_i P_i = \lambda_i P_i + D_i$$

$$D_i = (A - \lambda_i I) P_i$$

5.6.1 固有射影

対角化可能な行列 A は固有値 λ_i に対して、不変分空間 M_i が固有部分空間 $\ker(A - \lambda_i I)$ に等しい。
従って、スペクトル射影式 5.28 において

$$l_i = 1, D_i = 0$$

とおける。従って次の定理が成り立つ

定理．固有射影：対角化可能な行列 A は

$$A = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i P_i \tag{5.29}$$

というスペクトル分解を持つ。この時の P_i を固有値 λ_i に付随する**固有射影**という。

共役転置行列を A^* とすると共役転置行列のスペクトル分解を次で定義する。

$$A^* = \sum_{i=1}^{d} \left(\bar{\lambda}_i P_i^* + D_i^* \right) \tag{5.30}$$

これも Jordan 分解から求めることができる。
これは例えば Jordan 標準形を重解がある場合として

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 0 & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

とすると転置複素共役が

$$J^* = \begin{pmatrix} \bar{\lambda} & & & \\ 1 & \bar{\lambda} & & \\ & 0 & \bar{\lambda} & \\ & & 1 & \bar{\lambda} \end{pmatrix}$$

となるので $P = P^{-1}$ を次のような行列として

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

前節の再現のように次で表すことができる。

$$J^* = PJ'P^{-1}$$

ただし、

$$J' = \begin{pmatrix} \bar{\lambda} & 1 & & \\ & \bar{\lambda} & 0 & \\ & & \bar{\lambda} & 1 \\ & & & \bar{\lambda} \end{pmatrix}$$

である。
例えば簡単な例を示すと

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

の固有値が特性多項式

$$(x-1)^2 - 4 = 0$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

よって固有値は $\lambda = 3, -1$ で対応する固有ベクトルが

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

となるので転置複素行列 A^* の固有ベクトルは

$$x_{i*}x_i = 1$$

を満たすように正規化すると

$$x_{1*} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}, x_{2*} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

となる。この時の**固有射影**は

$$\begin{aligned} P_1 &= x_1 x_{1*}^* \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_2 &= x_2 x_{2*}^* \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

したがって式 5.29,5.30 から

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i=1}^{d} \lambda_i P_i \\ &= 3P_1 - 1P_2 \\ &= \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
A^* &= \sum_{i=1}^{d} \bar{\lambda}_i P_i^* \\
&= 3P_1^* - 1P_2^* \\
&= \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

が成り立つ。
行列を使うと双対の操作は直感的になるが、物理も常に双対関係があることは重要である。
これらは 1 つのループを成した存在の、側面をみていることになる。

5.6.2　不変部分空間の基底

ブロック化の定理から λ に付随する不変部分空間 M の基底 X をつくることができる。
ただし、この基底はベクトルではなく、正方行列である。次に
まず、$m \times m$ の **Jordan** 箱を B とする、N は対角行列として、式 5.23 から

$$B = \lambda I_m + N$$

と表すこことができる。部分空間の基底 X を使うとジョルダンの定理 5.8 から

$$A = XBX^{-1}$$

$$AX = XB \tag{5.31}$$

が成り立つことになるので双対基底の関係式

$$X_*^* X = I \tag{5.32}$$

を用いれば

$$B = X_*^* AX \tag{5.33}$$

となる。よって $B = X_*^* AX$ は A の M の上への制限写像 A_{tM}

$$A_{tM} : M \to M$$

を随伴基底 X, X_* に関して表現したものとみなせる。
基底 X_* が生成する部分空間を M_* とすると

$$X_*^* A = BX_*^* or AX_*^* = X_*^* B$$

は M_* が A^* の固有値 $\bar{\lambda}$ に付随する（左）**不変部分空間**であることを意味する。
この部分空間 M と M_* の基底を変換する。この時、式 5.32 の関係を保つようにすればよい。つまり、

$$
\begin{aligned}
X' &= XC \\
X'^*_* &= X_* C^{-1*}
\end{aligned}
$$

とすると

$$AXC = XBC$$

$$AX' = XCC^{-1}BC$$
$$= X'B'$$

ただし、

$$B' = C^{-1}BC$$

となるが、一方で式 5.33 より、

$$B' = C^{-1}X_*^*AXC$$
$$= X_*'^*AX'$$

とかける。従って、B' は新しい基底での表現で、制限写像 A_{tM} を新しい基底に関して、表現しているという。

注意点は B' は変換を受けたので、もはや**上三角行列ではない**。

そこで一般に次の定理が成り立つ。A の 1 つの不変部分空間を M とする。

この基底を行列を X とし、行列 Y, Y' をそれぞれ M, N または M, N' において X に随伴する基底とする。この時、次が成り立つ。

定理．ジョルダンブロック補助定理

$$B = Y^*AX = Y'^*AX$$

Proof. 次のように変形する。式 5.31 から $Y'^*X = I$ となるので

$$B' = Y'^*AX = Y'^*XB = B$$

□

つまり、X の双対基底は一意ではない。双対ベクトルと異なる点である。

5.6.3 Hermite 行列

物理ではもっともよく登場するエルミート行列は次のような性質を持っている。

- 固有ベクトルからなる、正規直交基底を持つ
- スペクトル分解において

$$A = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i P_i$$

に分解できて P_i は直交射影になる。

- ユークリッドノルムが A が正規行列ならば

$$||A||_2 = \rho(A)$$

これは Schur 形をユニタリ行列 Q と、狭義上三角行列 N、対角行列 D として、

$$Q^*AQ = D + A$$

エルミート行列の固有値は次の定理のように最大・最小表現を持てる。

定理. *Hermite* 行列を A とし、その固有値を

$$\mu_1 \leq \mu_2 \cdots \leq \mu_n$$

のように並べる。$k = 1, \cdots, n$ に対して V_k を $\mathbb{C}^k$ の k 次部分ベクトル空間として、

$$\mu_k = \min_{V_k} \max \left(x^* A x ; x \in V_k, x^* x = 1 \right)$$

とかける。これから **Rayleigy** 商として、

$$R(x) \equiv \frac{x^* A x}{x^* x}$$

を定義すると $x^* x = 1$ であるベクトルについて

$$\mu_1 \leq x^* A x \leq \mu_n$$

が成り立つ。

6 レゾルベント

第一部で複素関数とその幾何について詳しくみてきたが、ここでそれらを活かすことになる。
線形代数を表現する行列の固有値を考えると前節のようなスペクトル理論が成り立つが、さらにそれらはレゾルベントという考え方により、行列にも級数展開やコーシーの積分定理、留数定理が使える。
行列と複素関数は物理への応用で興味ある内容をいくつも導いてくれる。

6.1 定義

6.1.1 関数の展開

ここでは行列の展開や極限を考えることになるが、2 次元的な広がりを持つ複素空間は、関数から行列に発展させる場として利用していく。そこで、はじめに、第一部で学んだ複素関数を復習する。
重要なのに**ボルツァーワイエルストラスの定理**がある。

定理. *これは無限遠点を加えて拡張された複素平面上の無限点集合 A は少なくとも 1 つの集積点を持つことをいう。*

があったように、複素平面での無限遠点は特別な役割をした。
A が U に属する**有限個の開集合**で覆われるならこの**集合をコンパクト**と呼ぶ。
よって、**コンパクトな集合は閉集合**であるとも言える。
数列 $\{z_n\}$ が与えられた時、全ての番号 n に対して

$$|z_n| < K$$

が成り立つような**正の整数** K が存在すれば $\{a_n\}$ は**有界**であるという。
また、任意の $\epsilon > 0$ に対して $\omega \neq \infty$ が存在し、**無限個**の n に対して

$$|a_n - \omega| < \epsilon$$

とできれば ω は $\{a_n\}$ の**集積点**という。ここで集積点を A の内点、または境界点となる点とする。
A の集積点ではない点 z_0 は**孤立点**という。孤立点の集合が**離散集合**と呼ばれる。

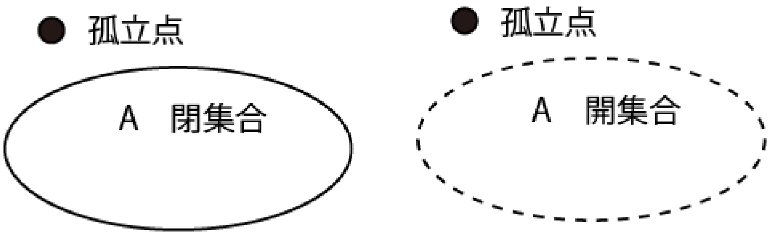

図 6.1: 集積点 A と孤立点

拡張された複素空間は無限遠点を含むので複素平面空間では有界でなくても、任意の閉集合は全てコンパクトである。

無限か有限かが単に数の多さの問題ではないことを理解していく必要がある。

レゾルベントの考え方には収束、発散が重要になる。特に、有限と無限には留意がいる。

第一部でみたように複素平面では無限遠点がどんな領域の外が側にあるので、向きが反対のループがあることに対応する。

つまり無限遠点があればこの点からは **D** のループは反対向きになる **2** 重連結とみなせる。

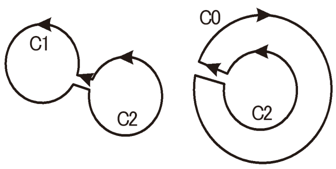

図 6.2: C2 に対して C1 は同じ向きだが C0 は反対向きになる。

正則性とは関数 $f(z)$ が z_0 の近傍 V で連続かつ導関数 $\frac{df(z)}{dz}$ が存在することであった。

そこで、Γ を V の中で z_0 回りを正の向きにまわるように描かれた **Jordan** 閉曲線とする。

これは図のような長さの定義できる単純曲線である。

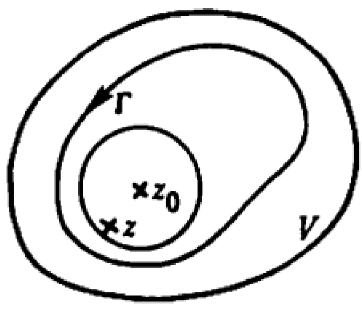

図 6.3: [125] より

従って、このとき、$f(z_0)$ は Cauchy の積分公式から次のように計算できる。

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0}dz$$

これの k 次の微分は

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}}dz$$

となるので、z_0 の近傍で f の Taylor 展開が

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k$$

となるので z_0 を中心に Γ に含まれる任意の円盤内部の全ての z において、一様に絶対収束する。
逆に任意の級数

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

は開円盤 $\{z; |z - z_0| < \rho\}$ において正則な関数になる。ただし、収束半径 ρ は次のような上限で定義する。

$$\rho = \left(\lim_{k\to\infty} \sup |a_k|^{1/k} \right)^{-1} \tag{6.1}$$

である。この級数は $r < \rho$ なる全ての円盤

$$\{z; |z - z_0| \leq r\}$$

上の全ての z において一様に絶対収束する。さらに係数

$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \tag{6.2}$$

がかかるので一意に決まることがわかる。この係数の上限は Cauchy の不等式から

$$|a_k| \leq M r^{-k}, k \geq 0, M = \max_{|z-z_0|=r} |f(z)|$$

となる。そこで f がドーナッツ領域

$$\{z; \alpha < |z - z_0| < \beta\}, \alpha > 0$$

において正則であれば f は z_0 の近傍で Laurent 級数に展開できて、

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_k (a - z_0)^k$$

とできる。これは

$$\{z; \alpha + \epsilon < |z - z_0| < \beta - \epsilon\}, \epsilon > 0$$

の中の全ての z にで一様に収束する。
ある β に対して、f が $\{z; 0 < |z - z_0| < \beta$ の中で正則だが、$\{z; |z - z_0| < \beta$ の中では正則でないとき、この z_0 を f の**孤立特異点**という。
また、Laurent 展開したとき、に $k < 0$ の a^k の中に非零のものが無限個あれば z_0 は**真正特異点**になる。
z_0 が真正特異点ではない、孤立特異点であれば z_0 は f の**極**という。極の**位数**が $a_{-\ell} \neq 0$ であるような最大の整数 ℓ になった。
これは $\log(x)$ と $\exp(x)$ の展開を考えてみるといい、両者のグラフは次のようになる

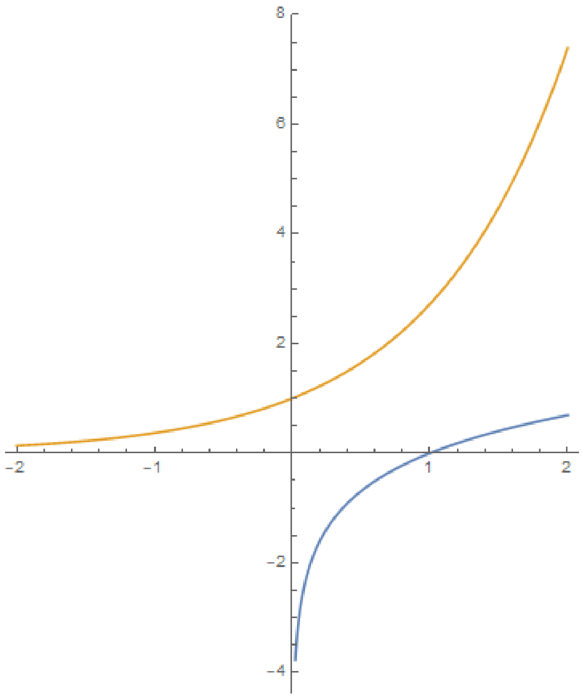

図 6.4: $\log(x)$ と $\exp(x)$ のグラフ：一方は原点で特異点を持つ

しかし、$\log(x)$ の方は明らかに 0 で特異点を持つが $\exp(x)$ は全域で正則である。
このグラフは幾何的には $\pi/2$ 回転させれば移り合う。これは $\exp(x)$ が全平面を 2 分していて、$-\infty$ で収束点があることと同じである。
もし、この特異点と、無限遠の収束点を結ぶことがあるとしたら

$$x^{-\ell}, x^{-\ell+1}, \cdots, 1, \cdots, x^{\ell-1}, x^{\ell}$$

において連続的に

$$\ell \to \infty$$

とすることができる。これは複素平面をもってくることになるので、複素数化は実平面を $\pi/2$ 回転させてつなげることが必要になる。

6.1.2　レゾルベント集合

先の複素関数の展開において特に

$$z^{-1}$$

の係数は重要で前節の式 6.2 から

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta-a|=\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta \tag{6.3}$$

とすると $n=-1$ の時の係数は

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta-a|=\rho} f(\zeta)d\zeta$$

で表すことができた。これが留数となった。これは複素積分において、極めて有向な方法であったが、
物理学においてもさらに重要な意味を持つものになる。

例えば前節のスペクトル理論を別側面から考えることができる。まず、行列 A に発展させて、

$$\frac{1}{(A-zI)} \tag{6.4}$$

を考えると、ある固有値をとると、これは特異点になる。この時の分母は固有方程式そのものになるが、これは

ある z を選んだことになり、さらに領域を広げ、複素数 $z \in \mathbb{C}$ の集合として扱い、この集合を A の**レゾルベント集合**といい、$\mathrm{re}(A)$ で表す。つまり、この集合の中では式 6.4 が存在しているとする。

$$R(A,z) = (A-zI)^{-1}, z \in \mathrm{re}(A) \tag{6.5}$$

を**レゾルベント**と呼ぶ。この時の特性多項式として

$$A\mathbf{x} - z\mathbf{x} = b$$

には一意解があるのでこれを

$$\boldsymbol{x} = R(z)b$$

と書く。ただし、$R(z) \neq 0$ でなくてはいけない。逆に $\mathbb{C}$ における $\mathrm{re}(A)$ の**補集合**を $\mathrm{sp}(A)$ で定義する。

$$\mathrm{sp}(A) = \mathrm{re}(\bar{A}) \tag{6.6}$$

このような z の集合は特別な意味を持つ。$\lambda \in \mathrm{sp}(A)$ とすると、式 6.4 から

$$A - \lambda I = 0$$

となる。これは**逆行列を持たない**という性質を持つ。従って

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

となる $\mathbf{x}$ が存在するので、結局 λ は A の**固有値**である。
つまり、$\mathrm{sp}(A)$ は**特異点で固有値の集合**になる。この関係がレゾルベントを考えるメリットになる。
固有値は物理的には観測量である。これはある離散的な数になるだろう。
そうするとこれと補集合の関係にあるレゾルベントはどういう意味を持つだろうか。
固有値と留数、さらには Green 関数との関係が見えてくるのが重要である。
つまり、無限を含む展開や、足し合わせという気の遠くなる作業において、極限の収束を利用し、
逆を持たないような作用素が残るように、その他の展開項を無視できることでもある。
これは物理学でも重要な示唆を含む。簡単には遠くのものは減衰されて、影響を与えない。本当か？
とおいうことである。
そこで、このレゾルベントの考え方を学ぶことにする。

6.1.3 行列の級数展開

以後では簡単にレゾルベントは複素数 z の引数を持つとして、$R(A) = R(z) = (A-zI)^{-1}$ で表す。
これは第一部でみた複素関数が z, z^{-1} が対蹠点になったように $\mathrm{re}(A)$ と $\mathrm{sp}(A)$ の関係が互いに補であり、逆になっていることに留意する。特に以下でみる $R(z)$ の集合は収束半径 ρ がある時、それより**大きな** z でないと収束しないことになる。

定理. 差から積： *re(A)* の z_1, z_2 に対して、

$$R(z_1) - R(z_2) = (z_1 - z_2)R(z_1)R(z_2) = (z_1 - z_2)R(z_2)R(z_1) \tag{6.7}$$

$re(A_1) \cap re(A_2)$ の z に対して

$$\begin{aligned} R(A_1) - R(A_2) &= R(A_1)(A_2 - A_1)R(A_2, z) \\ &= R(A_2)(A_2 - A_1)R(A_1, z) \end{aligned} \tag{6.8}$$

が成り立つ

Proof. 次の等式をつくると

$$(z_1 - z_2)\, I = (A - z_2 I) - (A - z_1 I)$$

これを式 6.7 に代入すると

$$\begin{aligned} (z_1 - z_2)R(z_2)R(z_1) &= ((A - z_2 I) - (A - z_1 I))\, R(z_2)R(z_1) \\ &= \left((R(A_2)^{-1} - R(A_1)^{-1}\right) R(z_2)R(z_1) \\ &= R(z_1) - R(z_2) \end{aligned}$$

さらに

$$A_2 - A_1 = (A_2 - zI) - (A_1 - zI)$$

を式 6.8 に代入すると

$$\begin{aligned} R(A_1)(A_2 - A_1)R(A_2, z) &= R(A_1)\left((A_2 - zI) - (A_1 - zI)\right) R(A_2) \\ &= R(A_1)\left(R^{-1}(A_2) - R^{-1}(A_1)\right) R(A_2) \\ &= R(A_1) - R(A_2) \end{aligned}$$

となる。 □

これからレゾルベントの差と積の表現を入れ替えることができる。

定理. 展開：$R(z)$ は *re(A)* において正則であり、z_0 の近傍で *Taylor* 展開ができる。

$$R(z_0) = \sum_{k=0}^{\infty} (z - z_0)^k\, R^{k+1}(z_0) \tag{6.9}$$

Proof. $z_0 \in \mathrm{re}(A)$ とすると次のように変形できる。

$$\begin{aligned} (A - zI)^{-1} &= ((A - z_0 I) - (z - z_0)I)^{-1} \\ &= \left(R(z_0)^{-1} - (z - z_0)I\right)^{-1} \\ &= R(z_0)\,(I - (z - z_0)R(z_0))^{-1} \end{aligned}$$

となるがこれは公比 $(z - z_0)R(z_0)$、初項 $R(z_0)$ の無限等比級数の解を表す。
従って、$|z - z_0| < ||R(z_0)||^{-1}$ であるような全ての z に対して、級数

$$R(z) = R(z_0) \sum_{k=0}^{\infty} ((z - z_0)R(z_0))^k \tag{6.10}$$

が絶対収束することを示す。 □

6.2 行列の収束

前章で行列のノルムを定義したのでこれを用いて行列の極限値を次のように定義する。
下限 inf を用いてノルムの根 k 乗をとる。

定理. 極限の存在：次の極限地が存在する。

$$\alpha = \lim_{k\to\infty} ||A^k||^{1/k} = \inf_k ||A^k||^{1/k}$$

Proof. まず、行列のべき乗のノルムの対数を次で定義する。

$$a_k = \log ||A^k||$$

この時、log は単調増加関数なので

$$\frac{a_k}{k} \to \inf_k \frac{a_k}{k} \equiv b = \log\alpha$$

が示せればよい。ここで

$$||A^{m+k}|| \le ||A^m||\,||A^k||$$

の対数をとれば

$$a_{m+k} \le a_m + a_k$$

である。そこで正の整数 m を固定し、q, r も整数で $0 \le r < m$ として、

$$k = mq + r$$

とおく。すると、

$$a_k \le qa_m + a_r$$

$$\frac{a_k}{k} \le \left(\frac{q}{k}\right) a_m + \left(\frac{1}{k}\right) a_r$$

となるので m を固定して $k \to \infty$ とすると、

$$\frac{q}{k} \to \frac{1}{m}$$

となる。従って、任意の m で

$$\limsup \left(\frac{a_k}{k}\right) \le \frac{a_m}{m}$$

従って、

$$\sup \left(\frac{a_k}{k}\right) \le b$$

がいえる。さらに、$a_k/k \ge b$ だから

$$\liminf_k \left(\frac{a_k}{k}\right) \ge b$$

よって、

$$\lim_{k\to\infty} \sup \left(\frac{a_k}{k}\right) \le b \le \lim_{k\to\infty} \inf \left(\frac{a_k}{k}\right)$$

が示せた。
これを利用するとリゾルベントが存在することが示せる。 □

定理. 展開：$|z| > \alpha$ ならば $R(z)$ が存在して

$$R(z) = (A - zI)^{-1} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{z^{k+1}} \tag{6.11}$$

を満たす。

Proof. $k \to \infty$ の時、$||A^k||^{1/k} \to \alpha$ となった。従って、$|z| > \alpha + \epsilon, \epsilon > 0$ であれば、十分大きな k に対して、

$$\frac{||A^k||^{1/k}}{|z|^{-1}} \leq (\alpha + \epsilon)^{-1} \left(\alpha + \frac{\epsilon}{2}\right)$$

となるので

$$\left\| \left(\frac{A}{z}\right)^k \right\| \leq \left(\frac{\alpha + \epsilon/2}{\alpha + \epsilon}\right)^k$$

となる。$k \to \infty$ の時、

$$\left(\frac{A}{z}\right)^k \to 0$$

である。従って級数は $|z| > \alpha$ の時に収束する。従って、無限等比級数になるから

$$\frac{\sum_{k=0}^{\infty} (A/z)^k}{z} = \frac{I}{I - A/z} = \frac{I}{zI - A} = -R(z)$$

となるので定理が示された。 □

これは $z = \infty$ でのテーラー展開とみることができる。この収束半径が

$$\lim_k \sup ||A^k||^{1/k} = \alpha$$

になる。

以上から次の重要な系が成り立つ。

系．リゾルベントの集合 $\boldsymbol{re}(A)$ とその補集合 $\boldsymbol{sp}(A)$ は空集合ではない。

Proof. 背理法をつかう。極限の存在定理から $\mathrm{re}(A) \supset \{z; |z| > \alpha\}$ であり、従って $\mathrm{sp}(A) \subset \{z; |z| \leq \alpha\}$ となる。

極限 α が存在するので $\mathrm{re}(A)$ は空ではない。よって $|z| > ||A||$ に対して、

$$||R(z)|| \leq (|z| - ||A||)^{-1}$$

としてよい。よって

$$|z| \to \infty$$

とすれば

$$||R(z)|| \to 0$$

となるので $R(z)$ は有界である。

従ってもし、$\mathrm{sp}(A)$ が空であれば $R(z)$ は $\mathbb{C}$ 全体において解析的になる。

これは第一部でみたリュービルの定理から有界な関数は定数にならないといけないので $R(z)$ は定数行列になる。

$$R(z) = \mathbf{0}$$

のように、零行列になるしかない。しかし、これは定義式

$$I = (A - zI)R(z)$$

に反する。 □

6.2.1 極限値と固有値

これまでで、行列に極限が存在し、行列の場合は向きを持つので数直線ではなく、複素平面に表現した方が便利であることを見た。一方で行列は固有値を持ち、その固有ベクトルが固有値倍された平行移動になることもみた。

ここで、その極限値 α と固有値 λ の関係をみよう。

式 6.1 を用いて、極限 α について次が成り立つ。$\mathrm{sp}(A)$ は固有値の集合になったから

定理. 極限値と固有値：ある固有値 λ について極限値が固有値の最大値になるものが存在する。

$$\alpha = \max_{\lambda \in sp(A)} |\lambda| = \rho(A) \tag{6.12}$$

Proof. A の固有値が少なくとも 1 つの円 $\{z; |z| = \alpha\}$ の上に存在することを示せばよい。

展開定理から $R(z)$ の収束域は $\{z; |z| > \alpha\}$ である。よって $\alpha > 0$ であれば収束円上に $R(z)$ の特異点が少なくとも 1 つなくてはいけない。一方で、$\alpha = 0$ とすると、

$$\mathrm{sp}(A) = \{0\}$$

となるが、これは先の系と矛盾する。よって収束半径が

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in \mathrm{sp}(A)} |\lambda|$$

となる。この $\rho(A(\lambda))$ を A 収束半径と呼ぶ。 □

これから次の**半連続写像**の定理が成り立つ。

定理. 上半連続：$z \mapsto S(z)$ を G の中の z から $\mathbb{C}^{n\times n}$ の中への連続関数とする。このとき $z \mapsto \rho\left(S(z)\right)$ は G において上半連続になる。

Proof. $k \in \mathbf{N}$ に対して、関数

$$z \mapsto ||S^k(z)||^{1/k}$$

は G において連続である。全ての $\epsilon > 0$ と G との中の全ての z に対して $||S^\nu(z)||^{1/\nu} \leq \rho(S(z)) + \epsilon/2$ となるような $\nu \in \mathbf{N}$ が存在する。よって

$$\forall z' : |z' - z| < \alpha \Rightarrow ||S^\nu(z')||^{1/\nu} \leq \rho(S(z)) + \epsilon/2 \leq \rho(S(z)) + \epsilon$$

となるような $\alpha > 0$ が存在する。

$$\rho(S(z')) = \inf_{k \geq 1} ||S^k(z')||^{1/k}$$

であるから

$$\forall z' : |z' - z| < \alpha \Rightarrow \rho(S(z')) \leq \rho(S(z)) + \epsilon$$

となる。 □

これから次の図のように次の定理が成り立つ。

6.2.2 収束半径

行列は複素平面で考えることにしてきたのだが、ここで複素平面には面白い性質があるのでその 1 つの留数を考えると特異点を含む領域とそれ以外に領域を分けることが重要になる。特異点がなければ、任意の複素積分は 0 になる。

この領域を分けるというのは観測の問題でも重要になる。前節でみたようにレゾルベントの考えには $\mathrm{sp}(A)$ という補集合を固有値集合にとった。この **2 領域問題**は境界の重要性も含めて第 9 部で考察しよう。

ここでは収束半径を使い、単純に円の内外でわける。しかし、円である必要はどこにもない。大雑把に分割するための 1 つの方法である。多次元の格子で距離的空間と独立して、特異点を一気に除ければその分割は、ここでやることと同じ意味を持つ。

まず、等号に留意して、次が成り立つ。

定理. 収束半径： A のスペクトルを含む円盤 $\{z; |z| \le \rho(A)\}$ の**外側**では $R(z)$ は正則である。

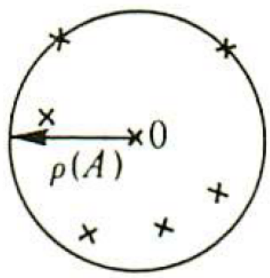

図 6.5: [121] より:特異点は内側（境界を含む）になるので $\rho(A)$ の**外側**では正則になる。

正則性をもつのは特異点のない外側の領域である。

従って、$R(z)$ は z_0 を円の外に選べばこの円盤の外側で式 6.10 のように展開ができる。

$$R(z) = R(z_0)\sum_{k=0}^{\infty}((z-z_0)R(z_0))^k$$

次にこの領域の内側に目を向けると、固有値がいくつか見えるので、その 1 つの λ に注目する。

6.3 射影と部分空間

6.3.1 射影

固有値 λ において

$$|\lambda| \le \rho(A)$$

の近傍において $R(z)$ の **Laurent 展開**を考える。

元々 $R(z)$ は行列なのだが、この展開が可能になるので、次のような積分ができるようになる。

Γ と Γ' が λ を囲む 2 本の Jordan 曲線で、Γ' は図のように Γ の外側にあり、2 曲線とも $\mathrm{sp}(A)$ の中に描かれ、λ 以外の $\mathrm{sp}(A)$ の点を含まないとする。ただし、A の λ 以外のスペクトルは τ と図では書く。つまり、

$$\mathrm{sp}(A) = \{\lambda\} \cup \tau$$

となるように分ける。つまりある固有値 1 つに注目し、これを、他と分けるように境界をつくる。

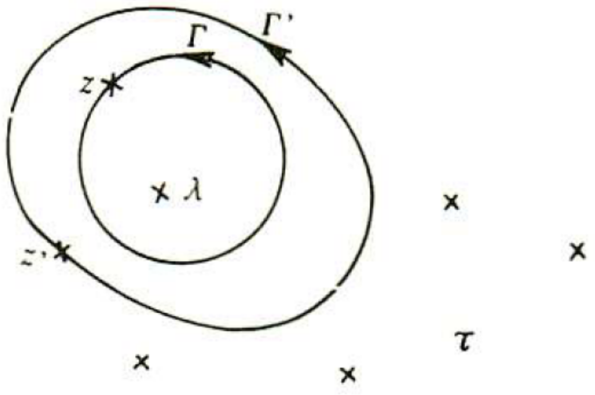

図 6.6: [121] より:λ を囲む 2(本の Jordan 曲線 Γ', Γ

この時に次の演算子 P を考える。この境界に沿ったレゾルベントの複素積分になるが、これは行列である。

$$P = \frac{-1}{2\pi i}\int_{\Gamma} R(z)dz \tag{6.13}$$

これは次の重要な性質を持つ。

1. P は $\bar{M} = \mathrm{kerP}$ に沿っての $M = \mathrm{Im}[P]$ の上への射影である。
2. M も $\bar{M}$ も A の不変部分空間である。
3. $A_{\dagger M}$:$M \to M$ はスペクトル $\{\lambda\}$ を持ち、$A_{\dagger \bar{M}} : \bar{M} \to \bar{M}$ がスペクトル τ を持つ。

Proof. 1. これは $P^2 = P$ となることを示せばよい。$z \in \Gamma, z' \in \Gamma'$ とすると式 6.7 から

$$\begin{aligned} P^2 &= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\Gamma}\int_{\Gamma'} R(z)R(z')dz'dz \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\Gamma}\int_{\Gamma'} \frac{R(z') - R(z)}{z' - z}dz'dz \end{aligned} \tag{6.14}$$

となる。上の図から留数定理がつかえて z', z が Γ', Γ 上にあるので

$$\int_{\Gamma'} \frac{dz'}{z' - z} = 2\pi i, \quad \int_{\Gamma} \frac{dz}{z' - z} = 2\pi i$$

になる。よって

$$\int_{\Gamma'} \left[\int_{\Gamma} \frac{R(z')}{z' - z}dz\right] dz' = \int_{\Gamma'} [0]\, dz' = 0$$
$$\int_{\Gamma} R(z) \left(\int_{\Gamma'} \frac{dz}{z' - z}\right) dz = 2\pi i \int_{\Gamma} R(z)dz$$

これを式 6.14 に代入し、

$$P^2 = \frac{-1}{2\pi i}\int_{\Gamma} R(z)dz = P$$

となり、射影の性質を満たす。 □

次に 2 番目の証明もみておく

Proof. 2.M が A により不変になればよい。先の結果からジョルダン分解 5.27 を使うと次のようにおける。

$$M = \mathrm{Im}[P], \bar{M} = \ker P$$

そこで式 6.7 から

$$AR(z) = R(z)A$$

だったから

$$AP = PA$$

であり、

$$AM \subseteq M$$

となり、不変部分空間になる。次に

$$\bar{M} = \mathrm{Im}(I - P)$$

としても、同様に成り立つから

$$A\bar{M} \subseteq \bar{M}$$

である。 □

6.3.2 ブロック行列

さらに 3 番目は、次のブロック対角化と関係する。

Proof. 3.$\left[X, \bar{X}\right], \left[X_*, \bar{X}_*\right]$ を X と $\bar{X}$ がそれぞれ、M と $\bar{M}$ の基底になるような、$\mathbb{C}^n$ の互いに随伴な基底とする。

この時 $A_{\dagger M} : M \to M$ において基底変換

$$B = X_*^* AX \tag{6.15}$$

と対応させる。すると

$$A_{\dagger \bar{M}} : \bar{M} \to \bar{M}; \bar{B} = \bar{X}_*^* A\bar{X}$$

に対応する。$z \in \mathrm{re}(A), z \notin \Gamma, t \in \Gamma$ とすると式 6.13 より、

$$\begin{aligned} R(z)P &= \frac{-1}{2\pi i} \int_\Gamma R(z)R(t)dt \\ &= \frac{-1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{R(z) - R(t)}{z - t} dt \end{aligned}$$

となる。z を Γ の外側にとったから

$$R(z)P = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma R(t) \frac{dt}{z - t} \tag{6.16}$$

とできて、z に対して正則である。

M と $\bar{M}$ は互いに $\mathbb{C}^n$ の補空間をなす A の不変部分空間だからジョルダンブロックの定理から

A は随伴基底 $\left[X, \bar{X}\right], \left[X_*, \bar{X}_*\right]$ に関して、ブロック対角化できる。つまり

$$\begin{bmatrix} X_*^* \\ \bar{X}_*^* \end{bmatrix} A \left[X, \bar{X}\right] = \begin{pmatrix} B & \vdots & 0 \\ \cdots & + & \cdots \\ 0 & \vdots & B \end{pmatrix} \tag{6.17}$$

であり、

$$\mathrm{sp}(A) = \mathrm{sp}(B) \cup \mathrm{sp}(\bar{B})$$

が成り立つ。
このように行列 A を、対角的に分けた行列を今後**ブロック行列**とし、B で表す。
よって定義式 6.5 から

$$R(z)=(A-zI)^{-1}$$

だから

$$R(z)=\left[X,\bar{X}\right]\begin{pmatrix}(B-zI)^{-1} & 0\\ 0 & \left(\bar{B}-zI\right)^{-1}\end{pmatrix}\begin{bmatrix}X_*^*\\ \bar{X}_*^*\end{bmatrix}$$

である。よって次の関係が成り立つ。

$$P=XX_*^*, I-P=\bar{X}\bar{X}_*^*$$

とすると次の有用な関係式が得られる。

$$R(z)P=X(B-zI)^{-1}X_*^* \tag{6.18}$$

$$R(z)(I-P)=\bar{X}(B-zI)^{-1}\bar{X}_*^* \tag{6.19}$$

これから $(B-zI)^{-1}$ が Γ の外側で正則になる。特に τ **の全ての点において正則**である。
つまり、行列でいえば逆行列をつくれるし、集合的には任意の点を含む閉集合とが開集合が分離できる。
これをレゾルベントの表現で

$$\mathrm{re}\,(B)\supset\tau$$

と書く。一方で $R(z)\,(I-P)$ は Γ の内側で正則になるので

$$\mathrm{re}\left(\bar{B}\right)\ni\lambda$$

となる。よって

$$\mathrm{sp}(B)=\{\lambda\}\,,\mathrm{sp}\left(\bar{B}\right)=\tau$$

になる。 □

これは A がブロック対角化可能であることを示す。重要なのはここでの射影 P は経路 Γ によらず、
$R(z)$ の特異点である固有値 λ にのみ依存していることである。
これは観測の問題と大きく関わる。第 9 部で考察する。

6.3.3 簡単な例

具体的にレゾルベントを積分して、射影演算子を導こう。

例. 例えば次のような行列 A を考える。

$$A(\epsilon)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ \epsilon & 1\end{pmatrix}$$

これは

$$\epsilon\to 0; A\to A(0)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

である。レゾルベントを求めると、
まず、次の特性方程式から、複素数 z として、

$$A(\epsilon)-zI=\begin{pmatrix}1-z & 1\\ \epsilon & 1-z\end{pmatrix}$$

この逆行列をとればよいので

$$R(\epsilon,z)=\frac{1}{A(\epsilon)-zI}=\frac{1}{(1-z)^2-\epsilon}\begin{pmatrix}1-z & -1\\ -\epsilon & 1-z\end{pmatrix}$$

となる。次に $A(\epsilon)$ の固有値は

$$(1-z)^2-\epsilon=0$$

から

$$\lambda_{1\epsilon}=1+\sqrt{\epsilon}$$
$$\lambda_{2\epsilon}=1-\sqrt{\epsilon}$$

となるので、射影を求めるために、それぞれ $\lambda_{1\epsilon},\lambda_{2\epsilon}$ の回りで積分すると留数定理より、

$$\begin{aligned}P_{1\epsilon}&=\frac{-1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}R(z)dz\\&=\frac{1}{2\pi i}2\pi i\mathrm{Res}[R(1+\sqrt{\epsilon})]\\&=\frac{1}{(1-z)-\sqrt{\epsilon}}\begin{pmatrix}-\sqrt{\epsilon} & -1\\ -\epsilon & -\sqrt{\epsilon}\end{pmatrix}\\&=\frac{-1}{2\sqrt{\epsilon}}\begin{pmatrix}-\sqrt{\epsilon} & -1\\ -\epsilon & -\sqrt{\epsilon}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1/\sqrt{\epsilon}\\ \sqrt{\epsilon} & 1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

となる。同様に

$$\begin{aligned}P_{2\epsilon}&=\frac{-1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}R(z)dz\\&=\frac{1}{2\pi i}2\pi i\mathrm{Res}\left(1-\sqrt{\epsilon}\right)\\&=\frac{1}{(1-z)+\sqrt{\epsilon}}\begin{pmatrix}\sqrt{\epsilon} & -1\\ -\epsilon & \sqrt{\epsilon}\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{2\sqrt{\epsilon}}\begin{pmatrix}\sqrt{\epsilon} & -1\\ -\epsilon & \sqrt{\epsilon}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1/\sqrt{\epsilon}\\ -\sqrt{\epsilon} & 1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

従ってこの 2 つの射影は条件

$$P_{1\epsilon}+P_{2\epsilon}=I \tag{6.20}$$

を満たしている。

6.4　縮小レゾルベント

ここで行列 B は式 6.17 で得られた、A のブロック対角化されたもので、1 個の固有値 λ を持つ。

ここで λ **は行列** $\bar{B}$ **の固有値ではない**とする。このときレゾルベント $\left(\bar{B}-\lambda I\right)^{-1}$ が存在し、次の**縮小レゾルベント**が定義できる。これは以下でみるように特別に面白い性質をもっている。

$\left[X,\bar{X}\right],\left[X_*,\bar{X}_*\right]$ を X と $\bar{X}$ がそれぞれ、M と $\bar{M}$ の基底になるような、$\mathbb{C}^n$ の互いに随伴な基底とする

定義. 縮小レゾルベント：行列 $S=\bar{X}\left(\bar{B}-\lambda I\right)^{-1}\bar{X}_*^*$ を**固有値** λ **に対する** A **の縮小レゾルベント**という。この時、

$$\begin{bmatrix}X_*^*\\ \bar{X}_*^*\end{bmatrix}S\left[X,\bar{X}\right]=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \left(\bar{B}-\lambda I\right)^{-1}\end{pmatrix}$$

となる。

さらに次を定義しておく。

$$D = (A - \lambda I)P = X(B - \lambda I)X_*^* \tag{6.21}$$

すると次の定理が成り立つ。

定理. 指標：D べき零になる。つまり式 *4.3* のように、ℓ を固有値 λ の指標として

$$D^\ell = 0$$

となる。

Proof. 任意の正の整数 k に対して、射影の性質から

$$D^k = (A - \lambda I)^k P = X(B - \lambda I)^k X_*^* \tag{6.22}$$

が成り立つ。ここで B はただ 1 つの固有値 λ を持つ。よって式 6.12 から次の半径は 0 になる。

$$\rho(B - \lambda I) = 0$$

また、$N = B - \lambda I$ がべき零になる。つまり、

$$N^\ell = 0, N^{\ell-1} \neq 0 \tag{6.23}$$

となるような正の整数 ℓ が存在する。そこで

$$(A - \lambda I)^\ell X = 0, (A - \lambda I)^{\ell-1} X \neq 0$$

とする。これは固有値 λ の**指標**である。 □

これによって固有値 λ の近傍で $R(z)$ の **Laurent 展開**が次のようにできる。式 6.21 を用いて、

$$R(z) = -\frac{P}{z-\lambda} - \sum_{k=1}^{\ell-1} \frac{D^k}{(z-\lambda)^{k+1}} + \sum_{k=0}^{\infty} (z-\lambda)^k S^{k+1} \tag{6.24}$$

展開に射影演算子 P が入る。

Proof. まず、次の基底変換式 6.15 で B を定義して

$$B = X_*^* A X$$

式 6.11 より

$$\begin{aligned}
(B - zI)^{-1} &= (B - \lambda I - (z-\lambda)I)^{-1} \\
&= -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(B-\lambda I)^k}{(z-\lambda)^{k+1}}
\end{aligned}$$

は $|z-\lambda| > 0$ に対して、収束する。つまり、$z \neq \lambda$ に対して、関係式 6.18 から

$$\begin{aligned}
R(z)P &= (A - zI)^{-1} P = X (B - zI)^{-1} X_*^* \\
&= X \frac{1}{(B - zI)^{k+1}} (B - zI)^k X_*^* \\
&= \sum_{k=1}^{\ell-1} \frac{1}{(z-\lambda)^{k+1}} X (B - zI)^k X_*^* \\
&= -\frac{P}{z-\lambda} - \sum_{k=1}^{\ell-1} \frac{D^k}{(z-\lambda)^{k+1}}
\end{aligned}$$

ここで式 6.22$D = X(B - \lambda I)X_*^*, P = XX_*^*$ と式 6.23 を用いた。
一方で、式 6.19 からは

$$
\begin{aligned}
R(z)(I-P) &= \bar{X}\left(\bar{B} - zI\right)^{-1}\bar{X}_*^* \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(z-\lambda)^k\,\bar{X}\left(\bar{B} - \lambda I\right)^{-k-1}\bar{X}_*^*
\end{aligned}
$$

が λ 近傍における $R(z)(I-P)$ の Taylor 展開である。
つまり、面白いことに縮小レゾルベント $S = \bar{X}\left(\bar{B} - \lambda I\right)^{-1}\bar{X}_*^*$ を用いて

$$
R(z)P + R(z)(I-P) = R(z) = -\frac{P}{z-\lambda} - \sum_{k=1}^{\ell-1}\frac{D^k}{(z-\lambda)^{k+1}} + \sum_{k=0}^{\infty}(z-\lambda)^k S^{k+1} \tag{6.25}
$$

を満たす。 □

これは前節の特性多項式を用いないで、$R(z)$ の位数 ℓ の極 λ が、指標が ℓ で代数的多重度が

$$
m = \dim M
$$

の A の固有値になることを示したことになる。

6.4.1 射影

これまでの内容をまとめ、いくつかの有用な公式を導こう。
第 1 部での **Cauchy の積分公式**から Γ が $\mathrm{re}(A)$ の中にあり、$\mathrm{sp}(A)$ を含む Jordan 曲線で $f(A)$ が sp(A) の近傍で正則ならば

$$
f(A) = \frac{-1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{1}{A - zI}dz
$$

のように表すことができる。Banach 空間における線形作用素の有限多重度の孤立固有値についても同じような方法が知られている。
A のスペクトルが互いに素な 2 つの固有値の部分集合に分解できればこのような方法がとれる。
そこで A の相違なる d 個の固有値を

$$
\{\lambda_i\}_1^d
$$

とする。各 λ_i に付属するスペクトル射影を P_i, 指標を ℓ, べき零行列を D_i, 縮小レゾルベントを S_i と書くことにする。
すると次が成り立つ。

定理. 射影和：スペクトル射影について、

$$
\sum_{i=1}^{d} P_i = I
$$

Proof. Γ を $\{\lambda\}_1^d$を囲む Jordan 曲線とする。$R(z)$ と全 P_i の和は

$$
\sum_{i=1}^{d} P_i = \frac{-1}{2\pi i}\int_{\Gamma} R(z)dz
$$

$R(z)$ が Γ の外側で正則であるから、$R(z)$ の展開式 6.11 から

$$
R(z) = (A - zI)^{-1} = -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{z^{k+1}}
$$

を $z=1/t$ で変数変換すると

$$dz=-\frac{1}{t^2}dt$$

だから $I=(A-zI)R(z)$ の定義式から

$$\sum_{k=0}^{\infty}t^kA^k=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{A}{z}\right)^k=$$

$$\begin{aligned}R(z)dz&=\sum_{k=0}^{\infty}t^{k+1}A^k\frac{dt}{t^2}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}t^kA^k\frac{dt}{t}\end{aligned}$$

となるが、z は十分大きいとすると、$(I-tA)^{-1}\sim I+tA=I+A/z\to I$

$$R(z)dz=\frac{dz}{A-zI}=\frac{1}{t}\cdot\frac{dt}{I-tA}=\frac{I}{t}dt$$

となる。ただし、

$$z=\rho e^{i\theta}\to z^{-1}=\rho^{-1}e^{-i\theta}$$

となるので、この変換により t が Jordan 曲線 Γ' を負の向きに **1** 周する。
従って、

$$\int_{\Gamma}R(z)dz=\int_{\Gamma'}\frac{I}{t}dt$$

$$\begin{aligned}\frac{-1}{2\pi i}\int_{\Gamma}R(z)dz&=\frac{-1}{2\pi i}\int_{\Gamma'}\sum_{k=0}^{\infty}t^kA^k\frac{dt}{t}\\&=\frac{-1}{2\pi i}\int_{\Gamma'}I\frac{dt}{t}\\&=\frac{-2\pi i}{-2\pi i}I=I\end{aligned}$$

が得られる。 □

さらに次も成り立つ。

定理．展開：$z\in re(A)$ とする。この時、一般に次のように展開できる。

$$R(z)=\sum_{i=1}^{d}\left[\frac{-P_i}{z-\lambda_i}-\sum_{k=1}^{\ell_i-1}\frac{D_i^k}{(z-\lambda_i)^{k+1}}\right]$$

Proof. 式 6.25 より縮小レゾルベントから

$$S_iP_i=0$$

になるので $z\in\mathrm{re}(A)$ の時は

$$R(z)=R(z)P_i+R(z)\sum_{j\neq i}P_j$$

とできる。 □

6.4.2 共役

次の共役関係も重要である。

定理．共役：$z \in re(A)$ とする。この時、一般に次が成り立つ。

$$R^*(A,z) = R(A^*,\bar{z})$$
$$P^*(A,\lambda) = P(A^*,\bar{\lambda})$$

Proof. 次の共役関係が成り立つ

$$(A - zI)^* = A^* - \bar{z}I$$

故に

$$R^*(A,z) = R(A^*,\bar{z})$$

がいえる。次に射影の共役関係は λ を A の固有値として、Γ を次の図のように λ を他の固有値から隔離する円

$$\text{Circle}\{z; z - \lambda = \rho e^{i\theta}, 0 \le \theta \le 2\pi\}$$

とする。$\bar{\Gamma}$ を正の向きを持つ Γ に共役な円、Γ^- を Γ の向きを逆にした円とする。

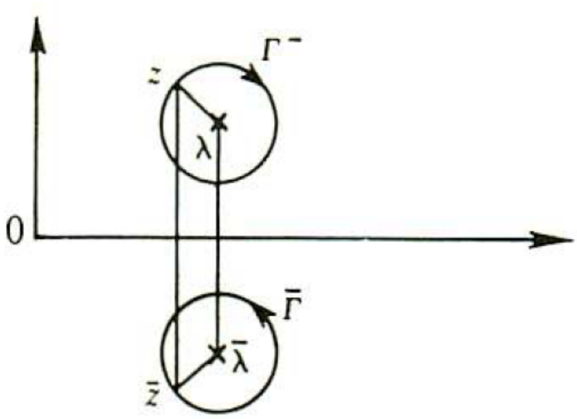

図 6.7: [121] より; 向きの異なる領域内に含まれる互いに共役な固有値

この時、

$$\begin{aligned}
P^*(A,\lambda) &= \left[\frac{-1}{2\pi i}\int_{\Gamma} R(A,z)dz\right]^* \\
&= \frac{-1}{2\pi i}\int_{\Gamma} R^*(A,z)d\bar{z} \\
&= \frac{-1}{2\pi i}\int_{\Gamma^-} R(A^*,\bar{z})d\bar{z} \\
&= \frac{-1}{2\pi i}\int_{\bar{\Gamma}} R(A^*,z)dz \\
&= P(A^*,\bar{\lambda})
\end{aligned}$$

となる。 □

共役をとることが複素平面の領域で向きを反転させていることは第 9 部で扱う観測の理論でも重要になる。

7　微分幾何

7.1　微分形式 R

物理学において外微分は後に生成演算子と関わり双対、内積、テンソルへと導く重要な概念になる。

R^n 上の可微分関数全体を $C^\infty(\mathbf{R}^n)$ とする。次のように微分形式を表すことができでる。生成元を dx として

- 0 次微分形式：関数を表し、なんらかの数字を返す　$f \cdot 1$
- 1 次微分形式：微小な線分を表す。　$\sum_{i=1}^n g_i dx_i$
- 2 次微分形式：初等数学で習った外積を表す。物理では右ねじの法則　$\sum_{i,j=1}^n h_{ij} dx_i \wedge dx_j$

ただし、右ねじの法則のように、次のような反可換性がある。

$$dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i \tag{7.1}$$

3 次元以上の場合には偶置換に対して正、奇置換なら負の符号をつけることにする。従って k 次微分形式の場合独立した生成元の個数 N は 2 項係数を用いて

$$N = C_{nk}$$

である。ただし全体の次元が n であり、

$$0 \leq k \leq n$$

である。k が n を越えたら 0 であり、同じ i, j の添え字を含めば 0 になる。一般には集合 $\{1, \cdots, n\}$ の部分集合 I を考え、

さらにこの I の要素に順番をつける

$$I = \{i_1, i_2, \cdots i_k\},\ \ i_1 < i_2 \cdots < i_k$$

ただし、U 上の可微分関数 $f \in C^\infty$ により微分形式が生成元に作用し

$$\Omega(U) = \oplus_k \Omega^k(U) \tag{7.2}$$

で微分形式全体を表す。

すると一般に**微分形式** ω は

$$\omega = \sum_I f_I dx_I \tag{7.3}$$

ただし、7.1 を一般化し、

$$dx_I \wedge dx_J = \pm dx_{I \cup J}$$

$$dx_I \wedge dx_J = (-1)^{IJ} dx_I \wedge dx_J$$

また関数 $\Omega^0(U)$ の**外微分** df は

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx^i \tag{7.4}$$

であり、これは f の全微分である。1 次以上の微分形式については式 7.3 から次のように ω を置く。

$$\omega = f dx_I \tag{7.5}$$

これに**外微分作用素** d を作用させると

$$d\omega = df \wedge dx_I \tag{7.6}$$

となるからどちらにしてももう一度 d を作用させると

$$\begin{aligned}
d^2 f = d(df) &= d\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx^i\right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} dx^j \wedge dx^i \\
&= \sum_{1\le i\le j\le n}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j \partial x_i}\right) dx^j \wedge dx^i \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d^2\omega &= d(df \wedge dx_I) \\
&= d^2 f \wedge dx_I + (-1)^I df \wedge d(dx_I) \\
&= 0
\end{aligned}$$

である。また、一般に 2 つの微分形式 $\omega \in \Omega^k, \eta \in \Omega^\ell$ があれば外積と外微分との間に

$$d\left(\omega \wedge \eta\right) = \left(d\omega\right) \wedge \eta + \left(-1\right)^k \omega \wedge \left(d\eta\right)$$

が成り立つ。

7.2　交換子積

$F(t)$ が微分可能で連続であるとき

$$\int_a^b \frac{dF}{dt}(s)dt = F(b) - F(a) \tag{7.7}$$

これは微分がわかれば 2 点間の関数の差が計算できることを示す。

そこで n 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ の開集合 U 上の関数として $f_1(\mathbf{x})$,$f_2(\mathbf{x})$,,,$f_n(\mathbf{x})$ があるとき次を **U 上の微分 1 形式** (differrential1-form) とする。

$$f_1 dx_1 + f_2 dx_2 \cdots f_n dx_n$$

U 上には

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots x_n)$$

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, \cdots y_n)$$

$$\mathbf{z} = (z_1, z_2, \cdots z_n)$$

があり、連続的なパラメタ t に対して $\mathbf{y}$ から $\mathbf{z}$ に U 内の次のような曲線を考える。

$$\gamma : [a,b] \to U(\gamma(a) = \mathbf{y}, \gamma(b) = \mathbf{z})$$

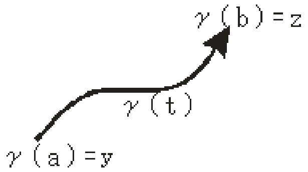

図 7.1: U 上の曲線 γ

このような曲線が存在するためには $f \circ \gamma$ も連続でかつ微分可能であり

$$f(\mathbf{z}) - f(\mathbf{y}) = f(\gamma(a)) - f(\gamma(b)) = \int_a^b \frac{d(f \circ \gamma)}{dt}(t)dt$$

ただし、$\gamma(t) = (\gamma_1, \gamma_2, \cdots \gamma_n)$ として

$$\frac{d(f \circ \gamma)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\gamma(t))\frac{d\gamma_1(t)}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\gamma(t))\frac{d\gamma_2(t)}{dt} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\gamma(t))\frac{d\gamma_n(t)}{dt}$$

のように計算する。従って U が弧状連結ならば次のように関数の差が求まる。

$$f(\mathbf{z}) - f(\mathbf{y}) = \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\gamma(t))\frac{d\gamma_1(t)}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\gamma(t))\frac{d\gamma_2(t)}{dt} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\gamma(t))\frac{d\gamma_n(t)}{dt} \right) dt$$

これは

$$f(\mathbf{z}) - f(\mathbf{y}) = \int_a^b df = \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n \right)$$

において次のように置換積分をしたと考える。

$$dx_n = \frac{d\gamma_n}{dt}(t)dt$$

これを曲線 γ 上の積分と定義して次のようにおく

$$\int_\gamma \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n \right) = \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\gamma(t))\frac{d\gamma_1(t)}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\gamma(t))\frac{d\gamma_2(t)}{dt} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\gamma(t))\frac{d\gamma_n(t)}{dt} \right) dt \tag{7.8}$$

この積分の結果は全微分 df が担う。

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n \tag{7.9}$$

これを微分 1 形式として

$$df = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \cdots + f_n dx_n \tag{7.10}$$

と表すと $dx_1 \cdots dx_n$ は n 次元線形空間の基底とみることができる。
ただし

$$f_n = \frac{\partial f}{\partial x_n} \tag{7.11}$$

である。ある関数 $u(x^1,x^2)$ について

$$\frac{\partial u(x^1,x^2)}{\partial x^1}=a_1(x^1,x^2),\frac{\partial u(x^1,x^2)}{\partial x^2}=a_2(x^1,x^2) \tag{7.12}$$

この微分方程式の積分可能条件は

$$\frac{\partial a_1}{\partial x^2}=\frac{\partial a_2}{\partial x^1} \tag{7.13}$$

で表された。式 7.12 を次のように変形すると

$$du=\frac{\partial u(x^1,x^2)}{\partial x^1}dx^1+\frac{\partial u(x^1,x^2)}{\partial x^2}dx^2$$

$$=a_1dx^1+a_2dx^2$$

さらに微分 1 形式として次のようにおくと

$$\omega=du-a_1dx^1-a_2dx^2 \tag{7.14}$$

この値は 0 になる。dx^iFormula $\partial/\partial x^i$ との内積を次のように表す。

$$\langle dx^i,\partial/\partial x^i\rangle \tag{7.15}$$

この内積を用いて 1 形式 ω と直交する微分演算子 Y を次のように定義する。

$$Y=b^i\frac{\partial}{\partial x^i}+b\frac{\partial}{\partial u}$$

これと式 7.15 から

$$\langle du,\partial/\partial x^i\rangle=0,\quad \langle du,\partial/\partial u\rangle=1$$

を用いると ω の生成系 (ω と直交した微分演算子) として次の 2 つの Y を得る。

$$Y_1=\frac{\partial}{\partial x^1}+a_1\frac{\partial}{\partial u},\quad Y_2=\frac{\partial}{\partial x^2}+a_2\frac{\partial}{\partial u}$$

よって交換子積は

$$[Y_1,Y_2]=\Big(\frac{\partial a_1}{\partial x^2}-\frac{\partial a_2}{\partial x^1}\Big)\frac{\partial}{\partial u} \tag{7.16}$$

となる。これは式 7.13 の積分可能条件を用いると 0 になる。逆にこの交換子積が 0 なら積分可能になる。

ただし、この条件は厳しく一般には交換子積が Y の 1 次式で表されれば積分可能になる。

積分可能条件が成立しない例を次の図で具体的に見てみよう。

次のように U に含まれる長方形 $[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]$ の境界上で 2 つの経路による積分の差 I_1-I_2 を考える。

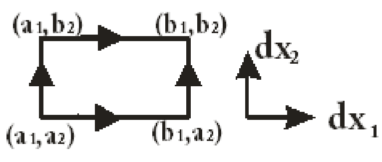

図 7.2: 交換子積の意味

$$I_1=\int_{a_1}^{b_1}f_1(x_1,a_2)dx_1+\int_{a_2}^{b_2}f_2(b_1,x_2)dx_2 \tag{7.17}$$

$$I_2=\int_{a_2}^{b_2}f_2(a_1,x_2)dx_2+\int_{a_1}^{b_1}f_1(x_1,b_2)dx_1 \tag{7.18}$$

$$
\begin{aligned}
I_1 - I_2 &= \int_{a_2}^{b_2} \left(f_2(b_1, x_2) - f_2(a_1, x_2)\right) dx_2 - \int_{a_1}^{b_1} \left(f_1(x_1, b_2) - f_1(x_1, a_2)\right) dx_1 \\
&= \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 dx_2 - \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 dx_1 \\
&\int_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right) dx_1 dx_2
\end{aligned} \tag{7.19}
$$

ここで式 7.11 から

$$
\begin{aligned}
df_1 &= d\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) dx_2 \\
&= \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 \\
&= \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2
\end{aligned}
$$

とおけるので、外積を用いて

$$
df_1 \wedge dx_1 + df_2 \wedge dx_2 = \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2 \tag{7.20}
$$

だから、左辺を次のように書く。ただし、外積表現であるで括弧内はスカラーではないことに注意する。

$$
df = d(f_1 dx_1 + f_2 dx_2) = \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2 \tag{7.21}
$$

さらに演算子 d は微分演算子とみなせば

$$
d(dx_1) = d(dx_2) = 0
$$

として

$$
d(df) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2 = 0 \tag{7.22}
$$

となる。よって微分 1 形式 α で表すと次のようになる。

$$
\int_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]} d\alpha = \int_{[a_1,b_1]\times\{a_1\}} \alpha + \int_{\{b_1\}\times[a_2,b_2]} \alpha - \int_{[a_1,b_1]\times\{b_2\}} \alpha - \int_{\{a_2\}\times[a_2,b_2]} \alpha
$$

これは外微分の表現と面積積分の表現の対応を示している。
微分 2 形式は n 次元ユークリッド空間 U 上において次で表す。

$$
\sum_{1 \leqq i < j \leqq n} f_{ij}(x) dx_i \wedge dx_j \quad (1 \leqq i < j \leqq n)
$$

また、微分 1 形式の外積は次で表す。

$$
\left(\sum_i^n f_i(x) dx_i\right) \wedge \left(\sum_j^n g_i(x) dx_i\right) = \sum_{i,j} f_i(x) g_j(x) dx_i \wedge dx_j
$$

この表現では重複があるので次のように表しても同等である。

$$\left(\sum_i^n f_i(x)dx_i\right)\wedge\left(\sum_j^n g_i(x)dx_i\right)=\sum_{1\leqq i<j\leqq n}\left(f_i(x)g_j(x)-f_j(x)g_i(x)\right)dx_i\wedge dx_j$$

次の時、微分 1 形式は閉形式であるという。

$$d\left(\sum_i^n f_i(x)dx_i\right)=0 \tag{7.23}$$

また**星型の U 上で微分形式が閉形式であれば微分 1 形式は U 上の全微分となる**という重要な関係が示された。

7.3 面積ベクトル

次の図のように 2 つの平面上のベクトルを要素に持つ面積ベクトル A を定義する。

$$A(\vec{a},\vec{b})+A(\vec{a},\vec{c})=A(\vec{a},\vec{b}+\vec{c})$$

この演算を満たすのは行列式だから一般にベクトル u,W について

$$A=\begin{pmatrix} V_x & V_y \\ W_x & W_y \end{pmatrix} \tag{7.24}$$

とかける。

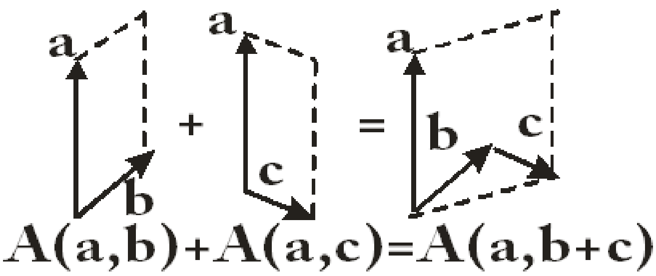

図 7.3: 面積ベクトル

例えば $\omega(0,2),p(0,3)$ 型のテンソルは反対称で次のように表現される。

$$\omega(U,V)=-\omega(V,U)$$

これから

$$\omega(U,V)=\frac{1}{2}\left\{\omega(U,V)-\omega(V,U)\right\}$$

$$p(U,V,W)=\frac{1}{3!}\left\{p(U,V,W)+p(V,W,U)+p(W,U,V)-p(V,U,W)-p(U,W,V)-p(W,V,U)\right\}$$

が成り立つ。

7.4 微分 p 形式

前節の内容は簡単に多次元に拡張できる。
微分 p 形式の外微分は df_i を全微分として次のように表される。

$$d\left(\sum_{i_1<\cdots<i_p} f_{i_1\cdots i_p} dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_p}\right)=\sum_{i_1<\cdots<i_p} df_{i_1\cdots i_p} dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_p}$$

U 上の微分 p 形式 α と q 形式 β について次の関係が成り立つ。

$$d(\alpha\wedge\beta)=d\alpha\wedge\beta+(-1)^p\alpha\wedge d\beta \tag{7.25}$$

微分 p 形式の積分は U 上で κ:$[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_p,b_p]$ の境界上次のようになる。

$$\int_\kappa\left(\sum_{i_1<\cdots<i_p} f_{i_1\cdots i_p} dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_p}\right)=\int_{a_1}^{b_1}\cdots\int_{a_p}^{b_p}\sum_{i_1<\cdots<i_p} f_{i_1\cdots i_p}(\kappa(t_1,\cdots,t_p))dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_p}$$

$$=\int_{a_1}^{b_1}\cdots\int_{a_p}^{b_p}\sum_{i_1<\cdots<i_p} f_{i_1\cdots i_p}(\kappa(t_1,\cdots,t_p))det\begin{bmatrix}\frac{\partial\kappa_{i_1}}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial\kappa_{i_1}}{\partial t_p}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial\kappa_{i_p}}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial\kappa_{i_p}}{\partial t_p}\end{bmatrix}dt_1\cdots dt_p$$

ただし

$$dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_p}=sign\begin{pmatrix} j_1 & \cdots & j_p\\ i_1 & \cdots & i_p\end{pmatrix}dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_p}$$

を用いれば次の順序を考えない形式にしても同じ結果になる。

$$\int_\kappa\left(\sum_{i_1\cdots i_p=1}^{n} f_{i_1\cdots i_p} dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_p}\right)=\int_{a_1}^{b_1}\cdots\int_{a_p}^{b_p}\sum_{i_1\cdots i_p=1}^{n} f_{i_1\cdots,i_p}(\kappa(t_1,\cdots,t_p))dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_p}$$

$$=\int_{a_1}^{b_1}\cdots\int_{a_p}^{b_p}\sum_{i_1\cdots i_p=1}^{n} f_{i_1\cdots,i_p}(\kappa(t_1,\cdots,t_p))det\begin{bmatrix}\frac{\partial\kappa_{i_1}}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial\kappa_{i_1}}{\partial t_p}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial\kappa_{i_p}}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial\kappa_{i_p}}{\partial t_p}\end{bmatrix}dt_1\cdots dt_p$$

さらに α を微分 p 形式とすると

$$\alpha=f_{i_1\cdots i_p}\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_p} \tag{7.26}$$

$$d\alpha=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_{i_1\cdots i_p}}{\partial x_J}\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_p} \tag{7.27}$$

$i_1<\cdots<i_p$ に対して p+1 形式は $j=1\cdots n,\ p<n$ だから

$$\int d\alpha=\int_\kappa\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_{i_1\cdots i_p}}{\partial x_J}\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_p}$$

$$=\int_{[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_{p+1},b_{p+1}]}\frac{\partial f_{i_1\cdots i_p}}{\partial x_J}(\kappa(t_1,\cdots,t_{p+1}))\begin{bmatrix}\frac{\partial\kappa_{i_1}}{\partial t_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial\kappa_{i_1}}{\partial t_{p+1}}\\ \frac{\partial\kappa_{i_1}}{\partial t_{p+1}} & \cdots & \cdots & \frac{\partial\kappa_{i_1}}{\partial t_{p+1}}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \frac{\partial\kappa_{i_p}}{\partial t_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial\kappa_{i_p}}{\partial t_{p+1}}\end{bmatrix}dt_1\cdots dt_{p+1}$$

行列の q 番目を取り出して

$$= \int_{[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_{p+1},b_{p+1}]} \frac{\partial f_{i_1\cdots i_p}}{\partial x_J}(\kappa(t_1,\cdots,t_{p+1}))$$

$$\times\left(\sum_{q=1}^{p+1}(-1)^{q-1}\frac{\partial\kappa_j}{\partial t_p} det\begin{bmatrix} \frac{\partial\kappa_{i_1}}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial\kappa_{i_1}}{\partial t_{q-1}} & \frac{\partial\kappa_{i_1}}{\partial t_{q+1}} & \cdots & \frac{\partial\kappa_{i_1}}{\partial t_{p+1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial\kappa_{i_p}}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial\kappa_{i_p}}{\partial t_{q-1}} & \frac{\partial\kappa_{i_p}}{\partial t_{q+1}} & \cdots & \frac{\partial\kappa_{i_p}}{\partial t_{p+1}} \end{bmatrix}\right) dt_1\cdots dt_{p+1}$$

$$= \sum_{q=1}^{p+1}(-1)^{q-1}\int_{[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_{q-1},b_{q-1}]\times[a_{q+1},b_{q+1}]\times\cdots\times[a_{p+1},b_{p+1}]} \left[f_{i_1\cdots i_p}(\kappa(t_1,\cdots,t_{p+1}))\right]_{t_q=a_q}^{t_q=b_q}$$

$$det\begin{bmatrix} \frac{\partial\kappa_{i_1}}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial\kappa_{i_1}}{\partial t_{q-1}} & \frac{\partial\kappa_{i_1}}{\partial t_{q+1}} & \cdots & \frac{\partial\kappa_{i_1}}{\partial t_{p+1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial\kappa_{i_p}}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial\kappa_{i_p}}{\partial t_{q-1}} & \frac{\partial\kappa_{i_p}}{\partial t_{q+1}} & \cdots & \frac{\partial\kappa_{i_p}}{\partial t_{p+1}} \end{bmatrix} dt_1\cdots dt_{q-1}dt_{q+1}\cdots dt_{p+1}$$

よって式 7.26 から p 形式の差の和の形に表すことができる。

$$\int d\alpha = \sum_{q=1}^{p+1}(-1)^{q-1}\left(\int_{\kappa(\cdots,b_q,\cdots)}\alpha - \int_{\kappa(\cdots,a_q,\cdots)}\alpha\right) \tag{7.28}$$

M を n 次元多様体とし各点 p で接空間 $T_p(M)$ の双対空間を $T_p^*(M)$ で表す。これを**共変接空間** (cotangent space) という。

M の各点 p に対し、$T_p^*(M)$ の各元 ω_p を対応させる規則を **1 次微分形式** (differrential form of degree 1) という。局所座標 $\{x^1,x^2,\cdots,x^n\}$ があり、各点 p で $\{dx^1,dx^2,\cdots,dx^n\}$ が
$\{\frac{\partial}{\partial x^1},\frac{\partial}{\partial x^2},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^n}\}$ に双対な $T_p^*(M)$ の基底を表す。この時次が成り立つ。δ はクロネッカーのデルタとして

$$dx^i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \delta^i_j$$

ただし任意の 1 次微分形式 ω は局所座標 $\{x^1,x^2,\cdots,x^n\}$ の範囲内であれば

$$\omega = \sum_{i=1}^{n}\omega_i dx^i$$

と表すことができる。また、ベクトル場 X は次のように表現できる。

$$X = \sum_{i=1}^{n}\xi^i\frac{\partial}{\partial x^i}$$

これから次のように対角化が可能になる。

$$\omega(X) = \sum_{i=1}^{n}\left(\xi^i\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\omega_i dx^i$$

1 次微分形式についてみてきた。それは共変ベクトル束 T^*M の切断として定義される。よって k 次微分形式は
$\wedge^k T^*M$ の切断として定義できる。つまり k 次微分形式を ω として次の k 回の積からの写像

$$\omega : T_xM \times \cdots_k \times T_xM \to \mathbf{R} \tag{7.29}$$

が存在し、

- $\omega(X_1, X_n \cdots, X_k)$ は $X_1, X_n \cdots, X_k \in T_x$ の内 $k-1$ 個を固定した時、残りの 1 つは線形になる。
- $\omega(X_1, X_n \cdots, X_k)$ は歪対称で入れ替えに対して符号が変わる。
- $X_1, X_n \cdots, X_k$ が微分可能なベクトル場であれば $\omega(X_1, X_n \cdots, X_k)$ は微分可能な M 上関数である。

そこで M 上の k 次微分形式全体を $A^k(M)$ として

$$A(M) = \oplus_{k=0}^{\eta} A^k(M) \tag{7.30}$$

と表すことにする。$\omega \in A^p(M), \omega' \in A^q(M)$ の時、外積 $A^{p+q}(M)$ の元 $(\omega \wedge \omega')$ は

$$(\omega \wedge \omega')(X_1, X_n \cdots, X_{p+q}) = \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\sigma} (sign\, \sigma) \omega(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)} \cdots, X_{\sigma(p)}) \omega(X_{\sigma(p+1)}, X_{\sigma(p+2)} \cdots, X_{\sigma(p+q)}) \tag{7.31}$$

と与えられる。ただし、σ は置換を表し、偶置換なら $(sign\, \sigma) = 1$、偶置換なら $(sign\, \sigma) = -1$ である。またこの時

$$(\omega \wedge \omega') \in A^{p-q}(M)$$

である。たとえば $p = q = 1$ であれば

$$(\omega \wedge \omega')(X, Y) = \frac{1}{2!}(\omega(X)\omega'(Y) - \omega(Y)\omega'(X))$$

である。局所座標系 $\{x^1, x^2 \cdots x^n\}$ を用いると $\left\{dx^1, dx^2 \cdots dx^n\right\}$ が T^*M の基底だから

$$\omega = \frac{1}{p!} \sum a_{i_1 \cdots i_n} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_n}$$

または並べ変えをして外積の定義から

$$\omega = \sum_{i_k < i_{k+1}} a_{i_1 \cdots i_n} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_n}$$

と同じである。関数 f の全微分も次のように 1 次微分形式である。

$$df(X) = X(f) \quad X \in TM$$

局所座標表示では

$$df = \sum \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \tag{7.32}$$

となった。これを拡張して**??**から

$$\begin{aligned} d\omega &= \frac{1}{p!} \sum da_{i_1 \cdots i_n} \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \\ &= \frac{1}{p!} \sum \partial_j a_{i_1 \cdots i_n} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \end{aligned}$$

だからこれを交代化すると

$$d\omega = \frac{1}{(p+1)!}\sum\left(\partial_j a_{i_1\cdots i_p} - \partial_{i_1} a_{j i_2\cdots i_p} - \cdots \partial_{i_p} a_{i_1\cdots i_{p-1} j}\right) dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$$

特に 1 次微分形式であれば

$$\omega = \sum \omega_i dx^i$$

とすると重複に注意して

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum d\omega_i dx^i \\ &= \frac{1}{2}\sum\left(\partial_j\omega_i - \partial_i\omega_j\right) dx^j \wedge dx^i \end{aligned}$$

となる。重要なのは局所座標を用いないで 1 次微分形式を M 上の任意のベクトル X, Y を用いるとができる。ここで簡単にするために接ベクトルと、1 形式を

$$X = \sum \xi^j \frac{\partial}{\partial x^j},\ Y = \sum \eta^i \frac{\partial}{\partial x^i},\ \omega = \sum \omega_k dx^k$$

とすると

$$d\omega = \frac{1}{2}\sum\left(\frac{\partial\omega_i}{\partial x^j} - \frac{\partial\omega_j}{\partial x^i}\right) dx^j \wedge dx^i$$

だから次の成分をみていくと

$$dx^j \wedge dx^i = \eta^i \xi^j$$

とおけるので

$$\begin{aligned} X\omega(Y) - Y\omega(X) &= \sum\left\{\xi^j \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\eta^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right)\omega_k dx^k - \eta^i \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\xi^j \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\omega_k dx^k\right\} \\ &= \sum\left\{\xi^j \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\eta^i\omega_i\right) - \eta^i \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\xi^j\omega_j\right)\right\} \\ &= \sum\left\{\omega_i\xi^j \frac{\partial}{\partial x^j}\eta^i + \eta^i\xi^j \frac{\partial}{\partial x^j}\omega_i - \left(\omega_j\eta^i \frac{\partial}{\partial x^i}\xi^j + \eta^i\xi^j \frac{\partial}{\partial x^i}\omega_j\right)\right\} \\ &= \sum\left\{\omega_j\xi^j \frac{\partial}{\partial x^j}\eta^j - \omega_i\eta^i \frac{\partial}{\partial x^i}\xi^i + \eta^i\xi^j \frac{\partial\omega_i}{\partial x^j} - \eta^i\xi^j \frac{\partial\omega_j}{\partial x^i}\right\} \\ &= \sum\left\{\omega_{ji}\left(\xi^j \frac{\partial}{\partial x^j}\eta^j - \eta^i \frac{\partial}{\partial x^i}\xi^i\right) + \eta^i\xi^j\left(\frac{\partial\omega_i}{\partial x^j} - \frac{\partial\omega_j}{\partial x^i}\right)\right\} \\ &= \omega\left(XY - YX\right) + 2d\omega \end{aligned}$$

となるので結局座標依存しない表示で次が成り立つ。

$$d\omega(X, Y) = \frac{1}{2}\left\{X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y])\right\} \tag{7.33}$$

n 次元多様体 M 上で $r-$ 微分形式を定めることができる。なめらかな環全体の集合を $F(M)$ とすると微分形式全体を $\Omega^r(M)$

$$
\begin{array}{ccc}
r-form & Base & Dimension \\
\Omega^0(M)=F(M) & \{1\} & 1 \\
\Omega^1(M)=T*M & \{dx^\mu\} & m \\
\Omega^2(M) & \{dx^{\mu_1}\wedge dx^{\mu_2}\} & m(m-1)/2 \\
\Omega^3(M) & \{dx^{\mu_1}\wedge dx^{\mu_2}\wedge dx^{\mu_3}\} & m(m-1)(m-2)/6 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\Omega^m(M) & \{dx^{\mu_1}\wedge dx^{\mu_2}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_m}\} & 1
\end{array}
\tag{7.34}
$$

外微分作用素は微分形式を 1 つあげる、逆に内積の作用素は 1 つ下げる。これは素粒子の生成、消滅演算子とも関係が深い。

参考文献 [37] によくまとまった表があるので引用しておく。

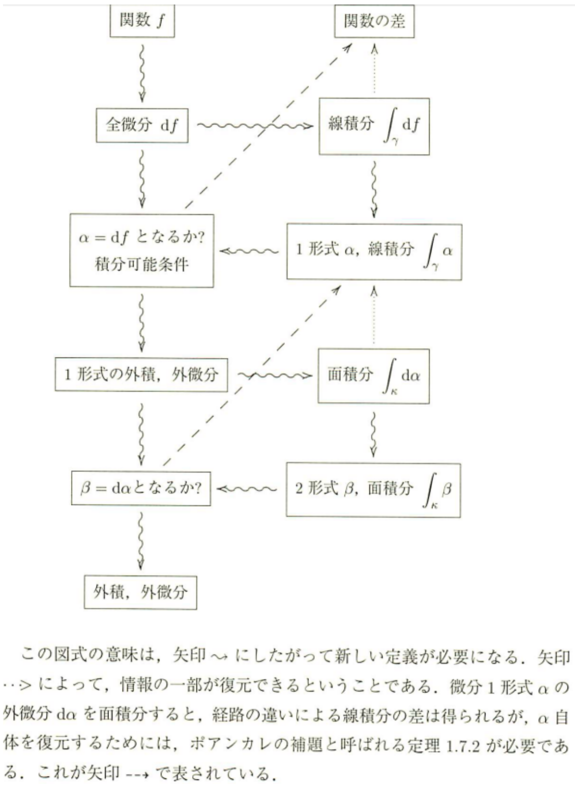

図 7.4: 参考文献 [37] より

8　ベクトル場

8.1　準備

今後有用となるベクトル演算の公式をまとめておこう。

まず、内積は対角和であり、$\mathbf{A}(A_1,A_2,A_3)$, $\mathbf{B}(B_1,B_2,B_3)$ として

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\sum_{i=1}^{3}A_iB_i$$

である。今後はアインシュタインの和を用いて同じ添え字に対しては $\sum$ 記号を省略する。

ベクトルの添え字の変換はクロネッカー δ を用いて

$$A_i = \delta_{ij} A_j$$

となる。ベクトル積は

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_i = \epsilon_{ijk} A_j B_k$$

この ϵ_{ijk} は立派な反対称テンソルで次の置換規則を満たす

$$\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = +1$$

$$\epsilon_{132} = \epsilon_{321} = \epsilon_{213} = -1$$

これは次のような使い方ができる。

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}))_i &= \epsilon_{ijk} A_j (\mathbf{B} \times \mathbf{C})_k \\
&= \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} A_j B_l C_m
\end{aligned}$$

この時 1 文字が共有されていれば

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl} \tag{8.1}$$

が成り立つので先の式は奇置換をすれば

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}))_i &= \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk} A_j B_l C_m \\
&= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) A_j B_l C_m \\
&= B_i A_j C_j - C_i A_j B_j \\
&= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) B_i - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) C_i
\end{aligned}$$

という公式が導けた。
また勾配 gradient についても

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \partial_i$$

で表す。また、発散、回転、ラプラシアンも

$$div\mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \partial_i A_i$$

$$(curl\mathbf{A})_i = (\nabla \times \mathbf{A})_i = \epsilon_{ijk} \partial_j A_k$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \partial_i \partial_i$$

さらに

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

が成り立つ場合には

$$r^2 = x_i x_i$$

であるから

$$2r \partial_i r = 2x_j \partial_i x_j = 2x_j \delta_{ij} = 2x_i$$

であり

$$\partial_i r = \frac{x_i}{r}$$

である。

8.1.1 座標変換

$$\mathbf{v} = \frac{1}{r^2}\mathbf{e_r}$$

とすると

$$\begin{aligned}\int v \cdot d\mathbf{S} &= \int_S \left(\frac{1}{r^2}\mathbf{e_r}\right) \cdot r^2 \sin\theta d\theta d\phi \mathbf{e_r} \\ &= \left(\int_0^{\pi} \sin\theta d\theta\right)\left(\int_0^{2\pi} d\phi\right) = 4\pi\end{aligned}$$

3 次元のベクトルは 3×3 の行列 M によって次のようにかける。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

もし、直交変換であれば

$$M^T M = 1 \tag{8.2}$$

を満たす。

例えば z 軸回りの θ の回転は

$$M = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であり、これは 8.2 を満たす。

これを成分表示すると

$$x'_i = M_{ij} x_j$$

であり、直交条件は

$$M_{ki} M_{kj} = \delta_{ij}$$

さて A と B を共に地球上であれば回転させると重力があるので、その差は歴然であるが重力のないところではこの区別はつかない。座標系を回転させても物理の内容には変化がおきてはならないはずである。これを成分で記述してみよう。次のように A,B を同じだけ回転させる。

$$A'_i = M_{ij} A_j$$

$$B'_i = M_{ij} B_j$$

この積は直交条件 $\delta_{jk} = M_{ij} M_{ik}$ を用いると

$$A'_i B'_i = M_{ij} A_j M_{ik} B_k = A_j B_k \delta_{jk} = A_j B_j$$

と不変である。従って内積が回転によって保たれることになる。この時独立した M の成分は 9 個あるわけだが、対称行列であれば独立した成分は 6 個になる。さらに直交性の条件が加わると独立した成分は

$$9 - 6 = 3$$

しかない。

8.1.2 定義

ベクトル空間 (uector space) は線形空間 (linear space) とも呼ばれ次の公理を満たす。
和の公理

$$x+y=y+x,(x+y)+z=x+(y+z)\,,x+0=x\quad(exist\,0)x+(-x)=0\quad(exist\,Inverce)$$

スカラー倍の公理

$$a(x+y)=ax+by,(a+b)x=ax+bx,(ab)x=a(bx),1x=x\quad(exist\,1)$$

これらを満たす空間をベクトル空間 V で表す。また $\{v_j\}$ をその要素であるベクトルとすると

$$a_1\mathbf{v_1}+\cdots a_k\mathbf{v}_k=0$$

を満たすのが

$$a_1=\cdots=a_k=0$$

に限られる時これらのベクトルは**線形独立** (linearly independent) であるという。また、任意のベクトル $\mathbf{v}$ は

$$\mathbf{v}=a^1\mathbf{e_1}+\cdots a^k\mathbf{e_k}$$

のように基底 $\{\mathbf{e}_j\}$ で表すことができる。この時、各成分は

$$a^i\mathbf{e}_j$$

のように上下の添え字で区別されることに注意する。

8.1.3 核と像

ベクトル空間の次元が次のように決まっているとする。

$$dimV=n$$

また V から W への線形写像 (linear mapping) は次を満たす。

$$f(a\mathbf{X}_1+b\mathbf{X}_2)=af(\mathbf{X}_1)+bf(\mathbf{X}_2)$$

特にに次の部分空間が今後重要になる。線形写像 f について
次の関係を満たす部分空間を**核空間** (kernel) という。

$$\begin{aligned}Ker(f)&=\{\mathbf{X}\in V|f(\mathbf{X})=0\}\\ f(V)&=\{f(\mathbf{X})|\mathbf{X}\in V\}\end{aligned}$$

つまり、図のように W の零元に対応する V の要素が核 Ker(f) である。
また次の関係を満たせば**像空間** (image) という。

$$Img(f)=\{f(V)|f(\mathbf{X})\in W\}$$

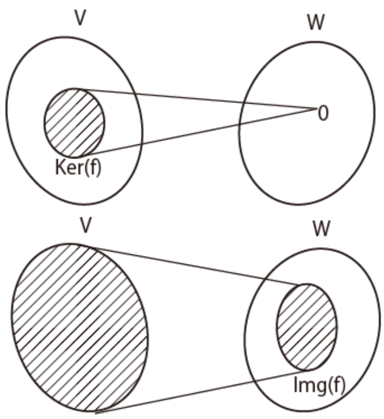

図 8.1: u から W への核と像

簡単な連立方程式で例を示すと像空間は

$$a^{11}x_1 + a^{12}x_2 = y_1$$

$$a^{21}x_1 + a^{22}x_2 = y_2$$

において y_1, y_2 を与えた時に x_1, x_2 が解を持つような W 上の y_1, y_2 の集合が像である。
核とは $y_1 = y_2 = 0$

$$a^{11}x_1 + a^{12}x_2 = 0$$

$$a^{21}x_1 + a^{22}x_2 = 0$$

となる。u 上の x_1, x_2 の集合が核である。

8.2 双対空間 [12]

一般に物理で観測されるものは実数のスカラー値である。これは 1 次元のベクトル R である。
これはベクトル場が成分と基底の組み合わせでできていて、さらにその双対な関係からつくられる。
最も身近な関係は微分と積分である。

$$\frac{\partial}{\partial x} dx \to c$$

これらは物理的な状態の観測から物理量が得られる関係を表している。
観測する側が観測対称の成分を得る場合、実は観測対称は観測者の基底と作用する。
これらの関係をみるためにまず、基本の関係を学ぶ。

8.3 双対変換 [33]

今後便利な表現として横ベクトル (行) を下添え字、縦ベクトル (列) を上添え字で表す。
n 次元のベクトル空間のある数ベクトルを $\mathbf{x} \in V$ として

$$\mathbf{x} = (\mathbf{e_1}, \cdots, \mathbf{e_n}) \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \tag{8.3}$$

と、基底 $\{\mathbf{e}_n\}$ と成分 $\{x^n\}$ ベクトルで表す。さらに別の V' について

$$\mathbf{x} = x'^1\mathbf{e}'_\mathbf{1} + \cdots + x'^n\mathbf{e}'_\mathbf{n}$$

と表すこともできるとすると、基底の変換が

$$\mathbf{e}'_j = p_{1j}\mathbf{e}_1 + \cdots + p_{nj}\mathbf{e}_n$$

とあらわすことができる。この時の変換行列 P は $n \times n$ の正則行列であり

$$\left(\mathbf{e}'_\mathbf{1}, \cdots, \mathbf{e}'_\mathbf{n}\right) = \left(\mathbf{e}_\mathbf{1}, \cdots, \mathbf{e}_\mathbf{n}\right) P \tag{8.4}$$

で表す。
さてこの時に x' と x の関係はどうなるだろうか。式 8.3 から

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} &= \left(\mathbf{e}_\mathbf{1}, \cdots, \mathbf{e}_\mathbf{n}\right) PP^{-1} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \\
&= \left(\mathbf{e}'_\mathbf{1}, \cdots, \mathbf{e}'_\mathbf{n}\right) \begin{pmatrix} x'^1 \\ \vdots \\ x'^n \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{8.5}$$

であるから、座標の変換則は式 8.4 から

$$\begin{pmatrix} x'^1 \\ \vdots \\ x'^n \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$$

であることがわかる。また、基底についての変換も

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}'^1 \\ \vdots \\ \mathbf{e}'^n \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{e}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{e}^n \end{pmatrix} \tag{8.6}$$

次に双対空間を V^* として、双対空間の元を $\alpha \in V^*$ とすると
双対であるとは次のように任意のベクトルに双対基底を作用させた時に成分値を得る仕組みである。

$$\mathbf{e}^i \left(\sum_j^n x^j \mathbf{e}_j\right) = \mathbf{e}^i \left(x^1\mathbf{e}_1 + \cdots + x^i\mathbf{e}_i + \cdots + x^n\mathbf{e}_n\right) = x^i$$

これは単位ベクトルの直交性を利用していて、第 1 部でのフーリエ変換と共通している。
これはクロネッカー δ を用いて

$$\mathbf{e}^i\mathbf{e}_j = \mathbf{e}^{i'}\mathbf{e}'_j = \delta^i_j \tag{8.7}$$

と表す。つまり、座標系の取り方に依存しない。これで上付きが行、下付が列に対応する。
双対空間の元を $\alpha \in V^*$ として

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n) \begin{pmatrix} \mathbf{e}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{e}^n \end{pmatrix}$$

これは式 8.3 の座標と基底の入れ替えになっているので、次のように内積がとれる。

$$\mathbf{x}\cdot\alpha = \alpha\cdot\mathbf{x} = \alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_n x^n \tag{8.8}$$

式 8.6 の転置をとると

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}'^1 \\ \vdots \\ \mathbf{e}'^n \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{e}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{e}^n \end{pmatrix}$$

$$\left(\mathbf{e}_\mathbf{1}^{'}, \cdots, \mathbf{e}_\mathbf{n}^{'}\right) = (\mathbf{e}_\mathbf{1}, \cdots, \mathbf{e}_\mathbf{n})\ {}^tP^{-1}$$

となることに注意する。
つまり、V の基底の取り換えが行列 P の時、双対空間 V^* の基底の取り換えが ${}^tP^{-1}$ でなされる。
後節で一般化するが多様体とはベクトル空間の**開集合**の張り合わせと考えることができる。
この時、接ベクトルと余接ベクトルを局所座標を用いて

$$\sum_{i=1} X^i \frac{\partial}{\partial x^i},\ \sum_{i=1} \alpha_i dx^i$$

と書ける。
つまり $\{\mathbf{e}_i\} = \left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\right\}$, $\{\mathbf{e}_i^{'}\} = \{dx_i\}$ に対応するわけである。
これは**直交関係ではない**ので注意する。
V がベクトル空間であれば線形関係を保つので

$$f(a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2) = a_1 f(\mathbf{v}_1) + a_2 f(\mathbf{v}_2)$$

が成り立つ。また、線形写像であればベクトル和とスカラー倍を保つ。線形写像 f の像は

$$Im\, f : f(V) \subset W$$

であり、f の核は

$$Ker\, f : \{\mathbf{v} \in V | f(\mathbf{v}) = 0\}$$

を満たす。そこで $f : V \to W$ が線形写像であれば次元について

$$dim\, V = dim\, (Ker\, f) + dim(Im\, f)$$

が成り立つ。
$f : V \to K$ をベクトル空間 $V = V(n, K)$ 上の線型関数とする。任意のベクトルは

$$\mathbf{v} = v^1\mathbf{e}_1 + \cdots + v^n\mathbf{e}_n$$

と書けるので線形性を使うと

$$f(\mathbf{v}) = v^1 f(\mathbf{e}_1) + \cdots + v^n f(\mathbf{e}_n)$$

となる。これから線形関数の全体もまた、線形関数になる。

$$(a_1 f_1 + a_2 f_2)(\mathbf{v}) = a_1 f_1(\mathbf{v}) + a_2 f_2(\mathbf{v})$$

このような線形空間は $V(n, K)$ の**双対ベクトル空間**といい、$V^*(n, K)$ で表す。
次元については元の空間に等しく有限であれば

$$dim\, V^* = dim\, V$$

が成り立つ。双対基底を次の関係を見たすようにとる

$$e^{*i}\left(e_j\right)=\delta^i_j \tag{8.9}$$

よって任意の双対ベクトルは

$$f=f_ie^{*i}$$

とかける。よって $\mathbf{v}$ に f が作用すると

$$f(\mathbf{v})=f_ie^{*i}(v^j\mathbf{e}_j)=f_iv^je^{*i}\left(e_j\right)=f_iv^j\delta^i_j=f_iv^i$$

となり内積が得られる。

8.4 ベクトル場

次節での微分形式はベクトル場と双対関係を満たす。。つまりこの 2 つから前節でみたようにスカラー値となる関数がつくられる。この関係ば物理の理論を構成していく上で重要で、この背景には後に詳しく考察していく多様体の考え方が必要になる。つまり、物理現象をつくる背景としはまったく不規則な場ではなく、何か規則があり、組織化されたような背景の上に物理現象があると考える。ここでは単純に実数の n 次元の空間 R^n を考え、その接空間としてベクトル場をみていく。

まず R^n の点 p を始点にもつベクトル場全体を T_pR^n で表す。R^n の標準基底が

$$\{\partial/\partial x^1,\partial/\partial x^2\cdots\partial/\partial x^n\}$$

次のように 1 次の成分を持つベクトル基底、単位ベクトルに対応する。

$$\frac{\partial}{\partial x^1}=\{1,0,\cdots 0\}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^n}=\{0,0,\cdots 1\}$$

のように表される。この時 R^n のベクトル場が

$$X=\sum_{i=1}^{n}X_i\frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$X^i\in C^\infty(R^n)$$

で表される。これは R^n 上のそれぞれの点 p に始点をもつベクトルを一斉に与えることになる。

関数 X^i が R^n の開集合 U 上で定義されている場合 X を U 上の**ベクトル場**という。

例えば次の図は R^2 上のベクトル場である

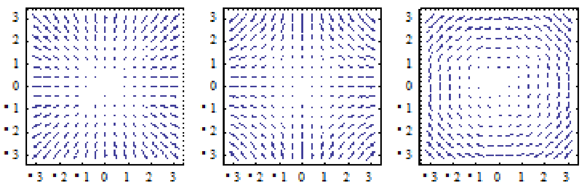

図 8.2: 左から $x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y},x\frac{\partial}{\partial x}-y\frac{\partial}{\partial y},y\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial y}$

これに対して 1 次微分形式 ω は各接平面ごとにそれぞれの線形関数が並んだものだと表現することができる。これもベクトルであるが、縦ベクトルと考える。

$$\omega = \sum g_i dx_i$$

とおけば

$$\omega(X) = \sum_{i,j} g_i dx_i X^j \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum g_i X^i \delta_{ij} = \sum g_i X^i$$

のように演算した結果はスカラーである。

8.5 内積と随伴 [12]

双対空間の基底の関係式 8.9 は大きさが 1 単位の内積をとることになる。

双対の対応を一般化することで自然に内積を導く。ここでは行列 g は正方行列とは限らないことに注意する。

一般的に $g : V \to V^*$ をベクトル空間の同型写像とする。ただし $g \in GL(m, L)$ である。g の成分表示は式 8.4 を発展させ、

$$g : v^j \to g_{ij} v^j$$

となり、内積は次のような対で表すことができる。

$$g(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \equiv \langle g\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$$

これは観測理論からみれば位相空間のある領域を点で代表させる操作でもあるといえる。V, V^* のどちらから見ても共有できる点である。よって

$$g(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = g(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1) \tag{8.10}$$

を要請する必要がある。成分表示では

$$g(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = v_1^i g_{ij} v_2^j$$

である。ここでの添え字の上下は行列の縦、横に対応し、積をつくる際の順序に影響する。

さらに K は実数であるとすれば v のノルムが正にあるように行列 g_{ij} は正定値である必要がある。

従って式 8.10 から行列 g は対称行列である必要がある。

ここで $W = W(m, \mathbb{R})$ を基底 $\{f_\alpha\}$ を持つベクトル空間であり、その同型写像として $G : W \to W^*$ を考える。写像 $f : V \to W$ が与えられとその随伴 (adjoint) として $\tilde{f}$ を次で定義する。

$$G(\mathbf{w}, f\mathbf{v}) \to g(\mathbf{v}, \tilde{f}\mathbf{w})$$

この時、行と列が入れ替わる操作が入っていることに注意し、$v \in V, w \in W$ として成分で表示すると

$$w^\alpha G_{\alpha\beta} f_i^\beta v^j = v^j g_{ij} \tilde{f_\alpha^j} w^\alpha \tag{8.11}$$

となり、f の下添え字は u,w の添え字にかかるように入れ替わる。極短に

$$g_{ij} = \delta_{ij},\ \ G_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$$

であれば随伴は線型変化を伴わず、単に転置の操作と考えることができる。

$$\tilde{f} = f^t$$

次に双対空間で次元が等しくなるかを確認しておく。式 8.11 から元の任意性を考えると

$$G_{\alpha\beta} f_i^\beta = g_{ij} \tilde{f_\alpha^j}$$

であり
$$\tilde{f} = g^{-1} f^t G^t$$
となるが
$$rank\, f = rank\, f^t = rank\,(M f^t N)$$
から
$$dim\, Im\, f = dim\, Im\, \tilde{f}$$
である。随伴の随伴は元にもどる。
$$\underset{\tilde{f}}{\sim} = \underset{g^{-1} f^t G^t}{\sim} = g^{-1}\,(gfG)\, G^t = f$$
複素数の多様体については次部で扱うが V が $\mathbb{C}$ で定義されると内積は $\bar{v}$ を複素共役として
$$g(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \bar{v_1}^i g_{ij} v_2^j$$
となる。内積の正定値性
$$\overline{g(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)} = g(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$$
だから $g : V \to V^*$ は正定値な Hermite 行列になる。Hermite 行列を $\dagger$ で表し、この場合は
$$\tilde{f} = g^{-1} f^\dagger G^\dagger$$

$$dim\, Imf = dim\, Im\tilde{f} \tag{8.12}$$
が成り立つ。
像の次元だけでなく、核の次元についてはに有限次元のベクトル空間であれば $f : V \to W$ として
$$dim\, Ker\, f - dim\, Ker\, \tilde{f} = dim\, V - dim\, W \tag{8.13}$$
が成り立つ。これは $\tilde{f} : W \to V$ として
$$dim\, V = dim\, Ker\, f + dim\, Im\, f$$
だから
$$dim\, W = dim\, Ker\, \tilde{f} + dim\, Im\, \tilde{f}$$
よって式 8.12 を使えば式 8.13 が導かれる。

8.6 ベクトル場と微分形式 [11]

微分形式の生成元 $\partial/\partial x$ と微分形式の生成元 dx から $\mathbb{R}^n$ の数を次のように定義できる。
$$dx_i \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \delta_{ij}$$
これから一般に、1 次微分形式を $\omega = \sum g_i dx_i$, ベクトル場を $v = \sum a_i \partial/\partial x_i$ とすると、点 p を選べば
$$\omega_p\,(v) = \sum g_i(p) a_i$$
という関数 ω_p が得られる。この関数を接平面 $T_p\mathbb{R}^n$ 上の関数と考える。
次にこの点 p を動かせば各接平面ごとに
$$\omega_{p'} : T_q\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

が得られる。これは 1 次微分形式

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} g_i dx_i$$

前節のベクトル場

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

を代入して

$$\omega(X) = \sum_i g_i X_i \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^n)$$

が得られる。留意すべきは、接平面の接点における接線の傾きを得るのではなく、

この接点をある長さ動かした時に、ある数が決まることにある。

簡単には微小長さと、傾きのセットから高さという数値を得ることで、傾きだけからは、この高さを得ることはできない。

さらに、重要なのは 1 形式が

$$df = \omega$$

とおけるので点 p を固定し、$T_p\mathbb{R}^n$ の部分空間を接点での値

$$H = \{v \in T_p\mathbb{R}^n | \omega(v) = 0\}$$

で定義する。つまり、傾きが v になるような点 p からの移動を $p + tv$ とすれば関数 f により

$$df(v) = \sum v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \frac{d}{dt} f(p + tv)|_{t=0} \tag{8.14}$$

となる。これは f による方向微分である。（詳しくは後節で扱う）留意点は v が 0 なわけではなく、

$v \in H$ であれば方向微分は 0 であり、点 p を通り、$f = Const.$ で定義される曲面に v が接していることを表す。

これは高次の場合にも発展できる。

$$dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}\left(v^1, v^2, \cdots v^k\right) = \sum_{\sigma \in S_k} sgn(\sigma)\, dx_{i_1}\left(v^{\sigma(1)}\right) \cdots dx_{i_k}\left(v^{\sigma(k)}\right)$$

ただし、S_k は $\{j = 1, 2, \cdots k\}$ の置換全体の集合を表す。置換の符号 σ に対し、$sgn(\sigma) = \pm 1$ である。

生成元が $dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$ となったのでこれは k 個の直積

$$T_p\mathbb{R}^n \times \cdots \times T_p\mathbb{R}^n$$

がつくる多重線形関数である。次元が n であれば $k = n$ は $k = 1$ と同様に 1 重になる。

8.7 テンソル積

ベクトルの和はベクトルをつくる。しかし、ベクトルの積はどうなるか、先の議論を延長して考えてみよう。はじめに

$$(V^*)^* = V$$

という自明と思える関係を証明することを考えよう。自明であることを示すのはしばしば難であり、重要である。

$$\phi : V \to (V^*)^*$$

を

$$(\phi(\mathbf{x}))\, f = f(\mathbf{x}), \quad f \in V^*$$

で定義しよう。もし、$\phi(\mathbf{x})=\mathbf{0}$ ならば任意の $f\in V^*$ に対して $f(\mathbf{x})=0$ であるから $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ であるので ϕ は単射である。

さらに $dimV=dimV^*=dim(V^*)^*$ であるから ϕ は同型である。

$V_1\cdots V_p$ を実ベクトル空間として

$$V_1^*\otimes\cdots\otimes V_p^*=\{f:V_1\times\cdots\times V_p\to\mathbb{R}\}$$

次を満たす時、**p 次線形**という。

$$f(\mathbf{x}_1,\cdots\lambda\mathbf{x}_i+\lambda'\mathbf{x}'_i,\cdots\mathbf{x}_p)=\lambda f(\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_i)+\lambda' f(\mathbf{x}'_i,\cdots\mathbf{x}_p)$$

を満たす。この時の $V_1^*\otimes\cdots\otimes V_p^*$ を $V_1^*,\cdots,V_p^*$ の**テンソル積**という。

このテンソル積は

$$\mathbf{e}_1^{j_1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{e}_p^{j_p}\in V_1^*\otimes\cdots\otimes V_p^*$$

をとると、式 8.8 と同様に双対の関係を定義できる。

$$\mathbf{e}_1^{j_1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{e}_p^{j_p}\left(\sum_{j=1}^{n_1}x_1^j\mathbf{e}_{1j},\cdots\sum_{j=1}^{n_p}x_p^j\mathbf{e}_{pj}\right)=x_1^{j_1}\cdots x_p^{j_p}$$

であるから $\mathbf{e}_1^{j_1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{e}_p^{j_p}$ は $V_1^*\otimes\cdots\otimes V_p^*$ の基底である。この式の左辺が成分のかけ算になる。

例えば式 8.7 を用いて 3 次元の場合で示すと

$$\mathbf{e}_1^1\otimes\mathbf{e}_2^2\otimes\mathbf{e}_3^3\left(x_1^1\mathbf{e}_{11},\left(x_2^1\mathbf{e}_{21}+x_2^2\mathbf{e}_{22}\right),\left(x_3^1\mathbf{e}_{31}+x_3^2\mathbf{e}_{32}+x_3^3\mathbf{e}_{33}\right)\right)=x_1^{j_1}\cdots x_p^{j_p}$$

となり、大括弧内の各成分の右端部分が掛けあわされて残る。その結果成分のかけ算が出現する。

しかし次元に関しては全体で

$$dimV_1^*\otimes\cdots\otimes V_p^*=n_1\times\cdots\times n_p$$

である。

さらに $V=(V^*)^*$ だったから $V_1=\cdots V_2$ の時、$V_1^*\otimes\cdots\otimes V_p^*\to\otimes^pV^*$ と表すことにすると

p 次対称テンソルとして任意の i,j について

$$S^pV^*=\{f\in\otimes^pV^*|f(\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_i,\cdots\mathbf{x}_j,\cdots,\mathbf{x}_p)=f(\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_j,\cdots\mathbf{x}_i,\cdots,\mathbf{x}_p)\}$$

が成り立ち、p 次交代テンソルとして

$$\wedge^pV^*=\{f\in\otimes^pV^*|-f(\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_i,\cdots\mathbf{x}_j,\cdots,\mathbf{x}_p)=f(\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_j,\cdots\mathbf{x}_i,\cdots,\mathbf{x}_p)\}$$

が成り立つ。また、一般に p 次交代テンソルの元は

$$\mathbf{e}^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathbf{e}^{i_p}:=\sum_{\sigma\in S_p}sgn(\sigma)\mathbf{e}^{i_{\sigma(1)}}\otimes\cdots\otimes\wedge\mathbf{e}^{i_{\sigma(p)}}$$

の 1 次結合として表すことができる。ただし、S_p は p 次対称群で、例えば

$$\mathbf{e}^i\wedge\mathbf{e}^j=\mathbf{e}^i\otimes\mathbf{e}^j-\mathbf{e}^j\otimes\mathbf{e}^i$$

である。例えば実ベクトル空間の内積は 2 次対称テンソルである。

また、行列式は n 次交代テンソルである。

$V\otimes V^*$ の元は自然に V の 1 次変換全体と同一視できる。例えば

$$e\otimes\alpha\in V\otimes V^*$$

と $v \in V$ に対し、

$$(e \otimes \alpha)(v) = (\alpha(v))\, e \in V$$

によって $e \otimes \alpha$ は V の一次変換とみなすことができる。これを自己準同型 (endomorphism) といい、

$$V \otimes V^* =: End(V)$$

で表す。V の基底を $\mathbf{e}_1, \cdots \mathbf{e}_n$ とすると、行 i 列 j 成分を

$$A = (a^i_j)$$

で表すと自己準同型によって

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n} \mathbf{e}_i \otimes a^i_j \mathbf{e}^j \right)(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} \mathbf{e}_i a^i_j x^j$$

である。

従ってテンソル積は双対空間からつくられる。p 個の双対ベクトルと q 個のベクトル積を $\mathbb{R}$ へ写す線形写像を**テンソル (tensor)** と定義できる。(p,q) 型のテンソルを

$$T : \overset{p}{\otimes} V^* \overset{q}{\otimes} V \to \mathbb{R}$$

で定義すればこらまでの縦ベクトル v^* は $(0,1)$ 型のテンソルであり、横ベクトル v は $(1,0)$ 型のテンソルである。

また、ベクトル空間 V, W を写す写像 $f : V \to W$ は $(1,1)$ 型のテンソルになる。

8.8 Hodge 作用素

n 次元外微分空間において次元の裏をとるような線形写像

$$* : \wedge^p V^* \to \wedge^{n-p} V^*$$

を考える。これは前節の微分幾何で登場した Hodge 作用素と呼ばれる。

この作用素の特徴は座標系の選び方に依存しないことである。つまり、**トポロジー的な表現**になっている。

はじめに $p = 0$ の場合は V の基底を $\mathbf{e}_1, \cdots \mathbf{e}_n$ に対応し、双対な基底を

$$* 1 = \mathbf{e}^1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}^n \tag{8.15}$$

とおく。これは体積要素表している。これを拡張して

$$* : \wedge^0 = \mathbb{R} \to \wedge^n V^*$$

と定義する。この定義は基底の取り方に依存しない。

次に $p \geq 1$ として $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_{n-p} \in V$ に対して

$$* \left(\mathbf{e}^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}^{i_p} \right)(\mathbf{v}_1, \cdots \mathbf{v}_{n-p}) = (*1) \left(\mathbf{e}_{i_1}, \cdots \mathbf{e}_{i_p}, \mathbf{v}_1, \cdots \mathbf{v}_{n-p} \right)$$

のように定義する。これを線形的に拡張すると、$* : \wedge^p V^* \to \wedge^{n-p} V^*$ が示される。V^* から V への同型写像を μ とする。つまり、

$$\mu : V^* \to V$$

とする。この時、

$$\alpha(\mathbf{v}) = (\mu(\alpha), \mathbf{v}), \ \ \alpha \in V^*, \mathbf{v} \in V$$

とおくと写像 μ の働きは

$$\alpha^i = \sum_{j=1}^{n} a_j^i \mathbf{e}^j$$

に対して

$$\mu(\alpha^i) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^i \mathbf{e}_j$$

のように双対な基底に入れかえるので

$$\begin{aligned}\left(*\left(\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^p\right)\right)(\mathbf{v}_1, \cdots \mathbf{v}_{n-p}) &= (*1)\left(\mu(\alpha^1), \cdots \mu(\alpha^p), \mathbf{v}_1, \cdots \mathbf{v}_{n-p}\right) \\ &= (*1)\left(\sum_{j=1}^{n} a_j^1 \mathbf{e}_j, \cdots \sum_{j=1}^{n} a_j^p \mathbf{e}_j, \mathbf{v}_1, \cdots \mathbf{v}_{n-p}\right)\end{aligned}$$

となる。つまり $* : \wedge^p V^* \to \wedge^{n-p} V^*$ は正規直交基底の取り方に依存しない。
$*$ を用いて $\wedge^p V^*$ の**内積** $(\cdot, \cdot)$ が $\wedge^p V^*$ 上の正値 2 次形式であることがわかる。
すなわち $\alpha, \beta \in \wedge^p V^*$ として式 8.15

$$\alpha \wedge *\beta = (\alpha, \beta) * 1 = (\alpha, \beta)\left(\mathbf{e}^1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}^n\right)$$

また、$*$ を 2 回作用させることを考えよう。n 次元であれば

$$*\left(\mathbf{e}^1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}^p\right) = \mathbf{e}^{p+1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}^n$$

であったから

$$**\left(\mathbf{e}^1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}^p\right) = (-1)^{p(n-p)} \mathbf{e}^1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}^p$$

となり、元に完全にもどるわけではない。特に $n = 4, p = 2$ の時は

$$* : \wedge^2 V^* \to \wedge^2 V^*$$

であり、

$$*^2 = 1$$

から ± 1 の 2 つの固有値を持つから、対応する固有関数を $\Lambda^{\pm}$ として次のように直和に分解する。

$$\wedge^2 V^* = \wedge^+ \oplus \wedge^-$$

$\alpha \in \wedge^2 V^*$ も同様にして

$$\alpha = \alpha^+ + \alpha^-$$

と分解する時、$\alpha = \alpha^+$ の時は**自己双対**、$\alpha = \alpha^-$ の時は**反自己双対**という。$n = 4$ の時、$dim \wedge^{\pm} = 3$ だから $\wedge^{\pm}$ の基底は次のように表すことができる。

$$\mathbf{e}^1 \wedge \mathbf{e}^2 \pm \mathbf{e}^3 \wedge \mathbf{e}^4,\ \mathbf{e}^1 \wedge \mathbf{e}^3 \pm \mathbf{e}^4 \wedge \mathbf{e}^2,\ \mathbf{e}^1 \wedge \mathbf{e}^4 \pm \mathbf{e}^2 \wedge \mathbf{e}^3$$

SO_4 のリー環 $\mathfrak{so}4$ は歪対称行列と同型であった。よって $\wedge^2 \mathbb{R}^4$ と同型である。これは SO_4 の $\wedge^2 \mathbb{R}^4$ への作用は $\mathfrak{so}4$ への随伴表現と同値になる。$dim \wedge^{\pm} = 3$ だから $\wedge^2 = \wedge^+ \oplus \wedge^-$ は

$$SO_4 \to SO_3 \times SO_3$$

となり、核は $\{\pm 1\}$ である。リー環での表現は

$$\mathfrak{so}4 \simeq \mathfrak{so}3 \oplus \mathfrak{so}3$$

となる。

前部で紹介した **Hodge 作用素**の微分形式との関係をみていこう。

ユークリッド空間の開集合 U 上の微分 p 形式を $\Omega^p(U)$ のように書くことにする。

例えば完全反対称テンソルの例は電磁気テンソルの空間成分 (磁場) の部分がある。

2 階の反対称テンソルは具体的に次のような形をしている。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & A_3 & -A_2 \\ -A_3 & 0 & A_1 \\ A_2 & -A_1 & 0 \end{pmatrix}$$

この時、独立成分が 3 つしかない。そこで 3 成分を持つベクトルと対応できるだろうと考えられたのが Hodge 作用素*である。星印作用素ともいった。

2 階反対称テンソル A と 3 次元ベクトル V への Hodge 作用素の対応は次のようになる。

$$({}^*V)_i = \frac{1}{2}\sum_{j,k}^{3} \epsilon_{ijk} A_{jk}$$

$$({}^*A)_{ij} = \sum_{k}^{3} \epsilon_{ijk} V_k$$

この対応は 1 対 1 である。従って

$${}^{**}A = A$$

のように戻る。さらに興味あるのは 3 次元の場合で 3 階の完全反対称テンソルは

$$A = a\epsilon_{ijk}$$

という形をしていて独立成分は 1 つしかない。つまりスカラー S と 1 対 1 に対応する。

$${}^*S = \frac{1}{3!}\sum_{i,j,k}^{3} \epsilon_{ijk} A_{ijk}$$

とかける。これは次のように p 次外微分形式と対応する。

内積が定義できれば複素空間上で双対なベクトル場 ω^* を定義できる。これを

$$\omega(X) = g(X, \omega^*)$$

として

$$\omega^a \equiv (\omega^*)^a = g^{ab}\omega_b$$

で表す。これから 1 形式どうしの内積を

$$\langle \omega, \chi \rangle = g(\omega^*, \chi^*) = g^{ab}\omega_a\chi_b$$

で定義できる。つまり、内積は双対変換で保存される。

これは次のよに p 形式にまで拡張できる。

$$\left\langle \omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^2, \chi^1 \wedge \cdots \wedge \chi^p \right\rangle = det \left\langle \omega^j, \chi^k \right\rangle$$

基底表現では

$$\langle \omega, \chi \rangle = \frac{1}{p!}\omega_{a_1a_2\cdots a_p}\chi^{b_1b_2\cdots b_p}$$

となる。さらに p 形式と $n-p$ 形式との間の 1 対 1 の対応が定義でき、この役割を担うのが Hodge 作用素 $*$ である。$\omega \in \Lambda^p$ として $*\omega \in \Lambda^{p-1}$ を任意の $\chi \in \Lambda^p$ に対して

$$*\omega \wedge \chi = \langle \omega, \chi \rangle \, \Omega$$

を満たすものと定義する。成分表示では

$$(*\omega)_{\nu_1 \cdots \nu_{n-p}} = \frac{1}{p!} \varepsilon^{\mu_1 \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_{n-p}} \omega_{\mu_1 \cdots \mu_p}$$

Hodge 作用素については次が成り立つ。$\omega \in \Lambda^p\,, \chi \in \Lambda^p$ として $X, Y \in V$ を任意の $|\eta| \in det(\eta_{ab})$ に対して

- $*1 = \Omega \quad * \Omega = |\eta|$
- $* * \omega = (-1)^{p(n-p)} |\eta| \omega$
- $*\omega \wedge \chi = *\chi \wedge \omega$
- $I_X * \omega = |\eta| X_* \wedge \omega$
- $*I_X * I_Y + I_Y * I_X * = |\eta| g(X, Y)$

9 代数幾何

9.1 Grassmann 代数

次のように自分自身の 2 乗が 0 の性質を持つ数を Grassmann 数 (G 数) という。
これは反交換の性質を示す。

$$\xi^2 = \xi'^2 = 0$$

従って

$$\{\xi, \xi'\} = \xi\xi' + \xi'\xi = 0$$

G 数と反交換なものを G 奇といい、可換なものは G 偶という。べき 0 の性質のためにグラスマン数の関数は次のように書ける。

$$f(\xi) = f_0 + f_1 \xi$$

G 数の積分は次のようになる。ただし積分の測度 $d\xi$ は G 奇とする。

$$\int d\xi = 0, \quad \int \xi d\xi = i$$

積分の測度 $d\xi$ は偶にとれば

$$\int 1 d\xi = 0, \quad \int \xi d\xi = 1$$

である。また

$$\{d\xi, \xi\} = d\xi\xi + \xi d\xi = d\xi^2 = 0$$

よって n 個の自由度がある時は $\xi_1, \xi_2 \cdots \xi_n$ について次の反交換関係が成り立つ。

$$\{\xi_i, \xi_j\} = \{d\xi_i, \xi_j\} = \{d\xi_i, d\xi_j\} = 0$$

Formul 積分も

$$\int \xi_1, \xi_2 \cdots \xi_n d^n\xi = i^n, \quad d^n\xi \equiv d\xi_n \cdots d\xi_2 d\xi_1 \tag{9.1}$$

$$\int \xi_{i1}, \xi_{i2} \cdots \xi_{ij} d^n\xi = 0, \quad 0 \le j < n \tag{9.2}$$

が成り立つ。

9.2 外積代数 [34]

9.3 双斉次

T は複素数体 $\mathbb{C}$ 上の n 次元ベクトル空間とする。従って T の実数体 $\mathbb{R}$ 上の次元は $2n$ である。T から $\mathbb{C}$ 上への実線型写像の全ての集合を F とする。従って T から $\mathbb{C}$ への実線形写像全ての集合を F とすると F は T 上で定義された複素数値関数 $t \to f(t)$ で次の条件を満たす。

$$f(t+t') = f(t) = f(t') \;\; t, t' \in T$$

$$f(\lambda t) = \lambda f(t)$$

F は操作を伴った写像であり、関数ではないので注意する。

$f \in F$ に対し、$\bar{f(t)}$ で複素共役を表すと $t \to \bar{f(t)}$ を $\bar{f}$ と書く。この時写像

$$f \to \bar{f}$$

は F から F への反線型写像になる。一般に**反線型**であるとは 1 つの複素ベクトル空間から他の複素ベクトル空間への写像 $u \mapsto \phi(u)$ が $\forall u, u', \lambda \in \mathbb{C}$ に対し、

$$\phi(u+u') = \phi(u) + \phi(u') \quad \phi(\lambda u) = \bar{\lambda}\phi(u)$$

が成り立つことである。これは関数ではなく、演算操作であることに注意する。

例えば

$$\phi(u) = iu$$

$$\lambda = ic, \;\; c \in R$$

とすれば

$$\phi(u+u') = i(u+u') = \phi(u) + \phi(u')$$

$$\phi(\lambda u) = i(icu) = \lambda \cdot iu = \lambda\phi(u)$$

でこれは線型である。しかし、

$$\phi(iu) = -i\phi(u)$$

とすると

$$\phi(\lambda u) = -i\phi(icu) = -i\phi(cu) = -ic\phi(u) = \bar{\lambda}\phi(u)$$

となり反線型である。

また、$f \in F$ が**実である**とは写像 $t \mapsto f(t)$ が実数値になることで

$$f = \bar{f}$$

が必要十分条件になる。

次に T を T' の双対空間、つまり、T 上の複素線形式の集合とする。T' は全ての $t \in T$ に対して、$f(it) = if(t)$ となる。例えば $a, b \in \mathbb{R}$ として、

$$f(t) = ia + bt$$

とすると複素共役が

$$f(\bar{t}) = -ia + bt$$

となる。恒等的に $f(t) = \overline{f(t)}$ であるためには $a = 0$ である必要があり、この時

$$f(t) = \overline{f(t)} = bt \in \mathbb{R}$$

である。また、

$$f(t) = at - iat$$

とおくと

$$f(it) = at + iat$$

$$if(t) = at + iat$$

であり、線型である。ここで F から F への写像 $f \mapsto \bar{f}$ による T' の像を T'' とすると T'' は T から $\mathbb{C}$ への反線型写像の集合

$$f(it) = -if(t)$$

となるような $f \in F$ の集合で反線型になる。例えば

$$f(t) = at^3$$

とおくと

$$f(it) = -iat^3$$

$$if(t) = iat^3$$

であり、反線型である。

しかし、T', T'' 共に F の複素ベクトル部分空間である。ただし

$$T \leftrightarrow T' : \text{双対}$$

$$T \leftrightarrow T'' : \text{反双対}$$

であり、T' から T'' への 1 対 1 の反線型写像が $f \mapsto \bar{f}$ で T, T'' の実次元は共に $2n$, 複素次元は n である。また、

$$T' \cap T'' = \{\emptyset\}$$

である。$f \in F$ として

$$f'(t) = f(t) - if(it)$$

$$f''(t) = f(t) + if(it)$$

とするとこれらは

$$f' \in T', \ \ f'' \in T''$$

$$2f = f' + f"$$

となる。これから T から $\mathbb{C}$ への実線形写像 F は複素ベクトル空間で表すことができて、$T'(z_1, \cdots z_n)$ と $T''(\bar{z}_1, \cdots \bar{z}_2)$ の直和になるので F の基底が

$$F\{z_1, \cdots z_n, \bar{z}_1, \cdots \bar{z}_2)$$

で表されることを示している。この代数を外積代数を用いて $\bigwedge F$ で表す。

T' と T'' の外積代数 $\bigwedge T, \bigwedge T'$ は $\bigwedge F$ に自然に埋め込まれた形となる。斉次数を a として

$$F_{a,0} = \bigwedge^a T',\ F_{0,a} = \bigwedge^a T''$$

で表し、$\bigwedge F$ の部分空間を $F_{a,b}$ で表す。このときの (a, b) の組を**双斉次数**という。$F_{a,b}$ の基底は次のように表すことができる。

$$(z_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge z_{\alpha_a}) \wedge (\bar{z}_{\beta_1} \wedge \cdots \wedge \bar{z}_{\beta_b}) \tag{9.3}$$

$$(1 \le \alpha_1 < \cdots < \alpha_a \le n)$$

$$(1 \le \beta_1 < \cdots < \beta_b \le n)$$

つまり $\bigwedge F$ は $F_{a,b}$ の直和になる。これはある $u \in \bigwedge F$ をとると総斉次数 (a, b) の元 $u_{a,b}$ の和として一通りに表すことができる。ベクトル空間を定義したのと同様に任意のベクトルを有限の成分和で表すことがきたわけである。

よって $\bigwedge F$ から部分空間への**射影**が定義できて、

$$P_{a,b} : u \mapsto u_{a,b} \tag{9.4}$$

とする。$\bigwedge F$ の p 次斉次元は T を基礎空間として実ベクトル空間上の複素 p 次共変ベクトルとして表すことができて

$$P_P = \bigwedge^P F = \sum_{a=0}^{p} P_{a,p-a}$$

で表すことができる。双対空間に拡張してベクトル場からテンソル場のように扱うことができるわけである。$P_p u$ は u の p **次斉次成分**という。

ここで $\bigwedge F$ を基礎空間とする、ベクトル空間の自己準同型写像を L で表す。

全ての a, b に対して

$$L(F_{a,b}) \subset F_{a+r,b+s}$$

が満たされるとき、**双斉次** (r, s) であるという。例えば $\omega \in F_{r,s}$ であれば $u \mapsto \omega \wedge u$ は $\bigwedge F$ の双斉次 (r, s) の**自己準同型**であるという。

9.4 実 p 次外積形式

第 1 節の同型群 1.1,1.2 で見たように順同型な写像が定義できることは代数的の操作ができることになる。これから接続の理論に話を展開できる。

そこで G をベクトル空間 T の自己準同型群とする。このとき G は可逆な n 次複素正則行列の作る群に同型である。各元 $X \in G$ は双対空間 T' の自己同型 X' と T'' の自己同型 X'' について $F = T' + T''$ に対応し、

$$X' =^t X,\ X'' =^t \bar{X}$$

と表す。すると X_1 は各 $F_{a,b}$ の自己準同型を引き起こす。これは X_1 が射影 $P_{a,b}$ と可換であるということである。特に自己同型写像 X を

$$t \mapsto it$$

として、対応する $\bigwedge F$ の自己同型写像 X_1 を C と書くことにすると C は双対性から $F_{a,b}$ 上に自己同型写像

$$u \mapsto i^{a-b} u$$

を引き起こす、すなわち、C は次のように書けることになる。

$$C = \sum_{a,b} i^{a-b} P_{a,b} \tag{9.5}$$

これは G の逆群 $X \mapsto X_1$ が $\bigwedge F$ の自己同型群の表現で可約になっている。空間 $F_{a,b}$ に引き起こす表現の和になっている。$F_{a,b}$ 上の表現は既約である。

F の実元の集合を F_0 とする。すると F_0 は実ベクトル空間で T を基礎空間とする実ベクトル空間の双対空間になる。各成分を $z \in F$ とすると

$$z = x + iy,\ (x, y \in F_0)$$

と一通りで表すことができ、このとき

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2},\ y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

が実座標に対応する。さらに T' の基底を $\{z_1, \cdots, z_n\}$ とし、

$$z_\alpha = x_\alpha + iy_\alpha (x_\alpha, y_\alpha \in F_0,\ 1 \leq \alpha \leq n)$$

とすると双対基底は

$$\bar{z}_\alpha = x_\alpha - iy_\alpha$$

であり、$(x_1, y_1, \cdots, x_n, y_n)$ が F の $\mathbb{C}$ 上の基底となる。よってこの基底から $\bigwedge F$ が生成され、$f \in F$ は

$$f = \sum_\alpha (\xi_\alpha x_\alpha + \eta_\alpha y_a),\ (\xi_\alpha, \eta_\alpha \in \mathbb{C})$$

のように一通りに書ける。$\bar{f} = f$ であれば実空間 $f \in F_0$ であり

$$(x_1, y_1, \cdots, x_n, y_n)$$

が $\mathbb{R}$ 上の F_0 の基底である。これから実ベクトル空間 F_0 の外積代数 $\bigwedge F_0$ は

$$(x_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge x_{\alpha_r}) \wedge (y_{\beta_1} \wedge \cdots \wedge y_{\beta_r})$$

の形の基底も持つが、これらは $\bigwedge F$ の $\mathbb{C}$ 上の基底にもなる。この外積代数の次元は T を基礎空間とする実ベクトル空間上の**実 p 次外積形式**と呼ばれる。この時の $\bigwedge F_0$ は F_0 の元の外積実係数 1 次結合からなる $\bigwedge F$ の部分空間に一致する。$u, \bar{u} \in \bigwedge F,\ v, \omega \in \bigwedge F_0$ として

$$u = v + i\omega$$

$$\bar{u} = v - i\omega$$

とおけば、写像 $u \mapsto \bar{u}$ は反線型で環 $\bigwedge F$ の自己同型で $f \mapsto \bar{f}$ の拡張となっている。

逆にこの性質から写像 $u \mapsto \bar{u}$ は特徴つけられる。$u \in \bigwedge F$ が実で $u \in \bigwedge F_0$ であるための必要十分条件は

$$u = \bar{u}$$

であることである。

またこの写像 $u \mapsto \bar{u}$ は全ての a, b に対して $F_{ab} \mapsto F_{b,a}$ への 1 対 1 の反線型写像を引き起こす。これは

$$\overline{P_{a,b}u} = P_{b,a}(\bar{u})$$

と表現できて、簡単に $\bar{P}_{a,b} = P_{b,a}$ と表す。よって $u \mapsto \bar{u}$ は $F_{a,a}$ から $F_{a,a}$ への反線型写像を引き起こす。従って $F_{a,a}$ は実元から成る成分を持つ。$F_{0,0}, F_{n,n}$ は外積代数から共に 1 次元の実の基底をもつことになる。

例えば $F_{0,0}$ は $\bigwedge F_0$ の単位元 1 により生成され、

$$z_\alpha = x_\alpha + iy_\alpha$$

が T' の基底であれば $F_{n,n}$ は実元

$$\begin{aligned} \left(\frac{i}{2}\right)^n (z_1 \wedge \bar{z}_2) \wedge \cdots \wedge (z_n \wedge \bar{z}_n) &= (x_1 \wedge y_1) \wedge \cdots \wedge (x_n \wedge y_n) \\ &= \frac{i^{n^2}}{2^n} (z_1 \wedge \cdots \wedge z_2) \wedge (\bar{z}_1 \wedge \cdots \wedge \bar{z}_2) \end{aligned}$$

によって生成される。これは外積形式をしているので順序を変更すれば符号に変化がおきる。そこでこの順に並べたものをこの場合の向きとして定義する。そうするとこの表現は基底に依存しない。

また、全ての $u \in \bigwedge F$ に対してベクトル空間の自己準同型を A として $\overline{Au} = A(\bar{u})$ となる時、A は実であるという。先の作用素 $C, P_{a,a}$ は実準同型である。

9.5 エルミート形式

とりあえず、現在考えられる現実の物理量はエルミート共役である。これは

$$t \to it$$

の変換で不変であることが必要で**エルミート形式**と呼ばれる。この対称性は実の現象をつくることに重要な対称性であり、後部で考察するように別な側面から考えれば基本的な時空の構成の相互作用と考えることができる。また、この関係は統計物理と量子物理を比較するときにも重要な関係である。

ここで、複素ベクトル空間でのエルミート形式を考えよう。この複素ベクトル空間を T とする。$T \times T$ で定義した複素数値関数を $H(t, t')$ とする。全ての $t \in T$ に対して T から $\mathbb{C}$ への写像 $t' \to H(t, t')$ は $\mathbb{C}$ 上で線形だから 1 形式を定義できて次の**エルミート対称性**を満たす。

$$H(t', t) = \overline{H(t, t')}$$

これは $t' \in T$ に対して写像 $t \mapsto H(t, t')$ は反線型となることになる。ここで $S(t, t'), A(t, t')$ は実形式とし、S は対称実双線型形式、A は交代双線型形式のとき、次の関係を満たす。

$$\begin{gathered} S(t, t') = -A(it, t') = A(t, it') \\ A(t, t') = S(it, t') = -S(t, it) \\ S(it, it') = S(t, t'), \quad A(it, it) = A(t, t') \end{gathered} \tag{9.6}$$

第 3 の式は T, T' 共に $t \to it$ の変換をしても不変であり、自己同型変換で変化しない。

従って、T 上のエルミート形式の集合と、$t \to it$ で不変な交代行列、対称行列の 3 つの間には 1 対 1 の対応が定義できる。さらに

$$\Phi(t) = H(t, t) = S(t, t) \tag{9.7}$$

とすると Φ は 2 次形式で定義され、次に

$$2S(t,t') = \Phi(t+t') - \Phi(t) - \Phi(t')$$

により S が定義される。S が $t \to it$ の変換をしても不変であれば次に A, H が定義される。

T の双対空間 T' の基底を $\{z_1, \cdots, z_2\}$ とすると T 上の複素線型形式と反線型形式は

$$t \mapsto \sum \xi_\alpha z_\alpha(t)$$

$$t \mapsto \sum \xi_\alpha \bar{z_\alpha}(t)$$

これから (t,t') を考えると半双線型形式として t について反線型、t' について線型な形式が

$$(t,t') \to \bar{z}_\alpha(t) z_\beta(t')$$

の一次結合でつくられることになる。特に H がエルミート形式であれば

$$H(t,t') = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} h_{\alpha\beta} \bar{z}_\alpha(t) z_\beta(t') \tag{9.8}$$

とかける。よってこの時のエルミート対称性は

$$h_{\alpha\beta} = \bar{h}_{\alpha\beta}$$

であればよい。この時常に T' の基底である T の複素座標系を選んで $\alpha \neq \beta$ に対し、

$$h_{\alpha\beta} = 0$$

となるような行列 $||h_{\alpha\beta}||$ を対角化できることがわかっていて、このとき $h_{\alpha\alpha}$ は常に実数になる。

ここで定義した H がどんな形をなすかが重要になり、任意の $t' \neq 0$ に対して適当な $t \in T$ があって $H(t,t') \neq 0$ であれば第 1 部で見たように**非退化**であるという。これは式 9.6 から S または A が非退化になればよく、ヘシアンを用いて調べることができる。

また、式 9.8 が定義できていれば H が非退化であることの必要十分条件は

$$det(h_{\alpha\beta}) \neq 0$$

であり、H が正である条件は全ての Φ について式 9.7 から

$$\Phi(t) = H(t,t) \geq 0$$

であればよいから H が正で非退化である必要十分条件が全ての $t \neq 0$ に対して

$$\Phi(t) > 0$$

であればよいことになる。正で非退化であれば $||h_{\alpha\beta}||$ を単位行列になるような基底 $\{z_\alpha\}$ をとることができる。

1 形式 $(f_1 \cdots f_{2n})$ が F_0 の基底であれば $f_\mu \wedge f_\nu$ が 2 形式 $\bigwedge^2 F_0$ の基底である。一方で交代形式

$$A_{\mu\nu}(t,t') = f_\mu(t) f_\nu(t') - f_\nu(t) f_\mu(t') \quad (1 \leq \mu < \nu \leq 2n)$$

が T 上の実交代双線型形式の基底となる。この時の同型写像 $A_{\mu\nu}$ は全ての $f, g \in F_0$ に対して、

$$f(t)g(t') - g(t)f(t') \to f \wedge g$$

の対応をつくる。これは $\bigwedge^2 F_0$ から T 上、つまり実双線型形式への**標準的同型写像**と呼ばれる。

任意の元 $u \in \bigwedge^2 F_0$ は $\bigwedge F^2$ の元でもあるので射影演算子を持ちて $v = P_{2,0}u,\ \omega = P_{1,1}u$ と置くと u は実だがら

$$\bar{v} = P_{0,2}u$$

$$\bar{\omega} = \omega$$

となり、次のようにおける。

$$u = v + \omega + \bar{v},\ \ Cu = -v + \omega - \bar{v}$$

とおける。この時 Cu は T の自己同型写像 $t \mapsto it$ により引き起こされる $\bigwedge F$ の自己同型写像による u の変換であると考えることができる。すなわち $u = Cu$ は

$$v + \bar{v} = 0,\ \ \ u = \omega,\ \ \ u \in F_{1,1}$$

と同値である。従って実交代双線型形式が $t \mapsto it$ によって不変であるための必要十分条件は対応する 2 次外積形式が $(1,1)$ 型の双斉次形式となっていることである。この時標準的同型写像は 2 次外積形式の空間から $F_{1,1}$ 形式の実元の空間への同型写像を引き起こすことになる。

このことをエルミート形式 $H(t,t')$ に適応させると

$$A(t,t') = \frac{1}{2i}\sum_{\alpha,\beta} h_{\alpha\beta}\left[\bar{z}_\alpha(t)z_\beta(t') - z_\beta(t)\bar{z}_\alpha(t')\right]$$

とおくことができ、2 次外積形式は

$$u = \frac{i}{2}\sum_{\alpha,\beta} h_{\alpha\beta} z_\beta \wedge \bar{z}_\alpha$$

と書ける。もし、$||h_{\alpha\beta}||$ が単位行列でかければ

$$u = \frac{i}{2}\sum_{\alpha,\beta} z_\beta \wedge \bar{z}_\alpha$$

となる。こらから

$$\frac{u^n}{n!}$$

をつくると、これはまさに実元を持つ $F_{n,n}$ の元になる。この時のベクトル空間 T に向きつけを定義してやれば u^n は強正 $(u^n > 0)$ の実 2n 次外積形式となり、u **が非退化正値エルミート形式に同伴する 2 じ外積形式であれば常に** u^n **は強正となる。**

9.6 作用素

T 上にエルミート形式 H を 1 つとる。これに作用する演算子を同伴するとも呼ぶ。ここまでに対称形式 S、交代形式 A、2 次外積形式 u などを見てきた。ここでこれらの作用素を詳しくみていこう。

はじめに外積代数作用素 $*$ についてみる。

H は正で非退化であるとする。正の非退化エルミート形式が与えられた時、**エルミート空間**が定義されたともいう。

ここからは

$$H(t,t') = \sum_\alpha \bar{z}_\alpha(t)z_\alpha(t')$$

$$z_\alpha = x_\alpha + iy_\alpha\ \ (x_\alpha, y_\alpha \in \mathbb{R})$$

とおく。式より対角成分について

$$\Phi(t)=H(t,t')=\sum_\alpha \bar{z}_\alpha(t)z_\alpha(t)=\sum_\alpha\left(x_\alpha(t)^2+y_\alpha(t)^2\right)$$

となる。さらに実ベクトル空間を E として、この上に 2 次形式を与えると E の外積代数が次のような作用素 $*$ で定義できる。つまり、E は向き付けされていて双対空間 $(f_1,\cdots,f_m)$ により 2 次形式が 2 乗の和 $f_1^2+\cdots+f_m^2$ として表されているとし、全ての添え字の偶置換を $(i_{1,}\cdots,i_p,j_1\cdots j_{m-p})$ とすると

$$*(f_i\wedge\cdots\wedge f_{i_p})=f_{j_i}\wedge\cdots\wedge f_{j_{m-p}}$$

となる。全ての p に対し、$*$ は p 次外積形式からなるベクトル空間から $(m-p)$ 次外積形式への同型写像である。この時の $*$ が基底 $\{f_i\}$ にはよらないことが重要である。よって $\bigwedge^p F$ 上で複素線形になるように $*$ を $\bigwedge F$ に拡張すると $*$ は $\bigwedge F$ 上で一意にきまり、実作用素とみなすことができる。物理にとってこの作用素が有用である。$*$ は $\bigwedge^p F$ から $\bigwedge^{2n-p} F$ への同型写像を決めることになる。

ここで $N=\{1,2,\cdots,n\}$ として N の任意の部分集合 M の元の個数を $\nu(M)$ 書くとにすると ω を次のように共役外積空間のつくる積で定義し、

$$\omega_M=\Pi_{\mu\in M}\left(z_\mu\wedge\bar{z}_\mu\right)=(-2i)^{\nu(M)}\Pi_{\nu\in M}(x_\mu\wedge y_\mu)$$

とすると、因子の次数は 2 であるから $\bigwedge F$ の全ての元と可換になるので因子の並び方によらない。

最初の元が $1,-1$ の場合でその後の元が N の相違なる元になる数列の全てを $\mathcal{A}$ とする。

$$\mathcal{A}=\{\pm1,\alpha_1,\cdots\alpha_a\}$$

ただし、最初の ±1 を除いたものを個数を $\mu(A)$ を用いて

$$|\mathcal{A}|=\{\alpha_1,\cdots\alpha_a\},\ a=\nu(|A|)=\mu(A)$$

と定義しておく。

最初の元が ±1 の場合に対応して

$$z_A=\pm z_{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge z_{\alpha_a}$$

とおく。すると対 $(A',A'')\in\mathcal{A}\times\mathcal{A}$ が

$$z_A=z_{A'}+z_{A''}$$

と書けるとき A の**分割**であるという。このような分割が成立すれば、ある 2 つの分割 (A',A'') と (A_1',A_1'') は $|A'|=|A_1'|$ であれば同値であり、自動的に $|A''|=|A_1''|$ となる。

これらから和を A の全ての分割の完全代表系でとれば

$$z_A=\sum i^{\nu(A'')}x_{A'}\wedge y_{A''}$$

とかける。このように $z,\bar{z},\omega$ を決めると式 9.3 の双斉次数をもつ全ての元が

$$z_A\wedge\bar{z}_B\wedge\omega_M=(-2i)^{\nu(M)}\sum i^{\nu(A'')-\nu(B'')}x_{A'}\wedge y_{A''}\wedge x_{B'}\wedge y_{B''}\wedge\prod_{\mu\in M}(x_\mu\wedge y_\mu)$$

となる。ただし、$|A|,|B|,M$ は互いに素である。これの $*$ 演算求めると

$$M'=N-(|A|\cup|B|\cup M)$$

$$r=\nu(A)\nu(A'')+\nu(B)\nu(B'')+\frac{1}{2}\left[\nu(A)+\nu(B)\right]\left[\nu(A)+\nu(B)-1\right]$$

として

$$*(z_A \wedge \bar{z}_B \wedge \omega_M) = (-2i)^{\nu(M)} \sum (-1)^r i^{\nu(A'')-\nu(B'')} x_{A''} \wedge y_{A'} \wedge x_{B''} \wedge y_{B'} \wedge \prod_{\mu \in M"} (x_\mu \wedge y_\mu)$$

を得る。ここで $\left(A_1^{''}, A^{'}\right)$ が A の分割になっていれば (A', A'') と (A_1'', A') は同じ完全代表系上を動くので

$$a = \nu(A) + \nu(M),\ \ b = \nu(B) + \nu(M),\ \ p = a + b$$

として

$$*(z_A \wedge \bar{z}_B \wedge \omega_M) = (-1)^{\nu(M) + \frac{p(p+1)}{2}} (-2i)^{p-n} i^{a-b} z_A \wedge \bar{z}_B \wedge \omega_{M'}$$

となり、射影演算子についても $*$ が全ての双次数 (a, b) の p 次外積代数を双斉次数 $(n-b, n-a)$ の $(2n-p)$ 次外積形式に変換していることがわかる。

$$*P_{a,b} = P_{n-b,n-a}*$$

これは式 $C = \sum_{a,b} i^{a-b} P_{a,b}$ と $*$ が可換であることを示していて

$$[*, C] = 0$$

である。空間 T が実偶次元であるから $**$ は全ての p 次外積代数の形式を $(-1)^p$ 倍する ω ことに注意する。

$$\omega = C^2$$

以上から次のような有用な関係式を得る k とができる。

$$\omega = *^2 = C^2 = \sum_{p=0}^{2n} (-1)^p P_p$$

$$*^{-1} = \omega * = *\omega,\ \ C^{-1} = \omega C = C\omega$$

となる。

9.7 Clifford 代数 [41]

第 1 部で複素数を扱い 4 元数が $\mathbb{R}^3$ 内の S^2 の回転を表すのに便利なことを次のように導いた。複素数を拡張し、4 つの基底ベクトルを $\mathit{1}, I, J, K$ とおく。

$$I^2 = J^2 = K^2 = -1 \tag{9.9}$$

$$IJ = K = -JI,\ JK = I = -KJ,\ KI = J = -IK \tag{9.10}$$

を満たす時これをハミルトンの 4 元数という。またこれらの基底からベクトル V を

$$V = v_1 I + v_2 J + v_3 K$$

とおくと $\mathit{1}$ を単位ベクトルとして 4 元ベクトルは

$$\mathcal{V} = v\mathit{1} + V$$

と表す。もし $v = 0$ であればこの $\mathcal{V}$ は純虚数に対し、純 4 元数と呼ぶこともある。もう一つの 4 元数 $\mathcal{W}$ を持ってくると式 9.10 から歴史的初めてにドット積とクロス積を共に表した次の関係式が得られる。

$$\mathcal{V} = v\mathit{1} + V$$

$$\mathcal{W} = w\mathit{1} + W$$

$$\mathcal{V}\mathcal{W} = vw - V \cdot W + vW + wV + V \times W \tag{9.11}$$

さらに $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ は共に純 4 元数であればこれは次のように単純になる。

$$\mathcal{V}\mathcal{W} = V \times W - V \cdot W$$

ここで、３つの基底ベクトルを I, J, K について半回転を考える。$\theta = \pi$ を代入すると

$$[R_v^\pi] = \begin{pmatrix} in & -m+il \\ m+il & -in \end{pmatrix} \tag{9.12}$$

$$1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, I = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}, J = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \tag{9.13}$$

これは 9.10 の条件を満たす。これを用いると次のように簡潔に表現できる。

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_V^\theta &= \mathit{1}\,cos(\frac{\theta}{2}) + V\,sin(\frac{\theta}{2}) \\ V &= lI + mJ + nK \end{aligned}$$

これによって例えば i の周りに $\pi/2$、j の周りに $\pi/2$、の回転は次のようになる。

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_j^{\pi/2} \circ \mathcal{R}_i^{\pi/2} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1+J)\frac{1}{\sqrt{2}}(1+I) \\ &= \frac{1}{2}(1+J+I-K) \end{aligned}$$

つまりこの解釈は次の単位ベクトルを軸として $\theta = 2\pi/3$ の回転である。

$$v = \frac{1}{\sqrt{3}}(i+j-k)$$

以上により 3 次元空間での位置ベクトル P の回転 R_V^θ の結果 P' に移されたとすると

$$\mathcal{P}' = \mathcal{R}_V^\theta \mathcal{P} \mathcal{R}_V^{-\theta}$$

を考えればよい。
また図のような 3 つの回転は

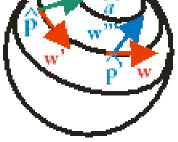

図 9.1: 回転

$$w \to w' \to w'' \to w'''$$

合成の結果 $\hat{p}'$ まわりの回転

$$w \to w'''$$

$$R^{\theta}_{\hat{p}'} = R^{\phi}_{\hat{a}} \circ R^{\theta}_{\hat{p}} \circ R^{-\phi}_{\hat{a}}$$

であり 4 元数では

$$\mathcal{R}^{\theta}_{\mathcal{P}'} = \mathcal{R}^{\phi}_{V}\mathcal{R}^{\theta}_{\mathcal{P}}\mathcal{R}^{-\phi}_{V}$$

と表すことができる。$\theta = \pi$ の時が半回転は単純に 4 元数を表す。

そこで改めて複素代数として次を定義する。

$$(x^2 + y^2)\mathbf{I} = (x\mathbf{I} + y\mathbf{i}) \cdot (x\mathbf{I} - y\mathbf{i})$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{I} \cdot \mathbf{I} &= \mathbf{I} \\
\mathbf{I} \cdot \mathbf{i} &= \mathbf{i} \\
\mathbf{i} \cdot \mathbf{I} &= \mathbf{i} \\
\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} &= -\mathbf{I}
\end{aligned}$$

10 多様体

最も一般的な粒子のイメージは点として理解されている。もちろん現実には点としての粒子は存在しないので有限の大きさを持ち、常に変化を伴っている。しかし、極めて正確にこの大きさを測定しようとすると、測定者との関係でしかその大きさを定義できない。ここには前部で学習した接続の問題が登場してくる。その背景にあるのがここで考察する多様体だ。粒子としての物理抽象がほとんどの場合リーマン多様体に埋め込まれた 1 次元の曲線として表されるのが場の理論である。

10.1 被観測場

物理学には必ず観測者と被観測者という立場が存在する。物質の存在が背景と共にあり、記述されるのでその背景がどいういう性質を持つかは物質の運動に影響を与える。物質に何も影響を与えないどの方向にもどこまでも平坦な空間を観測の場におけばいいのだが、何も影響を与えないというのは観測もできないことになる。物理現象が様々な場と共に存在することが明らかになるにつれ、その背景として統一的に時空間を扱える考え方が必要になる。物理現象が局所的な座標系には依存しないようにする要請から多様体という考え方が生まれる。はじめにこの要請から多様体をみていこう。

3 次元のユークリッド空間内の曲線は 1 つのパラメタ t を用いて

$$(x(t), y(t), z(t)) \tag{10.1}$$

のように書けた。曲線は局所的には $\mathbb{R}$ に同相である。

これに対し、曲面を表すには 2 つのパラメタ u, v が必要で

$$(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \tag{10.2}$$

のように書けた。曲面は局所的には $\mathbb{R}^2$ に同相である。多様体とは一般に局所的 $\mathbb{R}^m$ に同相になる。これは大局的には $\mathbb{R}^m$ と同相でなくてもいいということである。この大局的と局所的の見方の相違が多様体をとらえるのに重要になる。

多様体上では複数の座標系をとることが可能であり、座標系間の変換がなめらかな微分可能写像をとることができる。例えば次の図のように $\mathbb{R}^3$ 上における単位球面 S^2 をとる。

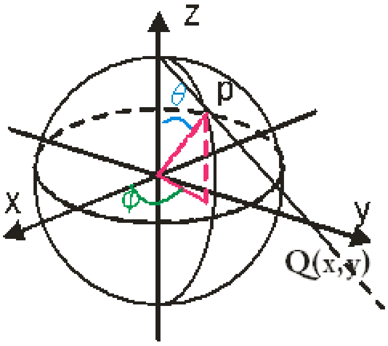

図 10.1: 立体射影と極座標

一般的な次の球座標を用いよう。

$$x = \sin\theta\cos\phi,\ \ y = \sin\theta\sin\phi,\ \ z = \cos\theta$$

これの逆変換を考えると、球面上で $0 \leq \phi \leq 2\pi$,$0 \leq \theta \leq \pi$ として

$$\theta = \tan^{-1}\frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{z},\ \phi = \tan^{-1}\frac{y}{x} \tag{10.3}$$

となる。

立体射影については第 1 部の第 2 章で触れたように $z = 0$ と交わる xy 平面と北極点 $(0,0,1)$ と点 $P(x,y,z)$ を通る直線の交点の座標を $Q(X,Y)$ とする。

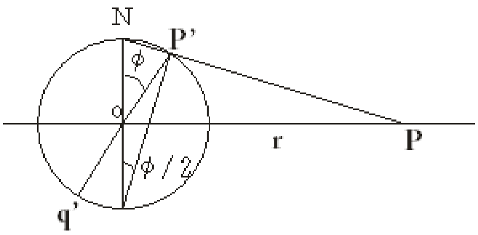

図 10.2: 立体射影（x 軸断面）

三角形 NSP と三角形 NOQ が相似だから

$$x : X = 1 - z : 1$$

$$X = \frac{x}{1-z}$$

同様に

$$Y = \frac{y}{1-z}$$

となる。極座標では上図のような角度の関係があるから第 1 部からも

$$X = cot\frac{\theta}{2}cos\phi$$

$$Y = cot\frac{\theta}{2}sin\phi$$

が得られた。このような結果は点 p が座標系に依存してしまう。

物理現象は座標系に依存しない必要がある。しかし、ここではあらゆる場所で共通した座標系が存在できない。

赤道を $\theta = \pi/2$ とる。ϕ が 0 から 2π までは連続的に変化するが 2π を越えるとその連続性は断ち切られる。

すなわち、球面上では近くの点は近い座標で表されることとどの点も 1 つの座標で表されることが両立できない。

観測者がこの特別な位置を認識できるわけではないので次の要請がここでは満たされないことになってしまう。

- 近くの点は近い座標で表すことができる。
- どの点も 1 つの座標で表すことができる。

この問題を解決するには複数の座標系を用いればよい。ただし、今度は座標系どうしの変換が問題になるのである。そこで多様体とは座標系が重なればそれらの座標は互いになめらかな変換で結ばれるという条件を満たすものとして考えるのである。

さて、これから物理現象が演じられる舞台としてどういうものが必要かということを考えるわけである。それが多様体である。

この構造を代数と比較して、極めて明瞭にまとめた表が [31] にあるのでそれをここに示しておく。

<table>
<tr><td colspan="2">The Euclidian space R^n consist of all n − tuples $(x^1,\dots,x^n)$ where $x^1,\dots x^n$ are arbitrary real numbers.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Algebraic structure</td><td>R^n is a vector space with an inner product</td></tr>
<tr><td>Linear structure:
Addition: $x+y = \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^1+y^1 \\ \vdots \\ x^n+y^n \end{bmatrix}$
Multiplication with a scalar: $\lambda x = \lambda \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x^1 \\ \vdots \\ \lambda x^n \end{bmatrix}$</td></tr>
<tr><td>Inner product:
$\langle x \mid y \rangle = x^1y^1 + \dots + x^ny^n$
The inner product has the following characteristic properties:
1. Symmetry: $\langle x \mid y \rangle = \langle y \mid x \rangle$
2. Bi-linearity: $\langle \lambda x + \mu y \mid z \rangle = \lambda \langle x \mid z \rangle + \mu \langle y \mid z \rangle$
3. Positive definiteness, i.e. $\langle x \mid x \rangle > 0$ if $x \neq 0$.</td></tr>
<tr><td>The inner product generates the Euclidian norm:
$\| x \| = \sqrt{\langle x \mid x \rangle} = \sqrt{(x^1)^2 + \dots + (x^n)^2}$</td></tr>
</table>

図 10.3: [31] より：代数的な構造

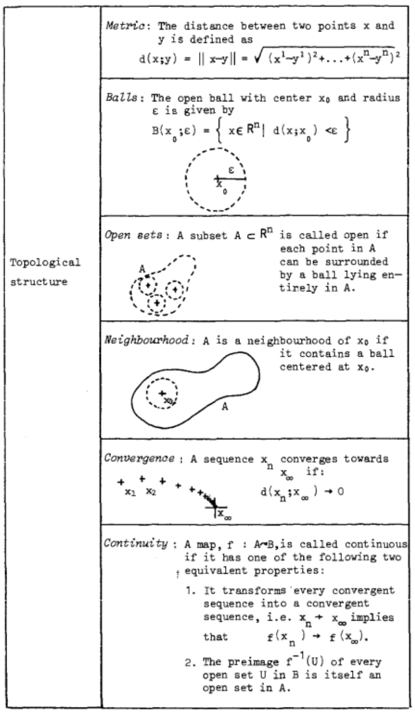

図 10.4: [31] より：位相的な構造

10.2 定義 [39]

M が n 次元多様体であるとは M がハウスドルフ空間であり、
次のような開集合 U_i の近傍と U_i から n 次元ユークリッド空間の開集合への写像

$$\phi_i : U_i \to \phi_i(U_i) \subset \mathbb{R}^m$$

が存在することである。

- $\bigcup_i U_i = M$
- $U_i \cap U_j \neq \emptyset$

のとき次の図のように

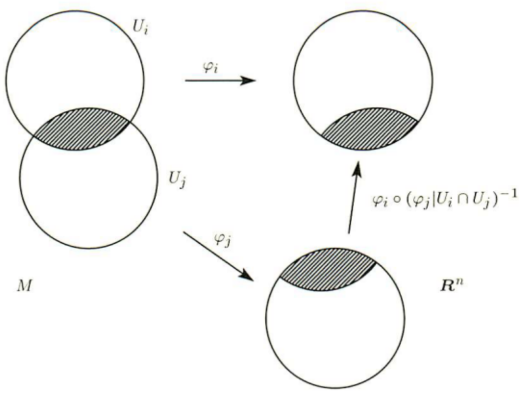

図 10.5: [37] より

$$\phi_i \circ (\phi_j|U_i \cap U_j)^{-1} : \phi_j\,(U_i \cap U_j) \to \phi_i\,(U_i \cap U_j)$$

が C^∞ 級写像として存在することである。つまり座標変換の関数がどこでも用意できないといけない。

M の各点 $p \in M$ に対し、$\mathbb{R}^n$ の開集合 U と M における p の開近傍 V とする。
滑らかな写像

$$\phi : U \to V$$

において U 上のいたるところで ϕ の変換行列の階数について

$$rank\, J\phi = n$$

なるものが存在すれば M は **n 次元多様体**である。
ただし、J は Jacobi 行列で $\mathbb{R}^m$ の開集合 U とし、$p(x_1 \cdots x_m)$
$f : U \to \mathbb{R}^n$ は (m,n) の行列,$y_n = (y_1 \cdots y_n) = f(x_1, x_2 \cdots x_m)$, $(n \geq m)$ として

$$Jf = \begin{pmatrix} \partial_{x1} f(p) \cdots \\ \vdots \\ \partial_{xm} f(p) \cdots \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\right)$$

である。必ずしも正方行列ではないことに注意する。この行列式が jacobian である。

$$\frac{\partial(y_1 \cdots y_n)}{\partial(x_1 \cdots x_n)} = det\left(\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\right)$$

開集合であることの重要性は位相のとこでもみたが部分集合 $M \subset X$ として、X の開集合 O と M の交わり $O \cap M = V$ を M の開集合とすることで M に位相を定めることができた。

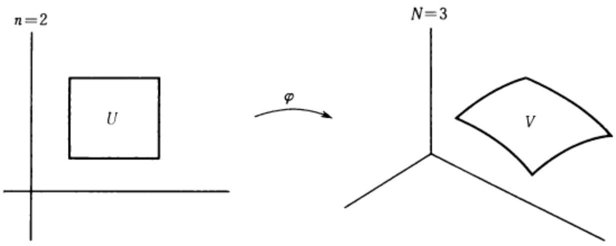

図 10.6: [39] より

陰関数定理を用いると ϕ は $U \to V$ で全単射である。
n 次元多様体の簡単な例として $\mathbb{R}^n$ の開集合がある。この時の写像 ϕ は $U \to U$ への恒等写像になる。
重要な例として U を $\mathbb{R}^n$ の開集合として、$f : U \to \mathbb{R}$ を滑らかな関数とする。この時の f のグラフとして、

$$M = \{(p, f(p)); p \in U\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1}$$

も n 次元多様体である。つまり、

$$\phi(p) = (p, f(p)),\, V = M$$

にとることができる。n 次元であるが f は p の関数として $\mathbb{R}^{n+1}$ を考えていくことに注意する。

10.3　射影空間 [12]

U を $\mathbb{R}^n$ の開集合として $f: W \to \mathbb{R}$ を滑らかな関数とする。この時逆関数が存在して $f^{-1}(0)$ を方程式

$$f(p) = 0$$

の定める**超曲面 (hypersurface)** という。この時、

$$M = \{p \in f^{-1}(0), Jf_p \neq 0\}$$

は n 次元多様体である。陰関数定理によれば M の p の開近傍 U が存在し、U の点

$$q = (x_1, x_2, \cdots, x_{n+1})$$

に対し、x_i は残りの座標 $x_1, \cdots x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots x_{n+1}$ の関数で

$$h(x_1, \cdots x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots x_{n+1})$$

として解ける。そこで $\phi: U \to M$ を $u(u_i \cdots u_n)$ として

$$\phi(u_1, \cdots u_n) = (u_1, \cdots u_{i-1}, h(u), u_i \cdots u_n)$$

であれば先の多様体の条件を満たす。
この特別な例として n 次元球面

$$S^n = \left\{(x_1, \cdots x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}; x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\right\}$$

はまさにこの例である。さらに前節の位相空間でみた実射影空間 $\mathbf{R}P^n$ は 1 次元部分線型空間に対して、その上への直交射影作用素が 1 対 1 に対応するから

$$\begin{aligned}\mathbf{R}P^n &= \{A \in M(n+1; \mathbf{R});\ A^tA = ^tAA, A^2 = A, rankA = 1\} \\ &= \{^t\xi\xi;\ \xi \in S^n\} \subset M(n+1; \mathbf{R}) \simeq \mathbf{R}^{(n+1)^2}\end{aligned}$$

は n 次元多様体である。そこでこの射影空間具体的に見て、多様体の理解を深めよう。

1 次元の場合多様体になるのは実直線 $\mathbb{R}$ と円周 S^1、閉区間 $[a, b]$ 半開区間 $[a, b)$ だけになる。具体的に円周 S^1 のアトラスを求めると、次の図のように少なくとも 2 つのチャートが必要になる。

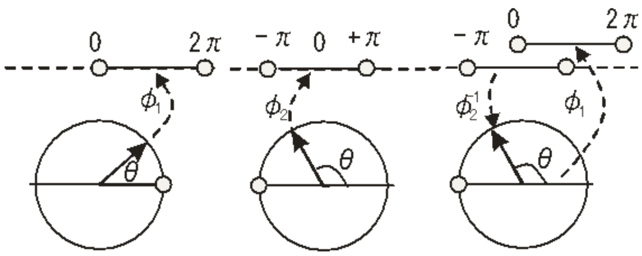

図 10.7: S^1 をカバーする 2 つの領域と直線 R^1 への写像

xy 平面上に

$$x^2 + y^2 = 1$$

をとる。そして $\phi_1^{-1}: (0, 2\pi) \to S^1$ を

$$\phi_1^{-1}: \theta \to (\cos\theta, \sin\theta)$$

とできるが端点を含まない開区間のために像は $S^1-\{(1,0)\}$ とする。

また $\phi_2^{-1}:(-\pi,\pi)\to S^1$ を

$$\phi_2^{-1}:\theta\to(\cos\theta,\sin\theta)$$

としその像も $S^1-\{(-1,0)\}$ とする。すると ϕ_1^{-1},ϕ_2^{-1} には共に逆写像が存在し、連続である。

よって ϕ_1,ϕ_2 は同相写像といえる。この写像は直線上への写像であり、1 成分に減少している直線への射影と見ることもできる。

変換写像

$$\phi_{12}=\phi_1\circ\phi_2^{-1}$$

$$\phi_{21}=\phi_2\circ\phi_1^{-1}$$

は共に上図右のようになめらかな写像になる。図では直線は別なものに移されているがこれが区別できないのであれば S_1 上の変化は常になめらかな連続写像である。しかし、この連続性を維持していくために S_1 上から 1 点を取り除かなくてはいけない点が重要になる。

さらに拡張し、n 次元球面 S^n は微分多様体とする。これは R^{n+1} において次をみたす。

$$\sum_{i=0}^{n}\left(x^i\right)^2=1 \tag{10.4}$$

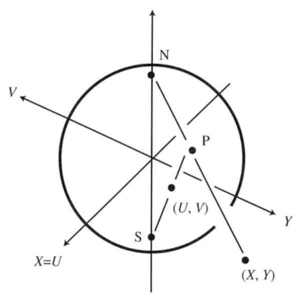

図 10.8: [12] より：立体射影

実射影空間 $\mathbb{R}P^n$ は $\mathbb{R}^{n+1}$ の原点を通る直線の全体の集合であると考えることができる。

$$y=ax\ a\in\mathbb{R}-\{0\}$$

という傾きを満たす実数 a が存在する。この時

$$x\sim y$$

とみなすのである。

$n+1$ 個の 2 乗和が 1 という条件が 1 つの束縛を与える。座標近傍として次のような被覆を考えよう。

$$U_{i+}=\left\{\left(x^0_,x^1,\cdots x^n\right)\in S^n|x^i>0\right\}$$

$$U_{i-}=\left\{\left(x^0_,x^1,\cdots x^n\right)\in S^n|x^i<0\right\}$$

これで 2 つのチャートが用意できたので R^n に写す変換写像が次元を 1 つ減らし次のように定義できる。

$$\phi_{i+}\left(x^0_, x^1, \cdots x^n\right) = \left(x^0_, x^1, \cdots x^{i-1}, x^{i+1} \cdots x^n\right)$$

$$\phi_{i-}\left(x^0_, x^1, \cdots x^n\right) = \left(x^0_, x^1, \cdots x^{i-1}, x^{i+1} \cdots x^n\right)$$

これも先と同様に半球面 $U_{i\pm}$ から平面 $x^i = 0$ への射影である。
例えば S^2 として変換関数を求めると次のように $2+1$ 次元の要素から 2 次元の要素を決める。
その変わり、2 つのチャートが必要になるわけである。

$$\phi_{x+}(x, y, z) = (y, z)$$

$$\phi_{y-}(x, y, z) = (-x, z)$$

この場合の変換関数を求めると

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

より、逆写像が存在し、

$$\phi_{x+}^{-1}(y, z) = (\sqrt{1 - y^2 - z^2}, y, z)$$

となるので変換関数は

$$\phi_{y-x+} = \phi_{y-} \circ \phi_{x+}^{-1}$$

だから

$$\phi_{y-x+} : (y, z) \to \left(-\sqrt{1 - y^2 - z^2}, z\right)$$

となる。
この変換関数は $U_{x+} \cap U_{y-}$ 上で無限回微分可能で式 10.4 のせいで微分構造が決まる。これは第 1 部で取り上げた立体射影において次の図のように P' の立体射影を P とする。

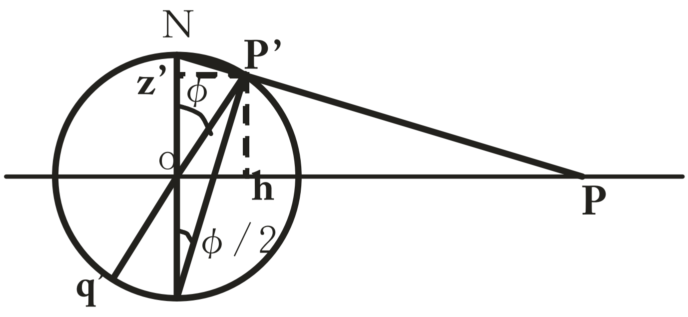

図 10.9: $p(\phi, \theta)$ において $\theta = 0$ の断面図

P' の座標を (x', y', z') とするとリーマン球上にあるから式 10.4 は

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$$

となる。この時 P' と P を対応つける。しかし、P' が極にある場合が除外されるので

$$S^2 - \{Pole\}$$

として立体射影を定義する必要がある。さらに北極側の被覆と、南極側の被覆が必要である。つまり、球表面をユークリッド平面のようにみなせば全球面をカバーするためには 2 つの平面地図がいることになる。

これらの被覆の共通部分では先と同じようになめらかな変換関数を定義することができる。

実射影空間を一般化し

$$\mathbf{R}P^n$$

で表す。これは $\mathbf{R}^{n+1}$ 次元において原点を通る直線の全体になる。

$$x = (x^0, \cdots x^n) \neq 0$$

でれあれば原点を通る直線を 1 つ決める。この時 $y \in \mathbf{R}^{n+1}$ に対してある実数 $a \neq 0, a \in \mathbf{R} - \{0\}$ が存在して

$$y = ax$$

が成り立てば y もまた x と同じ直線を決める。この関係を同値関係といい

$$x \sim y$$

で表す。そしてこの時、

$$\mathbf{R}P^n \sim \mathbf{R}^{n+1} - \{0\}/\sim$$

である。n+1 個の $x^0, \cdots x^n$ を**斉次座標** (homogeneous coordinates) という。かたや $\mathbf{R}P^n$ は n 次元多様体なのでこの座標表示には余分な次元が 1 つあることになる。これを減らすために次のような定義をする。

$$\xi^j_{(i)} = \frac{x^j}{x^i} \in U_i$$

これにより新たなチャートが定義され座標近傍として U_i を $x_i \neq 0$ を満たす直線の集合とし、この座標を非斉次座標という。この時 $\xi^j_{(i)} = 1$ に射影した空間は

$$\xi_{(i)} = \left(\xi^0_{(i)}, \xi^1_{(i)}, \cdots, \xi^{i-1}_{(i)}, \xi^{i+1}_{(i)}, \cdots \xi^n_{(i)},\right)$$

の n 個の座標で表示される。このとき $\xi_{(i)}$ を得るための写像が

$$\phi_i : (x^0, \cdots, x^n) \to \left(\frac{x^0}{x^i}, \cdots, \frac{x^{i-1}}{x^i}, \frac{x^{i+1}}{x^i}, \cdots, \frac{x^n}{x^i}\right)$$

で表すことができる。さらに近傍において

$$U_i \cap U_j = x$$

の領域であれば別な非斉次座標系 $\xi_{(j)}$ を選ぶこともできて

$$\phi_j : (x^0, \cdots, x^n) \to \left(\frac{x^0}{x^j}, \cdots, \frac{x^{i-1}}{x^j}, \frac{x^{i+1}}{x^j}, \cdots, \frac{x^n}{x^j}\right)$$

となる。しかし、この時 $\xi^k_{(i)} = x^k/x^i$ とし、変換関数が次のように決まる。

$$\psi_{ij} : \xi^k_{(i)} = \frac{x^j}{x^i}\xi^k_{(j)}$$

10.3.1 例 1 半球

前部も見たように射影 $\mathbb{R}P^n$ が球面 S^n の直径対蹠点を同一したものに等しい。

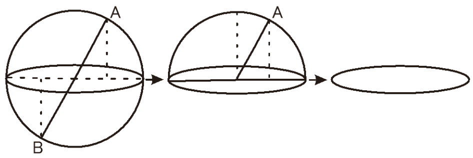

図 10.10: 射影空間が半球に等しく、さらに円板に同相になる

これは結局図のように A と B が同一視され、半球面で済む。さらにこれをつぶすと円板 D^2 に同相になる。

10.3.2 例 2 立体射影 [48]

図のような n 次元球を考える。

$$S^n := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} | \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 1\}$$

極からの立体射影を表す写像が次のように定義できる

$$\phi_1(x_1, \cdots, x_{n+1}) := \left(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \cdots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}}, \right) \in \mathbb{R}^n$$

$$\phi_2(x_1, \cdots, x_{n+1}) := \left(\frac{x_1}{1 + x_{n+1}}, \cdots, \frac{x_n}{1 + x_{n+1}}, \right) \in \mathbb{R}^n$$

ただし

$$x_{n+1} := \sqrt{(1 - x_1^2 - \cdots - x_n^2)}$$

この 2 つの写像があれば S^n を被覆できる。これは後に Hopf 写像として詳しく考察する。

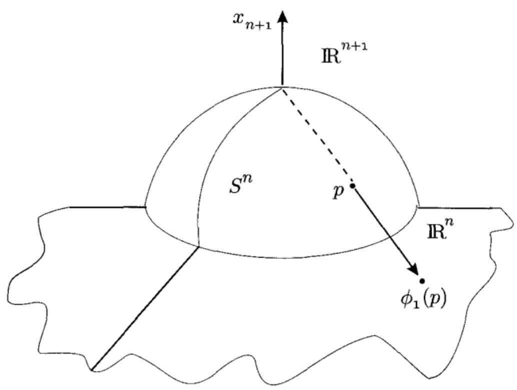

図 10.11: 立体写像

10.3.3 例 3 Grassmann 多様体

射影 $\mathbb{R}P^n$ の要素は上の図で見るように $\mathbb{R}^{n+1}$ の原点を通る 1 次元部分空間の全体である。
これを拡張すると Grassmann 多様体 $G_{k,n}(\mathbb{R})$ でこれは $\mathbb{R}^n$ の k 次元平面全体の集合である。
よって射影空間とは $k = 1$ の特別な場合で

$$G_{1,n+1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}P^n$$

である。では $G_{k,n}$ の多様体はどういう構造になるだろか。

先と同じ手順を使えば、まず、$M_{k,n}(\mathbb{R})$ を $rank = k \leq n$, さらに $g \in GL(k, \mathbb{R})$ として

$$A = (a_{ij}) \in M_{k,n}(\mathbb{R})\, \mathbf{a_i} = (a_{ij})\, (1 \leq i \leq k)$$

とおくと $rank(A) = k$ だから $\mathbf{a_i}$ は全て 1 次独立とすることがきる。しかし、同じ k 次元平面を作る行列 $M_{k,n}(\mathbb{R})$ はいく通りもあることに注意する。

$$\bar{A} = gA \in M_{k,n}(\mathbb{R})$$

を考えると g は k 平面で単に基底の変換をおこなうだだけだから A と $\bar{A}$ は同じ k 平面を定めることになる。この関係を同値

$$\bar{A} \sim A$$

で表す。よって

$$G_{k,n}(\mathbb{R}) \sim M_{k,n}(\mathbb{R})/GL(k, \mathbb{R})$$

この時、$G_{k,n}(\mathbb{R})$ のチャートは $A \in M_{k,n}(\mathbb{R})$ を取り、

$$\{A_1, \cdots A_l\}, l = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$$

を A の全ての $k \times k$ 小行列の集まりとする。$rankA = k$ だから $A_\alpha (1 \leq \alpha \leq l)$ が存在し、$det\, A \neq 0$ となる。そこで最初の k 列からなる小行列を A_1 とし、その行列式は 0 でないとすると次のように分けることができる。

$$A = (A_1, \tilde{A}_1)$$

ただし、$\tilde{A}$ は $k \times (n-k)$ 行列である。左から A_1^{-1} を作用させ

$$A_1^{-1} \cdot A = (I_k, A_1^{-1} \cdot \tilde{A}_1) \tag{10.5}$$

となることから自由度は $k \times (n-k)$ の行列 $A_1^{-1} \cdot \tilde{A}_1$ が担う。ここで $G_{k,n}(\mathbb{R})$ の部分集合を U_1
とすと、$A_1^{-1} \cdot \tilde{A}_1$ の $k(n-k)$ 個の成分で与えられる座標近傍をもち、

$$dim\, G_{k,n}(\mathbb{R}) = k(n-k) \sim \mathbb{R}^{k(n-k)}$$

である。一般に $A^{-1} \cdot \tilde{A}$ 行列を書き表わすことを考えよう。そのために A_α を $detA_\alpha \neq 0$ とし、列 $(i_1, \cdots i_k)$ からなるとする。これに A_α^{-1} を掛けることで式 10.5 から次のように i_k の行は単位行を持つ

$$A_\alpha^{-1} \cdot A = \begin{array}{ccccccc} & i_1 & & i_2 & & i_k & \\ \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots \end{array} \tag{10.6}$$

$\cdots$ の成分が $k(n-k)$ の行列を持つ。

そこで $A \in M_{k,n}(\mathbb{R})$ を考え、ベクトル $A(x^0, x^1, \cdots x^n)$ である。A の α 番目の小行列が A_α が数 x^α
なので

$$det\, A_\alpha \neq 0 \leftrightarrow x^\alpha \neq 0$$

だから 10.6 は、まさに非斉次座標

$$(x_\alpha)^{-1}(x^0, x^1, \cdots x^\alpha, \cdots x^n) = \left(\frac{x^0}{x^\alpha}, \frac{x^1}{x^\alpha}, \cdots, \frac{x^\alpha}{x^\alpha} = 1, \cdots \frac{x^n}{x^\alpha} \right)$$

を表している。

10.4　微分多様体

射影を定義したので次に複数の座標系が存在できるための空間を数学的にどう構成するかを見ていこう。つまり、地球儀全体を 1 枚の地図に書き下ろすための方法を考えるわけである。実際に紙から地球儀をつくるときには、のりとはさみは必須であった。ここでも同じようにいくつかの道具をまず用意する。

はじめに、微分可能な多様体というものを考える。これはただ、なめらかであるということよりも厳しい条件がつくことになる。

ハウスドルフ空間 M が n 次元の**微分可能多様体** (differensible manifold) であるとは M の開被覆 $\{U\},\{V\}$ で次のような性質を持つ者が存在することである。

1. M の開被覆 $\{U\},\{V\}$ から n 次元ユークリッド空間 R^n のある開集合 U,V の上への同相写像 ψ_α,ψ_β が存在する。(下図)
2. U の開部分集合 $\psi_\alpha(U\cap V)$ から V の開部分集合 $\psi_\beta(U\cap V)$ の上への写像

$$\psi_{\beta\alpha}=\psi_\beta\circ\psi_\alpha^{-1}$$

が微分可能であること。

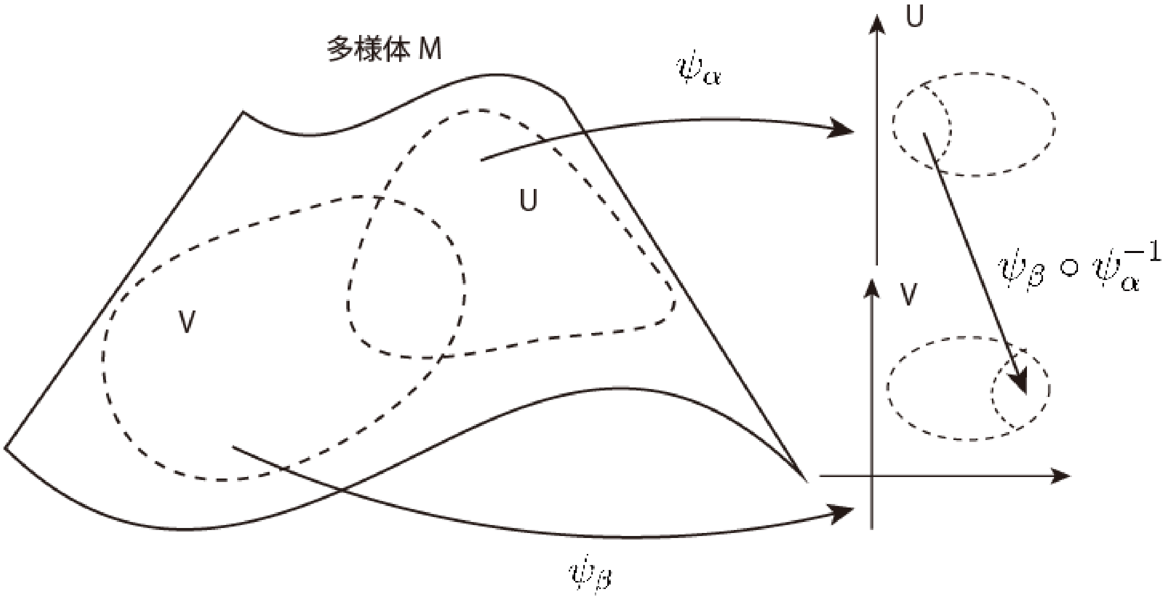

図 10.12: 変換関数 $\psi_{\beta\alpha}=\psi_\beta(U\cap V)\circ\psi_\alpha^{-1}(U\cap V)$, 図は $U\cap V$ 省略して式を書いている

図のようにここには 1 つのサイクルがありサイクル上でさらに独立した空間を構成できるのが特徴である。それらはある極限においてユークリッド空間と同一視できる。

よって R^n の座標系を用いて $\psi_{\beta\alpha}$ は次のように表すことができる。

$$y^i=\psi^i(x^1,x^2,\ldots,x^n)\quad 1\le i\le n$$

この時、写像 ψ は無限回微分可能であり C^∞ クラスであるという。またこの時逆写像

$$\psi_{\alpha\beta}=\psi_\alpha\circ\psi_\beta^{-1}$$

も微分可能になる。ハウスドルフ空間 M がこのような開被覆 $\{U_\alpha\}$ を持つ時 M を**微分可能構造 (differentible_structure)** を持つ微分可能多様体という。この多様体 M 上に

$$p\in U\to\psi(p)=(x^1(p),,\ldots,x^n(p))\in V$$

となる開集合 U, V があり

$$\psi \circ \psi_\alpha^{-1}: \ \psi_\alpha(U \cup U_\alpha) \to \psi(V \cup V_\alpha)$$

とこの逆

$$\psi_\alpha \circ \psi^{-1}: \ \psi(V \cup V_\alpha) \to \psi(U \cup U_\alpha)$$

が共に微分可能であれば U を M の座標近傍 (coordinate_neighborhood) といい U 上の関数系

$$\{x^1, x^2, \ldots, x^n\}$$

を U 上の座標系 (coordinate_sysytem) という。または M の局所座標系という。また、

$$x^1(p) = \ldots, = x^n(p) = 0$$

$$V = \{(x^1, x^2, \ldots, x^n); |x^i| < \delta\}, \ \delta > 0$$

となっていれば p を原点とする座標近傍という。M 上に微分可能な関数があることは局所座標には無関係である。

開集合と写像との対 (U_i, ψ_i) を**チャート**とといい、この組の全体の族 $\{(U_i, \psi_i)\}$ をアトラスという。

２つのアトラス $\{(U_i, \psi_i)\}$ と $\{(V_i, \phi_i)\}$ の和が再びアトラスになればこの 2 つのアトラスは両立すという。

このときの**同値類が多様体 M の微分構造**になる。

10.4.1　球面 [31]

チャートとアトラスというツールをまず球面 S^2 でみてみる

$$U \sim S^2$$

そこで次の写像を定義する。

$$\phi(x^1, x^2) = \left(x^1, x^2, \sqrt{1 - (x^1)^2 - (x^2)^2}\right) \tag{10.7}$$

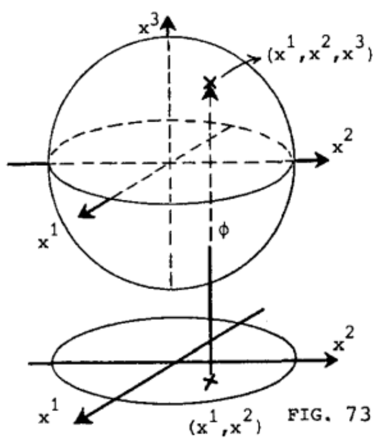

図 10.13: [31] より

このチャートを U を開被覆として、

$$(\phi, U)$$

とおくと $\phi(U)$ は図の北半球に相当し、

$$\phi(U) = \{x \in S^2 | x^3 > 0\}$$

さらに図の下の部分に射影された像に連続的にうつすことができる。

$$(x^1, x^2) \to \sqrt{1-(x^1)^2-(x^2)^2}$$

よってその逆は ϕ^{-1} で表され、これは連続で、$(x^1, x^2, x^3) \in \phi(U)$ として、

$$\phi^{-1}(x^1, x^2, x^3) = (x^1, x^2) \tag{10.8}$$

となる。
しかし、微分はどう写像されるだろか。次のように $\sqrt{t}$ の微分は一般に連続ではない。

$$\frac{d}{dt}\sqrt{t} = \frac{1}{2\sqrt{t}}$$

であるから $t = 0$ では定義されない。しかし、この点を除いて

$$(x^1, x^2)|(x^1)^2 + (x^2)^2 < 1$$

で定義する。これによって Jacobi 行列が次のようになる。式 10.8 よりこれは正方行列ではない。

$$\left[\frac{\partial \phi^i}{\partial x^j}\right] = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi^1}{\partial x^1} & \frac{\partial \phi^1}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \phi^2}{\partial x^1} & \frac{\partial \phi^2}{\partial x^1} \\ \frac{\partial \phi^3}{\partial x^1} & \frac{\partial \phi^3}{\partial x^1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{-x^1}{\sqrt{1-(x^1)^2-(x^2)^2}} & \frac{-x^2}{\sqrt{1-(x^1)^2-(x^2)^2}} \end{pmatrix} \tag{10.9}$$

これによって次の図のように S^2 を中心に 6 つの座標系を持つ射影空間と対応する。

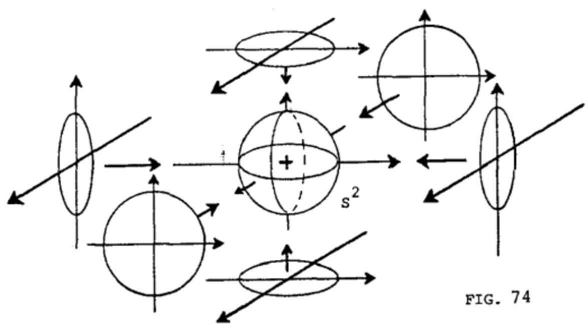

図 10.14: [31] より

さらに次の図のように合成写像をつくることができる。

$$(x^1, x^2) \xrightarrow{\phi_1} (x^1, x^2, \sqrt{1-(x^1)^2-(x^2)^2}) \xrightarrow{\phi_2^{-1}} (x^1, \sqrt{1-(x^1)^2-(x^2)^2}) = \phi_{21}$$

ϕ_{21} は、はじめに z 成分を加え、次に y 成分をとることになるので結局

$$\begin{aligned} y^1 &= x^1 \\ y^2 &= \sqrt{1-(x^1)^2-(x^2)^2} \end{aligned}$$

であるが定義領域として

$$U_{12} = \{(x^1, x^2) | x^2 > 0, (x^1)^2 + (x^2)^2 < 1\}$$

をとれば ϕ_{12} は全領域でなめらかに連続である。

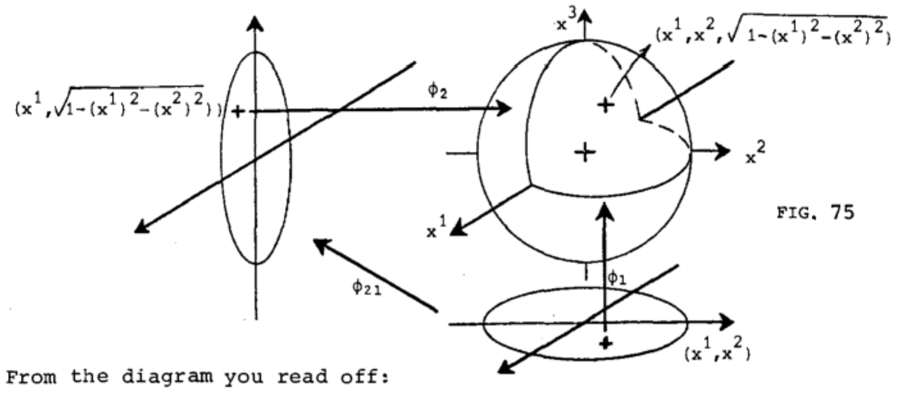

図 10.15: [31] より

ここで問題なのは座標系を別なものにかえても同じ結果になるだろうかということである。そこで次のような極座標を持ってくる。

$$\phi(\theta, \phi) = (\sin\theta\cos\psi, \sin\theta\sin\psi, \cos\theta)$$

この時、まず問題点の第 1 は一対一の写像にならず次のような周期性を持つことである

$$\phi(\theta, \phi) = \phi(\theta, \psi + 2n\pi)$$

$$\phi(\theta, \phi) = \phi(-\theta, \psi + n\pi)$$

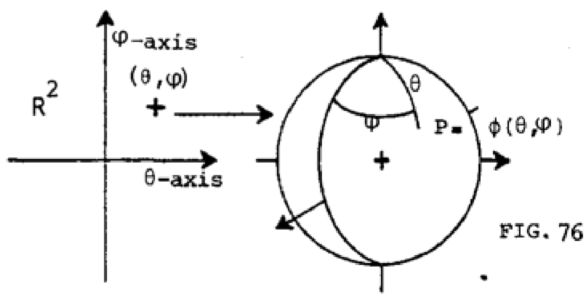

図 10.16: [31] より

第 2 はさらに深刻でこの場合の Jacobian は

$$\left[\frac{\partial\phi^i}{\partial x^j}\right] = \begin{pmatrix} \frac{\partial\phi^1}{\partial\theta} & \frac{\partial\phi^1}{\partial\psi} \\ \frac{\partial\phi^2}{\partial\theta} & \frac{\partial\phi^2}{\partial\psi} \\ \frac{\partial\phi^3}{\partial\theta} & \frac{\partial\phi^3}{\partial\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\psi & -\sin\theta\sin\psi \\ \cos\theta\cos\psi 0 & \sin\theta\cos\psi \\ -\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

となるが北極でのこの値は $\theta = 0$ だから $\sin\theta = 0$ となるが、ψ が決まらない。

$$\left[\frac{\partial\phi^i}{\partial x^j}\right]_{Pole} = \begin{pmatrix} ? & 0 \\ ? & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

10.4.2　微分同相

　異なる空間、ここでは多様体 M と多様体 N との関係を考える。この M と N で前部ではおおざっぱに言えば連続的な変形が可能であれば同相写像であるといった。ここではさらになめらかな変換であることを条件に加えるとそれが微分同相になる。

下図のように f を m 次元多様体 M から n 次元多様体 N への写像であるとする。M,N 上にチャート (U,ϕ),(V,ψ) をとる。

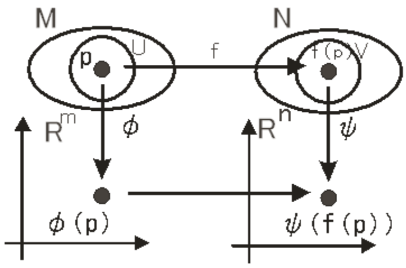

図 10.17: 異なる多様体間の写像 f と実空間との対応

この時、次の合成写像は

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \tag{10.10}$$

を表す。ここで M 上に $p \in U_1 \cap U_2$ をとると

$$\begin{aligned} \psi \circ f \circ \phi_1^{-1} &= \psi \circ f \circ \phi_2^{-1} \\ &= \psi \circ f \left(\phi_1^{-1} \phi_1 \circ \phi_2^{-1} \right) \\ &= \psi f \phi_1^{-1} \left(\phi_1 \circ \phi_2^{-1} \right) \end{aligned}$$

となるが変換関数を

$$\psi_{12} = \phi_1 \circ \phi_2^{-1}$$

と定義できたのでこの変換関数が無限回微分可能な C^∞ とすれば式 10.10 の合成写像も C^∞ となる。
式 10.10 が可逆、

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} = \phi \circ f \circ \psi^{-1}$$

の時 M と N は**微分同相**であるといい。

$$M = N$$

と書く。微分同相であれば同相になるがその逆は一般に成り立たない。
Donaldson によれば $\mathbb{R}^4$ には無限個の異なる微分構造があることが示された。

10.5　接空間

　多様体を定義してたが、その接空間は実際に物理現象の背景として重要になる。
次の図のように位置ベクトル $\mathbf{x} \in S^n$ を考えここでの接空間を次のように表す。

$$T_{\mathbf{x}} S^n := \{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n+1} | \mathbf{x} \cdot \mathbf{v} = 0 \}$$

$\mathbf{v}$ は $n+1$ 次元の実空間にあるが内積が 0 になるという条件が加わる。この時 S^n は $\mathbb{R}^{n+1}$ に埋め込まれている。

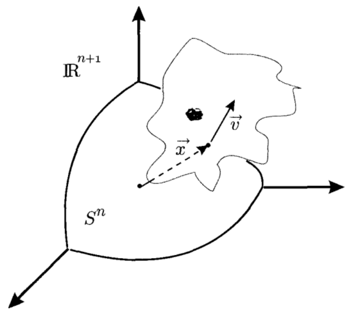

図 10.18: S^n は $\mathbb{R}^{n+1}$ に埋め込まれている

多様体の接空間は球体に接する平面板を思いがちであるが、実はそうではない。接空間はこの球面からはみ出すことはないのである。

これを実現するためには球面上で同じ接ベクトルを持つ**曲線の群**を考える必要がある。

そこで次に多様体 M 上での例として曲線と関数を考えよう。

次の図のような開区間 (a, b) を 0 を含めて定義する。開曲線であれば

$$c : (a, b) \to M$$

もし、この直線が閉じていれば

$$c : S^1 \to M$$

とみなしてよい。M 上でのチャート (U, ϕ) で曲線 $c(t)$ は局所座標表示は

$$x = \phi \circ c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$$

この写像 ϕ によって下図のように多様体上の点ははじめてある座標で表示される。c そのものは座標系と独立していることに留意する。

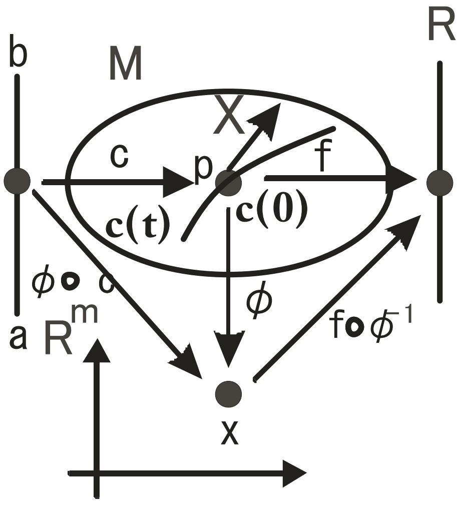

図 10.19: 開区間 (a, b) から曲線 c によって M 上に点 p が決まる。さらに関数 f によって実数軸上に数が対応する。

パラメタを利用することはスカラーをつくる必要がある。そこで $f \circ \phi^{-1}$ を多様体 M 上の関数は M から $\mathbb{R}$ へのなめらかな写像として

$$f\circ\phi^{-1}:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$$

とする。上図下の座標系を観測系にしておこう。

次に曲線については $t=0$ において**方向微分**を用いて、曲線に沿った関数 $f(c(t))$ の方向微分を $c(0)$ における接ベクトルとして次のように定義する。

$$\frac{df(c(t))}{dt}|_{t=0} \tag{10.11}$$

これを局所座標で表すと 1 形式として

$$df=\frac{\partial f}{\partial x^\mu}dx^\mu(c(t)) \tag{10.12}$$

となるので式 10.11 は局所座標で表すと

$$\frac{\partial f}{\partial x^\mu}\frac{dx^\mu(c(t))}{dt}|_{t=0}$$

と表現できるが観測系からは

$$\frac{\partial f}{\partial x^\mu}=\frac{\partial\left(f\circ\phi^{-1}(x)\right)}{\partial x^\mu}$$

の意味であり、局所表示で $t=0$ での座標微分を

$$X^\mu\equiv\frac{dx^\mu(c(t))}{dt}|_{t=0} \tag{10.13}$$

と定義すれば関数の微分を分離し、合成関数の微分則から

$$\frac{df(c(t))}{dt}|_{t=0}=X^\mu\left(\frac{\partial f}{\partial x^\mu}\right)\equiv X[f] \tag{10.14}$$

が定義できる。ここでパラメタ t が直接見えない形で多様体 M での接ベクトル T_PM を

$$X=X^\mu\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)$$

とすることができ、X^μ の部分が基底 $(\partial/\partial x^\mu)$ の成分に対応する。

つまり連続した曲線 $c(t)$ により、局所座標系が与えられると、ある点 $p(c)$ で方向に沿った接ベクトルが決まる。

ここで先の同値類を導入する。2 つの曲線 $c_1(t),c_2(t)$ が次を満たせば式 10.14 は共に同じ微分作用素 X を持つことを意味している。

$$c_1(0)=c_2(0)=p$$

$$\frac{dx_\mu(c_1(t))}{dt}|_{t=0}=\frac{dx_\mu(c_2(t))}{dt}|_{t=0}$$

これを同値関係 $\sim$ で表すことにする。これで X における**接ベクトルと曲線の同値類**

$$[c(t)]=\left\{\tilde{c}(t)|\tilde{c}(t)=c(0)\cap\frac{dx_\mu(c_1(t))}{dt}|_{t=0}=\frac{dx_\mu(c_2(t))}{dt}|_{t=0}\right\} \tag{10.15}$$

を同一視する。

これらの同値類全体が p における**接空間** (tangent_space) をつくる。

前節でみたベクトル場の基底が

$$e_\mu=\left\{\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right\}$$

と選べ、ベクトル $V\in T_pM$ が

$$V=V^\mu e_\mu$$

のように決まる。X^μ が演算子のように定義できるので局所的な座標に接ベクトルが依存せずに決められることである。

重要なのは有限な空間内にこの同値類は無限に多く、構成することができる。これは無限次元のヒルベルト空間を前提とした量子論の構成に関わっている。

10.6 接ベクトル

多様体 M を考え、p 点での接空間を T_pM としよう。

σ_1, σ_2 は v_1, v_2 を接ベクトルに持つ T_pM 上の曲線であるである。座標系としてチャート (U, ϕ) を p 点の周り次のようにとる。

$$p \in M, \phi(p) = 0 \in \mathbb{R}^m$$

微分同相な多様体の存在を考えたので次に多様体上の微分を考えよう。

多様体 M から $M^{'}$ への微分可能な写像 ϕ があれば次のように M の点 p での微分を定義できる。

$X \in T_p(M)$ に対して微分可能な関数 F として

$$X^{'} : f^{'} \in F(M^{'}) \to X(f^{'} \cdot \phi) \in R$$

つまり $X^{'}$ は $M^{'}$ の点 $\phi(p)$ における接ベクトルになる。

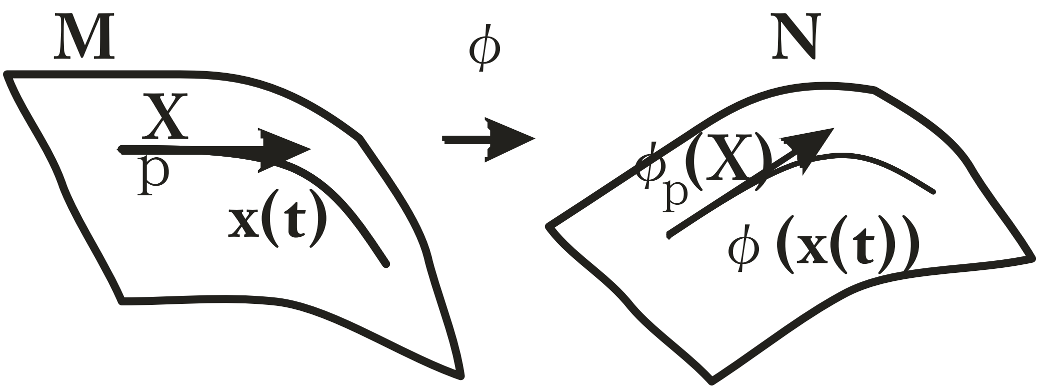

図 10.20: 多様体 M, N での接ベクトル

よって次を ϕ の p における微分という。

$$(\phi_*)_p : \quad X \in T_p(M) \to X^{'} \in T_{\phi(p)}(M^{'})$$

多様体は曲面をなすので接ベクトルは単純に考えれば多様体から下図のようにはみ出すのではないかと思うだろう。

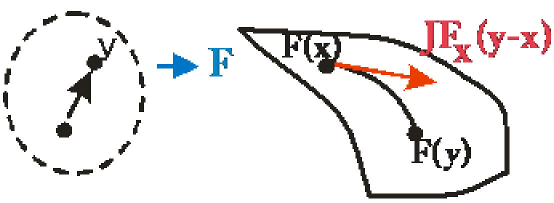

図 10.21: 異なる曲面への方向の変換

そこで方向微分というものを次のように定義する。

R^n の開集合 U 上の関数 $f : U \to R$ が微分可能で R^n の開集合 U から R^m への写像 $F : U \to R^m$ があり

$$F = \{f_1(x), f_2(x), \ldots f(x)_n\} \tag{10.16}$$

と表される時、F の x による微分を F_x と表すとして
点 x に対して F の点 x における微分 (diffrential) とは $m \times n$ 行列 JF_x で次を満たすものをいう。

$$F(y) - F(x) = JF_x(y - x) + o(\|y - x\|) \tag{10.17}$$

ただし $o(\|y - x\|) \in R^m$ は次を満たす。

$$\lim_{y \to x} \frac{o(\|y - x\|)}{\|y - x\|} = 0 \tag{10.18}$$

これがはみだしを除外するトリックの 1 つになる。$n = m = 1$ なら $JF_x(y - x)$ は通常の微分係数

$$\frac{df}{dx}(x) \tag{10.19}$$

と一致する。写像 F が x で微分可能であれば各成分の微分係数 $\frac{\partial f_i}{\partial x^j}$ と JF_x の (i, j) 成分と一致する。すなわち JF_x は F のヤコビ行列である。
例えば M, N を m, n 次元の多様体として次の線形写像 $(df)_p$ を考える。

$$(df)_p := T_p(M) \to T_q(N)$$

p, q でのベクトル $\mathbf{v}\omega$ を考えると

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{m} v_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \tag{10.20}$$

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_p$$

とかける。さらに

$$\omega = (df)_p(\mathbf{v})$$

で結ばれていれば J をヤコビアンとして、式 10.9 から

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix} = (Jf)_p \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$$

ここにヤコビアンが登場することから $(df)_p$ を微分と呼ぶ。
これから合成写像の微分則が導かれ写像 F が x で微分可能で G が $F(x)$ で微分可能であれば次が成り立つ。

$$J(G \circ F)_x = JG_{F(x)} JF_x \tag{10.21}$$

また、基底が微分演算子となっているので例えば

$$\mathbf{v} = (0, \cdots 1_i, \cdots 0_m) \tag{10.22}$$

のように i 成分のみが 1、後は 0 であるような t 単位ベクトルの場合

$$\sum_{i=1}^{m} v_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$$

であるので

$$(df)_p\left(\sum_{i=1}^{m} v_i\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p\right)=(df)_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p\right)=\sum_{j=1}^{n}\omega_j\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_q$$

となり、式 10.22 から

$$\omega_j=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p)v_i=\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p)$$

となる。よって

$$(df)_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p\right)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p)\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_q \tag{10.23}$$

のように基底の変換が決まる。重要なのは微分 $(df)_p$ が $\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_q$ を誘導していくことである。

10.7 方向微分

開区間 (a,b) から C^r 多様体 M への C^r 写像

$$\gamma:(a,b)\to M \tag{10.24}$$

を M の C^r 曲線という。M 上の点 x を固定し $t=0$ で x を通る曲線を ϵ を十分小さい正の数として

$$\begin{aligned}\gamma:(-\epsilon,\epsilon)&\to M\\ \gamma(0)&=x\\ \gamma((-\epsilon,\epsilon))&\subset U\end{aligned}$$

を考える。x を含む U の座標近傍 $(U,\psi(x))$ を選ぶこの時、$\psi\circ\gamma$ は $t=0$ で $\psi(x)$ を通る R^n の曲線である。

この時もう一つのトリックとして、$t=0$ で x を通る 2 つの曲線 γ_1,γ_2 が**等速度である**ことを次のように定義することができる。

x を含む U の座標近傍 $(U,\psi(x))$ に対して

$$\frac{d}{dt}(\psi\circ\gamma_1)\,|_{t=0}=\frac{d}{dt}(\psi\circ\gamma_2)\,|_{t=0} \tag{10.25}$$

が成り立つ時である。この等速度の定義は次で示すように座標系によらない。先に用いた微分演算子 J と合成関数の微分を用いて

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\psi\circ\gamma_i)\,|_{t=0}&=J(\psi\circ\gamma_i)_0\\ &=J\left((\psi\circ\phi^{-1})\circ(\phi\circ\gamma_i)\right)_0\\ &=J(\psi\circ\phi^{-1})_{\phi(x)}J(\phi\circ\gamma_i)_0\\ &=J(\psi\circ\phi^{-1})_{\phi(x)}\frac{d}{dt}(\phi\circ\gamma_i)\,|_{t=0}\end{aligned} \tag{10.26}$$

よって $J(\psi\circ\phi^{-1})_{\phi(x)}$ が存在すればこれは共通しているので

$$\frac{d}{dt}(\psi\circ\gamma_1)\,|_{t=0}=\frac{d}{dt}(\psi\circ\gamma_2)\,|_{t=0}\leftrightarrow\frac{d}{dt}(\phi\circ\gamma_1)\,|_{t=0}=\frac{d}{dt}(\phi\circ\gamma_2)\,|_{t=0} \tag{10.27}$$

の関係が成り立ち、等速度である関係は座標系 ϕ,ψ に依存しなくなる。

次に図のように点 x において曲線 γ に**等速度である同値類** $[\gamma]$ がある場合を考える。

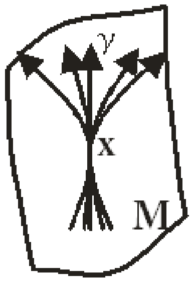

図 10.22: 多様体上の点 x での等速度な同値類 γ

この同値類 $[\gamma]$ をここでは曲線 γ の決める接ベクトルと定義する。これにより
M 上の点 x での接ベクトルの集合を T_xM とする。
次のよう座標近傍 $\phi\{x^1, x^2, \ldots, x^n\}$ に 1 形式の写像 $d\phi$ を定める。

$$d\phi([\gamma]) = \frac{d}{dt}(\phi \circ \gamma)\mid_{t=0} \tag{10.28}$$

すると $\mathbf{u} \in R^n$ として

$$\gamma(t) = \phi^{-1}(\phi(x) + t\mathbf{u}) \tag{10.29}$$

とおけば

$$d\phi([\gamma]) = \mathbf{u}$$

を得るので $d\phi$ は単射であり、全射である。これにより次のように和と実数倍を定めることができる。

$$[\gamma] + [\eta] = d\phi^{-1}\left(d\phi([\gamma]) + d\phi([\eta])\right) \tag{10.30}$$

$$\lambda[\gamma] = d\phi^{-1}\left(\lambda d\phi([\gamma])\right) \tag{10.31}$$

これにより T_xM は実ベクトル空間になる。このベクトルの和、および実数倍も式 10.27 により座標系 (U, ϕ) に依存しない。
このときの比が式 10.26 により $J(\psi \circ \phi^{-1})_{\psi(x)}$ となることがわかる。
次に M 上の C^r 関数 f を微分することを考える

$$f : M \to R$$

C^r 曲線 γ を M 上で合成し

$$\gamma : (\epsilon, -\epsilon) \to M \tag{10.32}$$

となる 1 変数関数 $f \circ \gamma(t)$ を考え、その $t = 0$ での微分を

$$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)\mid_{t=0} \tag{10.33}$$

で表す。$M = R^n$ のとき、γ を次のようにおく

$$\gamma(t) = \mathbf{x} + t\mathbf{e_i}$$

すると式 10.33 から方向微分は次のように表すことができる。

$$D_\gamma(f) = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)\mid_{t=0} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \tag{10.34}$$

この方向微分 $D_\gamma(f)$ も式 10.27 により座標系 (U,ϕ) に依存しない。
また 1 変数の場合式 10.26 から

$$
\begin{aligned}
D_\gamma(f) &= \frac{d}{dt}(f\circ\gamma_i)\,|_{t=0} \\
&= J\left((f\circ\phi^{-1})\circ(\phi\circ\gamma_i)\right)_0 \\
&= J(f\circ\phi^{-1})_{\phi(x)}J(\phi\circ\gamma_i)_0 \\
&= J(f\circ\phi^{-1})_{\phi(x)}\frac{d}{dt}(\phi\circ\gamma_i)\,|_{t=0}
\end{aligned}
$$

と書き直すことができるので $t=0$ 等速度であれば $D_{\gamma_1}(f)=D_{\gamma_2}(f)$ である。
$t=0$ で $[\gamma]$ はある方向を決める同値類であるそこでこれを次のように表し、
$\xi_x=[\gamma]\in T_xM$ に対して関数 f の ξ_x 方向の微分係数を

$$\xi_x(f)=D_\gamma(f)$$

と定めることにする。すると ξ_x は γ が異なっていても D_γ に依存するので γ **の選び方に関係なく一定**である。
つまり ξ_x は t による**微分空間のみを見ている。**

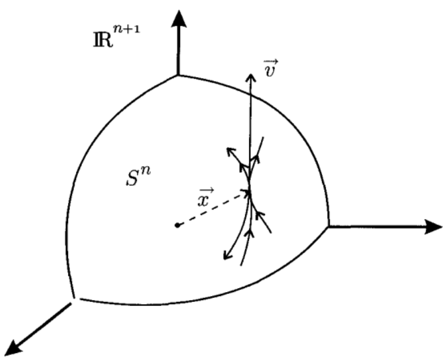

図 10.23: [48] より:多くの曲面が同じ接ベクトルを共有している。

次にこれらの同値類と積分曲線の関係を見てみよう。
接ベクトルの基底は微分演算子であった。ベクトル場があるところに関数をもってくれば自然にこのベクトル場により微分が次のように定義できる。

$$X=\sum_{i=1}^{n}X_i\frac{\partial}{\partial x_i}$$

$f(x)$ の x を連続性のもとに変化させる。t をパラメタとしてこの X の作用は次のような微分表現ができる。

$$
\begin{aligned}
X\left(f(x)\right) &= \frac{d}{dt}f(x+tX(x))|_{t=0} \\
&= \sum_{i=1}^{n}X_i\frac{\partial f}{\partial x_i}
\end{aligned}
$$

1 行目において各空間に共通の変化量 t があたかも成分のようにかかっているので 2 行目では t が消えるかのように見える。さらに 2 行目は**外微分** df に X を代入した $df(X)$ に等しい、従って

$$df(X)=\sum_{i=1}^{n}X_i\frac{\partial f}{\partial x_i}=Xf(x) \tag{10.35}$$

とかける。これはベクトルである。一般化すると n 次元接ベクトル v が次のように定義できる。

$$v(a_1,\cdots a_n)\in T_pR^n$$

これと可微分写像 ϕ

$$\phi=(\phi_1,\cdots\phi_m):R^n\to R^m$$

を用意すると点 p を始点として v 方向に写像 ϕ を微分したものとして

$$v(\phi)=\sum_{i=1}^{m}a_i\frac{\partial\phi}{\partial x_i}(p)=d\phi(v)\in T_{\phi(p)}R^m$$

と表すことができる。これは R^n 上の曲線が

$$\begin{aligned} c(0) &= p \\ \frac{d}{dt}c(t)|_{t=0} &= v\in T_pR^n \end{aligned} \tag{10.36}$$

を満たすことになる。これは次の節で見るように局所 1 パラメタ変換群をつくる。局所となるのは

$$c:[-\varepsilon,\varepsilon]\to R^n$$

でパラメタ t には制限がかかり、ある部分のみを見ていることに限定する必要があるからである。
$\phi\circ c$ としたものは R^m 上の曲線に変換される。この時 $t=0$ での接ベクトルは

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\phi\circ c\right)|_{t=0} &= \sum_{i}^{m}\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\left(c(0)\right)\frac{d}{dt}c_i(t)|_{t=0} \\ &= \left\{\left(d\phi_1\right)_p(v),\cdots\left(d\phi_m\right)_p(v)\right\} \\ &= d\phi(v) \end{aligned}$$

となり、座標系に依存しない。これで写像 ϕ の v 方向への微分が求まった。
式 10.36 から R^n 上の開集合 U の曲線

$$c=\{c_1,\cdots c_n\}:(a,b)\to U(a,b)$$

は $t=0$ において $c(0)=p$ を通る積分曲線であり次の連立常微分方程式の解になる。

$$\dot{c}(t)=\left(\frac{dc_1}{dt}(t),\cdots\frac{dc_n}{dt}(t)\right)=X(c(t))\in i_XT_{c(t)}R^n$$

また n 次元多様体 M 上の点 p における接ベクトルを

$$X=\sum_{i=1}^{n}a^i\frac{\partial}{\partial x^i}\in T_p(M) \tag{10.37}$$

として次のような曲線を考える。

$$x^i(t)=x^i(p)+t(a^i)\quad 1\le i\le n \tag{10.38}$$

また、写像 ϕ は $X\in T_p(M)$ を $Y\in T_{\phi(p)}(N)$ に移す写像とすると

$$Xf=\frac{d(f(x^1(t),\cdots x^n(t)))}{dt}|_{t=0} \tag{10.39}$$

であり X は曲線 $x(t)$ に沿う方向微分係数ということができる。この時、写像 ϕ による $x(t)$ の像は $\phi(p)$ から出る N の曲線であるがこの曲線に沿う方向微分係数は次のようになる。

$$Yg = \frac{d(g(\phi(x^1(t)), \cdots \phi(x^n(t))))}{dt}|_{t=0} \quad g \in F(N) \tag{10.40}$$

n 次元多様体 M 上の点 p を始点とする曲線 $x(t)$ に対し $t = 0$ での接ベクトルは $X \in T_pM$ として

$$Xf = \frac{d(f(x(t)))}{dt}|_{t=0}, \quad f \in F(M)$$

である。これが図のように多様体 N に ϕ で移される時、接ベクトル $\phi_p(X)$ になる。

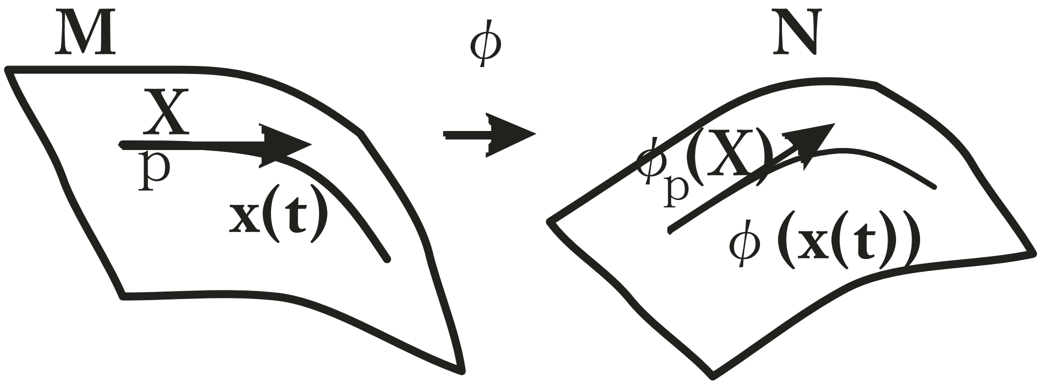

図 10.24: 多様体 M, N での接ベクトル

曲線 $x(t)$ の各 t における接ベクトルは

$$Xf = \frac{d(f(x(t)))}{dt}|_{t}, \quad f \in F(M) \tag{10.41}$$

で定義でき、これを $x'(t)$ で表す。t は変化していく。

局所座標系を多様体 M の**開集合** U **で制限する**ことにより次元が一致すれば同じ次元の多様体とみなすことができる。

これを**開部分多様体** (Open Submanifold) という。

例えば n 次実行列の全体 $gl(n, R)$ を R^{n^2} と同一視すると

一般線形群 $GL(n, R)$(general linear group) はその開部分多様体になる。

つまり多様体からはみ**出すように見える接ベクトルも局所的には同じ多様体**として考えることができる。

以上から一般に物理学では次のように**方向微分** (directional_derivative) を扱うことが多い。

多様体上に連続曲線があり座標 x^α での接ベクトルを $\mathbf{A}$ とすると

$$\mathbf{A} = \frac{d\phi(\mathbf{x}(t))}{dt}$$

よって方向微分は演算子とみなすことができて

$$\partial_{\mathbf{A}} = A^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \frac{dx^\alpha}{dt}\frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \left(\frac{d}{dt}\right)_c \tag{10.42}$$

と表すことができる。ただし、最後の下 c は曲線に沿ったパラメタ t による全微分であることを表す。

10.8 双対空間

一方で式 10.12 からこのベクトルの双対ベクトルを定義できる。これは余接ベクトルと呼ばれる。

余接空間 (cotangent_space) を T_p^*M で表す。これは接空間と直交しているわけではない。

接空間と余接空間を考えることは M 上で 1 次微分形式を作ることと等しい。つまり、多様体 M から 1 次元多様体 $\mathbb{R}$ への写像 f の微分

$$df_p : T_p(M) \to T_{f(p)}(\mathbb{R})$$

を考える。$T_{f(p)}$ の基底を

$$\left(\frac{d}{dx}\right)_{f(p)}$$

をとると $T_{f(p)}(\mathbb{R})$ の元が

$$a\left(\frac{d}{dx}\right)_{f(p)}, a \in \mathbb{R}$$

ととれるので

$$df_p : T_p(M) \to \mathbb{R}$$

という**線写像とみる**ことができる。従って df は余接ベクトルの元と見なすことができて次のようにかける。

$$df \in T_p^*M,\ \ V \in T_pM$$

双対の定義から

$$\langle df, V\rangle \equiv V[f] = V^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \in \mathbb{R}$$

として、さらに

$$X^* = X_\mu \left(dx^\mu\right)$$

とすれば式 10.14 は

$$\frac{df(c(t))}{dt}|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\left(f \circ \phi^{-1}(x)\right)}{\partial x^\mu} dx^\mu(c(t))\right)|_{t=0} = X_\mu \left(f dx^\mu\right) \equiv X^*[f]$$

ともかける。

$$X_\mu = a \wedge b \tag{10.43}$$

$$df = d(f_1 dx_1 + f_2 dx_2) = \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2 \tag{10.44}$$

10.9 部分多様体

実際の物質が多くの構成要素からなるように多様体の中に多様体を考えることが必要になる。
そこで $M^{'}$ を多様体 M の部分多様体とする。

$$T_pM^{'} \subset T_pM$$

この時、点 $p \in M_1 \cap M_2$ について

$$T_pM_1 + T_pM_2 = T_pM$$

が成り立つ時、M_1 と M_2 は点 p にいて**横断的 (transuerse)** に交わるという。横断的であれば次が成り立つ。

$$dim(M_1 \cap M_2) = dimM_1 + dimM_2 - dimM$$

また、

$$T_p(M_1 \cap M_2) = T_pM_1 \cap T_pM_2$$

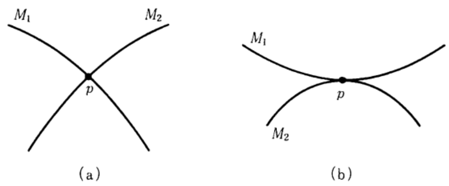

図 10.25: a が横断的である。

部分多様体になるためには横断的な交わりが必要になる。

10.10 はめこみと埋め込み

多様体 M から N への微分可能写像 ϕ は M の各点 p で $\phi_p(X)$ が 1 対 1 の時、M から N への**はめこみ** (immersion) という。

またこの時の M を N のはめこまれた**部分多様体** (immersed submanifold) という。

特に ϕ が 1 対 1 ので、しかも M から N の中への相対位相を持つ部分集合 $\phi(M)$ への写像 ϕ が同相であるとき、ϕ を**うめこみ** (imbedding) という。

この時の M を N の**うめこまれた部分多様体** (imbedded submanifold) という。

つまり $f : M \to N$ がなめらかな写像で $dimM \leq dimN$ として

- ヤコビ行列 $\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right)$ の階数が M のとき f は**挿入**であるという。
- 写像 f は $f_* : T_pM \to T_{f(p)}N$ が単射であれば $rank(f_*) = dimM$ のとき、M から N への**はめ込み**であるという。
- はめこみであり、かつ像 $f(M)$ が M に微分同相であるとき、f は**埋め込み**であるという。このときの像 $f(M)$ を N の部分多様体という。[33]

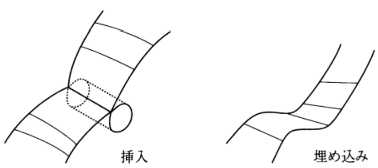

図 10.26: [33] より

埋め込みのほうが条件が厳しいことになるがはめ込みを局所的に見ると埋め込みと見ることができる場合がある。

例えば $f :\to S^1 \to \mathbb{R}^2$ を考えるとこれは S^1 の 1 次元接空間を f_* により $T_{f(p)}\mathbb{R}^2$ の 1 次元部分空間に写すので次の図で見るようにはめ込みである。しかし、図の右は埋め込みになるが左は交点をもち、微分が一意に決まらない点が存在するので微分同相にならなない。よってはめこみであっても埋め込みではない例である。

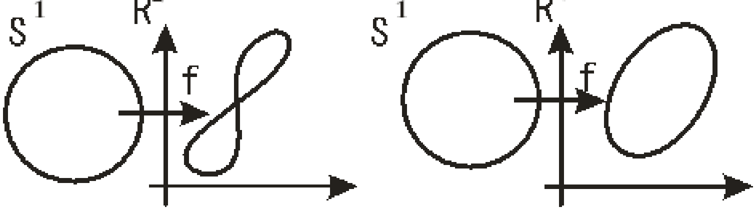

図 10.27: 図右ははめ込みであり、埋め込みになるが左ははめ込みであっても埋め込みではない。

部分多様体の場合、$M, f(M)$ を同一視し、$p, f(p)$ も区別しないとする。また接空間 T_pM も T_pN の線型部分空間とみなす。

11　写像の微積分 [57]

11.1　ベクトル場による微分

$\mathbb{R}^m$ 上の多様体を考え、f を 1 次元に写す写像とする。

$$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \ \ (1 \leq r \leq \infty)$$

$\mathbf{v}$ は m 次元ベクトルとして f の p における $\mathbf{v}$ 方向の微分係数を次のように定義する。

$$f^{'} = \frac{df(p+t\mathbf{v})}{dt}|_{t=0}$$

これはベクトルではない。定義に従って微分すれば結局 $\mathbf{v}$ に関数 f を作用させていることになり

$$f^{'} = \sum_{i=1}^{m} v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \mathbf{v}(f)$$

とかける。そこで写像の微分を

$$(df)_p : T_p(\mathbb{R}^m) \to T_{f(p)}(\mathbb{R})$$

として $\mathbf{v}$ は $T_p(\mathbb{R}^m)$ の元とすれば $T_{f(p)}(\mathbb{R})$ の基底が 1 次元になることから偏微分の必要がなくなり、

$$\left(\frac{d}{dy}\right)_{f(p)}$$

となる。

点 p での微分と方向微分 $\mathbf{v}(f)$ の関係をみておこう。式 10.23 から

$$\begin{aligned}
(df)_p(\mathbf{v}) &= (df)_p\left(\sum_{i=1}^{m} v_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p\right) \\
&= \sum_{i=1}^{m} v_i (df)_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p\right) \\
&= \sum_{i=1}^{m} v_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_{f(p)}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{m} v_i \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_{f(p)}\right]_{n=1} \\
&= \left\{\sum_{i=1}^{m} v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)\right\}\left(\frac{d}{dy_i}\right)_{f(p)} \\
&= \mathbf{v}(f)\left(\frac{d}{dy}\right)_{f(p)}
\end{aligned}$$

となる。つまり方向微分において $n = 1$ の多様体に写した例が関数の微分になっている。

11.2 押し出し [11]

引き戻しをよく利用してきたが、ここではベクトル場による写像の微分から、押し出しを定義する。
ベクトル場を

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

関数を

$$f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$$

とする。点 x を通るベクトル場 $X(x)$ 方向への直線が

$$t \to x + tX$$

とできたから式 8.14 より

$$\begin{aligned} X(f)(x) &= \frac{d}{dt} f(x + tX(x))|_{t=0} \\ &= \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \end{aligned}$$

となった。これを単に $X(f)$ と表せば

$$X(f) = df$$

である。
次に可微分写像

$$\phi = (\phi_1, \cdots \phi_m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

を考え、点 p でのベクトル場は

$$v = (a_1, \cdots, a_n) \in T_p\mathbb{R}^n$$

として、この方向への微分は

$$v\left(\phi\right) = \sum a_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\left(p\right) \tag{11.1}$$

となるので、これを先の定義に従い、

$$\begin{aligned} v(\phi) &= d\phi(v) \\ &= \left(d\phi_1|_p\left(v\right), \cdots d\phi_m|_p\left(v\right)\right) \in T_{\phi(p)}\mathbb{R}^m \end{aligned}$$

ここで 1 つの切断として

$$c(0) = p, \frac{d}{dt}c(0) = v \in T_p\mathbb{R}^n$$

を選べるような $\mathbb{R}^n$ 上の曲線

$$c(t) = (c_1(t), \cdots c_n(t))$$

を考える。つまり、接点で同じ接ベクトルを持つ曲線は多くある。
次に合成 $\phi \circ c$ を考えるとこれは $\mathbb{R}^m$ 上の曲線である。また、曲線に沿って

$$v = \frac{dc}{dt}$$

となるので、この時 $t = 0$ での接ベクトルを考えると、式 11.1 から

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\phi \circ c\right)(0) &= \sum \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\left(c(0)\right) \frac{dc_i}{dt}\left(0\right) \\ &= \left(\sum \frac{\partial \phi_1}{\partial x_i}\left(c(0)\right) \frac{dc_i}{dt}\left(0\right), \cdots, \sum \frac{\partial \phi_m}{\partial x_i}\left(c(0)\right) \frac{dc_i}{dt}\left(0\right)\right) \\ &= \left(d\phi_1|_p\left(v\right), \cdots d\phi_m|_p\left(v\right)\right) \end{aligned}$$

つまり、

$$\frac{d}{dt}(\phi \circ c)(0) = d\phi(v)$$

であることがわかった。この $d\phi(v)$ もまた、ベクトル場をつくる。

1 形式との演算 $d\phi(v)$ は v を接ベクトルに持つ曲線を考え、その ϕ による像の接ベクトルを求めればよい。

これが方向微分の考え方である。局所的にもこの値を求めることができる。

特に $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ が微分同相つまり、1 対 1 でかつ逆が存在し、逆も微分できる場合、ベクトル場 X に対して

$$p \to d\phi(X)(p) = d\phi\left(X\left(\phi^{-1}(p)\right)\right) \in T_p\mathbb{R}^n$$

と表現することができる。これはベクトル場 $d\phi(X)$ が ϕ による X の**押し出し**と呼ぶ。

11.3 合成写像の微積分 [37]

一般に C^∞ 級の連続関数を $F(t)$ とし、で次のような関係が成り立つとする。

$$\int_a^b \frac{dF}{dt}(s)ds = F(b) - F(a)$$

これは、原始関数の存在定理を拡大して

$$\int_a^t \frac{dF}{dt}(s)ds$$

が、関数

$$\frac{dF}{dt}$$

の原始関数であるから、これから微分を知れば少なくとも 2 点間の関数の差が得られることを示す。

そこで n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の開集合 U 上で定義された関数

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1 \cdots, x_n)$$

$$f(\mathbf{y}) = f(y_1 \cdots, y_n)$$

$$\mathbf{z}(z_1 \cdots, z_n)$$

に対し、$f(\mathbf{z}) - f(\mathbf{y})$ を求めることを考えたい。この時、図のような連続した曲線がパラメタ t で与えられる場合を考えよう。

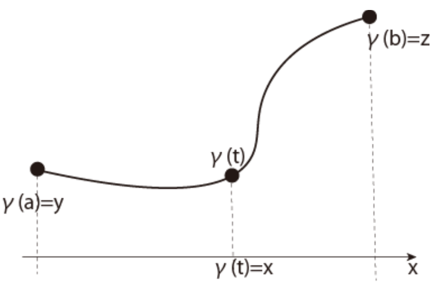

図 11.1: 曲線により座標位置を決める

$\mathbf{y}$ から $\mathbf{z}$ への U 内の曲線

$$\gamma : [a, b] \to U\,(\gamma(a) = \mathbf{y}, \gamma(b) = \mathbf{z})$$

が描けるためには $f\circ\gamma$ が連続かつ微分可能であれば

$$\begin{aligned} f(\mathbf{z})-f(\mathbf{y}) &= f(\gamma(a))-f(\gamma(b)) \\ &= \int_a^b \frac{d(f\circ\gamma)}{dt}(t)dt \end{aligned}$$

とかける。ただし、合成写像の微分を

$$\frac{d(f\circ\gamma)}{dt}(t)=\frac{\partial f(\gamma(t))}{\partial x^1}\frac{d\gamma_1(t)}{dt}+\cdots+\frac{\partial f(\gamma(t))}{\partial x^n}\frac{d\gamma_n(t)}{dt}$$

で表す。これは次のように導かれる。一般に f の変化量を

$$\Delta f=\frac{\partial f}{\partial x^1}dx^1+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x^n}dx^n$$

とおき、dx^i の部分について部分積分を実行するために座標変化を曲線上の変化に置き換える。このとき、連続した曲線がパラメタ t で与えらているので

$$dx^i=\frac{d\gamma_i}{dt}dt$$

と全微分で表すことができる。次の積分に部分積分を実行するとストークスの定理から、

$$\begin{aligned} f(\mathbf{z})-f(\mathbf{y}) &= \int_a^b \left(\frac{\partial f(\gamma(t))}{\partial x^1}\frac{d\gamma_1(t)}{dt}+\cdots+\frac{\partial f(\gamma(t))}{\partial x^n}\frac{d\gamma_n(t)}{dt}\right)dt \\ &= \int_\gamma \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}dx^1+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x^n}dx^n\right) \\ &= \int_\gamma df \end{aligned}$$

が成り立つ。

11.4 積分可能条件 [37]

ここで微分 1 形式

$$\frac{\partial f}{\partial x^1}dx^1+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x^n}dx^n$$

が常に積分が可能かという問題がある。積分が可能であるというのは線積分をした時に常に終点の座標のみの関数になる必要があるということである。次にこの条件を見てみよう。

前部で次の 2 つの複素数の積

$$\begin{aligned} z&=x+iy \\ w&=a+ib \\ w\cdot z&=(ax-by)+i(bx+ay)\equiv u+iv \end{aligned}$$

複素空間での積分可能条件としてコーシー・リーマンの方程式

$$\begin{aligned} \partial_x u&=\partial_y v \\ \partial_x v&=-\partial_y u \end{aligned}$$

が成立する必要があることを見た。

そこで

$$f_i = \frac{\partial F}{\partial x^i}$$

として、2 回連続微分が可能な原始関数が存在するためには次のように**相互交換の条件**を満たす必要がある。

$$\frac{\partial f_i}{\partial x^j} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^j \partial x^i} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \tag{11.2}$$

しかし、これが必要十分であろうか？いくつかの例でみていこう。

はじめに次の図のような折れ線での積分経路を考えると

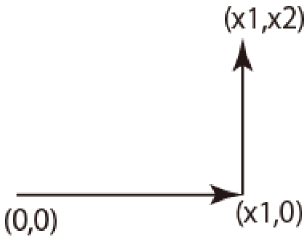

図 11.2: 折れ線的な積分経路 1

$$dF = f_1 dx^1 + f_1 dx^2$$

水平方向にパラメタ s, 鉛直方向には t とおいて

$$F(x^1, x^2) = \int_0^{x^1} f_1(s, 0)ds + \int_0^{x^2} f_2(x^1, t)dt$$

となるので式 11.2 を用いると

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x^1} &= f_1(x^1, 0) + \int_0^{x^2} \frac{\partial f_2(x^1, t)}{\partial x^1} dt \\
&= f_1(x^1, 0) + \int_0^{x^2} \frac{\partial f_1(x^1, t)}{\partial x^2} dt \\
&= f_1(x^1, 0) + \left[f_1(x^1, t)\right]_{t=0}^{t=x_2} \\
&= f_1(x^1, x^2)
\end{aligned}$$

が成り立つ。同様に

$$\frac{\partial F}{\partial x^1} = f_2(x^1, x^2)$$

が成立する。つまり、**相互交換の条件**によって積分経路が決められることがわかる。この条件が与えられないと

$$\int_0^{x^2} \frac{\partial f_2(x^1, t)}{\partial x^1} dt$$

は不定になる。

次に図のように原点を除いて定義した平面を考えよう。

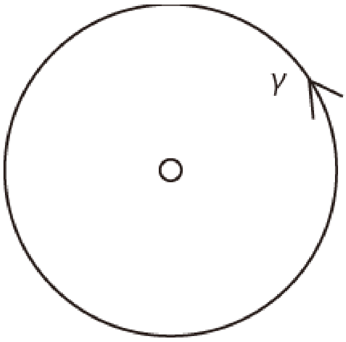

図 11.3: 原点を除いて定義した、円周の経路 2

このとき回転を

$$dF = f_1 dx^1 + f_1 dx^2 = -\frac{x^2}{\left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2} dx^1 + \frac{x^1}{\left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2} dx^2$$

で考えれば原点が取り除かれているので dF を定義できる。
このとき、相互交換の条件は

$$\frac{\partial f_1}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x^2}\left(-\frac{x^2}{\left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2}\right) = -\frac{1}{\left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2} + \frac{2\left(x^2\right)^2}{\left(\left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)\right)^2} = \frac{-\left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2}{\left(\left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)\right)^2}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x^1} = \frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{x^1}{\left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2}\right) = \frac{1}{\left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2} - \frac{2\left(x^1\right)^2}{\left(\left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)\right)^2} = \frac{-\left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2}{\left(\left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)\right)^2}$$

となり満たされていることがわかる。
しかし、この dF から得られる F は原点を除いて定義することができない。理由は次のようになる。

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2/\{0\}$$

$$dF = -\sin t dx^1 + \sin t dx^2$$

として

$$\gamma(t) \equiv (\cos t, \sin t)$$

と定義する。もし F が存在すれば周期性から

$$\int_\gamma f_1 dx^1 + f_2 dx^2 = F\left(\gamma(2\pi)\right) - F\left(\gamma(0)\right) = 0$$

でなくてはいけない。しかし、

$$\int_\gamma f_1 dx^1 + f_2 dx^2 = \int_0^{2\pi}\left(-\sin t\frac{d\cos t}{dt} + \cos t\frac{d\sin t}{dt}\right) dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

である。よって F は原点を除いて定義ができない。
しかし、円周ではなく、最初の例でみたように長方形上であれば定義できている。そこで
n 次元ユークリッド空間の部分集合 U が次の性質を持つ時、U は y に対し星型であるという。

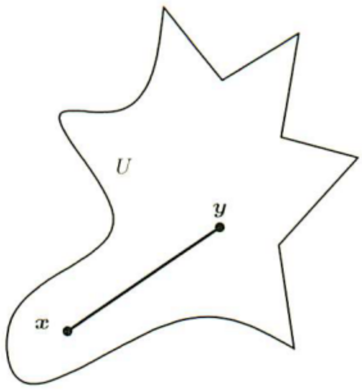

図 11.4: [37] より、開区間 U は y に対して星形である

任意の $\boldsymbol{x} \in U$ に対し、線分 l_x が

$$l_x = \{(1-t)\boldsymbol{y} + t\boldsymbol{x} : (0 \leqq t \leqq 1)\} \subset U \tag{11.3}$$

星型であれば

$$F(\boldsymbol{x}) = \int_{l_x} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \right) \tag{11.4}$$

は全微分

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \tag{11.5}$$

を満たす。これは

$$F = \int_{\ell_{(x)}} f_1 dx^1 + \cdots f_n dx^n = \int_0^1 \sum_{i=1}^n f_i \left((1-t)\mathbf{y} + t\mathbf{x} \right) dx^i$$

とおき、t の変化に対して

$$dx^i = \left(x^i - y^i \right) dt$$

とおいて x の係数 t が前に出るので

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x^i} &= \frac{\partial}{\partial x^i} \int_0^1 \sum_{j=1}^n f_j \left((1-t)\mathbf{y} + t\mathbf{x} \right) \left(x^j - y^j \right) dt \\
&= \int_0^1 \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j \left((1-t)\mathbf{y} + t\mathbf{x} \right)}{\partial x^i} t \left(x^j - y^j \right) dt + \int_0^1 f_i \left((1-t)\mathbf{y} + t\mathbf{x} \right) dt
\end{aligned}$$

ここに相互交換の条件をつかうと第 1 項の添え字を入れ替えることができて、部分積分を使うと

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x^i} &= \int_0^1 \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i \left((1-t)\mathbf{y} + t\mathbf{x} \right)}{\partial x^j} t \left(x^j - y^j \right) dt + \int_0^1 f_i \left((1-t)\mathbf{y} + t\mathbf{x} \right) dt \\
&= \left[f_i \left((1-t)\mathbf{y} + t\mathbf{x} \right) t \right]_0^1 - \int_0^1 f_i \left((1-t)\mathbf{y} + t\mathbf{x} \right) dt + \int_0^1 f_i \left((1-t)\mathbf{y} + t\mathbf{x} \right) dt \\
&= f_i(\mathbf{x})
\end{aligned}$$

を得る、前に出した t がきわめて重要な役割をしていることがわかる。

11.5 逆関数の定理

図のように M, N を C^r 級の多様体とし $f : M \to N$ を C^r 級写像とする。前節でみたように微分

$$(df)_p : T_p(M) \to T_{f(p)}(N)$$

の点 p での f の幾何学的性質との対応をここでは考える。

この時 f は p の開近傍から $f(p)$ の開近傍への C^r 級写同相写像になる。すなわち、p の開近傍 U と $f(p)$ の開近傍 V が存在し

$$f(U) = V$$

となる。

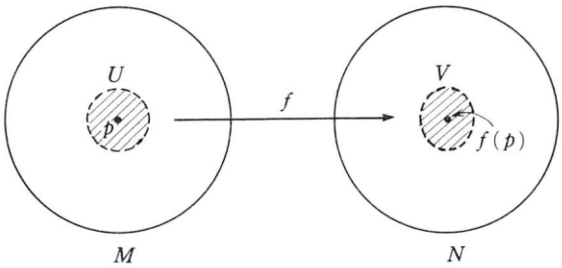

図 11.5: [57] より

ここに重要な逆関数の定理がある。つまり $(df)_p$ が同型であれば逆写像が局所的に存在する。

これを示すためにまず、$(df)_p$ が同型であるから

$$dimT_p(M) = dimT_{f(p)}(N)$$

となる。よって

$$dimM = dimN$$

局所的には接空間は $\mathbb{R}^m$ とみなせるので

$$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$$

とし、

$$p = o,\ f(p) = o$$

とすると局所的に

$$(df)_o : T_o(\mathbf{R}^m) \to T_o(\mathbf{R}^m)$$

とかけるのでこれは同型である。従ってヤコビアン $A = (Jf)_0$ は正則行列になる。

従って逆が存在する。A^{-1} に対応する線形写像を

$$g : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$$

とすると $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^m$ は式 8.5 から縦ベクトルで

$$g(\mathbf{x}) = A^{-1}\mathbf{x}$$

とおける。よって

$$g(o) = o \quad (Jg)_o = A^{-1}$$

したがって合成写像のヤコビアンは

$$J(f\circ g)_o=(Jf)_o\circ(Jg)_o=AA^{-1}=I_m$$

であり、m 次の単位行列 I_m であることがわかる。これは f と g を入れ替えても成り立つのでこのとき $(Jf)_0$ は単位行列としてよい。

次に $\mathbf{x}$ が o の十分に近くにあれば $(Jf)_0$ は単位行列だから $(Jf)_{\mathbf{x}}$ は I_m に十分に近いといえる。

そこで U を原点 o を中心とする半径 r の開円板

$$D_r^m=\{\mathbf{x}||\mathbf{x}|<r\}$$

とすると r を十分小さくとると f_i は x_i よりわずかに大きいだけだから U の各点で次の不等式が成り立つとしてよい。

$$\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(\mathbf{x})-1\right|\le\frac{1}{2m}\quad(i=j=1,2,3,\cdots,m)$$

$$1-\frac{1}{2m}\le\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(\mathbf{x})\le1+\frac{1}{2m}\quad(i=j=1,2,3,\cdots,m)\tag{11.6}$$

$$\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x})\right|\le\frac{1}{2m}\quad(i\ne j)$$

この時、

$$f:U\to\mathbf{R}^m$$

は次のようにして 1 対 1 の写像であることを松本氏は証明している。(参照 [57])

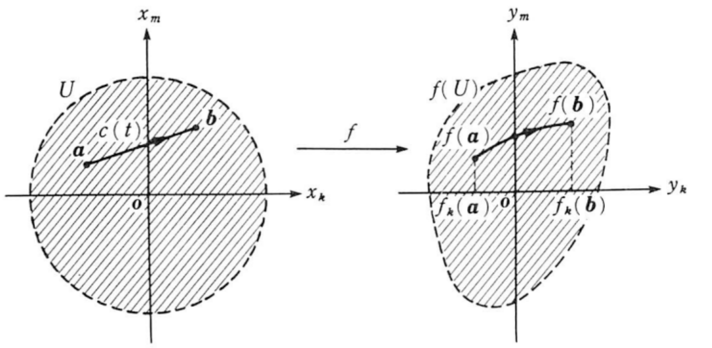

図 11.6: [57]) より

下図のように U の異なる 2 点 $\mathbf{a},\mathbf{b}$ について線分をパラメーターで表示する。

$$c(t)=\mathbf{a}(1-t)+\mathbf{b}t=\mathbf{a}+(\mathbf{b}-\mathbf{a})t\ \ (0\le t\le1)$$

そこで新たに次のように成分で表すと

$$\mathbf{a}=(a_1,a_2,\cdots a_m)$$

$$\mathbf{v}=\mathbf{b}-\mathbf{a}=(v_1,v_2\cdots v_m)$$

$$c(t)=\mathbf{a}+\mathbf{v}t\ \ (0\le t\le1)$$

ここで v_m の成分の大きさの最大値を v_k がとるとする。この時、

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_1}(\mathbf{x})v_1+\frac{\partial f_k}{\partial x_2}(\mathbf{x})v_2+\cdots\frac{\partial f_k}{\partial x_m}(\mathbf{x})v_m$$

が 0 をとらないことを確認するために上式の絶対値をとり、式 11.6 から

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial f_k}{\partial x_1}(\mathbf{x})v_1+\frac{\partial f_k}{\partial x_2}(\mathbf{x})v_2+\cdots\frac{\partial f_k}{\partial x_m}(\mathbf{x})v_m\right| &\geq \left|\frac{\partial f_k}{\partial x_k}(\mathbf{x})v_k\right|-\sum_{i\neq k}\left|\frac{\partial f_k}{\partial x_i}(\mathbf{x})v_i\right| \\ &\geq \left(1-\frac{1}{2m}\right)|v_k|-\frac{1}{2m}\sum_{i\neq k}|v_i| \\ &\geq \left(1-\frac{1}{2m}\right)|v_k|-\frac{m-1}{2m}|v_k|=\frac{1}{2}|v_k|\end{aligned}$$

となり、0 にはならない。ただし、

$$\sum_{i\neq k}|v_i|\leq m|v_k|-1$$

を用いた。

次に $f_k(x_1\cdots x_m)$ を線分 $c(t)$ 上に制限し、1 変数とみなすと

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}f_k\left(c(t)\right) &= \frac{d}{dt}f_k\left(a_1+v_1t,\cdots a_m+v_mt\right) \\ &= \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f_k}{\partial x_i}\left(c(t)\right)v_i \\ &\neq 0\end{aligned}$$

とかける。従って任意の $t(0\leq t\leq 1)$ について

$$\frac{d}{dt}f_k(c(t))\neq 0$$

であり、$t=0$ から $t=1$ までの間に符号が変わることがない。従って

$$f_k(c(1))-f_k(c(0))=\int_0^1\frac{d}{dt}f_k(c(t))dt\neq 0$$

であり、

$$f(\mathbf{a})\neq f(\mathbf{b})$$

が示せた。よって f は 1 対 1 の写像である。

もうすこし、詳しく $||f(\mathbf{a})-f(\mathbf{b})||$ を見積もることができる。$\frac{d}{dt}f_k(c(t))$ が正か負であったので

$$\left|\int_0^1\frac{d}{dt}f_k(c(t))dt\right|=\int_0^1\left|\frac{d}{dt}f_k(c(t))\right|dt$$

であり、先の結果から

$$\left|\frac{d}{dt}f_k(c(t))\right|\geq\frac{1}{2}|v_k|$$

であり、

$$|v_k|=\sqrt{v_k^2}\geq\sqrt{\frac{1}{m}\left(\sum_{i=1}^{m}v_i^2\right)}=\frac{1}{\sqrt{m}}||\mathbf{v}||$$

とすることができる。従って

$$|f_k(\mathbf{b})-f_k(\mathbf{a})|=\int_0^1\left|\frac{d}{dt}f_k(c(t))\right|dt\geq\frac{1}{2}|v_k|\geq\frac{1}{2\sqrt{m}}||\mathbf{v}||$$

ここで $\mathbf{v}=\mathbf{b}-\mathbf{a}$ だったから

$$\begin{aligned}\|f(\mathbf{b})-f(\mathbf{a})\| &= \sqrt{\left(f_1(\mathbf{b})-f_1(\mathbf{a})\right)^2+\cdots+\left(f_k(\mathbf{b})-f_k(\mathbf{a})\right)^2+\cdots+\left(f_m(\mathbf{b})-f_m(\mathbf{a})\right)^2} \\ &\geq\sqrt{\left(f_k(\mathbf{b})-f_k(\mathbf{a})\right)^2}=|f_k(\mathbf{b})-f_k(\mathbf{a})|\geq\frac{1}{2\sqrt{m}}||\mathbf{b}-\mathbf{a}|| \qquad (11.7)\end{aligned}$$

となる。

o を中心に半径 $r/2$ の円板を $D^m_{r/2}$ とし、簡単に D とする。この D の表面は半径 $r/2$ の (m-1) 次元球面であるのでこれを S とする。

すると、$f: U \to \mathbf{R^m}$ は 1 対 1 の写像で、$f(o) = o,\ f(\mathbf{x}) \neq o$ である。$f(\mathbf{x})$ と o の距離を $||f(\mathbf{x})||$として

$$||f(\mathbf{x})|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} f_i(\mathbf{x})^2}$$

とかける。この時、S は $\mathbb{R}^m$ の有界な閉集合だから S 上の連続関数には最大値と最小値がある。

特に S 上を $\mathbf{x}$ が動く時、$||f(\mathbf{x})||$ がとる最小値が存在し、それを δ とおく、この δ は $f(S)$ と o との距離を表している。

$\mathbb{R}^m$ の中に o を中心とする半径 $\delta/3$ の開円板 V を描く。ただし V は写像 $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ の中にとる。

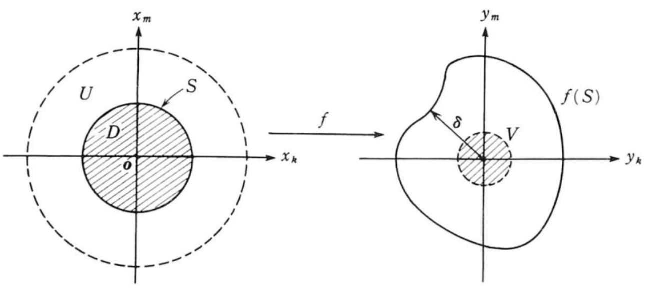

図 11.7: [57] より

この時、次の定理が成り立つ。

任意の $y_0 \in \mathbf{V}$ について、$f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{y}_0$ となる点 $\mathbf{x}_0$ が $D' = D - S$ の中に存在する。

これも次のように示すことができる。

任意の $y_0 \in \mathbf{V}$ を選び、固定する。点 $\mathbf{x}$ を D の中で動かした時の関数

$$h(\mathbf{x}) = ||f(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_0||^2$$

の最小値を考える。D は $\mathbb{R}^m$ の有界開集合だから D 上の連続関数 $h(\mathbf{x})$ には最大値と最小値が存在する。

この最小値が S 上の点ではないことが次のように証明できる。

$$||f(\mathbf{x})|| \geq \delta,\ \ ||\mathbf{y}_0|| < \frac{\delta}{3}$$

だったから

$$||f(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_0|| \geq ||f(\mathbf{x})|| - ||\mathbf{y}_0|| > \frac{2}{3}\delta_0 > 0$$

となるので $\mathbf{x} \in S$ なら

$$h(\mathbf{x}) = ||f(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_0||^2 > \frac{4}{9}\delta^2$$

となるが、一方で

$$h(\mathbf{o}) = ||f(\mathbf{o}) - \mathbf{y}_0||^2 = ||\mathbf{y}_0||^2 < \frac{1}{9}\delta^2$$

よって

$$h(\mathbf{x}) > h(\mathbf{o})$$

が得られる。これから $\mathbf{x}_0 \in D$ は S 上の点ではありえず、D' 上にあることがいえる。

例題　逆関数の定理の証明が長かったので、簡単な例を 1 つ見ておこう。

$f: C \to C$ を

$$f(z) = z^2$$

と定義し、$z = x + iy$ とすると次のように座標表示が複素平面上でできる。

$$f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$$

この関数のヤコビアンとその行列式は

$$(Jf)_x = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

$$det(Jf)_x = 4(x^2 + y^2)$$

となるので原点を除いて正則である。よって逆関数の定理から、原点以外の**開近傍** U において次の図で見るように $f|U$ は C^∞ 級の微分同相写像である。

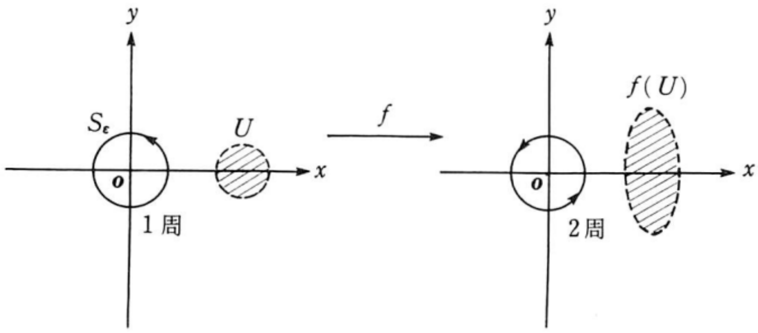

図 11.8: [57] より:2 周するので微分同相にならない。

従って逆に原点を含む **o** 点の開近傍 W を考え次のように円周をパラメタ表示しておく

$$\begin{aligned} x(\theta) &= \epsilon \cos\theta \\ y(\theta) &= \epsilon \sin\theta \end{aligned}$$

これは f によって別の円周

$$\begin{aligned} x^{'}(\theta) &= \epsilon^2 \cos 2\theta \\ y^{'}(\theta) &= \epsilon^2 \sin 2\theta \end{aligned}$$

に写される。これは S が 1 周する間に 2 周することなるので微分同相にならない。
このように微分同相は写像の巻き数が保存されていないといけない。

11.6 陰関数の定理

逆関数の定理を使うと次の重要な**陰関数の定理 (implicit function theorem)** が導ける。
$\mathbb{R}^{m+n}$ を 2 つの $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ で表し、座標を

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1, \cdots, x_m, y_1, \cdots y_n)$$

で表す。$\mathbb{R}^m$ の一点を $\mathbf{x}_0$ として固定し、$\{\mathbf{x}_0\} \times \mathbf{R}^n$ を簡単に $\mathbf{R}_0^n$ で表す。同様に、$\mathbb{R}^n$ の一点を $\mathbf{y}_0$ として固定し、$\{\mathbf{y}_0\}$ を簡単に $\mathbf{R}_0^m \times \mathbf{y}_0$ を $\mathbf{R}_0^m$ で表す。$f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を C^∞ 級写像、$f(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \mathbf{z}_0 (1 \leq r \leq \infty)$ とする。
この時陰関数の定理は次の図のように

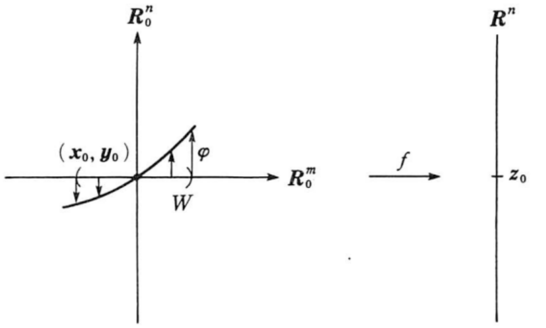

図 11.9: [57] より:陰関数定理

$f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を縦軸 $\mathbf{R}_0^n$ に制限した写像

$$f|\mathbb{R}_0^n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

とし、点 $\mathbf{y}_0$ のヤコビアンが正則であれば、縦軸 $\mathbb{R}_0^m$ における $\mathbf{x}_0$ の開近傍 W と C^∞ 級写像 $\psi : W \to \mathbb{R}^n$ が存在し、次を陰関数定理という。

- 1) 任意の $\mathbf{x} \in W$ について、$f(\mathbf{x}, \psi(\mathbf{x})) = \mathbf{z}_0$
- 2) ヤコビアン $(J\psi)_{x_0} = -J(f|\mathbb{R}_0^n)_{y_0}^{-1} J(f|\mathbb{R}_0^m)_{x_0}$

ただし、ヤコビアンは $\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n$ の自然な座標で計算するとする。この時 $f(\mathbf{x}, \psi(\mathbf{x})) = \mathbf{z}_0$ から陰関数

$$\mathbf{y} = \psi(\mathbf{x})$$

が決まる。つまり、$(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ の付近で点 $\mathbf{z}_0$ の逆像 $f^{-1}(\mathbf{z}_0)$ が定義できて、これが上のグラフになる。
さらに点 $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ における

$$f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

のヤコビ行列 $(n, n+m)$ を次のように分解する。

$$(Jf)_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)} = [\overset{m}{A}|\overset{n}{B}]\}n$$

$$A = J(f|\mathbb{R}_0^m)_{x_0}$$

$$B = J(f|\mathbb{R}_0^n)_{\mathbf{y}_0}$$

この時、陰関数定理は

$$det\, B \neq 0$$

$$J(f\psi)_{x_0} = -B^{-1}A$$

となることを示している。
陰関数定理を証明する準備として

$$F : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$$

を次の式で定義する。

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, f(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$$

これを座標表示すると

$$
\begin{array}{rcl}
F_1(x_1,\cdots,x_m,y_1\cdots,y_n) & = & x_1 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
F_m(x_1,\cdots,x_m,y_1\cdots,y_n) & = & x_m \\
F_{m+1}(x_1,\cdots,x_m,y_1\cdots,y_n) & = & f_1(x_1,\cdots,x_m,y_1\cdots,y_n) \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
F_{m+n}(x_1,\cdots,x_m,y_1\cdots,y_n) & = & f_n(x_1,\cdots,x_m,y_1\cdots,y_n)
\end{array}
$$

ここで $f_1\cdots f_n$ は $f:\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ の座標表示中の C^r 級関数である。

$$F(\mathbf{x_0},\mathbf{y_0})=(\mathbf{x_0},f(\mathbf{x_0},\mathbf{y_0}))=(\mathbf{x_0},\mathbf{z_0}) \tag{11.8}$$

であることに注意し、$(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)$ での F のヤコビアンを求めてみよう。

$$
\begin{array}{rcl}
(JF)_{(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)} & = & \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_m} & \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \cdots & & & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial F_{m+n}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_{m+n}}{\partial x_m} & \frac{\partial F_{m+n}}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_{m+n}}{\partial y_1} \end{bmatrix} \\
 & = & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & & & \\ 0 & \ddots & 0 & | & & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & | & & & \\ - & - & - & + & - & - & - \\ & & & | & & & \\ & J(f|\mathbb{R}^m_0)_{\mathbf{x}_0} & & | & & J(f|\mathbb{R}^n_0)_{\mathbf{y}_0} & \\ & & & | & & & \end{bmatrix}
\end{array}
$$

とすると $J(f|\mathbb{R}^n_0)_{\mathbf{y}_0}$ は正則行列である。よって $(JF)_{(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)}$ もまた、正則行列になる。

逆関数の定理から $\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n$ における点 $(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)$ の開近傍 U と $\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n$ における点 $(\mathbf{x}_0,\mathbf{z}_0)$ の開近傍 V が存在し、$F|U:U\to V$ が C^r 級の微分同相写像になる。また、逆 $(F|U)^{-1}:V\to U$ も C^r 級の微分同相写像になる。上の式では F で対応する $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ と $(\mathbf{x},f(\mathbf{x},\mathbf{y}))$ の第 1 項から第 m 項までの座標は一致している。従って、逆 $(F|U)^{-1}:V\to U$ でも第 1 項から第 m 項までの座標は一致するはずである。特に $(\mathbf{x},\mathbf{z}_0)$ の形をした V 内の点の $(F|U)^{-1}$ による像 $(F|U)^{-1}(\mathbf{x},\mathbf{z}_0)$ は $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ の形をしている。

$$(\mathbf{x},\mathbf{y})=(F|U)^{-1}(\mathbf{x},\mathbf{z}_0)$$

つまり $\mathbf{z}_0$ を止めると、この式の右辺は $\mathbf{x}$ だけで決まる。よって、左辺の $\mathbf{y}$ も $\mathbf{x}$ だけで決まり

$$\mathbf{y}=\psi(\mathbf{x})$$

とする写像が存在する。

$$F(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)=(\mathbf{x}_0,\mathbf{z}_0)$$

から

$$(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)=(F|U)^{-1}(\mathbf{x}_0,\mathbf{z}_0)$$

であり、

$$\mathbf{y}_0=\psi(\mathbf{x_0})$$

となる。$\mathbf{y} = \psi(\mathbf{x})$ は C^r 級の写像になる。$\mathbb{R}^m$ の開集合を W として

$$W - \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m | (\mathbf{x}, \mathbf{z}_0) \in V\}$$

と定義する。W は $(\mathbf{x}, \mathbf{z}_0)$ が $V = F(U)$ に属するような $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ の全体である。$(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0) \in V$ であるから $\mathbf{x}_0$ は W の点であり、W は $\mathbb{R}^m$ の開近傍といえる。この W が写像 $\psi(x)$ の定義域になる。$\mathbf{y} = \psi(\mathbf{x})$ とおけば

$$(\mathbf{x}, \psi(\mathbf{x})) = (F|U)^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{z}_0), \ \ (\forall \mathbf{x} \in W)$$

として両辺に $(F|U)$ を作用させると

$$\begin{aligned} (F|U)(\mathbf{x}, \psi(\mathbf{x})) &= (F|U)(F|U)^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{z}_0), \ \ (\forall \mathbf{x} \in W) \\ F(\mathbf{x}, \psi(\mathbf{x})) &= (\mathbf{x}, \mathbf{z}_0) \end{aligned}$$

式 11.8 から F の定義を用いて

$$(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}, \psi(\mathbf{x})) = (\mathbf{x}, \mathbf{z}_0)$$

この $m+1$ から $m+n$ までを取り出せば

$$f(\mathbf{x}, \psi(\mathbf{x})) = \mathbf{z}_0, \ \ (\forall \mathbf{x} \in W)$$

これで定理 1) が示せた。

11.7 キューブ上の積分 [11]

k 次元キューブ $I^k = [0,1]^k \subset \mathbb{R}^k$ 上で k 次微分形式を次のように定義する。

$$\omega = f dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_k$$

すると、積分が次のように定義できる。

$$\int_{I_k} \omega = \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x_1, \cdots x_k) dx_1 \cdots dx_k$$

ただし、これは k 次元キューブの体積を表しているわけではないので注意する。
次節から引き戻しも同じ k 次微分形式になったので符号 ± 1 関数をつけて

$$sign_\phi \int_{I^k} \omega = \int \phi^* \omega$$

となる。これは関数 ϕ が向きを保つかどうかで符号がきまる。または前節のはめこみを考えると

$$\phi : I^k \to \mathbb{R}^k$$

写像 ϕ に沿う積分として

$$\int_\phi \omega = \sum_{|J|-k} \int_{I^k} \phi^* \left(f_J dx_J \right)$$

が成り立つ。

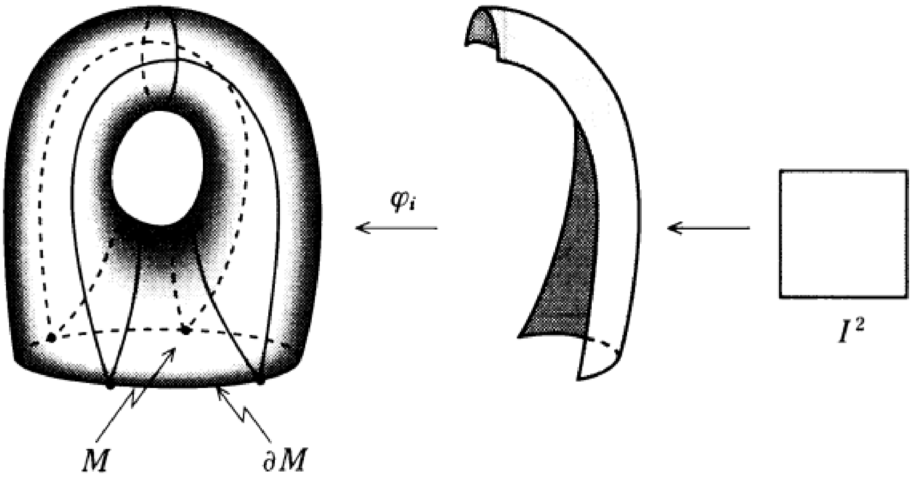

図 11.10: [11] より：曲面の ϕ_i に沿っての貼り付け

例えば、次の例では 5 枚のキューブを貼り合わせている。この時次のように足し合わせの結果、経路が多様体全体になる。

$$\int_M \omega = \sum_i \int_{\phi_i} \omega$$

この式で重要なのは足し合わせは積分経路に効いていることである。これは ϕ が向き付け可能であることにより次の図のように

領域の貼り合わせを拡大できることになる。

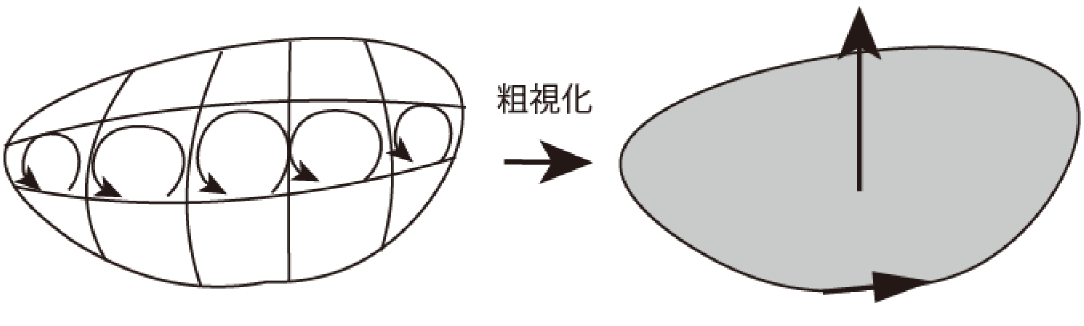

図 11.11: 積分領域の足し合わせ

これは第 5 部で詳しくみるストークスの定理の微分形式版である。

11.8 ストークスの定理 [11]

前節の境界の貼り合わせの考えを微分形式上で考える。

k 次元キューブ I^k 上で定義された $(k-1)$ 次微分形式 $\omega \in \Omega^k(I^k)$ を考えると

$$\int_{I^k} d\omega = \int_{\partial I^k} \omega \tag{11.9}$$

が成り立つ。これをストークスの定理 (Stoks's theory) という。

これを簡単に帰納法でみると

$k = 1$ の時は

$$\omega = f dx = dF(x)$$

とすると

$$\int_{\partial I^k} \omega = [F(x)]_0^1$$

積分の定義から $f(x)$ の原始関数を $F(x)$ として

$$\int_{I^k} d\omega = \int_0^1 \int_0^1 df \wedge dx = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{df}{dx} dx \right) dx$$

$$\int_0^1 f(x)dx = [F(x)]_0^1,$$

を意味する。
次に $k=2$ の時、1 形式を 2 次元で

$$\omega = fdx + gdy$$

$$\begin{aligned}
\int_D d\omega &= \int_0^1 \int_0^1 (df \wedge dx + dg \wedge dy) \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \right) \wedge dx + \left(\frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy \right) \wedge dy \right) \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \left(-\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial x} \right) dxdy
\end{aligned}$$

これを実行するために積分を分ければ

$$\int_0^1 \int_0^1 \left(-\frac{\partial f}{\partial y} \right) dxdy = \int_0^1 [-f(x,y)]_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^1 (-f(x,1) + f(x,0))\, dx \tag{11.10}$$

$$\int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right) dxdy = \int_0^1 [g(x,y)]_{x=0}^{x=1} dy = \int_0^1 (g(1,y) - g(0,y))\, dy \tag{11.11}$$

$f(x,1), g(0,y)$ の符号が負だから次のような図になる。

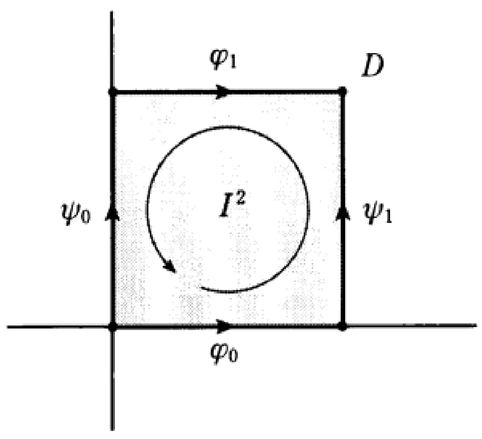

図 11.12: [11] より：I^2 の境界の内 ϕ_0, ψ_1 は正の向き、ϕ_1, ψ_0 は負の向きになる。

向きの符号を見るために $\phi_i : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ とする。$\phi_i(t) = (t,i)$ として引き戻しを用いて $\omega = fdt$ おけば

$$\int_{[0,1]} \phi^* \omega = \int_0^1 f(t,i)dt, \ \ (i = 0,1)$$

となる。これから ϕ_1 は領域 D に対し、負の向き、ϕ_0 は正の向きになる。

同様に $\psi_i : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ とする。$\psi(t) = (i,t)$ として引き戻しを用いれば $\omega = gdt$ として

$$\int_{[0,1]} \psi^* \omega = \int_0^1 g(i,t)dt, \ \ (i = 0, 1)$$

これから ψ_1 は領域 D に対し正の向き、ψ_0 は負の向きになる。
従ってこの場合も両辺を加えれば

$$\int_D d\omega = \int_{\partial D} \omega$$

が成り立つ。$k = 2$ 以上の場合も同様に成り立つ。

11.9 ホモトピー [11]

ストークスの定理の微分形式の表現 11.9 は前節のようなはっきりと定義された領域ではなくても成り立つ。
距離のあいまいな空間に対しても利用できる考え方は第 6 部のホモロジーにつながっていく。物理への応用についても
とても重要な概念である。自由度を広げて、ホモトピーを考えてみよう。
前節の領域 D を次の図のように範囲だけをきめて、あいまいな関数にする。

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | g(x) < y < f(x), a < x < b\right\}$$

従って写像 $\phi : I^2 \to D$ を次のようにおく。

$$(x,y) \to ((1-x)a + xb, (1-y)f\left((1-x)\,a + xb\right) - yg\left((1-x)a + xb\right))$$

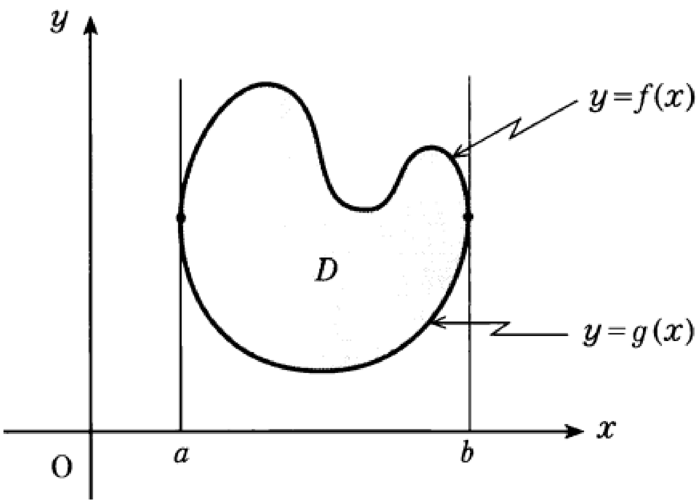

図 11.13: [11] より:上半面、と下半面をことなる関数でつなぐ閉曲線でもストークスの定理が成り立つ

ホモトープについて詳しくは第 6 部で考察するが、ここでその定義をする。
U 上の 2 つの曲線 c_0, c_1 とする。

$$c_i : [0,1] \to U$$

は始点、終点が一致しているとする。

$$c_0(0) = c_1(0), \ \ c_0(1) = c_1(1)$$

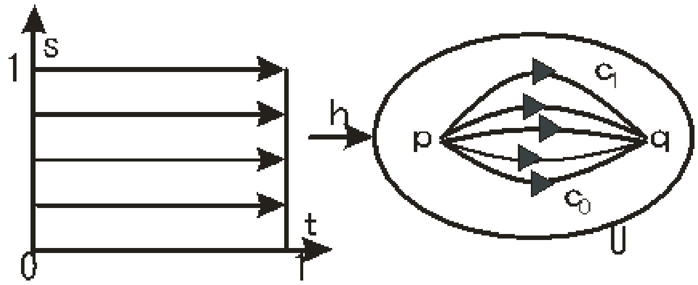

図 11.14: homotopy 両端を同一視して得られる写像 $h : I^2 \to U$

次を満たす写像 $h(s,t) : I^2 \to U$ があれば c_0, c_1 は**ホモトピック (homotopic)** または**ホモトープ (homotope)** であるという。

- $h(0,t) = c_0(t),\ \ h(1,t) = c_1(t) \quad \forall t \in I$
- $h(s,0) = c_0(0),\ \ h(s,1) = c_1(0) \quad \forall s \in I$

これらには端点を**直線から点に同一視**する考えが入る。次節のファイバーもこうしたあいまいさを持たせる概念になる。

上記の条件が成り立てば

$$\int_{c_0} \omega = \int_{c_1} \omega$$

であり積分値が経路に依存しない。

例えば関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を外微分した 1 次微分形式 $\omega = df$ を考える。

この時、図の $p \to q$ が単連結な写像 $h(s,t) : I^2 \to U$ があれば

$$h(s,t) = (1-s)c_0(t) + sc_1(t)$$

と、2 変数で表現でき、$c_0.c_1$ はホモトピーである。

つまり積分値は次のように端点できまる。

$$\int_{c_i} \omega = \int_{c_i} df = \int_0^1 c_i^*(df) = \int_0^1 \frac{d}{dt}(f \circ c_i)\, dt$$
$$= [f \circ c_i(t)]_0^1 = f(q) - f(p)$$

この変形が微分形式が有用な点である。つまり 1 形式は曲線により、いつでも引き戻すことができて

$$c_i^*(df) = \frac{d}{dt}(f \circ c_i) \cdot dt$$

とかける。引き戻された結果は双対表現に分解するのだが、d/dt がかかる関数 $(f \circ c_i)$ は多価であってもかまわない、

t の微分値が一致すればいいのである。

この時の端点 p, q は固定されている。単連結でなく、途中に穴があると $U = \mathbb{R}^2 - \{0\}$ のような場合はホモトープではなくなる。

開集合 U が単連結であれば U 上の 1 次閉形式は全て完全形式である。

12 多様体上の微分形式 [37]

12.1 引き戻し [37]

双対空間を導入したおかげで非常に多様な構造をとることができるようになる。その 1 つは引き戻しである。

これはベクトルの変化を双対関係を用いて遡ろうというものである。例えば

$$f : V \to W$$

をベクトル空間の線形写像とする。同様に

$$g : W \to K$$

を W 上の線形写像とする。よって、$g \in W^*$ である。
この時、図のように合成写像 $g \circ f$ は V 上の線型写像とみなせる。元 $h \in V^*, \mathbf{v} \in V$ として

$$h(\mathbf{v}) \equiv g(f(\mathbf{v}))$$

となる。
ここで双対空間とのその要素 $g \in W^*$ が与えられると、$h \in V^*$ として、写像 $f : V \to W$ が写像 $W^* \to V^*$ を誘導したことになり、誘導写像 $f^* : W^* \to V^*$ が

$$f^* : g \to h = f^*(g)$$

によって得られたことになる。つまり次の図にみるように

$$f^*g = g \circ f$$

とかける。これを f^* による g の引き戻しという。このような関係は双対関係を用いて、図のように 1 つのループを形成する。

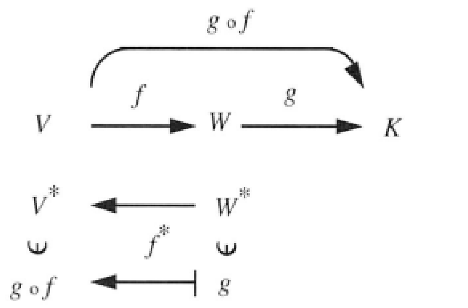

図 2.8. 関数 g の引き戻しは関数 $f^*g = g \circ f$.

図 12.1: [12] より：合成と引き戻しは双対の関係をつくる

この時

$$dimV^* = dimV$$

だから、次のように内積が定義されると V と V^* との間に同型写像をつくることができる。
これによって V 上に別の基底 $\{f_i\}$ と V^* 上に双対基底 $\{f^{*i}\}$ を作ることができる。この時の成分は

$$f_i = A_i^j e_j$$

ただし、$A \in GL(n, K)$ である。対応する双対基底が

$$e^{*i} = f^{*j} A_j^i$$

とかける。よって内積

$$e_j e^{i*} = \delta_j^i$$

が定義された。引き戻しの考え方は重要になるので次部でも詳しく触れる。

12.1.1 多様体上の引き戻し

前部の双対空間で引き戻しを紹介したが、微分形式との関係をここでみていく。
簡単には写像でうつされたものを元にもどすために条件を考えていくわけである。
通常もとに戻すことが常に可能なわけではない。
しかし、微分形式が成り立つ場であれば、1 対 1 の関係になる。
外積空間の中で自然に**全微分**という関係が導かれることが面白い。
可微分写像 $\phi : R^m \to R^n$ が与えられた時、関数 f を R^n の 0 次微分形式と考えれば引き戻しとは次の合成写像

$$f \circ \phi \tag{12.1}$$

を次のように表し、次のような合成写像を考えよう。

$$\phi^*(f) = f \circ \phi \in \Omega^0(R^n)$$

これを f の ϕ による引き戻しといった。

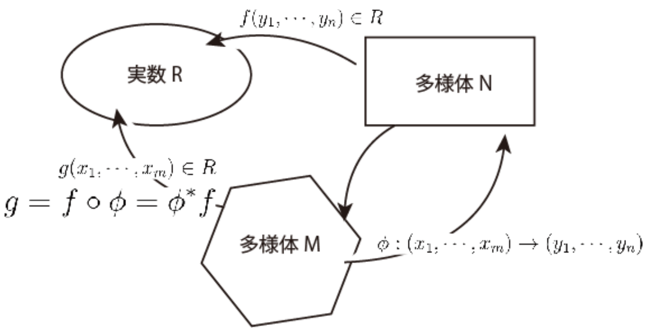

図 12.2: 引き戻し

次にこれを拡大して多様体の接空間での引き戻しを考える。
多様体 M から多様体 N への微分可能写像 ϕ とすると、T_xM から $T_{\phi(x)}N$ への写像 ϕ_* を引き起こす。(下付に注意)
写像 ϕ_* は引き戻しではなく

$$\phi_* : TM \to TN$$

であるが **M 上のベクトル場を N 上のベクトル場に移さない**。ことが問題になる。
つまり $\phi_* X$ は X が 1 点での接ベクトルの時は意味があっても、X がベクトル場となると M 上の異なる 2 点 x, y が同じ値域を与えても

$$\phi(x) = \phi(y) \to \phi_*(X_x) \neq \phi_*(X_y)$$

ϕ_* は異なる値域を与える場合があるのである。
しかし次節で示すように **$\phi_* X$ は $\phi_* TN$ の切断になることはできる**。
従ってベクトル場ではなく、双対関係が重要になる。p 次微分形式に対しては

$$\phi^* : A^p(N) \to A^p(M) \tag{12.2}$$

となる自然な写像を考えることができて $\omega \in A^p(N)$ ならば $\phi^*\omega \in A^p(M)$ は $X_i \in T_xM$ として

$$\phi^*\omega(X_1, X_2 \cdots, X_p) = \omega(\phi_* X_1, \phi_* X_2 \cdots, \phi_* X_p) \tag{12.3}$$

と定義し、$\phi^*\omega$ は ω の ϕ による**引き戻し (pullback)** 呼ぶ。

右辺の引数は $X_i \in T_xM$, $\phi_* X_i \in T_{\phi(x)}N$ だから多様体 N の要素で表されていることに注意する。

全微分　多様体 M 上の点 x の周りでの座標近傍 $(U, \phi = (x_1, \cdots, x_n))$ をとり、余接空間 T_x^*M の基底を $\{(dx_1)_x \cdots (dx_n)_x\}$ と書く。この時、点 x の近傍のもう一つの $(V, \psi = (y_1, \cdots, y_n))$ をとると基底の変換行列が

$$dy_i = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right)_{\phi(x)} dx_j$$

となり、これは変換関数である。しかしこれは微分 1 形式の引き戻しの定義の書き換え、

$$\left(\phi \circ \psi^{-1}\right)^* (dy_i)_{\psi(x)} = \sum \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right)_{\phi(x)} (dx_j)_{\phi(x)}$$

と同じである。全微分が引き戻しにより表現できることを表す。逆にこれは微分 1 形式を決めることができて、多様体 M の各点 x に余接空間 T_x^*M の元を各座標近傍 $(U, \phi = (x_1, \cdots, x_n))$ 上で dx_i の係数 f_i が C^∞ 級関数になるように $\sum_{i=1}^n f_i dx_i$ の形で決める対応が存在し、これを M 上の C^∞ 級微分 1 形式ということができる。

同じように全微分の定義として各座標近傍 $(U, \phi = (x_1, \cdots, x_n))$ 上で

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

を対応させると、これは M 上の C^∞ 級微分 1 形式であり、これを f の**全微分**という。

合成写像の引き戻し [37]　例えば図のように m 次元ユークリッド空間の開集合 V を $\{x^1, x^2 \cdots x^m\}$、W の開集合を $\{y^1, y^2 \cdots y^n\}$ として C^∞ 級の写像 $\psi : V \to W$ を次のように与える。

$$\psi : y^i(x^1, x^2 \cdots x^m) \quad i = 1, 2, \cdots n$$
$$\psi(x) = y$$

このように V の m 個の要素により W の 1 つの要素が決まり、計 n 個の要素を決めていくので、次元の数が異なっていても問題はない。

そこで W 上の C^1 級関数 f に対して $f \circ \psi$ は V 上の C^1 級関数になるから、曲線 $\gamma : [a, b] \to V$ に対し、

$$\psi \circ \gamma : [a, b] \to W \tag{12.4}$$

は W 内の C^1 級曲線になる。$d(f \circ \psi)$ が全微分でかけるから

全微分の線積分は関数の差になることを用いると**次のように積分表示**できる。

$$\int_\gamma d(f \circ \psi) = f(\psi(\gamma(b))) - f(\psi(\gamma(a))) \tag{12.5}$$

$$= \int_{\psi \circ \gamma} df \tag{12.6}$$

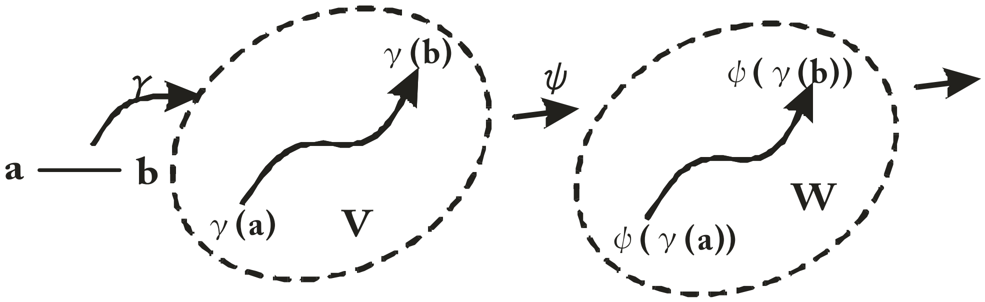

図 12.3: 関数の引き戻し

これを成分で書き下すと

$$\int_\gamma d(f\circ\psi) \to \int_\gamma \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x^j}(f\circ\psi)dx^j = \int_{\psi\circ\gamma} \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial y^i}dy^i \leftarrow \int_{\psi\circ\gamma} df \tag{12.7}$$

のように V と W 内の曲線による積分で表され、積分値が同じになる。

$$\psi = \psi(\psi_1, \cdots \psi_n)$$
$$\psi_i = \psi_i(x_1, \cdots x_m)$$

として、$y^i = \psi_i(x^1 \cdots x^m),\ (i = 1, \cdots n)$ で表すと合成関数の微分則から

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x^j}(f\circ\psi) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^j} f(\psi(\psi_i)) = \frac{\partial f}{\partial \psi_1}\frac{\partial \psi_1(x^1\cdots x^m)}{\partial x^1} + \frac{\partial f}{\partial \psi_2}\frac{\partial \psi_2(x^1\cdots x^m)}{\partial x^1} + \cdots \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\psi(\psi_i))}{\partial \psi_i}\frac{\partial \psi_i}{\partial x^j} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial y^i}\circ\psi\right)\frac{\partial \psi_i}{\partial x^j}\end{aligned} \tag{12.8}$$

となるので W 上の関数 $f, \frac{\partial f}{\partial y^i}$ に V 上の関数 $f\circ\psi, \frac{\partial f}{\partial x^i}\circ\psi$ を対応させる関係が次のようになっていることがわかる。

$$W : \left(f, \frac{\partial f}{\partial y^i}\right) \to V : \left(f\circ\psi, \frac{\partial f}{\partial x^i}\circ\psi\right) \tag{12.9}$$

これを次のように全微分に対し拡張すると 12.8 から

$$W : \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y^i}dy^i \to V : \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x^j}(f\circ\psi)dx^j = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial y_i}\circ\psi\right)\frac{\partial \psi_i}{\partial x_j}dx^j \tag{12.10}$$

が対応すると考えると、全微分とは限らない微分 1 形式に拡張される。

微分 1 形式の引き戻し [37]　　微分 1 形式の引き戻しは後に重要になる。

m 次元ユークリッド空間の開集合 V から n 次元ユークリッド空間の開集合 W への微分 1 形式

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} f_i dy^i \tag{12.11}$$
$$f_i = \frac{\partial f}{\partial y^i} \tag{12.12}$$

に対して

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\left(f_i\circ\psi\right)\frac{\partial\psi_i}{\partial x_j}dx^j \tag{12.13}$$

を $\omega=\sum_{i=1}^{n}f_idy^i$ の ψ による引き戻しといい、

$$\psi^*\left(\sum_{i=1}^{n}f_idy^i\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\psi^*f_i\right)\left(\psi^*dy_i\right)=\psi^*\omega=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\left(f_i\circ\psi\right)\frac{\partial\psi_i}{\partial x_j}dx^j \tag{12.14}$$

である。$\omega=f$ の時は式 12.5 のように

$$\psi^*f=f\circ\psi \tag{12.15}$$

である。この時 $d\psi^*=0$ だから

$$d\left(\psi^*f\right)=\psi^*df$$

が成立する。また**重要な関係式**、1 形式 $\omega=\sum_{i=1}^{n}f_idy^i$ とすると

$$\int_{\gamma}\psi^*\omega=\int_{\phi\circ\gamma}\omega$$

が成立していることをみておこう。
$\psi(x)=y,\ \psi\circ\gamma:[a,b]\to W$ は C^1 級曲線になるから

$$x_j^2=k\gamma_j^2$$

とおけて、C^1 級のパラメタ t を用いて両辺を微分すると

$$x_j\frac{dx_i}{dt}=k\gamma_j\frac{d\gamma_i}{dt}$$

ここで定数 k を次のように選ぶ

$$\sum x_j=1,\ \ k\sum\gamma_j=\gamma$$

とおけば

$$dx^i \quad = \quad \gamma\frac{d\gamma_i}{dt}dt$$

同様に

$$y_j^2=h\beta_j^2$$

とおいて、t を用いて両辺を微分すると $\psi_i\circ\gamma=\beta_j$ とおいて

$$y_j\frac{dy_i}{dt}=h\beta_j\frac{d\beta_i}{dt}$$

ここで定数 h を次のように選ぶ

$$\sum y_j=1,\ \ h\sum\beta_j=\beta=\psi\circ\gamma$$

$$dy^i \quad = \quad \psi\circ\gamma\frac{d\left(\psi_i\circ\gamma\right)}{dt}dt \tag{12.16}$$

よって

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x^j}(f\circ\psi)dx^j=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial y_i}\circ\psi\frac{\partial\psi_i}{\partial x_j}dx^j$$

だったから、これらから次が成り立つ。

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \psi^*\omega &= \int_\gamma \psi^*\left(\sum_{j=1}^m\sum_{i=1}^n f_i\frac{\partial\psi_i}{\partial x_j}dx^j\right)\\
&= \int_\gamma \sum_{j=1}^m\sum_{i=1}^n f_i\circ\psi\frac{\partial\psi_i}{\partial x_j}dx^j\\
&= \int_a^b \sum_{j=1}^m\sum_{i=1}^n f_i\circ\psi\circ\gamma\frac{\partial\psi_i}{\partial x_j}\circ\gamma\frac{d\gamma_j}{dt}dt\\
&= \int_a^b \sum_{i=1}^n f_i\circ\psi\circ\gamma\frac{d\left(\psi_i\circ\gamma\right)}{dt}dt\\
&= \int_a^b \sum_{i=1}^n f_i dy^i\\
&= \int_{\psi\circ\gamma}\omega
\end{aligned}$$

微分形式の引き戻し　積分変数が他の変数の従属になった時、微分形式の変換ができた。これを引き戻しで考えてみる。

可微分写像を $\phi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ とし、$f\in\mathbb{R}^m$ のとき、$f\circ\phi$ は $\mathbb{R}^n$ の関数である。

引き戻しの定義から f を 0 次微分形式とすると

$$\phi^*(f)=f\circ\phi\in\Omega^0\left(\mathbb{R}^n\right)$$

とかけるが、これを 0 次微分形式 f を ϕ で引き戻したとき $\phi^*(f)=f\circ\phi$ になる。という。

これにより従属関係ができて、座標を用いて

$$y_m=\phi_m(x_1,\cdots x_n)$$

により、独立であった m 次の y が n 次の x の関数になったということである。よって

$$dy_j=d\phi_j=\sum\frac{\partial\phi_j}{\partial x_i}dx_i$$

であり、dy_j は $\mathbb{R}^n$ 上の 1 次微分形式になったことになる。これは dy_i の ϕ による引き戻しと考えられるので

$$\phi^*(dy_i)=d\phi_j=\sum\frac{\partial\phi_j}{\partial x_i}dx_i$$

となる。これは 2 次以上の J 次微分形式について成り立つ。

$$dy_J\equiv dy_{j1}\wedge dy_{j2}\wedge\cdots\wedge dy_{jk}$$

に対して

$$\begin{aligned}
\phi^*\left(dy_J\right)&=\phi^*\left(dy_{j1}\right)\wedge\phi^*\left(dy_{j2}\right)\wedge\cdots\wedge\phi^*\left(dy_{jk}\right)\\
&=d\phi_{j1}\wedge d\phi_{j2}\wedge\cdots\wedge d\phi_{jk}
\end{aligned}$$

となるので、

$$\phi^*\left(dy_J\right)\in\Omega^k\left(\mathbb{R}^k\right)$$

とすると一般の微分形式

$$\omega=\sum f_J dy_J\in\Omega^*\left(\mathbb{R}^m\right)$$

に対して、

$$\phi^*(\omega) = \phi^*\left(\sum f_J dy_J\right) = \sum \phi^*(f_I)\,\phi^*(dy_I) \tag{12.17}$$

となるので $\phi^*(\omega)$ は ϕ による ω の引き戻しである。
では $\mathbb{R}^2$ を考え、微分 2 形式の引き戻しをつくろう。

$$\phi : U \to V$$

を考え、2 形式 $dv_1 \wedge dv_2$ を τ で引き戻すと

$$\tau^*(dv_1 \wedge dv_2) = \det(J(\tau))\,du_1 \wedge du_2$$

ただし、変換行列 J は

$$J(\phi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial u_1} & \frac{\partial v_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial v_2}{\partial u_1} & \frac{\partial v_2}{\partial u_2} \end{pmatrix}$$

である。従って 2 形式の引き戻しは 2 形式である。12.17 があるので次のように外積の引き戻しも外積になる。

$$\phi^*(\omega \wedge \eta) = \phi^*(\omega) \wedge \phi^*(\eta)$$

式 12.14 から p 次微分形式の引き戻しを次のように定義する。
m 次元ユークリッド空間の開集合 V をから n 次元ユークリッド空間の開集合 W への C^∞ 級写像を

$$\psi : V \to W$$

とし、W 上の微分 p 形式を

$$\alpha = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} f_{i_1 \cdots i_p} dy_{i_1} \wedge \cdots \wedge dy_{i_p}$$

とおくと、ψ による引き戻しは

$$\psi^*\alpha = \alpha \circ \psi = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} f_{i_1 \cdots i_p} \circ \psi d\psi_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\psi_{i_p}$$

で定義する。ただし全微分

$$d\psi_{i_j} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \psi_{i_j}}{\partial x_k} dx_k$$

である。つまり、引き戻されても微分形式の次数は同じ p 形式である。
単純な例をみておこう。

- **分配則**　W 上の p 次微分形式 α と q 次微分形式 β として

$$\psi^*(\alpha \wedge \beta) = \psi^*\alpha \wedge \psi^*\beta$$

を示そう、

$$\alpha = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} f_{i_1 \cdots i_p} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$$

$$\beta = \sum_{j_1 < \cdots < j_q} g_{j_1 \cdots j_q} dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_q$$

とすると定義から

$$
\begin{aligned}
\psi^*(\alpha\wedge\beta) &= \psi^*\left(\left(\sum_{i_1<\cdots<i_p} f_{i_1\cdots i_p} dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_p}\right)\wedge\left(\sum_{j_1<\cdots<j_q} g_{j_1\cdots j_q} dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_q\right)\right)\\
&= \psi^*\left(\sum_{i_1<\cdots<i_p, j_1<\cdots<j_q} f_{i_1\cdots i_p} g_{j_1\cdots j_q} dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_p}\wedge dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_q\right)\\
&= \sum_{i_1<\cdots<i_p, j_1<\cdots<j_q}\left(f_{i_1\cdots i_p}\circ\psi\right)\left(g_{j_1\cdots j_q}\circ\psi\right) d\psi_{i_1}\wedge\cdots\wedge d\psi_{i_p}\wedge d\psi_{j_1}\wedge\cdots\wedge d\psi_q\\
&= \left(\sum_{i_1<\cdots<i_p}\left(f_{i_1\cdots i_p}\circ\psi\right) d\psi_{i_1}\wedge\cdots\wedge d\psi_{i_p}\right)\wedge\left(\sum_{,j_1<\cdots<j_q}\left(g_{j_1\cdots j_q}\circ\psi\right)\wedge d\psi_{j_1}\wedge\cdots\wedge d\psi_q\right)\\
&= \psi^*\left(\sum_{i_1<\cdots<i_p} f_{i_1\cdots i_p} d\psi_{i_1}\wedge\cdots\wedge d\psi_{i_p}\right)\wedge\psi^*\left(\sum_{,j_1<\cdots<j_q} g_{j_1\cdots j_q}\wedge d\psi_{j_1}\wedge\cdots\wedge d\psi_q\right)\\
&= \psi^*\alpha\wedge\psi^*\beta
\end{aligned}
$$

同様に

$$(\psi\circ\phi)^*\alpha = \phi^*\psi^* a$$

も成り立つ。

そこで微分 p 形式の積分を改めて考える。先にも見たように微分 1 形式 α を

$$\alpha = \sum_{i=1}^n f_i dx_i$$

とし、$\gamma : [a,b]\to U$ に沿う線積分を次のように細分化し、パラメタ t で積分する。

$$\int_\gamma \alpha = \int_a^b \sum_{i=1}^n f_i(\gamma(t))\frac{d\gamma}{dt}dt \tag{12.18}$$

これまでの引き戻しの定義から次の恒等写像 id

$$id : [a,b]\to[a,b]$$

として

$$\gamma_i(t) = k_i x_i$$
$$\gamma = \sum_i \gamma_i(t),\ \ \sum_i k_i = 1$$

と、とれば

$$\gamma^*\alpha = \sum_{i=1}^n f_i(\gamma(t))\frac{d\gamma_i}{dt}dt$$

となるから

$$\int_\gamma \alpha = \int_{id}\gamma^*\alpha$$

を見つけることができる。

微分 p 形式　ここで微分 p 形式の積分を考えよう。

前部でも見たように微分 p 形式の外微分は df_i を全微分として次のように表される。

$$d\left(\sum_{i_1<\cdots<i_p} f_{i_1\cdots i_p} dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_p}\right)=\sum_{i_1<\cdots<i_p} df_{i_1\cdots i_p} dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_p}$$

U 上の微分 p 形式 α と q 形式 β について次の関係が成り立つ。

$$d(\alpha\wedge\beta)=d\alpha\wedge\beta+(-1)^p\alpha\wedge d\beta \tag{12.19}$$

微分 p 形式の積分は U 上で κ:$[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_p,b_p]$ の境界上の積分を次で定義する。

$$\int_\kappa\left(\sum_{i_1<\cdots<i_p} f_{i_1\cdots i_p} dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_p}\right)=\int_{a_1}^{b_1}\cdots\int_{a_p}^{b_p}\sum_{i_1<\cdots<i_p} f_{i_1\cdots i_p}(\kappa(t_1,\cdots,t_p))dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_p}$$

$$=\int_{a_1}^{b_1}\cdots\int_{a_p}^{b_p}\sum_{i_1<\cdots<i_p} f_{i_1\cdots i_p}(\kappa(t_1,\cdots,t_p))det\begin{bmatrix}\frac{\partial\kappa_{i_1}}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial\kappa_{i_1}}{\partial t_p}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial\kappa_{i_p}}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial\kappa_{i_p}}{\partial t_p}\end{bmatrix}dt_1\cdots dt_p$$

ただし

$$dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_p}=sign\begin{pmatrix} j_1 & \cdots & j_p\\ i_1 & \cdots & i_p\end{pmatrix}dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_p}$$

を用いれば次の順序を考えない形式にしても同じ結果になる。

$$\int_\kappa\left(\sum_{i_1\cdots i_p=1}^{n} f_{i_1\cdots i_p} dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_p}\right)=\int_{a_1}^{b_1}\cdots\int_{a_p}^{b_p}\sum_{i_1\cdots i_p=1}^{n} f_{i_1\cdots,i_p}(\kappa(t_1,\cdots,t_p))dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_p}$$

$$=\int_{a_1}^{b_1}\cdots\int_{a_p}^{b_p}\sum_{i_1\cdots i_p=1}^{n} f_{i_1\cdots,i_p}(\kappa(t_1,\cdots,t_p))det\begin{bmatrix}\frac{\partial\kappa_{i_1}}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial\kappa_{i_1}}{\partial t_p}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial\kappa_{i_p}}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial\kappa_{i_p}}{\partial t_p}\end{bmatrix}dt_1\cdots dt_p$$

さらに α を微分 p 形式とすると

$$\alpha=f_{i_1\cdots i_p}\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_p} \tag{12.20}$$

$$d\alpha=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_{i_1\cdots i_p}}{\partial x_J}\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_p} \tag{12.21}$$

$i_1<\cdots<i_p$ に対して p+1 形式は $j=1\cdots n,\ p<n$ だから

$$\int d\alpha=\int_\kappa\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_{i_1\cdots i_p}}{\partial x_J}\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_p}$$

$$=\int_{[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_{p+1},b_{p+1}]}\frac{\partial f_{i_1\cdots i_p}}{\partial x_J}(\kappa(t_1,\cdots,t_{p+1}))\begin{bmatrix}\frac{\partial\kappa_{i_1}}{\partial t_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial\kappa_{i_1}}{\partial t_{p+1}}\\ \frac{\partial\kappa_{i_1}}{\partial t_{p+1}} & \cdots & \cdots & \frac{\partial\kappa_{i_1}}{\partial t_{p+1}}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \frac{\partial\kappa_{i_p}}{\partial t_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial\kappa_{i_p}}{\partial t_{p+1}}\end{bmatrix}dt_1\cdots dt_{p+1}$$

行列の q 番目を取り出して

$$=\int_{[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_{p+1},b_{p+1}]}\frac{\partial f_{i_1\cdots i_p}}{\partial x_J}(\kappa(t_1,\cdots,t_{p+1}))\left(\sum_{q=1}^{p+1}(-1)^{q-1}\frac{\partial\kappa_j}{\partial t_p}det\begin{bmatrix}\frac{\partial\kappa_{i_1}}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial\kappa_{i_1}}{\partial t_{q-1}} & \frac{\partial\kappa_{i_1}}{\partial t_{q+1}} & \cdots & \frac{\partial\kappa_{i_1}}{\partial t_{p+1}}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \frac{\partial\kappa_{i_p}}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial\kappa_{i_p}}{\partial t_{q-1}} & \frac{\partial\kappa_{i_p}}{\partial t_{q+1}} & \cdots & \frac{\partial\kappa_{i_p}}{\partial t_{p+1}}\end{bmatrix}\right)dt_1\cdots$$

$$=\sum_{q=1}^{p+1}(-1)^{q-1}\int_{[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_{q-1},b_{q-1}]\times[a_{q+1},b_{q+1}]\times\cdots\times[a_{p+1},b_{p+1}]}\left[f_{i_1\cdots i_p}(\kappa(t_1,\cdots,t_{p+1}))\right]_{t_q=a_q}^{t_q=b_q}$$
$$det\begin{bmatrix}\frac{\partial\kappa_{i_1}}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial\kappa_{i_1}}{\partial t_{q-1}} & \frac{\partial\kappa_{i_1}}{\partial t_{q+1}} & \cdots & \frac{\partial\kappa_{i_1}}{\partial t_{p+1}}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \frac{\partial\kappa_{i_p}}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial\kappa_{i_p}}{\partial t_{q-1}} & \frac{\partial\kappa_{i_p}}{\partial t_{q+1}} & \cdots & \frac{\partial\kappa_{i_p}}{\partial t_{p+1}}\end{bmatrix}dt_1\cdots dt_{q-1}dt_{q+1}\cdots dt_{p+1}$$

よって式 12.20 から p 形式の差の和の形に表すことができる。

$$\int d\alpha=\sum_{q=1}^{p+1}(-1)^{q-1}\left(\int_{\kappa(\cdots,b_q,\cdots)}\alpha-\int_{\kappa(\cdots,a_q,\cdots)}\alpha\right)\tag{12.22}$$

次に U 上の**微分 p 形式の引き戻し**を考えよう。

$$\alpha=\sum_{i_1<\cdots<i_p}f_{i_1\cdots i_p}dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_p}$$

を

$$\pi:[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_p,b_p]\to U$$

で引き戻すと

$$\pi^*\alpha=\sum_{i_1<\cdots<i_p}f_{i_1\cdots i_p}\left(\pi\left(t_1,\cdots,t_p\right)\right)det\begin{pmatrix}\frac{\partial\pi_{i1}}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial\pi_{i1}}{\partial t_p}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial\pi_{ip}}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial\pi_{ip}}{\partial t_p}\end{pmatrix}dt_1\wedge\cdots\wedge dt_2$$

である。これは式 12.18 から

$$\int_\pi\alpha=\int_{id}\gamma^*\alpha$$

射影と恒等写像が積分領域として対応するわけであるが、ここでの恒等写像は微分 p 形式で

$$id:[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_p,b_p]\to[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_p,b_p]$$

があることであり、この直方体 $[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_p,b_p]$ の上に微分 p 形式 $fdt_1\wedge\cdots\wedge dt_p$ を次のように関数に対応させる。

$$\int_{id}f(t_1,\cdots,t_p)dt_1\wedge\cdots\wedge dt_p=\int_{a_1}^{b_1}\cdots\int_{a_p}^{b_p}f(t_1,\cdots,t_p)dt_1\cdots dt_p$$

ここで $\psi:V\to W$ を m 次元ユークリッド空間の開集合 V から n 次元ユークリッド空間の開集合 W への C^∞ 級写像とする。

W 上の微分 p 形式から C^∞ 級写像 $\pi : [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_p, b_p] \to V$ があれば

$$\int_\pi \psi^* \alpha = \int_{id} \pi^* \psi^* \alpha = \int_{id} (\psi \circ \pi)^* \alpha = \int_{\psi \circ \pi} \alpha$$

という関係が成り立つ。つまり、外微分と引き戻しは交換し、

$$d\psi^* \alpha = \psi^* d\alpha$$

が成り立つ、実際に α を微分 p 形式とすると

$$\alpha = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} f_{i_1 \cdots i_p} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$$

に対し、

$$\begin{aligned} d(\psi^* \alpha) &= d\left(\psi^*\left(\sum_{i_1 < \cdots < i_p} f_{i_1 \cdots i_p} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}\right)\right) \\ &= d\left(\sum_{i_1 < \cdots < i_p} f_{i_1 \cdots i_p} \circ \psi d\psi_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\psi_{i_p}\right) \\ &= \sum_{i_1 < \cdots < i_p} d\left(f_{i_1 \cdots i_p} \circ \psi\right) \wedge d\psi_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\psi_{i_p} \\ &= \psi^*\left(\sum_{i_1 < \cdots < i_p} df_{i_1 \cdots i_p} \wedge d\psi_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\psi_{i_p}\right) \\ &= \psi^* d\alpha \end{aligned}$$

となっている。
さらに $\pi^* \alpha$ は $p+1$ 次元直方体上の微分 p 形式になるはずなので次のように dt_q を除いた形で定義できる。

$$\pi^* \alpha = \sum_{q=1}^{p+1} f_q dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_{q-1} \wedge dt_{q+1} \cdots \wedge dt_{p+1}$$

であり、これから $p+1$ 形式が

$$\pi^* (d\alpha) = d(\pi^* \alpha) = \sum_{q=1}^{p+1} (-1)^{q-1} \frac{\partial f_q}{\partial t_q} dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_{p+1}$$

となり、

$$\begin{aligned} \int_\pi d\alpha &= \int_{id} \pi^* (d\alpha) = \int_{id} d(\pi^* \alpha) \\ &= \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_{p+1}}^{b_{p+1}} \sum_{q=1}^{p+1} (-1)^{q-1} \frac{\partial f_q}{\partial t_q} dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_{p+1} \\ &= \sum_{q=1}^{p+1} (-1)^{q-1} \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_{q-1}}^{b_{q-1}} \int_{a_{q+1}}^{b_{q+1}} \cdots \int_{a_{p+1}}^{b_{p+1}} [f_q]_{t_q = a_q}^{t_q = b_p} dt_1 \cdots dt_{q-1} dt_{q+1} \cdots dt_{p+1} \\ &= \sum_{q=1}^{p+1} (-1)^{q-1} \left(\int_{id} \pi(\cdots, b_q, \cdots)^* \alpha - \int_{id} \pi(\cdots, a_q, \cdots)^* \alpha\right) \\ &= \sum_{q=1}^{p+1} (-1)^{q-1} \left(\int_{\pi(\cdots, b_q, \cdots)} \alpha - \int_{\pi(\cdots, a_q, \cdots)} \alpha\right) \end{aligned}$$

と表せる。

多様体上の引き戻し　多様体 M の局所座標系においても $\{x^1, x^2 \cdots x^m\}$、N の局所座標系を $\{y^1, y^2 \cdots y^n\}$ として

$$\phi : y^j(x^1, x^2 \cdots x^m) \quad j = 1, 2, \cdots n \tag{12.23}$$

が与えられると p 次微分形式

$$\omega = \frac{1}{p!}\sum a_{i_1 \cdots i_p}(y) dy^{i_1} \wedge dy^{i_2} \wedge \cdots \wedge dy^{i_p} \tag{12.24}$$

の引き戻し $\phi^*\omega$ は y^i に $y^j(x^1, x^2 \cdots x^m)$ を代入して得られる。例えば

$$\omega = \sum a_j(y) dy^j \tag{12.25}$$

ならば

$$\phi^*\omega = \sum a_j(y(x)) \frac{\partial y^j}{\partial x^i} dx^i \tag{12.26}$$

となる。これから引き戻し $\phi^*\omega$ は線形写像の性質だけではなく、次の重要な性質を持つ。
任意の微分形式 $\omega \in \Omega(V)$ について

$$\phi^*(\omega \wedge \omega') = \phi^*\omega \wedge \phi^*\omega' \tag{12.27}$$

$$\phi^* d\omega = d\phi^*\omega \tag{12.28}$$

例えばこれは 0 形式の関数 f について局所座標の入れ替えが次のようにできる。

$$\begin{aligned}
\phi^*(df) &= \phi^*\left(\sum \frac{\partial f}{\partial y_i} dy_i\right) \\
&= \sum_i \phi^*\left(\frac{\partial f}{\partial y_i}\right) \phi^*(dy_i) \\
&= \sum_{i,j} \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} \circ \phi\right) \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} dx_j \\
&= \sum_j \frac{\partial (f \circ \phi)}{\partial x_j} dx_j \\
&= d\left(\phi^*(f)\right)
\end{aligned}$$

ここで m 次元ユークリッド空間上の関数を U、n 次元ユークリッド空間上の関数を V とする。次元の異なる空間への写像 ϕ は

$$\phi : U \to V \tag{12.29}$$

とおく。さらに V 上に関数 f が存在すると図のような f と ϕ の合成写像を考えることができる。

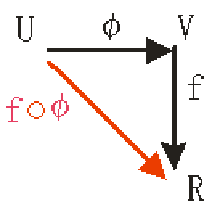

図 12.4: 写像 $\phi^* f = f \circ \phi$

これを次のように表すことができた。

$$\phi^* f = f \circ \phi \in \Omega^0(R^n) \tag{12.30}$$

例えばともに n 次元として式から体積形式として V 上に

$$\omega = dy^1 \wedge dy^2 \wedge \cdots \wedge dy^n \tag{12.31}$$

がある時、式から

$$\phi^* \omega = det \left[\frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right] dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \tag{12.32}$$

は U 上に引き戻された体積形式を表す。
この写像を用いてユークリッド空間から微分 p 形式に拡張することができる。
V 上の p 形式を U 上の p 形式に移す写像を

$$\phi^* : F^p(V) \to F^P(U) \tag{12.33}$$

とすると p 形式の ω を

$$\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} b_{i_1 \cdots i_p}(y) dy^{i_1} \wedge dy^{i_2} \wedge \cdots \wedge dy^{i_p} \tag{12.34}$$

とすると引き戻しは次のようになる。

$$\phi^* \omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} \sum_{j_1 < \cdots < j_p} b_{i_1 \cdots i_p}(\phi(x)) \frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{j_1}} \cdots \frac{\partial y^{i_p}}{\partial x^{j_p}} dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_p} \tag{12.35}$$

つまり ω を ϕ で引き戻せば $\phi^* \omega$

$$\phi^*(dy^1 \wedge dy^2) = det \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} dx^1 \wedge dx^2 \tag{12.36}$$

となる。写像に列がある場合は

$$U \longrightarrow^{\phi_1} V \longrightarrow^{\phi_2} W \longrightarrow^{\phi_3} \cdots \tag{12.37}$$

に対し引き戻しは

$$\phi_1^* \circ \phi_2^* \circ \cdots = (\cdots \phi_2 \circ \phi_1)^* \tag{12.38}$$

また微分形式の引き戻しは

$$\psi^*(\omega \wedge \omega') = \psi^* \omega \wedge \psi^* \omega' \tag{12.39}$$

だったから

$$\psi^*(dy_I \wedge dy_J) = \psi^* dy_I \wedge \psi^* dy_J \tag{12.40}$$

である。つまり式 12.28 から次のような図式が可換になる。

$$\begin{array}{ccc} \Omega^j(V) & \xrightarrow{\phi *} & \Omega^j(U) \\ \downarrow_d & & \downarrow_d \\ \Omega^{j+1}(V) & \xrightarrow{\phi *} & \Omega^{j+1}(U) \end{array} \tag{12.41}$$

また、$p > n$ に対しては $\Omega^p(U) = \{0\}$ であるとすると次のような図式ができる。

$$0 \to \Omega^0(U) \underset{\to}{d} \Omega^1(U) \underset{\to}{d} \Omega^2(U) \underset{\to}{d} \cdots \underset{\to}{d} \Omega^n(U) \to 0 \tag{12.42}$$

一般に $d \circ d : \Omega^p(U) \to \Omega^{p+2}(U)$ は $d(df) = 0$ であれば 0 準同型である。この時の系列を**コチェイン複体** (co-chain-complepsi) という。

12.1.2　引き戻し計算例

以上の性質を利用し、いくつかの例題を見ておこう。

微分 n 形式　　Q.n 次元ユークリッド空間上の微分 n 形式引き戻しの成分表現

$$\Omega = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

を考え、線形写像 $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ が $n \times n$Matrics$A = (a_{ij})_{i=1,\cdots n; j=1,\cdots n}$ によって

$$L(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right)$$

の時、$L^*\omega$ を求めよ。
Ans. この場合は次元 n であるので

$$\begin{aligned}
L^*\Omega &= d\left(\sum_{j_1=1}^{n} a_{1j_1} x_{j_1}\right) \wedge \cdots \wedge d\left(\sum_{j_n=1}^{n} a_{nj_n} x_{j_n}\right) \\
&= \left(\sum_{j_1=1}^{n} a_{1j_1} dx_{j_1}\right) \wedge \cdots \wedge \left(\sum_{j_n=1}^{n} a_{nj_n} dx_{j_n}\right) \\
&= \sum_{j_1=1}^{n} \cdots \sum_{j_n=1}^{n} a_{1j_1} \cdots a_{nj_n} dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_n} \\
&= \sum_{\sigma=1}^{n} sign(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \\
&= det(A) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n
\end{aligned}$$

となり、行列式が出てくる。

4 次元ユークリッド空間上の微分 2 形式　　Q.4 次元ユークリッド空間上の微分 2 形式

$$\omega = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4$$

を考えると線形写像

$$L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$$

が Matripsi$A = (a_{ij})_{i=1,\cdots 4; j=1,2}$ によって

$$L(u_1, u_2) = A(u_1, u_2) = \left(\sum_{j=1,2}^{n} a_{ij} u_j \right)_{i=1,\cdots 4}$$

で与えられている時、**切断となる引き戻し** $L^*\omega = 0$ となる条件を求めよ。
Ans. 0 ではない成分を拾うと $du_i \wedge du_i = 0$ だから

$$
\begin{aligned}
L^*\omega &= d\left(\sum_{j=1,2}^{n} a_{1j}u_j\right) \wedge d\left(\sum_{j=1,2}^{n} a_{2j}u_j\right) + d\left(\sum_{j=1,2}^{n} a_{3j}u_j\right) \wedge d\left(\sum_{j=1,2}^{n} a_{4j}u_j\right) \\
&= det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} du_1 \wedge du_2 + det\begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & {}_{42} \end{pmatrix} du_1 \wedge du_2
\end{aligned}
$$

よって切断 $L^*\omega = 0$ となるための条件が

$$
det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + det\begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{pmatrix} = 0
$$

であることがわかる。つまり、等長、等積になるような変換が存在してその方向の引き戻しは常に 0 になる。

$\mathbb{R}^3$ 上の微分 1 形式

Q) $\mathbb{R}^3$ の座標を (x, y, z) とし、$\mathbb{R}^3$ 上の微分 1 形式を

$$
\alpha = dz + xdy
$$

で与える。さらに写像 $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を

$$
F(x, y, z) = \left(x, y, z - \frac{xy}{2}\right)
$$

で定義する時の $F^*\alpha$ をまず求めよ。
A)

$$
\begin{aligned}
F^*\alpha &= d\left(z - \frac{xy}{2}\right) + xdy \\
&= dz - \frac{ydx}{2} - \frac{xdy}{2} + xdy \\
&= dz - \frac{ydx}{2} + \frac{xdy}{2}
\end{aligned}
$$

Q) 次に、この F のヤコビ行列を求めよう。
A)

$$
DF = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}y & -\frac{1}{2}x & 1 \end{pmatrix}
$$

とかけるから

$$
det[DF] = 1
$$

である。
Q)$\alpha \wedge d\alpha,\ F^*\alpha \wedge dF^*\alpha$ を求めて比較せよ。
A)

$$
\begin{aligned}
\alpha \wedge d\alpha &= (dz + xdy) \wedge d(dz + xdy) \\
&= (dz + xdy) \wedge (dx \wedge dy) \\
&= dx \wedge dy \wedge dz
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F^*\alpha \wedge dF^*\alpha &= \left(d\left(z - \frac{xy}{2}\right) + xdy\right) \wedge d\left(d\left(z - \frac{xy}{2}\right) + xdy\right) \\
&= \left(dz + \frac{xdy}{2} - \frac{ydx}{2}\right) \wedge \left(\frac{dx \wedge dy}{2} - \frac{dy \wedge dx}{2}\right) \\
&= dx \wedge dy \wedge dz
\end{aligned}
$$

となり、変わらない。

Q) さらに次のような t を持つ写像が入る場合

$$\phi(x, y, z) = (x\cos t - y\cos t, x\sin t + y\cos t, z)$$

として $\psi^* F^* \alpha$ を求めよ。

A)

$$
\begin{aligned}
\psi^* F^* \alpha &= \psi^* \left(dz + \frac{xdy}{2} - \frac{ydx}{2}\right) \\
&= dz + \frac{(x\cos t - y\cos t)d(x\sin t + y\cos t)}{2} - \frac{(x\cos t - y\cos t)d(x\sin t + y\cos t)}{2} \\
&= dz + \frac{xdy}{2} - \frac{ydx}{2} = F^*\alpha
\end{aligned}
$$

12.2 双対微分演算子

引き戻しの定義をみたのでここで

定義 21. **双対微分演算子** (co-differential oprator)δ を定義する。
k 形式の ω にホッジ作用素 $*$ を作用させると $n-k$ 形式になるので

$$* * \omega = (-1)^{(n-k)k}\omega \tag{12.43}$$

となる。$\delta\omega$ は $d\omega$ が $k+1$ 形式だから $k-1$ 形式になるべきである。そこで
$*\omega$ が $n-k$ 形式、$d*\omega$ が $n-k+1$ 形式、$*d*\omega$ が $k-1$ 形式になるので

$$\delta\omega = (-1)^{nk+n+1} * d * \omega \tag{12.44}$$

と書ける。

この演算子を用いるとラプラス演算子が簡単に次のように書ける。

$$\triangle = d\delta + \delta d \tag{12.45}$$

これは k 形式を k 形式に写す。例えば関数 $f(C^0)$ に作用させると

$$\triangle f = -\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(g^{ij}\sqrt{g}\frac{\partial f}{\partial x^j}\right) \tag{12.46}$$

また電磁場は次の 2 つの関係式にまとめることができた。

$$\partial_\mu F_{\nu\rho} - \partial_\nu F_{\mu\rho} = 0 \tag{12.47}$$

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = 4\pi j_\nu \tag{12.48}$$

そこで次のように 1 形式と 2 形式で改めて場の量を定義すると

$$F = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu \tag{12.49}$$

$$J = J_\mu dx^\mu \tag{12.50}$$

さらに外微分を作用させると

$$dF = \frac{1}{2}\partial_\mu F_{\mu\rho}dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho = 0 \tag{12.51}$$

となる。一方でこの dF に co-微分演算子を作用させると 1 形式が次のように得られる。

$$\delta dF = \partial^\mu F_{\mu\nu}dx^\mu = 4\pi j_\nu dx^\nu = 4\pi J \tag{12.52}$$

12.3 括弧積

多様体 M 上でベクトル場 X, Y と微分可能な関数 $f \in F(M)$ があるとき $Xf \in F(M)$ となるから

$$[X, Y] = X(Yf) - Y(Xf)$$

を括弧積 (bracket) と定義すると各点 p において

$$[X, Y]_p f = X_p(Yf) - Y_p(Xf)$$

となるので $[X, Y]_p \in T_p(M)$ であり接ベクトルをつくることがわかる。
括弧積は次のヤコビ恒等式を満たし、リー環をつくる。

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$$

具体的に

$$X = \sum \xi \frac{\partial}{\partial x^i},\ \ Y = \sum \xi\eta \frac{\partial}{\partial x^i}$$

であれば

$$[X, Y] = \sum_{k=1}\sum_{i=1}\left(\xi^i \frac{\partial \eta^k}{\partial x^i} - \eta^i \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i},\right)\frac{\partial}{\partial x^k}$$

となる。

12.4 1 パラメタ部分群

多様体 M 上にベクトル場 X がある時、X の積分曲線を $x(t)$ とすると $X|_{x(t)}$ となるものとして定義できる。この時式 10.13 から

$$\frac{dx^\mu}{dt} = X^\mu(x(t)) \tag{12.53}$$

$$X = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \tag{12.54}$$

とおける。ただし、$x^\mu(t)$ は $\phi(x(t))$ の μ 番目の成分である。積分曲線は上の微分方程式を初期条件

$$x_0^\mu = x^\mu(0) \tag{12.55}$$

を解くことになり、解は局所的には一意に存在する。しかし、t に対して定義域を広くとる必要がある。M がコンパクトであれば任意おの t に対して積分曲線は存在する。

$\sigma(t, x_0)$ を X の積分曲線で $t=0$ において x_0 を通るものとする。$\sigma^\mu(t, x_0)$ で積分曲線を表すとする。この時の常微分方程式が

$$\frac{d}{dt}\sigma^\mu(t, x_0) = X^\mu(\sigma(t, x_0)) \tag{12.56}$$

となり、初期条件が

$$\sigma^\mu(t, x_0) = x_0^\mu \tag{12.57}$$

である。この時、$\mathbb{V}$ をベクトル空間として、写像

$$\sigma : \mathbb{R} \times M \to M \tag{12.58}$$

は $X \in \mathbb{V}$ により生成された流れ **flow** とよばれる。流れは任意の $t, s \in \mathbb{R}$ に対して次の関係がある。

$$\sigma(t, \sigma^\mu(s, x_0)) = \sigma(t+s, x_0) \tag{12.59}$$

例えば t, s が時間として考えると、時刻 t から出発した流れは時間 s だけ進めた座標点での流れの値と時刻 $t+s$ での値が一致することを示している。これは次のように常微分方程式の解からも確かめられる。

$$\frac{d}{dt}\sigma^\mu(t, \sigma^\mu(s, x_0)) = X^\mu\left(\sigma^\mu(t, \sigma^\mu(s, x_0)\right) \tag{12.60}$$

$$\sigma(0, \sigma(s, x_0)) = \sigma(s, x_0) \tag{12.61}$$

と異なる時刻での微分方程式、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\sigma^\mu(t+s, \sigma^\mu(s, x_0)) &= \frac{d}{d(t+s)}\sigma^\mu(t+s, \sigma^\mu(s, x_0)) & (12.62) \\ &= X^\mu\left(\sigma(t+s, x_0)\right) & (12.63) \end{aligned}$$

$$\sigma(0+s, x_0) = \sigma(s, x_0) \tag{12.64}$$

これは同じ初期条件を持ち、解は一意となる。よって次の定理が成り立つ。

任意の点 $x \in M$ に対して微分可能な写像 $\sigma : \mathbb{R} \times M \to M$ が存在して

1. $\sigma(0, x) = x$
2. $t \to \sigma(t, x)$ は常微分方程式の解になる。
3. $\sigma(t, \sigma^\mu(s, x_0)) = \sigma(t+s, x_0)$

このような条件を満足するが次節で紹介する 1 パラメタ変換群である。

flow の例として次のようなベクトル場を $M = \mathbb{R}^2$ で次のように決める。

$$X\left((x, y)\right) = -y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y} \tag{12.65}$$

このベクトル場は次の図のようになる。

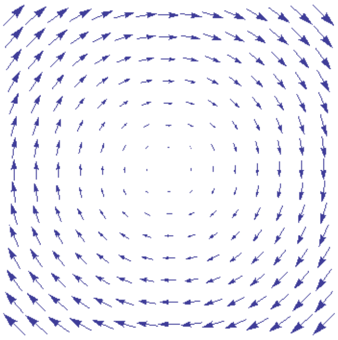

図 12.5: 回転成分のあるベクトル場

この時 X に生成される流れとは

$$\sigma\left(t,(x,y)\right)=\left(x\cos t-y\sin t,\,x\sin t+y\cos t\right) \tag{12.66}$$

となることがわかる。つまり t によりパラメトライズされた曲線 $\sigma\left(t,(x,y)\right)$ はその接ベクトルが常に X であらわされる。

具体的に流れの x 成分について

$$\frac{d}{dt}\left(x\cos t-y\sin t\right)=-(x\sin t+y\cos t) \tag{12.67}$$

となり式 12.65 の x 成分である y の値に一致する。y 成分についても同様である。

12.5　無限小変換

1 パラメタ変換群は ϕ_t が与えられると

$$x^{'}=\phi_t(x)$$

を満たし、これらの曲線群は決して交わることがない。したがってこの曲線の接ベクトル

$$X_x\equiv\frac{d}{dt}\phi_t(x)|_{t=0}$$

は 1 パラメタ変換群に対する無限小変換という。

ϕ_t のベクトル場への作用は誘導写像を ϕ_* として

$$\left(\phi_{t*}V\right)^{\mu}(x)=\frac{\partial\phi_t}{\partial x^{\nu}}\phi_{-t}(x)V^{\nu}\left(\phi_{-t}(x)\right)$$

前節の flow の満たす性質が次の規則により可換群の性質を持つ。

1. $\sigma_t\left(\sigma_s(x)\right)=\sigma_{t+s}(x),\ \sigma_t\circ\sigma_s=\sigma_{t+s}$

2. $\sigma_0=e$(単位元)

3. $\sigma_{-t}=\left(\sigma_t\right)^{-1}$

このようにしてできる群が 1 パラメタ変換群である。これは局所的には加法群 $\mathbb{R}$ に似ていることもあるが大局的には同型とは限らない。例えば先の例でみると $\sigma_{2\pi n+t}$ は σ_t と同じ写像である。この 1 パラメタ変換群は SO_2 の中の

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

でありこれは第 1 部でみたように $U(1)$ すなわち複素数 $e^{i\theta}$ 全体のなす乗法群に同型である。
実数 t と多様体 M 上の点 p について次のような微分可能な写像を考える。

$$(t,p) \in R \times M \to \phi_t(p) \in M$$

多様体 M の 1 助変数変換群であれば上の ϕ_t 写像において

$$\phi_t \cdot \phi_s = \phi_{t+s} \tag{12.68}$$

が成り立つような族 $\{\phi_t\}$ が存在する。ただし ϕ_0 は恒等変換とする。この時任意の関数 $f \in F$ について式 10.41 から

$$X_p f = \frac{d(f(\phi_t(p)))}{dt}|_t \ , \ \ f \in F(M) \tag{12.69}$$

を定義すれば図のようにベクトル場 X がつくられ特に X_p は曲線 ϕ_t の $t=0$ における接ベクトルである。そこで通常の微分のように接線の傾きとして

$$X_P = \lim_{t\to 0} \frac{\phi_t(p) - p}{t} \tag{12.70}$$

と定義することができる。

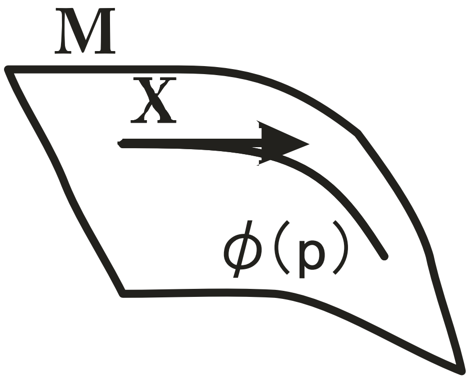

図 12.6:

一方で流れについては十分小さい ε に対して

$$\sigma^\mu_\varepsilon(x) = \sigma^\mu(\varepsilon, x) = x^\mu + \varepsilon X^\mu(x)$$

ことであり微小な長さに対応するのでベクトル場 X を変換 σ_t の無限小生成子とすることができる。
よってこれから始点 $x = \sigma(0,x)$ としてパラメタ t だけ離れた点は次のように展開できる。

$$\begin{aligned}
\sigma^\mu(t,x) &= x^\mu + t\frac{d}{ds}\sigma^\mu(s,x)|_{s=0} + \frac{t^2}{2!}\left(\frac{d}{ds}\right)^2 \sigma^\mu(s,x)|_{s=0} + \cdots \\
&= \left[1 + t\frac{d}{ds} + \frac{t^2}{2!}\left(\frac{d}{ds}\right)^2\right] \sigma^\mu(s,x)|_{s=0} \\
&= exp\left(t\frac{d}{ds}\right)\sigma^\mu(s,x)|_{s=0}
\end{aligned}$$

よってこれから

$$\sigma^\mu(t,x) = exp\,(tX)\,x^\mu \tag{12.71}$$

とおくことができてこれを X の指数化という。指数関数の肩が演算子であることに注意する。
しかし、これから流れは次のような指数関数的な性質を持つことになる。

$$\sigma(0,x)=x=exp(0X)x$$

$$\frac{d\sigma(t,x)}{dt}=Xexp(tX)=\frac{d}{dt}\left(exp(tX)x\right)$$

$$\begin{aligned}\sigma\left(t,\sigma(s,x)\right) &= \sigma\left(t,exp(sX)x\right)=exp(tX)exp(sX)x \quad (12.72)\\ &= exp\left((t+s)X\right)x=\sigma(t+s,x) \quad (12.73)\end{aligned}$$

逆にベクトル場 X があれば族 $\{\phi_t\}$ が存在するであろうか。これには次の条件が必要である。
ベクトル場 $X\in V(M)$ が M の各点 p に対してその近傍 U とある正数 ϵ と微分可能な次の写像が存在し、

$$(t,q)\in(-\epsilon,\epsilon)\times U\to\phi_t(q)\in M \quad (12.74)$$

各 $t:|t|<\epsilon$ に対して

$$\phi_t:q\to\phi_t(q) \quad (12.75)$$

が開集合 U から開集合 $\phi_t(U)$ への微分同相写像であり、$|t|,|s|,|t+s|<\epsilon,\ \ q\in U,\ \ \phi_t(q)\in U$ ならば

$$\phi_s(\phi_t(q))\to\phi_{s+t}(q) \quad (12.76)$$

が成り立ち

$$X_P=\lim_{t\to0}\frac{\phi_t(p)-p}{t}\quad q\in U \quad (12.77)$$

が成り立つことである。この $\{\phi_t\}$ が多様体 M の **1 助変数変換群** (one-parameter group transformations) と定義できる。
この時 p の近傍の座標 $\{x^1,x^2,\ldots,x^n\}$ についてベクトル場を

$$X=\sum_{i=1}^{n}\xi^i(x^1,x^2,\ldots,x^n)\frac{\partial}{\partial x^i}\in T_p(M)$$

とした時 $\phi_t(q)$ の座標を表す関数

$$\phi^i(t,q)\quad i\le i\le n$$

が次の微分方程式を満たす。

$$\frac{d\phi^i}{dt}=\xi^i(\phi^1(t,q),\phi^2(t,q),\ldots,\phi^n(t,q))\quad i\le i\le n \quad (12.78)$$

かつ初期条件として点 q の座標を $\{q^1,q^2,\ldots,q^n\}$ としてこの微分方程式の解を

$$\phi_t(q)=(\phi^1(t,q),\phi^2(t,q),\ldots,\phi^n(t,q))\quad i\le i\le n \quad (12.79)$$

とおける。
またベクトル場 X,Y の局所的 1 助変数変換群の $\{\phi_t\}$、$\{\psi_t\}$ があれば

$$[X_p,Y_p]=\lim_{t\to0}\frac{Y_p-((\phi_t)_*Y)_p}{t} \quad (12.80)$$

とおける。ただし $(\phi_t)_*Y$ は図に示すように曲線 ϕ_t の $t=0$ における接ベクトルである。

$$((\phi_t)_* Y)_p = (\phi_t)_{*\phi_t^{-1}(p)}(Y_{\phi_t^{-1}(p)}) \tag{12.81}$$

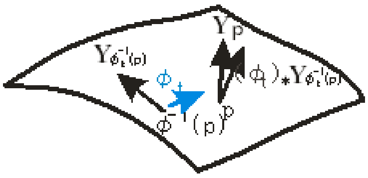

図 12.7: p を $\phi^{-1}(p)$ で戻し、そこでのベクトル場 Y を得る。次にそのベクトル場を ϕ で移して $(\phi_t)_* Y_{\phi^{-1}(p)}$ を得る。
括弧積はこの $(\phi_t)_* Y_{\phi^{-1}(p)}$ に対する Y_p のパラメタ t の変化率である。

ただし重要な注意点は式 12.78 が解をもつための条件は一般的には制限されることである。
つまり一般には

$$\{0\} \times M \in R \times M \tag{12.82}$$

の適当な場所でなければならないことである。1 助変数局所座標群はこれを満足する。

これは次のような積分可能曲線が存在する必要がありコーシ-リーマンの関係式と深い関わりがある。

多様体 M 上でベクトル場 X が 0 でないならば M の各点で X_p で張られる $T_p(M)$ の 1 次元部分空間を Δ_p と書くことにする。

これにより多様体 M 上の直線場が得られる。さらに一般には **k 次元接分布** (distribution) は多様体 M の各点 p に対して X_p で張られる $T_p(M)$ の k 次元部分空間を Δ_p を対応させる規則のことである。X_p が微分可能なら $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ を Δ の局所基 (local basis) という。また Δ の**積分多様体** (integral manifold) とは M の部分集合 N で包含写像がはめこみになっていて $N \to M$ は各 $p \in N : T_p(N) = \Delta_p$ が成り立つ場合をいう。M の任意の点に積分多様体が存在すれば Δ を**完全積分可能** (completely integrable) という。X, Y が Δ に属し、$[X, Y]$ も Δ に属す時、完全積分可能になる。また完全積分可能な多様体であれな。M の任意の点 p を通る積分多様体で極大のもの N が存在し、他の積分多様体は N の開部分多様体になっている。

12.6　両立

座標近傍系を $\{U_i, \psi_i\}_{i\in I}$ で表す。ただし、前節から M 上の微分 p 形式を

$$\psi_0(U_0) = V_0$$

を $\alpha^{(0)}$ とする。微分 $p-1$ 形式は $I(\alpha^{(0)})$ とおく。ただし、

$$V_{ij} = \psi(U_i \cup U_j), \quad \psi_{ij} = \psi_i \circ (\psi_j | U_i \cap U_j)^{-1} : V_{ij} \to V_{ji}$$

である。

$\{U_i, \psi_i\}_{i\in I}$ に対し、これに含まれない近傍 (U_0, ψ_0) は $\{\{U_i, \psi_i\}_{i\in I} \cup (U_0, \psi_0)\}$ が再び、座標近傍となれば $\{U_i, \psi_i\}_{i\in I}$ と近傍 (U_0, ψ_0) は**両立する**という。

座標近傍であることから V_0 は $\{V_{i0}\}_{i\in I}$ で被覆されている。従って $V_{i0} \cap V_{j0}$ 上で $\psi_{i0}^* \alpha^{(i)}$ と $\psi_{j0}^* \alpha^{(j)}$ が一致すると V_0 の全ての点で $\alpha^{(0)}$ が定義できる。これは $i, j, k \in \{0\} \cap I$ に対して、$V_{ik} \cap V_{jk}$ 上で、

$$\psi_{ik} = \psi_{ij} \circ \psi_{jk}$$

であるから $k = 0$ とすると $V_{i0} \cap V_{j0}$ 上で

$$\psi_{i0} = \psi_{ij} \circ \psi_{j0}$$

一方で V_{ij} では引き戻しにより、

$$\alpha^{(j)}|V_{ij} = \psi_{i0}^{*}\alpha^{(i)}$$

が成り立つから $V_{i0} \cap V_{j0}$ 上で

$$\psi_{i0}^{*}\alpha^{(i)} = (\psi_{ij} \circ \psi_{j0})^{*}\,\alpha^{(i)} = \psi_{j0}^{*}\psi_{ij}^{*}\alpha^{(i)} = \psi_{j0}^{*}\alpha^{(j)}$$

つまり、

$$\alpha^{(0)}|V_{i0} = \psi_{i0}^{*}\alpha^{(i)}$$

を満たす。

多様体 M 上の微分 p 形式の定義として

$$\alpha^{(j)}|V_{ij} = \psi_{ij}^{*}\alpha^{(i)}$$

が成り立てばよい。

12.7 ユークリッド空間上の微分形式

n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ 上の開集合 U の微分 0 形式は U 上の関数全体として定義する。以後の関数は C^{∞} 級であるとする。

ユークリッド空間上の微分 p 形式全体の集合を $\Omega^{p}(U)$ と書く。$0 \leq p \leq n$ に対して U が空でなければ $\Omega^{p}(U)$ は無限次元の実ベクトル空間をつくる。$p > n$ に対しては $\Omega^{p}(U) = \{\emptyset\}$ であるとする。

$0 \leq p \leq n (n \geq 1)$ に対して外微分 d は次を満たす線形作用素とになせる。

$$d : \Omega^{p}(U) \to \Omega^{p+1}(U)$$

$p = 0$ の時が全微分演算子である。外微分の外微分は 0 から

$$d(df) = 0$$

であるから次の系列が定義できる。

$$0 \to \Omega^{0}(U) \xrightarrow{d} \Omega^{1}(U) \xrightarrow{d} \Omega^{2}(U) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Omega^{n}(U) \to 0 \tag{12.83}$$

これは後に扱う**コチェイン複体**になっている。n 次元ユークリッド空間上では

$$d \circ d : \Omega^{p}(U) \to \Omega^{p+2}(U)$$

は 0 に準同型である。

12.8 Poincare の補題

12.8.1 星形領域

ポアンカレの補題は次のようにいうことができる。ユークリッド空間の開集合を U とし、次の星形線分

$$\ell_{x} = \{(1-t)\mathbf{y} + t\mathbf{x} | 0 \leq t \leq 1\} \tag{12.84}$$

が U に含まれるものがあるとする。この時、**正数 p に対し、U 上の微分 p 形式 α が $d\alpha = 0$ を満たすなら、$d\beta = \alpha$ となる微分 $p-1$ 形式が存在する**。という内容である。

これは次の系列が完全系列であることを意味する。

$$0 \to \mathbb{R}(U) \to \Omega^0(U) \xrightarrow{d} \Omega^1(U) \xrightarrow{d} \Omega^2(U) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Omega^n(U) \to 0$$

こうした系列が微分形式からできることが前節の引き戻しを使って次のポアンカレの補題を説明していくのに重要な役割を果たす。

改めて $[0,1] \times U$ 上の微分 p 形式 α を

$$\alpha = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} f_{i_1 \cdots i_p} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$$

とする。さらに新しい座標を α_0 として導入すると $[0,1] \times U$ 上で式 12.84 から発展させ、

$$x_i \to x_0(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \mathbf{y}$$

$$dx_i \to dx_0(x_i - y_i) + x_0 dx_i$$

のように変換し、新たに微分 p 形式として

$$\beta = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} f_{i_1 \cdots i_p}(x_0(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \mathbf{y}) \cdot (x_0 dx_{i_1} + (x_{i_1} - y_{i_1})dx_0) \wedge \cdots \wedge \left(x_0 dx_{i_p} + (x_{i_p} - y_{i_p})dx_0\right)$$

を考える。これは

$$\psi(x_0, \mathbf{x}) \equiv x_0(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \mathbf{y} \tag{12.85}$$

で定義した写像 ψ を考え

$$\psi : [0,1] \times U \to U$$

における α による引き戻しである。すなわち、

$$\beta = \psi^* \alpha$$

となる。この写像は $x_0 = 0$ の時、式 12.85 から

$$\psi(x_0, \mathbf{x}) = \mathbf{y}$$

となるので U から $\mathbf{y}$ への定値写像である。また、$x_0 = 1$ の時は

$$\psi(x_0, \mathbf{x}) = \mathbf{x}$$

となり、U の恒等写像になる。つまり、直線ファイバーとして

$$x_0[0,1]$$

が与えられ、ψ で射影される。この図は次のように**星型開集合**と区間 $[0,1]$ の集合となる。

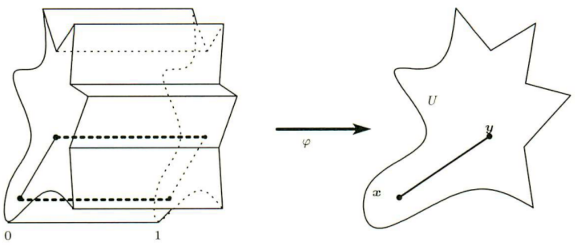

図 1.7　区間と星型開集合との直積から星型開集合への写像 φ.

図 12.8: [37] より

この時、$d\alpha = 0$ とすると

$$d\beta = d(\psi^* \alpha) = \psi^*(d\alpha) = 0$$

となるので式 13.43 から

$$dI(\beta) = \beta - \beta_0$$

とおける。$p > 0$ として

$$\beta_0 = \pi^*(\iota_0^* \beta) = \pi^* 0 = 0$$

から

$$dI(\beta) = \beta$$

となる。ここで $x_0 = 1$ とすると

$$\iota_1 : U \to [0,1] \times U$$

による引き戻しを考えると

$$\alpha = \iota_1^* \beta = \iota_1^* dI(\beta) = d(\iota_1^* I(\beta))$$

となる。

12.8.2 Poincare の補題

M を n 次元多様体とし ω が p 次微分形式で $\omega = d\theta$ とかければ $d\,(d\theta) = 0$ であった。この逆が成り立つがどうかが **Poincare の補題**である。結論としては次の例のように一般には成り立たない。

$d\omega = 0$ なら適当な関数 f が存在し、$\omega = df$ とすることはできたが、例えば x-y 平面から原点を除いた領域で次の関数を定義すると

$$\omega = \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} \tag{12.86}$$

これは 1 次微分形式であり、$d\omega = 0$ になる。つまり ω は閉形式であるが

$$M = \mathbf{R}^2 - \{0\}$$

の区間、全てにわたって $\omega = df$ の形には書けない。
例えば

$$f(x,y) = \arctan \frac{y}{x}$$

を考えれば次の条件は満たす。

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{\partial f}{\partial y}$$

よって $\omega = df$ の条件を満たすように見えるがこれは部分的でしかない。よく見ればこの f は極座標の角 θ 一価性の要求があるので次の図のように f の定義域が $\mathbf{R}_+$ を原点を含む正の x 軸として

$$\mathbf{R}^2 - \mathbf{R}_+$$

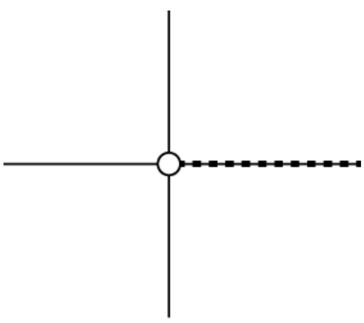

図 12.9: 原点と $\mathbf{R}_+$ の領域は定義されない

に制限される。

また、これは電磁気のアンペールの法則と関係している。磁場を $\mathbf{H}(H_1, H_2, 0)$ とすると $M = \mathbf{R}^2 - \{0\}$ において

$$
\begin{aligned}
\int_C H dr &= H_1 dx + H_2 dy \\
&= \frac{I}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \\
&= \frac{I}{2\pi}\left[\frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}\right] \\
&= \frac{I}{2\pi}\int_C \omega \\
&= I
\end{aligned}
$$

12.8.3 ホモトピーとの関係

そこでまずホモトピー作用素を単位区間 $I = [0, 1]$ として多様体 M との直積を考える。

このシリンダーのような図形の上面と下面を次の写像によって M と同一視する。

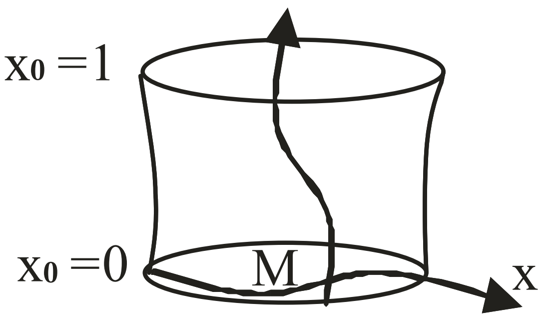

図 12.10: 多様体 M と I の直積空間

j を次のように直積をつくる作用素として

$$
\begin{aligned}
j_0 &: M \to I \times M;\ \ j_0(x) = (0, x),\ \ x \in M \\
j_1 &: M \to I \times M;\ \ j_1(x) = (1, x),\ \ x \in M
\end{aligned} \tag{12.87}
$$

ホモトピー作用素 K を

$$K : A^{p+1}(I \times M) \to A^p(M) \tag{12.88}$$

とし、区間 I のパラメタを t として $I \times M$ 上の $(p+1)$ 次微分形式を $\omega \in A^{p+1}(I \times M)$ は

$$\omega = \omega_1 + dt \wedge \omega_2 \tag{12.89}$$

と表すと dt は 1 形式であるはずだから M を n 次元多様体としたので

$$dt = d\theta^1 \wedge \cdots \wedge d\theta^n \tag{12.90}$$

と書ける。ただし ω_1, ω_2 は t を含んでも dt を含まないとする。つまり t に沿って見るとすでに ω は足しあわされたものである。

これは ω_1 空間が基本区間に対して閉じていることになるので $\int_0^1 \omega_1 = 0$ である。

この時作用素 K を ω に作用させると dt と ω 空間は直交しているので

$$
\begin{aligned}
K\omega &= \textstyle\int_0^1 \omega_1 + \displaystyle\int_0^1 dt \wedge \omega_2 \\
&= \int_0^1 dt\omega_2
\end{aligned} \tag{12.91}
$$

として積作用素を定義する。ω_2 は $I \times M$ 上の p 次微分形式だから次のようにおける。

$$
\omega_2 = \frac{1}{p!} \sum a_{i_1 i_2 \cdots i_p}(t, x) dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_p} \tag{12.92}
$$

この時、式 12.91 は次のように p 形式のままでかける。

$$
K\omega = \frac{1}{p!} \sum \left(\int_0^1 a_{i_1 i_2 \cdots i_p}(t, x) dt \right) dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_p} \tag{12.93}
$$

ここで式 12.87 を用いれば次の重要な関係が成り立つ。

$$
K(d\omega) + d(K\omega) = j_1^* \omega - j_0^* \omega \tag{12.94}
$$

これを示すために次のように添え字を簡略化する。

$$
\begin{aligned}
J = j_1 \cdots j_{p+1} \quad dx^J = dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_p} \\
H = h_1 \cdots h_{p+1} \quad dx^H = dx^{h_1} \wedge \cdots \wedge dx^{h_p}
\end{aligned}
$$

これを用いて

$$
\omega = \sum a_J(t, x) dx^J + \sum a_H(t, x) dt \wedge dx^H \tag{12.95}
$$

とすると外積は同じものを含めば 0 であったから

$$
\sum K \frac{\partial a_J}{\partial t} dt \wedge dx^J = \sum \int_0^1 \frac{\partial a_J}{\partial t} dt \wedge dx^J = \sum a_J(1, x) dx^J - \sum a_J(0, x) dx^J
$$

だから

$$
\begin{aligned}
K(d\omega) &= \sum K \left(\frac{\partial a_J}{\partial t} dt \wedge dx^J + \frac{\partial a_J}{\partial x^j} dx^j \wedge dt \wedge dx^J + \frac{\partial a_H}{\partial t} dt \wedge dt \wedge dx^H + \frac{\partial a_H}{\partial x^i} dx^i \wedge dt \wedge dx^H \right) \\
&= \sum K \left(\frac{\partial a_J}{\partial t} dt \wedge dx^J - \frac{\partial a_H}{\partial x^i} dt \wedge dx^i \wedge dx^H \right) \\
&= \sum a_J(1, x) dx^J - \sum a_J(0, x) dx^J - \left(\int_0^1 \frac{\partial a_H}{\partial x^i} dt \right) dx^i \wedge dx^H
\end{aligned} \tag{12.96}
$$

また一方で式 12.93 から

$$
\begin{aligned}
d(K\omega) &= \sum d \left(\left(\int_0^1 a_H dt \right) dx^H \right) \\
&= \sum \left(\int_0^1 \frac{\partial a_H}{\partial x^i} dt \right) dx^i \wedge dx^H
\end{aligned} \tag{12.97}
$$

よって式 12.96、12.97 から j の引き戻しとして j^* を用いて

$$
K(d\omega) + d(K\omega) = \sum a_J(1, x) dx^J - \sum a_J(0, x) dx^J = j_1^* \omega - j_0^* \omega \tag{12.98}
$$

を得て式 12.94 を示すことができた。
次に M から R^n の領域 U で 1 点に可縮なものを考える。つまり次の写像 ϕ

$$\phi : I \times U \to U \tag{12.99}$$

と 1 点 $x_0 \in U$ が存在し、全ての $x \in U$ に対し

$$\phi(1, x) = x, \phi(0, x) = x_0$$

とすると直積をつくる作用素 j に作用すれば

$$\phi \circ j_0(x) = x_0, \phi \circ j_1(x) = x$$

である。前節の引き戻しの定義によりこれは j の引き戻しである。

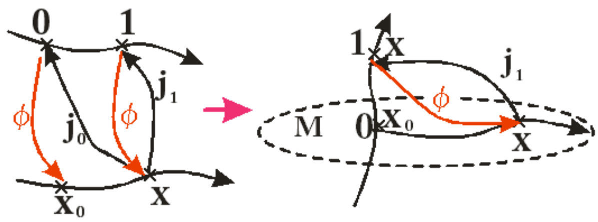

図 12.11: 引き戻しと切断

引き戻しは前部において多様体 $M \to N$ への微分可能写像 ϕ に対し、接空間の写像

$$\phi_* : T_x M \to T_{\phi(x)} N$$

がベクトル場を X として

$$\phi(x) = \phi(y) \to \phi_*(X_x) = \phi_*(X_y)$$

が成り立つとは限らないのでベクトル場を多様体 $M \to N$ へのベクトル場に写さなかった。引き戻し ϕ^* は $\phi^* T_x N$ の切断が $\phi_*(X_x)$ となるような写像である。微分形式に対しては

$$\phi^* : A^p(N) \to A^p(M)$$

が成り立ち、引き戻しは

$$\phi^* \omega(X_1, X_2 \cdots, X_p) = \omega(\phi_*(X_1), \phi_*(X_2) \cdots, \phi_*(X_p))$$

で定義される。そこで 1 形式が

$$\omega = \sum a_j(y) dy^j$$

であれば引き戻しにより ϕ 座標系を用いて

$$\phi^* \omega = \sum a_j(y(x)) \frac{\partial y^j}{\partial x^i} dx^i \tag{12.100}$$

となった。
これを拡張し、U 上の (p+1) 次微分形式 $\omega \in A^{p+1}(U)$ に対し $\phi^* \omega \in A^{p+1}(I \times U)$ は次の性質を持つ。

$$j_0^*(\phi^* \omega) = 0, j_1^*(\phi^* \omega) = \omega$$

式 12.94 を用いると

$$Kd\phi^*\omega + dK\phi^*\omega = j_1^*(\phi^*\omega) - j_0^*(\phi^*\omega) = \omega \tag{12.101}$$

を得る。したがって $d\omega = 0$ ならば $d\phi^*\omega = \phi^* d\omega = 0$ だから

$$\begin{aligned} d(K\phi^*\omega) &= Kd\phi^*\omega + dK\phi^*\omega + K\phi^* d\omega \\ &= \omega \end{aligned}$$

となる。Poincareの補題は R^n の領域 U で 1 点に可縮なものを考えると U 上の (p+1) 次微分形式 $\omega \in A^{p+1}(U)$ が

$d\omega = 0$ ならば $\omega = d\theta$ とかける。このような θ は次のような領域では具体的につくることができる。

もし、U が球上領域のように原点 0 を含み、全ての点 $x \in U$ に対して次の線分を含む時、この領域を**星型領域**という。

$$\{tx; 0 \leq t \leq 1\} \tag{12.102}$$

$\phi : I \times U \to U$ として

$$\phi(t, x) = tx \tag{12.103}$$

をとると

$$\omega = \frac{1}{(p+1)!} \sum a_{i_0 i_1 \cdots i_p}(x) dx^{i_0} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \tag{12.104}$$

とおけば変数 t,psi のヤコビアンをとると式 12.100 より $a(tx)$ として $xdx^{i_0} = x^{i_0} dt$ だから
p+1 形式を dt を含む項と含まない項に分離すると

$$\begin{aligned} \phi^*\omega = & \frac{1}{(p+1)!} \sum a_{i_0 i_1 \cdots i_p} \left(\frac{\partial x t^{p+1}}{\partial (x, t)} \right) dx^{i_0} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \\ = & \frac{1}{(p+1)!} \sum a_{i_0 i_1 \cdots i_p} t^{p+1} dx^{i_0} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \\ & + \frac{1}{p!} \sum a_{i_0 i_1 \cdots i_p} t^p x^{i_0} dt \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \end{aligned} \tag{12.105}$$

を得る。よって式 12.91、12.93 から式 12.105 の第 1 項には dt 項がないので

$$\begin{aligned} \theta &= K(\phi^*\omega) \\ &= \frac{1}{p!} \sum \left(\int_0^1 a_{i_1 i_2 \cdots i_p}(tx) t^p dt \right) x^{j_0} dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_p} \end{aligned}$$

とおけばよい。
この時

$$\omega = d\theta = \omega_1 + dt \wedge \omega_2$$

とおける。

12.9 余接空間

前節で多様体上で接空間を考える場合に式 10.15 で定義したように多様体の接ベクトルは多様体上の曲線の同値類と考えることができた。同様に多様体上で同値類を使って微分形式を定義してみよう。

n 次元多様体 M の点 x において M 上の連続微分関数 f_1, f_2 が同値であることは点 x の周りに座標近傍 (U, ϕ) を用いて

$$f_1 \sim f_2 \Longleftrightarrow d(f_1 \circ \phi^{-1})_{\phi(x)} = d(f_2 \circ \phi^{-1})_{\phi(x)}$$

の時である。実際に (U, ϕ) の近傍の代わりに (V, ψ) の座標近傍を考えると

$$d(f_1 \circ \psi^{-1})_{\psi(x)} = d(f_2 \circ \psi^{-1})_{\psi(x)}$$

が成り立つ。実際に

$$f_k \circ \phi^{-1} = f_k \circ \psi^{-1} \circ (\psi \circ \phi^{-1}) \ (k = 1, 2)$$

が成り立つから

$$\begin{aligned} d(f_1 \circ \phi^{-1})_{\phi(x)} &= d(f_1 \circ \psi^{-1} \circ (\psi \circ \phi^{-1}))_{\psi(x)} \\ &= (\psi \circ \phi^{-1})^* d(f_1 \circ \psi^{-1})_{\phi(x)} \\ &= (\psi \circ \phi^{-1})^* d(f_2 \circ \psi^{-1})_{\phi(x)} \\ &= d(f_2 \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ \phi^{-1}))_{\phi(x)} \\ &= d(f_2 \circ \psi^{-1})_{\psi(x)} \end{aligned}$$

となる。全微分 $d(f_1 \circ \phi^{-1})$ の $\phi(x)$ における値が、全微分 $d(f_2 \circ \psi^{-1})$ の $\psi(x)$ における値で決めることができる。

この同値類 $C^\infty(M)/\sim$ を x における M **の余接空間** (cotangent_space) という。

n 次元多様体 M の点 x における余接空間 T_x^*M は $C^\infty(M)$ の実ベクトル空間の構造をもった、n 次元ベクトル空間の構造を持つ。

これは点 x のまわりの座標近傍 $(U, \phi = (x_1, \cdots, x_n))$ をとることにより、前節の定義から

$$d(f \circ \phi)_{\phi(x)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\phi(x))(dx_i)_{\phi(x)}$$

ここで $[f] \in C^\infty(M)/\sim$ に対し、

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\phi(x)), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\phi(x)) \right) \in \mathbb{R}^n$$

を対応させることを考えると $f_1, f_2 \in C^\infty(M),\ a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ に対し、第 i 成分について

$$\frac{\partial(a_1 f_1 + a_2 f_2)}{\partial x_i}(\phi(x)) = a_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(\phi(x)) + a_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_i}(\phi(x))$$

とかけるので、これはベクトル空間に準同型であり、単射である。さらに

$$\mathbf{a} = (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$$

に対し、U 上の関数

$$f_a = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

をとる。sup の定義

$$\sup f = \overline{\{x \in M | f(x) \neq 0\}}$$

から U に台を持つ x の近傍で 1 である C^∞ 級の関数 ν をとり、νf_a を考えると U の補集合上では 0 であるように拡張して M 上の C^∞ 級関数として考えることができる。よって

$$d(v f_a)_{\phi(x)} = \sum_{i=1}^{n} a_i (dx_i)_{\phi(x)}$$

であるから全射でもある。

12.10　微分 1 形式

点 x の周りでの座標近傍 $(U, \phi = (x_1, \cdots, x_n))$ をとり、余接空間 T_x^*M の基底を $\{(dx_1)_x \cdots (dx_n)_x\}$ と書く。この時、点 x の近傍のもう一つの $(V, \psi = (y_1, \cdots, y_n))$ をとると基底の変換行列が

$$dy_i = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right)_{\phi(x)} dx_j$$

となり、これは変換関数である。しかしこれは微分 1 形式の引き戻しの定義の書き換え、

$$\left(\phi \circ \psi^{-1}\right)^* (dy_i)_{\psi(x)} = \sum \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right)_{\phi(x)} (dx_j)_{\phi(x)}$$

と同じである。全微分が引き戻しにより表現できることを表す。逆にこれは微分 1 形式を決めることができて、多様体 M の各点 x に余接空間 T_x^*M の元を各座標近傍 $(U, \phi = (x_1, \cdots, x_n))$ 上で dx_i の係数 f_i が C^∞ 級関数になるように $\sum_{i=1}^{n} f_i dx_i$ の形で決める対応が存在し、これを **M 上の C^∞ 級微分 1 形式**ということができる。

同じように全微分の定義として各座標近傍 $(U, \phi = (x_1, \cdots, x_n))$ 上で

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

を対応させると、これは M 上の C^∞ 級微分 1 形式であり、これを f の**全微分**という。

ユーグリッド空間上の微分 1 形式とベクトル場はともにベクトル座標をもつ関数とみなせる。しかし、**多様体上では次の例のように区別する必要があるので注意する。**

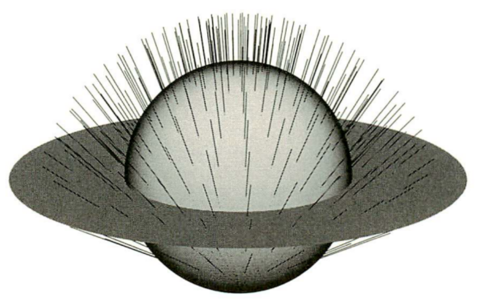

図 2.2　ステレオグラフ射影（問題 2.2.6 の $\pi_S : S^2 \setminus \{p_S\} \longrightarrow \boldsymbol{R}^2$）．$S$ からでる半直線の S^2 との交点に $\boldsymbol{R}^2$ との交点を対応させる．

図 12.12: [37] より

単位球面 $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ の点 $p_N = (0,0,1), p_S = (0,0,-1)$ から $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ への立体射影を

$$\pi_N : S^2/\{p_N\} \to \mathbb{R}^2,\ \ \pi_S : S^2/\{p_S\} \to \mathbb{R}^2$$

は次のようになる。

$$\pi_N(x_1, x_2, x_3) = (v_1, v_2) = \left(\frac{x_1}{1 - x_3}, \frac{x_2}{1 - x_3} \right)$$

$$\pi_S(x_1, x_2, x_3) = (u_1, u_2) = \left(\frac{x_1}{1 + x_3}, \frac{x_2}{1 + x_3} \right)$$

この逆像は単位球面上で

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$$

を満たすので、南半球、北半球の場合に

$$(x_1,x_2,x_3)=\left(\frac{2v_1}{1+v_1^2+v_2^2},\frac{2v_2}{1+v_1^2+v_2^2},-\frac{1-v_1^2-v_2^2}{1+v_1^2+v_2^2}\right)$$

$$(x_1,x_2,x_3)=\left(\frac{2u_1}{1+u_1^2+u_2^2},\frac{2u_2}{1+u_1^2+u_2^2},-\frac{1-u_1^2-u_2^2}{1+u_1^2+u_2^2}\right)$$

となる。

また、$\pi_N:S^2/\{p_N\},\pi_S:S^2/\{p_S\}$ が座標近傍にある時、座標変換は次のように求まる。

$$\begin{aligned}(u_1,u_2) &= \left(\frac{x_1}{1+x_3},\frac{x_2}{1+x_3}\right)=\left(\frac{v_1}{v_1^2+v_2^2},\frac{v_1}{v_1^2+v_2^2}\right)\\ (v_1,v_2) &= \left(\frac{x_1}{1-x_3},\frac{x_2}{1-x_3}\right)=\left(\frac{u_1}{u_1^2+u_2^2},\frac{u_2}{u_1^2+u_2^2}\right)\end{aligned}$$

これから $\mathbb{R}^2$ 上にベクトル場をつくることができて

$$\xi=P(v_1,v_2)\frac{\partial}{\partial v_1}+Q(v_1,v_2)\frac{\partial}{\partial v_2}$$

とする。このとき、$\left(\pi_N^{-1}\right)_*\xi$ が S^2 上で微分可能なベクトル場になるためには

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_1}{\partial v_1}\frac{\partial}{\partial u_1}+\frac{\partial u_1}{\partial v_1}\frac{\partial}{\partial u_1} &= \frac{\partial}{\partial v_1}\left(\frac{v_1}{v_1^2+v_2^2}\right)\frac{\partial}{\partial u_1}+\frac{\partial}{\partial v_2}\left(\frac{v_2}{v_1^2+v_2^2}\right)\frac{\partial}{\partial u_2}\\ &= \frac{-2v_1 2v_2}{\left(v_1^2+v_2^2\right)^2}\frac{\partial}{\partial u_1}+\frac{v_1^2-v_2^2}{\left(v_1^2+v_2^2\right)^2}\frac{\partial}{\partial u_2}\\ &= -2u_1 2u_2\frac{\partial}{\partial u_1}+\left(u_1^2-u_2^2\right)\frac{\partial}{\partial u_2}\end{aligned}$$

だから

$$\begin{aligned}\pi_{S*}\left(\pi_N^{-1}\right)_*\xi &= P\left(\frac{u_1}{u_1^2+u_2^2},\frac{u_2}{u_1^2+u_2^2}\right)\left(\left(u_1^2-u_2^2\right)\frac{\partial}{\partial u_1}-2u_1u_2\frac{\partial}{\partial u_2}\right)\\ &+ Q\left(\frac{u_1}{u_1^2+u_2^2},\frac{u_2}{u_1^2+u_2^2}\right)\left(-2u_1u_2\frac{\partial}{\partial u_1}+\left(u_1^2-u_2^2\right)\frac{\partial}{\partial u_2}\right)\end{aligned}$$

また、$\mathbb{R}^2$ 上の多項式係数の微分 1 形式

$$\alpha=P(v_1,v_2)dv_1+Q(v_1,v_2)dv_2$$

について、$\pi_N^*\alpha$ が S^2 の微分形式になるためには

12.11 外微分作用素 [37][12]

微分 1 形式の点 x における値は余接空間 T_x^*M にあった。これを拡張し、微分 p 形式の値はその p 次外積空間にある。そこで $dx_1\cdots dx_n$ を基底とする余接空間 T_x^*M の p 次外積空間は

$$1\le i_1<\cdots<i_p\le n$$

となる自然数 $i_1\cdots i_p$ に対応した

$$dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_p}$$

の全部で

$$\frac{n!}{p!(n-p)!} \tag{12.106}$$

個の記号を基底にとるベクトル空間を

$$\wedge^p T_x^* M$$

と書く。例えば 4 次元多様体 M の余接空間 $T_x^* M$ の 2 次外積の空間 $\wedge^2 T_x^* M$ は

$$dx_1 \wedge dx_2, dx_1 \wedge dx_3, dx_2 \wedge dx_3, dx_3 \wedge dx_4, dx_1 \wedge dx_4, dx_3 \wedge dx_4$$

を基底とする 6 次元ベクトル空間である。このように多様体の次元 n と微分形式の次数 p が式 12.106 によってベクトル空間の次元を決める。

外微分作用素を d_p であらわす。これは $\Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M)$ への写像で p 形式

$$\omega = \frac{1}{p!}\omega_{\mu_1 \cdots \mu_p} dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_r}$$

とすると、

$$d_p\omega = \frac{1}{p!}\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\omega_{\mu_1 \cdots \mu_p}\right) dx^\nu \wedge dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_r}$$

である。ここで 3 次元の場合

$$\begin{aligned}
\omega_0 &= f(x,y,z) \\
\omega_1 &= \omega_x(x,y,z)dx + \omega_y(x,y,z)dy + \omega_z(x,y,z)dz \\
\omega_2 &= \omega_{xy}(x,y,z)dx \wedge dy + \omega_{yz}(x,y,z)dy \wedge dz + \omega_{zx}(x,y,z)dz \wedge dx \\
\omega_3 &= \omega_{xyz}(x,y,z)dx \wedge dy \wedge dz
\end{aligned}$$

となる。**軸性ベクトル**を

$$\Omega^\mu = \epsilon^{\mu\nu\lambda}\omega_{\nu\lambda}$$

を用いると 2 形式はベクトルとみなすことができる。

さらにこれらに外微分演算子 d を作用させると、電磁気でよく用いられる grad,rot,diu が次のように導かれる。

$$\begin{aligned}
d\omega_0 &= \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial x}dy = \nabla f \cdot \mathbf{d^1} = grad\, f \\
d\omega_1 &= \left(\frac{\partial \omega_y}{\partial x} - \frac{\partial \omega_y}{\partial y}\right) dx \wedge dy + \left(\frac{\partial \omega_z}{\partial y} - \frac{\partial \omega_y}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial \omega_x}{\partial z} - \frac{\partial \omega_z}{\partial x}\right) dz \wedge dx \\
&= \mathbf{rot}\omega\mathbf{d^2} \\
d\omega_2 &= \left(\frac{\partial \omega_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \omega_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \omega_{xy}}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz \\
&= \mathbf{div}\omega\mathbf{d^3} \\
d\omega_3 &= 0
\end{aligned}$$

ただし、$\mathbf{d^3} = \mathbf{dx} \wedge \mathbf{dy} \wedge \mathbf{dz}$ は 4 次元目の方向を表す。

ベクトル場 $X = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$,$Y = Y^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \in V(M)$ と 1 形式 $\omega = \omega_\mu dx^\mu \in \Omega^1(M)$

を考えると

$$\begin{aligned}
d\omega(X,Y) &= d\omega_\mu dX \wedge dY = \frac{\partial \omega^\mu}{\partial x^\nu}\left(X^\nu Y^\mu - X^\mu Y^\nu\right) \\
&= X[\omega(Y)] - Y[\omega(X)] - \omega\left([X,Y]\right)
\end{aligned}$$

となる。一般に微分 p 形式の場合、ˆを除外として

$$\begin{aligned}
d\omega(X_1, \cdots X_{p+1}) &= \Sigma_{i=1}^p (-1)^{i+1} X_i \omega(X_1, \cdots \hat{X}_i, \cdots X_{p+1}) \\
&+ \Sigma_{i<j}(-1)^{i+j}\omega([X_i X_j], X_1, \cdots \hat{X}_i, \cdots \hat{X}_j \cdots X_{p+1})
\end{aligned}$$

で表さる。例えば $p=2$ とすると

$$
\begin{aligned}
d\omega(X_1, X_2, X_3) &= X_1\omega(X_2, X_3) - X_2\omega(X_1, X_3) \\
&- \omega([X_1, X_2], X_3)
\end{aligned}
$$

である。
これから重要な $d^2=0$ を導こう。まず、p 形式として

$$\omega = \frac{1}{p!}\omega_{\mu_1\cdots\mu_p}dx^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_p} \in \Omega^p(M)$$

とすると和記号を省略して

$$d\omega = \frac{1}{p!}\frac{\partial\omega_{\mu_1\cdots\mu_p}}{\partial x^\nu}dx^\nu \wedge dx^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_p}$$

となる。さらに

$$d^2\omega = \frac{1}{p!}\frac{\partial^2\omega_{\mu_1\cdots\mu_p}}{\partial x^\lambda \partial x^\nu}dx^\lambda \wedge dx^\nu \wedge dx^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_p}$$

となるが、項

$$\frac{\partial^2\omega_{\mu_1\cdots\mu_p}}{\partial x^\lambda \partial x^\nu}$$

は λ, ν の入れ替えに対称、

$$dx^\lambda \wedge dx^\nu$$

は λ, ν の入れ替えに反対称であるので
和をとれば 0 になる。よって一般に

$$d^2 = 0$$

になる。

12.12　具体例 [37]

多様体上の微分形式を具体的にみてみよう。
単位球面 $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ の点 $p_N = (0,0,1), p_S = (0,0,-1)$ から $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ へのステレオグラフ射影を次のように 2 つの極を除き

$$\pi_N : S^2/\{p_N\} \to \mathbb{R}^2, \pi_S : S^2/\{p_S\} \to \mathbb{R}^2$$

次で定義する。

$$\pi_N(x_1, x_2 x_3) = (v_1, v_2) = \left(\frac{x_1}{1-x_3}, \frac{x_2}{1-x_3}\right)$$

$$\pi_S(x_1, x_2 x_3) = (u_1, u_2) = \left(\frac{x_1}{1+x_3}, \frac{x_2}{1+x_3}\right)$$

12.12.1 トーラス上の微分形式 [37]

n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ 上の整数ベクトル全体のなす群 $\mathbb{Z}^n$ の平行移動による作用

$$\mathbb{Z}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

が

$$(\mathbf{n}, \mathbf{x}) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{n}$$

で与えられる。この作用の起動を同値類と考えて得られる商空間が n 次元トーラス T^n になる。

$$T^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$$

と書く。射影 $\pi : \mathbb{R}^n \to T^n$ において π が単射となるような $\mathbb{R}^n$ の開集合 U について

$$\pi(U) \subset T^n, \quad (\pi|U)^{-1} : \pi(U) \to U$$

として

$$\left(\pi(U), (\pi|U)^{-1}\right)$$

という座標をつくる。この新しい座標系の近傍で T^n の n 次元 C^∞ 級多様体の構造が得られることをみてみよう。

T^n 上の微分 p 形式は座標近傍 $\left(\pi(U), (\pi|U)^{-1}\right)$ 上で $\mathbb{R}^n$ の座標を使って

$$\alpha = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} f_{i_1 \cdots i_p}(\mathbf{x}) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$$

と書くことができる。この表現は次の共通部分で一致している。

$$\left(\pi(U), (\pi|U)^{-1}\right) \cap \left(\pi(V), (\pi|V)^{-1}\right)$$

また、$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ で定義され、$f_{i_1 \cdots i_p}(\mathbf{x})$ は $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^n$ に対して、次のような周期性を持つ

$$f_{i_1 \cdots i_p}(\mathbf{x} + \mathbf{n}) = f_{i_1 \cdots i_p}(\mathbf{x})$$

つまり、$\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{n}$ のトーラスの周期性を表す。

従って T^n 上の微分 p 形式 α は $\mathbb{R}^n$ 上の $\mathbb{Z}^n$ 周期の微分 p 形式となる。

例えば、定数係数の

$$\sum_{i_1 < \cdots < i_p} a_{i_1 \cdots i_p} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$$

は $\mathbb{Z}^n$ 周期だから T^n 上の微分 p 形式である。

13 ファイバー

ゲージ論や接続の幾何では多様体上にファイバーを考えることで自然に理解できる。そこでこのファイバーを理解するためにベクトル束を考えて発展させよう。

ファイバーは簡単には射影の逆である。射影するということは情報の消失を伴うのでファイバーは逆に次元を上げることになる。

13.1　ファイバー

n 次元多様体 M 上の点 p での接空間を T_pM で表し、その双対空間すなわち共変接空間を T_p^*M で表すと局所座標近傍 $U(x^1, x^2 \ldots)$ の両空間の基底が次のように表現できる。

$$T_pM : \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots \frac{\partial}{\partial x^n}\right)$$

$$T_p^*M : \left(dx^1, dx^2, \ldots, dx^n\right) \tag{13.1}$$

また接空間の全てを

$$TM = \cup_{p \in M} T_pM \tag{13.2}$$

とすると TM は $2n$ 次元の多様体となる。これを n 次元多様体上の接ベクトル束 TM という。また TM がその上に定義された多様体 M を底空間という。$\{U_i\}$ を M の開被覆とすると次の図のように

$$TU_i = \cup_{p \in M} T_pM \tag{13.3}$$

となる。

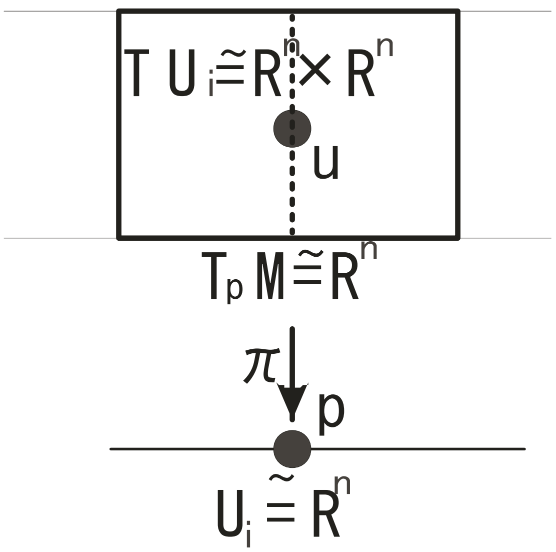

図 13.1: M を底にファイバーが作られる

TU_i の元は多様体上の点 p と接ベクトル

$$V = V^u(p)\frac{\partial}{\partial x^u}|_p \in T_pM$$

によって決まる。$\{U_i\}$ は R^n の開集合 $\phi_i(U_i)$ に同相で各 T_pM は R^n に同相なので図に示したように直積

$$TU_i \cong R^n \times R^n$$

とみなせる。つまりベクトル場の開集合の貼り合わせである。
そこで

$$u(p, V) \in TU_i$$

は局所座標で

$$u^\mu = (x^\mu(p), V^\mu(p))$$

と表すことができるので TU_i は 2n 次元微分可能多様体である。これから水平、垂直成分への射影 π が導かれる。

$$\pi : TU_i \to U_i$$

水平成分への射影は上図でみるように

$$\pi(u) = p \in U_i$$

であり、このとき、位相に関する情報は失われる。

また、射影演算子の逆が存在するとして

$$\pi^{-1}(p) = T_pM$$

が定義できて、この T_pM は p におけるファイバーと呼ばれる。

ではもう 1 つの成分である V はどう決まるだろうか。これを見るために次のような別の座標系への写像を考える

$$y^u = \phi(p) \in U_j \tag{13.4}$$

ただし、

$$p \in U_i \cap U_j \tag{13.5}$$

でありベクトル $V \in T_pM$ は次のように 2 つの表現ができる。

$$V = V^u(p)\frac{\partial}{\partial x^u}|_p = V'^u(p)\frac{\partial}{\partial y^u}|_p \in T_pM$$

これから

$$V'^\nu(p) = \frac{\partial y^\nu}{\partial x^u}V^u(p)$$

となる。そこで

$$\psi^\nu_\mu = \frac{\partial y^\nu}{\partial x^u} \tag{13.6}$$

とおくとこれは後節に示す変換関数であり、これは一般線形群の元となる。

$$\left\{\psi^\nu_\mu\right\} \in GL(n, R) \tag{13.7}$$

これを構造群といい。ファイバーにはこの群が加わるため、複雑な位相構造が入ることが可能になるのである。

一方で射影 π は大局的に作用する。

例えば接空間の要素である接ベクトル $X \in T_pM$ についての p の近傍の座標系 $\left\{x^i\right\}$ に対して

$$a^i = X(x^i) \ \ 1 \leq i \leq n$$

という n 個の実数成分が決まり、

$$X = \sum a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

とした時に次のような局所座標系を導入できる。

$$X(x^1(p), \dots x^n(p), a^1, \dots, a^n) \tag{13.8}$$

これによって具体的に運動量と位置といった物理空間を構築することができるようになる。

このような反変ベクトルがつくる接空間を T_pM や共変接空間を T_p^*M をベクトル束 (uector bundle) という。

多様体 M から M' の上への **1 対 1 の微分可能な写像** ψ **でその逆** ψ^{-1} **も微分可能である時** ψ **を微分同相写像** (diffenmorphism) という。この写像が存在すれば M と M' は**微分同相** (diffemorphic) であるという。

多様体上のベクトル束 V は一般に次の条件をみたすものをいう。

1.V も多様体である。

2.V から M への微分可能な写像 π が存在する。

3.$x \in M$ にたいし $V_x = \pi^{-1}(x)$ は一定次元のベクトル空間になる。これを x 上の**ファイバー** (fiber) という。

4.V は局所的に M とファイバーとの直積である。すなわち $x \in M$ に対し近傍 U があり、し $\pi^{-1}(U)$ と $U \times R^r$ の間に次の微分同相な写像が存在し、

$$\psi : \pi^{-1}(U) \longmapsto U \times R^r \tag{13.9}$$

次のようにベクトル空間 $\mathbb{R}^r$ と同型になる。

$$\psi(y) : V_y = \pi^{-1}(y) \longmapsto \{y\} \times R^r \approx \mathbb{R}^r \tag{13.10}$$

つまりファイバー束は直感的には局所的に 2 つの空間の直積で表される位相空間 T のことである。例えば次の図のように

$$T = L \times S_1 \tag{13.11}$$

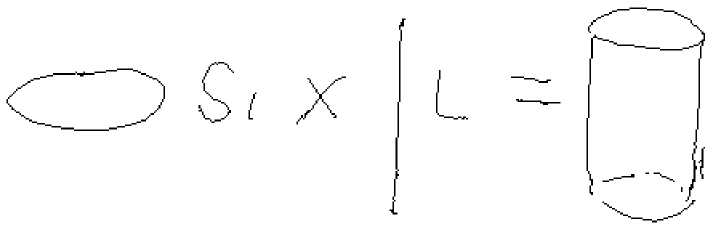

図 13.2: 円周と線の直積空間

によって円柱をつくることができるが、この円柱は大局的にも 2 つの空間の直積になる例で**自明な束** (trivial bundle) と呼ぶ。これに対し、メビウスの帯のような場合は局所的には直積だが大局的には自明な束ではない。

ファイバー束を決めるには後節で見るように**多様体** M **と変換関数** $\psi_{\alpha\beta}$、**ファイバー** F、**そして構造群** G が必要である。

13.2 接続

これにはまず多様体上に連続した曲線 $C(t)$ を考え、パラメタを変化させ、次のような接空間での比較を考える

$$T_{C(t=0)}M, \quad T_{C(t=t)}M$$

最も単純なベクトルバンドルはベクトル空間の自由度が 1 の時で

$$Dim[V] = 1$$

の時でこれは直線バンドルになる。

異なるファイバー間での微分は線形写像を $\Omega(t)$ として次のように書けると考える。

$$
\begin{aligned}
\nabla_t v &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \left(v(x(t+\varepsilon)) - \Omega(t+\varepsilon) v(x(0)) \right) \\
&= \frac{d}{dt} \left(v(x(t)) - \Omega(t) v(x(0)) \right)
\end{aligned}
$$

$\Omega(t)$ は連続的に**なめらかにつながる必要性から 1 形式である**必要がある。
これから**共変微分**が**接続係数**と共に次のように導ける。

$$
\nabla_\mu v^\alpha = \partial_\mu v^\alpha + A^\alpha_{\mu\beta} v^\beta \tag{13.12}
$$

これは同じ座標でも**ファイバー上の異なる位置への移動である**次の関係に対応する。$x \in M,\ v \in V$ として

$$
(x, v) \to (x, g(x)v) \tag{13.13}
$$

この $g(x)$ が接続の役割をし、ファイバー上を垂直移動させる。従って共変微分で変化しないので

$$
\nabla_\mu (g(x) v^\alpha) \to g(x) \nabla_\mu v^\alpha \tag{13.14}
$$

が成り立つ。これから式 13.12 の A_μ を次のように変化させても影響をうけなことがわかる。

$$
A_\mu \to g^{-1} A_\mu g - g^{-1} \partial_\mu g \tag{13.15}
$$

これは次のような一般的なゲージ変換に対応している。

$$
A^\mu \to U(x) A^\mu(x) U(x)^{-1} - \frac{i}{g} U(x) \partial^\mu U(x)^{-1} \tag{13.16}
$$

また A を行列での 1 形式

$$
A = A_\mu dx^\mu \tag{13.17}
$$

とおけば

$$
A \to g^{-1} A g - g^{-1} dg \tag{13.18}
$$

である。

13.3 変換関数

M の近傍系 U_α, U_β があると M はこの近傍系で覆われ各 $\pi^{-1}(U_\alpha)$ は $U_\alpha \times R^r$ と同型であり

$$
x \in U_\alpha \cap U_\beta \tag{13.19}
$$

に対しては次のように同型な写像が 2 つ存在する。

$$
\psi_\alpha(x) : E_x \longmapsto \mathbb{R}^r \tag{13.20}
$$

$$
\psi_\beta(x) : E_x \longmapsto \mathbb{R}^r \tag{13.21}
$$

従って

$$
\psi_{\alpha\beta}(x) = \psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1} : R^r \to R^r \tag{13.22}
$$

とおいて

$$\psi_{\alpha\beta}(x) : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(r:R) \tag{13.23}$$

を定義するとこの写像の族 $\{\psi_{\alpha\beta}\}$ は被覆 $\{U_\alpha\}$ に対する E の**変換関数** (transition function) という。変換関数は次の性質を持つ

$$\psi_{\alpha\beta} \circ \psi_{\beta\gamma} = \psi_{\alpha\gamma}(x);\ \ x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \tag{13.24}$$

$$\psi_{\alpha\alpha} = I_r \tag{13.25}$$

$$\psi_{\beta\alpha} = \psi_{\alpha\beta}^{-1} \tag{13.26}$$

これらは連結則と恒等写像、逆写像の存在を表す。

逆に 13.23 が与えられれば $\{\psi_{\alpha\beta}\}$ を変換関数に持つベクトル束 E が次のようにつくることができる。

直積ファイバーとして $U_\alpha \times R^r$ の直和として

$$\prod_\alpha U_\alpha \times R^r \tag{13.27}$$

を考え、この中の次の 2 つの要素をとると

$$(x, \xi) \in U_a \times R^r,\ \ (y, \eta) \in U_\beta \times R^r \tag{13.28}$$

同値関係があるとは

$$x = y,\ \ and\ \ \xi = \psi_{\alpha\beta}(x)\eta \tag{13.29}$$

が成り立つ時と考える。この同値関係によって $\prod_\alpha U_\alpha \times R^r$ からつくられる商空間が E である。

この時関数 $\psi_{\alpha\beta}(x)$ は $U_\alpha \times R^r$ と $U_\beta \times R^r$ との共通部分である $(U_\alpha \cap U_\beta) \times R^r$ ではり合わせる時の合わせ方を決める。

例えば $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ での接ベクトル X を次のように 2 つの局所座標系で表すと

$$X = \sum a^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum b^i \frac{\partial}{\partial y^i} \tag{13.30}$$

となるので

$$\psi_\alpha(X) = (a^1, a^2, \dots, a^n) \in R^n \tag{13.31}$$

$$\psi_\beta(X) = (b^1, b^2, \dots, b^n) \in R^n \tag{13.32}$$

として $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ を縦ベクトルとすると

$$\psi_{\alpha\beta}(p)\mathbf{b} = \psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{a} \tag{13.33}$$

が成り立つ。また、添え字を増やし和をとると

$$X = \sum a^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum b^i \frac{\partial}{\partial y^i} = \sum b^j \frac{\partial x^i}{\partial y^j}\frac{\partial}{\partial x^i} \tag{13.34}$$

ともかけるので

$$a^i = \sum_j b^j \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \tag{13.35}$$

となることから式 13.33 と比べると**接ベクトルの変換関数** $\psi_{\alpha\beta}$ は座標変換のヤコビアンそのものとみなせる。

$$\psi_{\alpha\beta}(p) = \frac{\partial x_\alpha^i}{\partial y_\beta^j} \tag{13.36}$$

同様に式 13.1 から共変ベクトルの作る**余接ベクトルは 1 形式** ω を用いて

$$\omega = \begin{cases} a_i^\alpha & (p)dx_\alpha^i \\ a_i^\beta & (p)dx_\beta^i \end{cases} \tag{13.37}$$

と 2 つの局所座標系 $\left\{x_\alpha^i\right\}, \left\{x_\beta^i\right\}$ で表すことができ、この時の変換関数は

$$\psi_{\alpha\beta}(p) = \frac{\partial x_\beta^i}{\partial y_\alpha^j} \tag{13.38}$$

である。

13.4 制限

V, W が $\mathbb{R}^n$ の開集合として

$$V \subset W$$

である時、包含写像

$$\iota : V \to W$$

についての W 上の微分 p 形式 α の引き戻し $\iota^*\alpha$ は α の V への**制限**と呼ばれ、

$$\alpha|V$$

のように書く。この意味は $m < n$ に対して、写像 $\iota : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ を

$$\iota(x_1, \cdots, x_m) = (x_1, \cdots, x_m, 0, \cdots, 0) \tag{13.39}$$

とする。$\mathbb{R}^n$ の微分形式

$$\alpha = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} f_{i_1 \cdots i_p} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$$

とすると、この引き戻しは

$$\iota^*\alpha = \sum_{i_1 < \cdots < i_p \leq m} f_{i_1 \cdots i_p} \circ \iota dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \tag{13.40}$$

のように制限されることである。
ただし、13.39 が $n > 0$ の成分は全て単位元につぶれている必要がある。
これを $\mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^n$ と見るとき $\iota^*\alpha$ は α の $\mathbb{R}^m$ への**制限**と呼ぶこともある。
また、逆に $m > n$ に対して、写像 $\pi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ を射影

$$\pi(x_1, \cdots, x_m) = (x_1, \cdots, x_n) \ \ (n < m)$$

で定義すると、$\mathbb{R}^m$ 上の微分 p 形式

$$\alpha = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} f_{i_1 \cdots i_p} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$$

に対して

$$\pi^*\alpha = \sum_{i_1<\cdots<i_n} f_{i_1\cdots i_p}\circ\pi dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_n} \tag{13.41}$$

である。$\pi^*\alpha$ は $dx_{n+1},\cdots,dx_m$ を含まない、つまり、$x_{n+1},\cdots x_m$ の方向には値が一定である。

13.5 直線ファイバー

前部では微分形式の引き戻しをみてきたが、特に次のような直線をファーバーにもつ空間は重要になる。n 次元ユークリッド空間の開集合を U とし、$n+1$ 次元ユークリッド空間の部分集合を

$$[0,1]\times U$$

上の微分 p 形式を

$$\alpha = \sum_{i_1<\cdots<i_p} f_{i_1\cdots i_p}dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_p}$$

とおく、すると $[0,1]\times U$ 上の微分 $p-1$ 形式は $i_1=0$ の場合のみの和で

$$I(\alpha) = \sum_{0<i_2<\cdots<i_p}\left(\int_0^{x_0} f_{0i_2\cdots i_p}dx_0\right)dx_{i_2}\wedge\cdots\wedge dx_{i_p} \tag{13.42}$$

とかける。この時、後に重要になる関係

$$dI(\alpha)+I(d\alpha) = \alpha-\alpha_0 \tag{13.43}$$

となることを見ておこう。ただし、

$$\alpha_0 = \sum_{i_1<\cdots<i_p} f_{i_1\cdots i_p}(0,x_1,\cdots x_n)dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_p}$$

である。まず、式 13.42 から合成関数と考えて

$$\begin{aligned} dI(\alpha) &= \sum_{i_1=0,i_2<\cdots<i_p} f_{i_1\cdots i_p}dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_p} \\ &+ \sum_{j=1}^{n}\sum_{0<i_2<\cdots<i_p}\left(\int_0^{x_0}\frac{\partial f_{0i_2\cdots i_p}}{\partial x_j}dx_0\right)dx_{i_j}\wedge\cdots\wedge dx_{i_p} \end{aligned}$$

となり、$j=0$ を分けると

$$\begin{aligned} I(d\alpha) &= I\left(\sum_{j=0}^{n}\sum_{i_1<\cdots<i_p}\frac{\partial f_{i_1\cdots i_p}}{\partial x_j}dx_j\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_p}\right) \\ &= I\left(\sum_{0<i_1<\cdots<i_p}\frac{\partial f_{0i_2\cdots i_p}}{\partial x_0}dx_j\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_p}\right. \\ &+ \left.\sum_{j=1}^{n}\sum_{0<i_2<\cdots<i_p}\frac{\partial f_{i_1\cdots i_p}}{\partial x_j}dx_j\wedge dx_0\wedge dx_{i_2}\wedge\cdots\wedge dx_{i_p}\right) \\ &= \sum_{0<i_1<\cdots<i_p}\left(\int_0^{x_0}\frac{\partial f_{0i_2\cdots i_p}}{\partial x_j}dx_0\right)dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_p} \\ &- \sum_{j=1}^{n}\sum_{0<i_2<\cdots<i_p}\left(\int_0^{x_0}\frac{\partial f_{0i_2\cdots i_p}}{\partial x_j}dx_0\right)dx_j\wedge dx_{i_2}\wedge\cdots\wedge dx_{i_p} \end{aligned}$$

ここで () は dx_0 以外は 0 になるので省略してある。

$$dI(\alpha)+I(d\alpha) = \sum_{i_1=0,i_2<\cdots<i_p} f_{i_1\cdots i_p}dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_p} + \sum_{0<i_1<\cdots<i_p}\left(\int_0^{x_0}\frac{\partial f_{0i_2\cdots i_p}}{\partial x_j}dx_0\right)dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_p}$$

であるが定積分の定義から

$$\int_0^{x_0}\frac{\partial f_{i_1\cdots i_p}}{\partial x_0} = f_{i_1\cdots i_p}(x_0,x_1,\cdots,x_n)-f_{i_1\cdots i_p}(0,x_1,\cdots,x_n)$$

よって $i_1\neq 0$ の和が加わり

$$\begin{aligned} dI(\alpha)+I(d\alpha) &= \sum_{i_1<\cdots<i_p} f_{i_1\cdots i_p}(x_0,x_1,\cdots,x_n)dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_p} - \sum_{0<i_1<\cdots<i_p} f_{i_1\cdots i_p}(0,x_1,\cdots,x_n)dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_p} \\ &= \alpha-\alpha_0 \end{aligned}$$

が成り立つ。注意すべきは α_0 は $[0,1]\times U$ 上の微分 p 形式で、値が x_0 方向に一定である。

そこで

$$\iota_0 : U\to[0,1]\times U,\ \ \pi:[0,1]\times U\to U$$

を直線的なファイバー

$$\iota_0(\mathbf{x})=(0,\mathbf{x}),\ \ \pi(x_0,\mathbf{x})=\mathbf{x}$$

で定義すると式 13.40 から $\alpha_0=\pi^*(\iota_0^*\alpha)$ となる。よって次が成り立つ。

n 次元ユークリッド空間の開集合 U に対し、$n+1$ 次元ユークリッド空間の部分集合 $\pi:[0,1]\times U$ を考える。$\pi:[0,1]\times U$ 上の微分 p 形式 α に対して次が成り立つ。

$$dI(\alpha)+I(d\alpha)=\alpha-\pi^*(\iota_0^*\alpha)$$

例えば $a\in[0,1]$ とすると

$$I_a(\alpha)=\sum_{0<i_2<\cdots<i_p}\left(\int_a^{x_0} f_{0i_2\cdots i_p}dx_0\right)dx_{i_2}\wedge\cdots\wedge dx_{i_p}$$

とすれば

$$\begin{aligned} dI(\alpha) = & \textstyle\sum_{i_1=0,i_2<\cdots<i_p} f_{i_1\cdots i_p}dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_p} \\ & + \textstyle\sum_{j=1}\sum_{0<i_2<\cdots<i_p}\left(\int_a^{x_0}\frac{\partial f_{0i_2\cdots i_p}}{\partial x_j}dx_0\right)dx_{i_j}\wedge\cdots\wedge dx_{i_p} \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned} I(d\alpha) &= I\left(\sum_{j=0}^{n}\sum_{i_1<\cdots<i_p}\frac{\partial f_{i_1\cdots i_p}}{\partial x_j}dx_j\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_p}\right) \\ &= I\left(\sum_{0<i_1<\cdots<i_p}\frac{\partial f_{0i_2\cdots i_p}}{\partial x_0}dx_j\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_p}\right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^{n}\sum_{0<i_2<\cdots<i_p}\frac{\partial f_{i_1\cdots i_p}}{\partial x_j}dx_j\wedge dx_0\wedge dx_{i_2}\wedge\cdots\wedge dx_{i_p}\right) \\ &= \sum_{0<i_1<\cdots<i_p}\left(\int_a^{x_0}\frac{\partial f_{0i_2\cdots i_p}}{\partial x_j}dx_0\right)dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_p} \\ &\quad - \sum_{j=1}^{n}\sum_{0<i_2<\cdots<i_p}\left(\int_a^{x_0}\frac{\partial f_{0i_2\cdots i_p}}{\partial x_j}dx_0\right)dx_j\wedge dx_{i_2}\wedge\cdots\wedge dx_{i_p} \end{aligned}$$

だから $\iota_a(\mathbf{x})=(a,\mathbf{x})$ とし、

$$dI_a(\alpha)+I_a(d\alpha)=\alpha-\pi^*(\iota_a^*\alpha)$$

である。

13.6 切断

力学では物体の運動が M 上の連続した直線で表すことができる。この時、ラグラジアン L は $q, \dot{q}$ の関数であるから接ベクトル束と見なせるし、運動量 p は $p_j = \partial L / \partial \dot{q}_j$ で定義されているので M 上の余接ベクトル束と考えることができる。よって同じ物体の運動でも (q^j, p_j) と表現された場合は余接ベクトル空間で表現され、これがハミルトン形式であり、$(q^j, \dot{q})$ で現された場合は接ベクトル空間で表現されラグランジュ形式となる。このような表現の違いは運動が常に双対した空間で観察することのできる射影であることを表す。まず、これらの表現の関係についてみてみよう。

運動を多様体上で見ると連続した曲線になるのでその運動と共に接点は移動し、従って接ベクトル空間も連続的に変化していく。

そこでこの連続的に変化したベクトル空間をまとめて扱う必要があり、ベクトル束という考えが登場したわけだ。

ベクトル束とは多様体 M の 1 つ点 x にベクトル空間 $E_x \approx R^r$ がついていると考えることができる。

ベクトル束は古典的な電気力線や流束のように流れを持った連続した表現であるがある物質を考える時には点としてみる必要がある。

そこで次の切断という考えが重要になる。通常では物体の位置は点と考えるが、ここではその点は物体の情報の一部分でしかなく、同じ点の情報を持つが、さらに異なる情報も物体を観測するときには存在していることになる。

この別の情報がどう並んでいるかを表すのがファイバーになる。

各ファイバー E_x から 1 つの元を選び出すことを切断 (section) という。つまり写像 $\sigma : M \to E$ の中で

$$\pi \circ \sigma(x) = x, \ x \in M \tag{13.44}$$

となるものが切断である。特に E_x の原点 0_x を対応させる切断をゼロ切断 (zero section) という。

簡単に M を図のように曲線で示すと点 p での接空間は図のような接線で表される。

この接線を各点で図のように垂直に並べるとこれがファイバー束のイメージである。

このファイバー束を全てを貫く線を引くと各ファイバーとの交点（例えば図の q 点) は M 上のベクトル場を定義することになる。

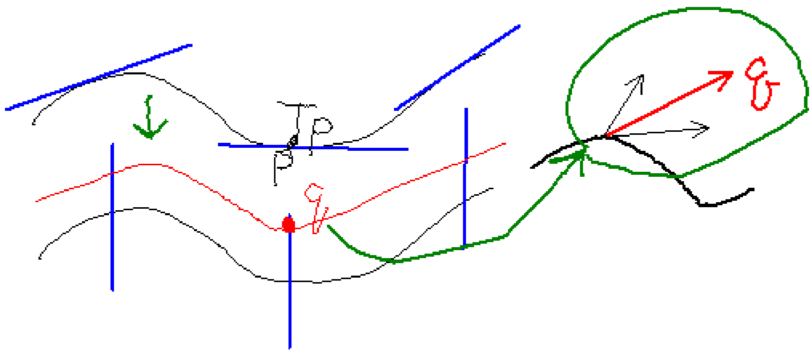

図 13.3: 赤線が断面を表す。各ファイバーとの交点がそのM上での点のベクトル場を決める。

またファイバーは束空間 (fiber space) と呼ばれる位相空間 E と底空間 (base space) と呼ばれる位相空間 X があり、E から X の上への射影として写像 π がある。

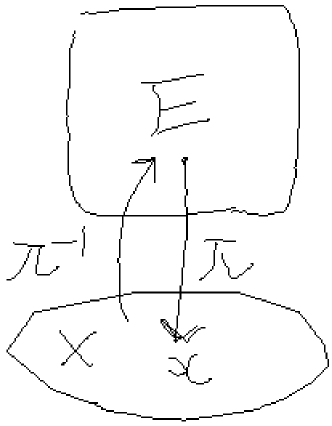

図 13.4: 束空間と底空間

ファイバー束 F を次のように決める。構造群 G と呼ばれる F と同相写像の群 G。さらに底空間 X の開被覆 $\{U_\alpha\}$ があり同相写像

$$\psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times F \tag{13.45}$$

$$\pi\psi_\alpha^{-1}(x,\, f) \to x \ \ x \in U_\alpha,\ f \in F \tag{13.46}$$

$U_\alpha \times F$ で局所的にはユークリッド平面にみなせる面がつくれるわけである。
この特徴を例えばメビウス帯で考えてみる。この場合図のように

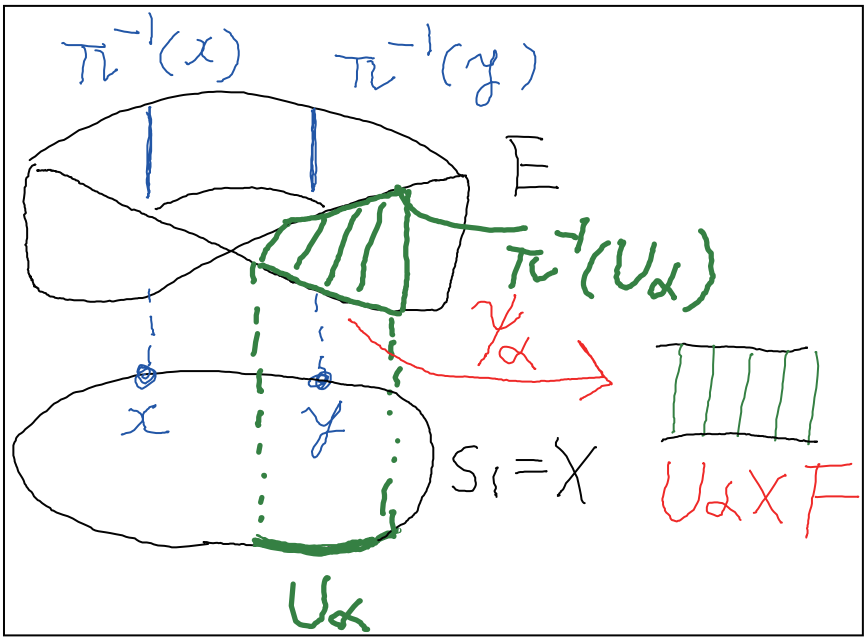

図 13.5: メビウスの帯に見るファイバー

- 束空間 E:メビウス帯
- 底空間 X : 円周 S^1
- ファイバー F : 線分

が対応している。図に見るようにメビウス帯は自明な束ではない。しかしいたるところで直積空間を局所的に定義できる。

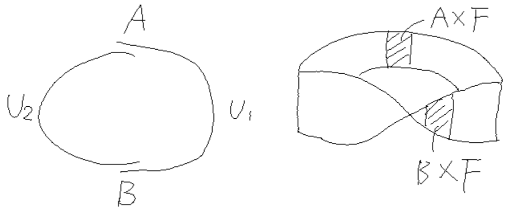

図 13.6: メビウスの帯に書けたことからが Lie 群であることを利用した構造群

次に構造群 G について見てみる。

次の図で見るように X の開被覆 U_1, U_2 をとる。

共通部分である $U_1 \cup U_2$ は互いに分離した 2 つの開弧 A, B からなる。

一方の局所座標系 (ψ_1, U_1) から他方の局所座標系 (ψ_2, U_2) への座標変換を考える。

この時、次の合成写像が存在し、連続で可逆である。

$$\psi_1 \circ \psi_2^{-1} :\ (U_1 \cup U_2) \times F \to (U_1 \cup U_2) \times F \tag{13.47}$$

ここで $x \in U_1 \cup U_2,\ f \in F$ として x を固定して f を変化させれば $(U_1 \cup U_2) \times F$ は単に F から F への写像とみなせる。

この写像を $g_{12}(x)$ として**書き換え関数** (trasition function) という。

この書き換え関数はファイバー F と同相写像である。

座標近傍系に対するこの写像は群をつくりこれを**構造群** G という。

図で領域 $A \times F$ はひねらずに貼り合わせ、領域 $B \times F$ は 1 回ひねって貼り合わせてある。

つまり g_{12} は g を反転として次のようにかける。

$$g_{12}(x) = \begin{cases} e & (x \in A) \\ g & (x \in B) \end{cases} \tag{13.48}$$

他に

$$g_{21} = g_{12}^{-1},\ \ g_{11} = g_{22} = e$$

であり、メビウスの帯の場合、次の 2 つの要素を構造群 G は持ち、これを整数群 Z_2 という。

$$G = \{e, g\}$$

n 次元多様体の M 上の接ベクトル束 TM は底空間が多様体 M であり、次のように接空間の集合と考えることができる。

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p M \tag{13.49}$$

この時射影 π は TM から M への写像である。

$$\pi : TM \to M,\ \ V \in T_p M \to p \tag{13.50}$$

底空間を覆う近傍系を $\{U_\alpha\}$ とおくと接ベクトル束 TM の局所的な群構造を指定するために定義式 13.9 で示したように

$$\psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \longmapsto U_\alpha \times \mathbb{R}^r \tag{13.51}$$

が必要になるわけである。

つまり**接ベクトル束** TM の場合の切断は**接ベクトル場**であり、**共変ベクトル束** T^*M の切断は **1 次微分形式** ω になる。

$$\omega = \sum f_i dx^i \tag{13.52}$$

と表すことができる。また E が直積ベクトル束

$$E:\, M \times \mathbb{R}^r$$

の時の切断

$$\sigma:\, M \to M \times \mathbb{R}^r$$

は

$$x \to (x, f(x)) \;\; f(x) \in \mathbb{R}^r$$

とかけるから切断 σ は $\mathbb{R}^r$ に値をとる関数 f

$$f:\, M \to \mathbb{R} \tag{13.53}$$

になる。特に $\mathbb{R}^r$ の基底である

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, \dots 0) \\ \vdots &= \vdots \\ e_r &= (0, 0, 0, \dots 1) \end{aligned}$$

に対応した $E = M \times \mathbb{R}^r$ の切断 $\{\sigma_r\}$ が得られるがこれらは全て M の各点で 1 次独立である。つまり $x \in M$ の各点で切断 $\{\sigma_r\}$ がファイバー $E_x = \pi^{-1}(x)$ の基底になっている。

逆に切断 $\{\sigma_r\}$ がファイバー $E_x = \pi^{-1}(x)$ の基底になっているならば E は直積ベクトル束 $M \times \mathbb{R}^r$ に同型である。

2 つのベクトル束 (E, π, M), (E', π', M) において E' が多様体で $\pi' = \pi|_{E'}$ とかけて $x \in M$ に対し、$\pi'^{-1}(x)$ が $\pi^{-1}(x)$ の部分ベクトル空間である時、E' を E の部分ベクトル束 (vector subbundle) という。この時、**商ベクトル束** (quotient vector bundle) が

$$E/E' \tag{13.54}$$

として定義できる。局所的に E の切断 $\{\sigma_r\}$ を $\{\sigma_1, \sigma_2 \dots \sigma_\beta\}$ が $\pi'^{-1}(x)E$ の変換関数は E' の変換関数を $\psi'_{\alpha\beta}$、E/E' の変換関数を $\psi''_{\alpha\beta}$ として次のように書き表すことができる。

$$\psi_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \psi'_{\alpha\beta} & * \\ 0 & \psi''_{\alpha\beta} \end{pmatrix} \tag{13.55}$$

13.7　局所自明化

一般にファイバー束の定義は多様体 M の特別な被覆 $\{U_i\}$ の選び型によらない。
全空間を E、F をファイバーとし、M を微分可能多様体とする。
底空間 M に U_i を選ぶと $\pi^{-1}(U_i)$ は直積 $U_i \times F$ に微分同相であり、この時、次の写像は微分同相である。

$$\phi^{-1} : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times F \tag{13.56}$$

そこでこの写像 ϕ_i を ϕ^{-1} が射影の逆像 $\pi^{-1}(U_i)$ を直積 $U_i \times F$ に写すのでこの像を一意に決めることから**局所自明化**と呼ぶことにする。[12]
ここで先に見たように $U_\alpha \cap U_\beta \neq 0$ であれば共通領域では 2 つの写像 ϕ_α, ϕ_β が存在する。そこで

$$\pi(u,p) = p \in U_\alpha \cap U_\beta \in M$$
$$f \in F$$

を満たすような点 u を選べば次が成り立つ。

$$\phi_\alpha^{-1}(u) = (p, f_\alpha);\ \ \phi_\beta^{-1}(u) = (p, f_\beta)$$
$$f_\alpha = \psi_{\alpha\beta} f_\beta$$

この時、f_α, f_β を結びつけるのが次の図に示すように変換関数 $\psi_{\alpha\beta}$ である。

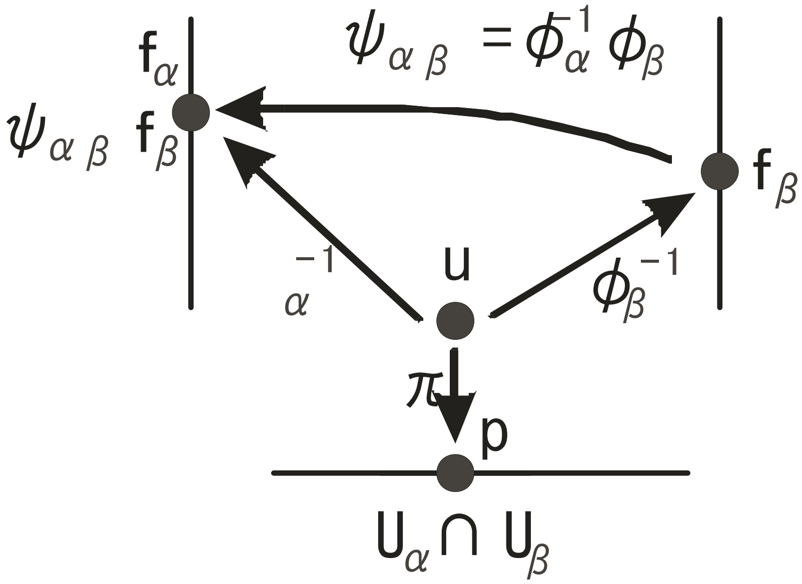

図 13.7: 共通領域上の点 p は異なるファイバーから射影される

全ての変換関数が恒等写像にとることができる場合、そのファイバー束が自明束 (triual bundle) である。
直積 $M \times F$ は自明束である。
ファイバー束 $E \underset{\longrightarrow}{\pi} M$ が与えられても変換関数の可能な集合は一意的ではない。
$\{U_i\}$ を M の被覆で $\{\phi_i\}, \{\phi_i'\}$ を同じファイバー束を与える局所自明化の 2 つの集合とし、それぞれの変換関数を

$$\psi_{\alpha\beta}(p) = \phi_{\alpha,p}^{-1} \circ \phi_{\beta,p}$$

$$\psi'_{\alpha\beta}(p) = \phi^{-1'}_{\alpha,p} \circ \phi'_{\beta,p}$$

とおく。点 $p \in M$ で写像 $g_i(p) : F \to F$ を構造群 G に属する同相写像として

$$g_\alpha(p) = \phi^{-1}_{\alpha,p} \circ \phi'_{\alpha,p}$$

で定義する。これから変換関数自身の変換が

$$\psi'_{\alpha\beta}(p) = g_\alpha(p)^{-1} \circ \psi_{\alpha\beta}(p) \circ g_\beta(p)$$

に従うことがわかる。後に見るように変換関数 $\psi_{\alpha\beta}(p)$ が局所座標の貼り合わせで必要となる。ゲージ変換に対応し、構造群の元 $g_\alpha(p)$ が $\{U_i\}$ の中でのゲージ自由度に対応する。

もし、ファーバー束が自明であれば

$$\psi_{\alpha\beta}(p) = g_\alpha(p)^{-1} \circ g_\beta(p) \tag{13.57}$$

であることがわかる。

13.8 同値関係

E をファイバー束とする。F はファイバーである。次のような X を定義する。

$$X = \bigcup_i U_i \times F$$

$$(p, f) \in U_\alpha \times F$$
$$(q, f') \in U_\beta \times F$$

このとき同値 $\sim$ になる条件として次の 2 つを課す。

$$p = q, \;\; f' = \psi_{\alpha\beta} f \;\; \to (p, f) = (q, f')$$

この条件は変換関数、微分条件をも含めているのでかなり厳しい条件である。この 2 つが成立するならば同値関係とみなし、

この時、ファイバー束が次のように定義される。

$$E = X/\sim$$

この束の射影が E の元 $\{(p, f)\}$ を用いて

$$\pi : \{(p, f)\} \to p$$

であり局所自明化として次の写像が式 13.56 から

$$\phi_i : U_i \times F \to \pi^{-1}(U_i)$$

が

$$\phi_i : (p, f) \to \{(p, f)\}$$

で与えられる。

2 つのファイバー E, E' が同値であるとは束写像が存在し、$\bar{f}: E' \to E$ が存在し、$f: M \to M$ が恒等写像で、$\bar{f}$ が微分同相になる場合をいう。

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{\bar{f}} & E \\ \downarrow_{\pi'} & & \downarrow_{\pi} \\ M & \xrightarrow{id_M} & M \end{array} \tag{13.58}$$

14 ベクトル束

ここでファイバー束の簡単な例を見ておこう。

ベクトル束を $E \xrightarrow{\pi} M$ は**ファイバーがベクトル空間になるファイバー束**である。ファイバー F を $\mathbb{R}^k$ とし、底空間 M を m 次元多様体とすれば全空間 E は $m+k$ 次元になる。しかしこの時の k をファイバーの次元といい $dimE = k$ で表す。変換関数はファイバーであるベクトル空間を同次元の別のベクトル空間に写すことになる。この変換関数は $GL(k, \mathbb{R})$ に属する。

例えば m 次元多様体 M の接束 TM はファイバーが $\mathbb{R}^m$ のベクトル束になる。そこで u を TM 上の点として M の被覆 $\{U_i\}$ に対して

$$\pi(u) = p \in U_i \cap U_j \tag{14.1}$$

を満たすとする。この時 U_i, U_j の座標系を

$$\begin{aligned} x^\mu &= \psi_i(p) \\ y^\mu &= \psi_j(p) \end{aligned}$$

で表す。に対応するベクトル V はどちらの座標系でも表現できて

$$V = V^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} |_p = \hat{V}^\mu \frac{\partial}{\partial y^\mu} |_p \tag{14.2}$$

となる。この時の局所自明化は式 13.56 から

$$\begin{aligned} \phi_i^{-1}(u) &= (p, \{V^\mu\}) \\ \phi_j^{-1}(u) &= \left(p, \{\hat{V}^\mu\}\right) \end{aligned}$$

となる。この異なるファイバー座標 $\{V^\mu\}, \{\hat{V}^\mu\}$ を結びつけるのが p 点での**接続**で

$$V^\mu = G^\mu_\nu(p) \hat{V}^\nu \tag{14.3}$$

$$\{G^\mu_\nu(p)\} = \left\{ \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\nu} |_p \right\} \in GL(m, \mathbb{R}) \tag{14.4}$$

という関係がある。$(TM, \pi, M, \mathbb{R}^m, GL(m, \mathbb{R})$ を**接束**という。TM の切断が M 上のベクトル場である。

例えば TS^2 の場合は

$$\begin{aligned} U_N &\equiv S^2 - SouthPole \\ U_S &\equiv S^2 - NorhtPole \end{aligned}$$

として S^2 の開被覆ができる。ここで $(X, Y), (U, V)$ をそれぞれの立体射影とすると

$$(X,Y) \equiv \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right)$$

$$(U,V) \equiv \left(\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z}\right)$$

これから

$$\begin{aligned} U &= \frac{X}{X^2+y^2} \\ V &= \frac{-Y}{X^2-Y^2} \end{aligned}$$

という関係があることがわかる。$u \in TS^2$ として

$$\pi(u) = p \in U_N \cap U_S$$

となるように u を選択すると局所自明化は 1 対 1 の関係を得るために

$$\begin{aligned} \phi_N^{-1}(u) &= (p, \{V_N^\mu\}) \\ \phi_S^{-1}(u) &= \left(p, \{\hat{V}_S^\mu\}\right) \end{aligned}$$

ととる。

$$\begin{aligned} X &= r\cos\theta \\ Y &= r\sin\theta \end{aligned}$$

とおくと変換関数は

$$\psi_{SN} = \frac{\partial(U,V)}{\partial(X,Y)} = \frac{1}{r^2}\begin{pmatrix} -\cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} \tag{14.5}$$

となり、これはスケール変換と 2θ の回転の合成である。
ベクトル束とは次の条件をみたすものだといえる。

1. **射影写像 π が存在**する。

   $$\pi : E \to M$$

   従って多様体上の各点 p においてこの逆写像がベクトル空間とみなせる。

   $$\pi^{-1}(p) \sim V$$

2. ベクトル束 E に適当な座標系の組であるアトラスを選ぶことができて x を開空間 U の座標、u をベクトル空間の要素として **u と x の座標系の間に関係式が存在**し、次のようにベクトル束が表すことができる。

   $$E; (x,v) \sim U_i \times V$$

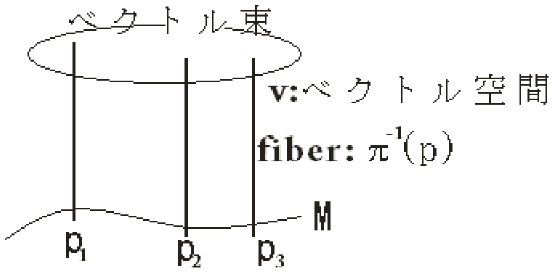

図 14.1: ベクトル束

図のように連続したベクトル空間を束ねたのがベクトル束である。従って異なるベクトル空間での関係をあきらかにしないと異なるベクトル空間上のベクトルの間に例えば微分関係などは定義できない。そこで次節であつかう接続という必要が生じる。

14.1 直線束

前節で直線ファイバーを見たが、ファイバーが 1 次元 $(F = \mathcal{R}, \mathcal{C})$ のベクトル束は**直線束**という。$S_1 \times \mathcal{R}$ は自明な $\mathcal{R}$ 直線束である。開メビウスの帯もまた直線束のうちの 1 つである。この構造群は $GL(1,\mathbb{R}) = \mathbb{R} - \{0\}, GL(1,\mathbb{C}) = \mathbb{C} - \{0\}$ で表すことができる。これらは可換群になる。

一般に**標準直線束** L とは複素射影 $\mathbb{C}P^n$ の元 p は $\mathbb{C}^{n+1}$ の原点を通る複素直線として表すことができた。

同様にベクトル束 L のファイバー $\pi^{-1}(p)$ は $\mathbb{C}^{n+1}$ において p が属する直線群になる。$I^{n+1} \equiv \mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}^{n+1}$ を $\mathbb{C}P^n$ 上の自明な束として

$$p \in \mathbb{C}P^n, v \in \mathbb{C}^{n+1}$$

に対して

$$L \equiv \{(p,v) \in I^{n+1} | v = ap,\ a \in \mathbb{C}\}$$

で定義され、射影は

$$(p,v) \underset{\longrightarrow}{\pi} p$$

となる。実際に物理学ではよく登場し、例えば非相対論的量子力学では波動関数 $\psi(\mathbf{x})$ はこの直線束 L の切断で表される。

第 7 部で扱うゲージ理論において磁気モノポールが原点にあれば $\psi(\mathbf{x})$ は $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ 上で定義され、複素直線束が $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ 上に定義できる。

14.2 零切断

s, s' をベクトル束 $E \underset{\longrightarrow}{\pi} M$ の切断とする。また、次のようにベクトル和とスカラー積が各点で定義されているとする。

$$(s + s^{'})(p) = s(p) + s^{'}(p)$$

$$(fs)(p) = f(p)f(s)$$

ただし、

$$p \in M,\ f \in \mathcal{F}(M)$$

とする。各、ファイバーの **0 ベクトルは** $GL(k,\mathbb{R}), GL(k,\mathbb{C})$ **の左作用に対しても不変**であるという重要な性質を持つ。

任意のベクトル束 E は自明化において

$$\phi_i^{-1}(s_0(p)) = (p, 0)$$

と取れる切断を零切断という。これは

$$s_0 \in \Gamma(M,E)$$

と表すことができ、大局的な切断を持つ。

例えば $\mathbb{C}P^n$ 上の標準的直線束を L とし、その切断を考えると。$\xi^\nu_{(\mu)}$ を U_μ 上の非斉次座標とすると U_μ 上の局所切断は

$$s_\mu = \left\{\xi^0_{(\mu)}, \cdots, 1, \cdots, \xi^n_{(\mu)}\right\} \in \mathbb{C}^{n+1}$$

とかける。この時、1 つの座標系から他の座標系への変換はスカラー倍となる。s^*_μ, L^* をそれぞれに対し双対をなすとして

$$\left(s^*_\mu\right) s_\mu = 1$$

を満たすようにとることができる。よって s^*_μ の変換は

$$s^*_\nu = \left(\frac{z^\nu}{z^\mu}\right) s^*_\mu$$

で与えられる。これによりファイバー計量 $h_{ij}(p)$ が各点できまる。$s, s^{'}$ の内積が p 点においてファイバーが $\mathbb{R}^k$ であれば

$$\left(s, s^{'}\right)_p = h_{ij}(p) s^i(p) s^{'j}(p)$$

で定義でき、ファイバーが $\mathbb{C}^k$ であれば

$$\left(s, s^{'}\right)_p = h_{ij}(p) \overline{s^i(p)} s^{'j}(p)$$

で定義できる。

14.3　フレーム

接束 TM 上えは、各ファイバーはチャート U_i 上の局所座ひょい右傾 x^μ による自然な基底 $\{\partial/\partial x^\mu\}$ を持つ。

M に計量が与えられれば直交基底 $\{\hat{e}_\alpha\}$ を選ぶこともできる。

これらの基底により、U_i 上に m 個の独立したベクトル場をつくることができる。

しかし、M 全体でベクトル場をつくれるかどうかは決まらない。

例えば基底ベクトルを μ 番目のみ 1 として、

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$$

あるいは計量が与えられていれば α 番目のみ 1 として、

$$\hat{e}_\alpha = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$$

をとることができる。これらの基底ベクトルから U_i 上のフレーム **(Frame)** を以下のように定義できる。

$\mathbb{R}^k$ または $\mathbb{C}^k$ 上のベクトル束を

$$E \xrightarrow{\pi} M$$

とし、$\pi^{-1}(U_i)$ は自明でファイバーは

$$\pi^{-1}(U_i) \simeq U_i \times \mathbb{R}^k$$

とする。

また、U_i 上で k 個の一次独立な切断 $\{e_1(p), \cdots e_k(p)\}$ を選ぶことができてフレーム F は次のスカラー値をつくるベクトル場 V^α により、

$$V = V^\alpha e_\alpha(p) \to \{V^\alpha\} \in F$$

自然な写像

$$F_p \to F(\mathbb{R}^k),\ or\ F_p \to F(\mathbb{C}^k)$$

で与えられる。この時、局所自明な写像

$$\phi^{-1}(V) = (p, \{V^\alpha(p))$$

が存在する。逆にこの ϕ_i は基底ベクトルを決める。

$$\phi_i\,(p, 0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0) = e_\alpha(p)$$

ここで異なるフレームがどう対応するか、前節の式 13.38 の変換関数 $\psi_{\alpha\beta}(p)$ との関係を見ておこう。
$U_i \cap U_j \neq \emptyset$ としてフレームの変換を考えると $p \in U_i \cap U_j$ の時、それぞれの基底を

$$U_i : \{e_1(p), \cdots e_k(p)\}$$

$$U_j : \{\tilde{e_1}(p), \cdots \tilde{e_k}(p)\}$$

とおく、この時 $G(p) \in GL(k, \mathbb{R})$ として $\tilde{e_\beta}(p)$ が (1,k) 型のベクトルであるから $G(p)^\alpha_\beta$ が (k,k) 行列として

$$\tilde{e_\beta}(p) = e_\alpha(p) G(p)^\alpha_\beta$$

のように右からかかることに注意すると、ベクトルの変換は

$$\tilde{V}^\beta = G^{-1}(p)^\beta_\alpha V^\alpha$$

で結ばれ、次のように不変なスカラー V が保たれる。

$$V = V^\alpha e_\alpha(p) = \tilde{V}^\alpha \tilde{e}_\alpha(p) = G^{-1}(p)^\beta_\alpha V^\alpha e_\alpha(p) G(p)^\alpha_\gamma = V G^{-1}(p)^\beta_\alpha G(p)^\alpha_\gamma = V$$

ただし、

$$G^{-1}(p)^\beta_\alpha G(p)^\alpha_\gamma = \delta^\beta_\gamma$$

である。従って先の変換関数 $\psi_{\alpha\beta}(p)$ との関係が

$$\psi_{\alpha\beta}(p) = G^{-1}(p)^\beta_\alpha$$

であることがわかる。

14.4 引き戻し束

ファイバー束 $E \underset{\rightarrow}{\pi} M$ をファイバー束 F を持つファイバー束とする。
写像 $f : N \to M$ を $f(p) = q$ が与えられると対 (E, f) は同じファイバー束を持つ N 上の新しいファイバー束を定める。
ここで引き戻しを f^*E を $N \times E$ の部分空間で $f(p) = \pi(u)$ を満たす点 (p, u) からなるものとする。

$$f^*E \equiv \{(p, u) \in N \times E|\ f(p) = \pi(u)\} \tag{14.6}$$

これを引き戻し束 (pullback_bundle) という。
この時、図のように f^*E のファイバー F_p は E のファイバー $F_{f(p)}$ のコピーである。

ここで次のように定義する。

$$\pi_1 : f^*E \to N; \quad \pi_1 : (p,u) \to p$$

$$\pi_2 : f^*E \to E; \quad \pi_2 : (p,u) \to u$$

この時、π_2 が束写像であることから前節の図と同様に

$$\pi(\pi_2(p,u)) = \pi(u) = f(p) = f(\pi_1(p,u))$$

が成り立つ。

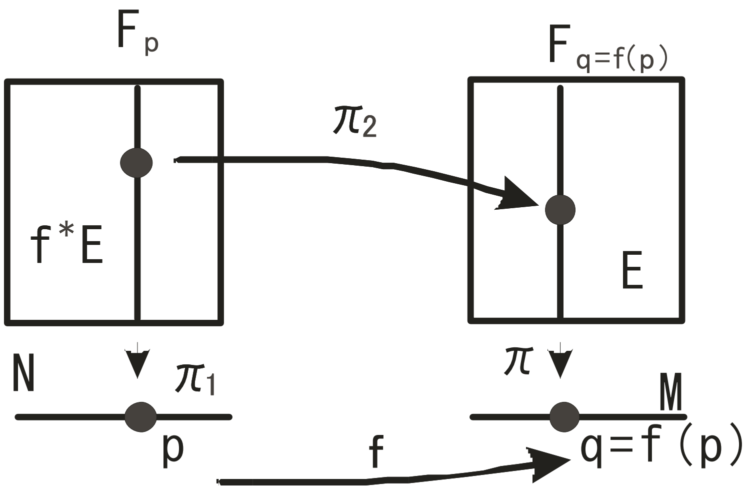

図 14.2: ファイバー束 $E \underset{\to}{\pi} M$ が与えられると $f : N \to M$ は N 上の引き戻し束 f^*E を定める。

よってこの時、次のような図式が成り立つ。

$$\begin{array}{ccc} f^*E & \xrightarrow{\pi_2} & E \\ \downarrow_{\pi_1} & & \downarrow_{\pi} \\ N & \xrightarrow{f} & M \end{array} \tag{14.7}$$

$$\begin{array}{ccc} (p,u) & \xrightarrow{\pi_2} & u \\ \downarrow_{\pi_1} & & \downarrow_{\pi} \\ p & \xrightarrow{f} & f(p) \end{array} \tag{14.8}$$

特に $N = M$ で $f = id_M$ の恒等写像であれば 2 つのファイバー束は同値である。

$$f^*E = E$$

この節のまとめとして $\{U_i\}, \{U_j\}$ を多様体 M の開被覆とし、$\{\phi_i\}\{\phi_j\}$ を局所自明化とする。すると $\{f^{-1}(U_i)\}$ は f^*E が局所自明化となるような N の開被覆をつくることになる。さらに $p \in N$ に対して

$$\pi(u) = f(p) \in U_i$$

となるような $u \in E$ をとる。また $\{U_i\}, \{U_j\}$ は共通部分を持ち、同じファイバーの $\{U_i\}, \{U_j\}$ 上の元を $F_i, F_j \in F$ とする。もし、

$$\phi_i^{-1}(f(p), u) = (f(p), F_i)$$

ならば ϕ_i' を f^*E の局所自明化とすれば

$$\phi_i'^{-1}(p,u) = (p, F_i) \tag{14.9}$$

となるので E 上の点 $f(p)$ について $f(p) \in U_i \cap U_j$ における変換関数 ψ_{ij} により各元 F_i, F_j について

$$f_i = \psi_{ij}(f(p))F_j$$

が成り立つ。また f^*E 上の点 p についても $p \in f^{-1}(U_i) \cap f^{-1}(U_j)$ であり、この変換関数を ψ_{ij}^* とすると、次の図のように

$$f_i = \psi_{ij}(p)F_j$$

が成り立つので

$$\psi_{ij}^*(p) = \psi_{ij}(f(p))$$

という関係が成立している。

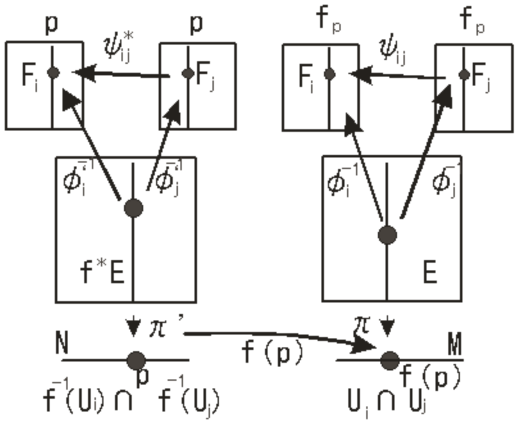

図 14.3: ファイバーと変換関数の変換

14.5 余接束と双対束

余接束は $T^*M \equiv \bigcup_{p\in M} T_p^*M$ で定義される。座標 x^μ がチャート U_i 上で T_p^*M の基底は

$$\{dx^1, dx^2, \cdots dx^m\}$$

で表されこれは

$$\{\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_1, \cdots \partial/\partial x_m\}$$

に双対である。そこで y^μ を $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ であるような U_j の座標として $p \in U_i \cap U_j$ に対して変換

$$dy^\mu = dx^\nu \left(\frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu}\right)_p \tag{14.10}$$

を得る。1 形式 ω はそれぞれの座標系において

$$\omega = \omega_\mu dx^\mu = \tilde{\omega}_\mu dy^\mu$$

が求まる。ここで

$$G^{\nu}_{\mu}(p) \equiv \left(\frac{\partial x^{\nu}}{\partial y^{\mu}}\right)_p = t_{ij}(p) \tag{14.11}$$

とすれば G は変換関数そのものである。このとき接続は

$$\Gamma(M, T^*M) = \Omega^1(M)$$

である。一般に双対束

$$E^* \underset{\rightarrow}{\pi} M$$

はファイバー F から $\mathcal{R}$ への線形写像の全体の集合である。

基底 $\{e_n(p)\}$ に双対な基底 $\{\theta_n(p)\}$ は内積

$$\langle e^{\alpha}(p), \theta_{\beta}(p)\rangle = \delta^{\alpha}_{\beta}$$

により定義できる。

15 主束

15.1 主束

主束 (principal bandles) は構造群 G と同一のファイバー F を持つ。これから M 上の G 束と呼ばれることもある。

$$P \to M\,; P(M, G)$$

変換関数はファイバーに左から作用した。

ここで G のファーバー F への右からの作用を $u \in \pi^{-1}(U_i), p = \pi(u)$ に対して

$$\phi_i : U_i \times G \to \pi^{-1}(U_i)$$

は局所自明化で

$$\phi_i^{-1}(u) = (p, g_i)$$

$\pi^{-1}(U_i)$ への右作用が

$$\phi_i^{-1}(ua) = (p, g_i a)$$

となり、これは図のような垂直移動をファイバー空間上で表している。

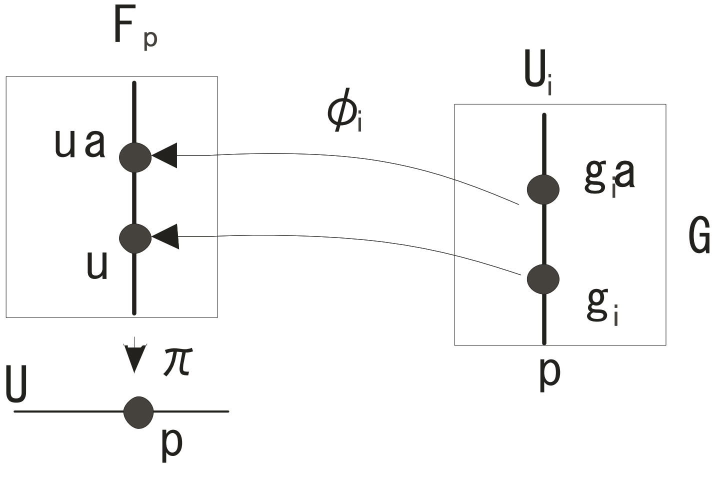

図 15.1: ϕ は $U \times G$ を $\pi^{-1}(U_i)$ に写す

また、$p \in U_i \cap U_j$ であれば変換関数 $\psi_{\alpha\beta}$ によって

$$ua = \phi_j(p, g_j a) = \phi_j(p, \psi_{ji}(p) g_i a) = \phi_i(p, g_i a) \tag{15.1}$$

である。また

$$ua = u$$
$$u = \phi_i(p, g_i)$$

であれば

$$\phi_i(p, g_i a) = \phi_i(p, g_i) a = ua = u = \phi_i(p, g_i)$$

であるから ϕ_i は全単射なので a は単位元 e でないといけない。すなわち

$$a = e$$

この時切断 $\sigma_i(p)$ は次のように表される。

$$\sigma_i(p) = \phi_i(p, e)$$

またこの時、次の関係が成り立つ。

$$\phi_i(p, g) = \phi_i(p, e) g = \sigma_i(p) g$$

$$\sigma_i(p) = \phi_i(p, e) = \phi_j(p, \psi_{ji}(p) e) = \sigma_j(p) \psi_{ji}(p)$$

15.2 束写像

ファイバー束 $E \underset{\longrightarrow}{\pi} M$ と $E' \underset{\longrightarrow}{\pi'} M'$ がある時、なめらかな写像 $\bar{f} : E' \to E$ が束写像であるとは E' の各ファイバー F'_p を E の各ファイバー F_q に写すもののことである。この時写像 $\bar{f}$ は自然になめらかな写像 $f : M' \to M$ を $f(p) = q$ を満たすものを誘導する。

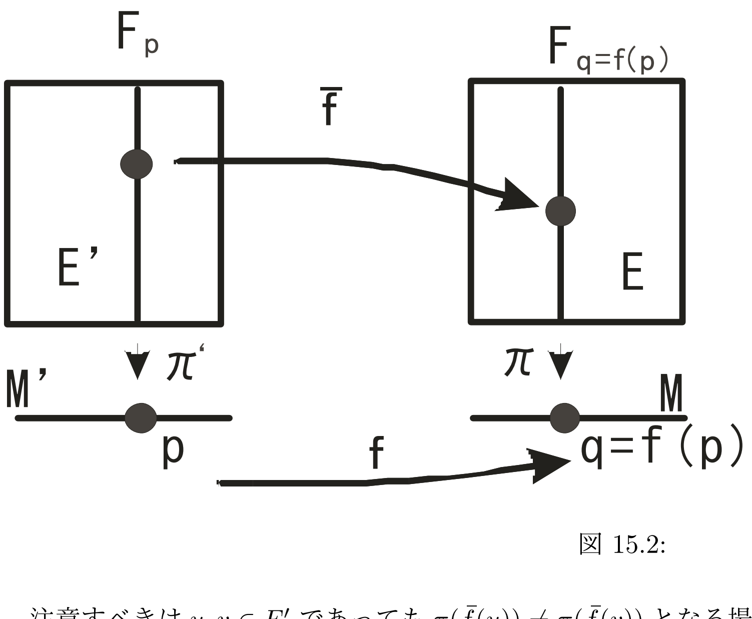

図 15.2:

注意すべきは $u, v \in F'_p$ であっても $\pi(\bar{f}(u)) \neq \pi(\bar{f}(v))$ となる場合は束写像ではないことである。

束写像が成り立つ時、次の図式が可換になる。

$$\begin{array}{ccc} E' & \overset{\bar{f}}{\rightarrow} & E \\ \downarrow_{\pi'} & & \downarrow_{\pi} \\ M' & \overset{f}{\rightarrow} & M \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} u & \overset{\bar{f}}{\rightarrow} & \bar{f}(u) \\ \downarrow_{\pi'} & & \downarrow_{\pi} \\ p & \overset{f}{\rightarrow} & q \end{array}$$

15.3　具体例

ここで具体的な例で見てみよう。

P をファイバー $U(1) = S^1$ を持つ主束とする。底空間は S^2 にとる。この主束は次に見るモノポールを表現している。

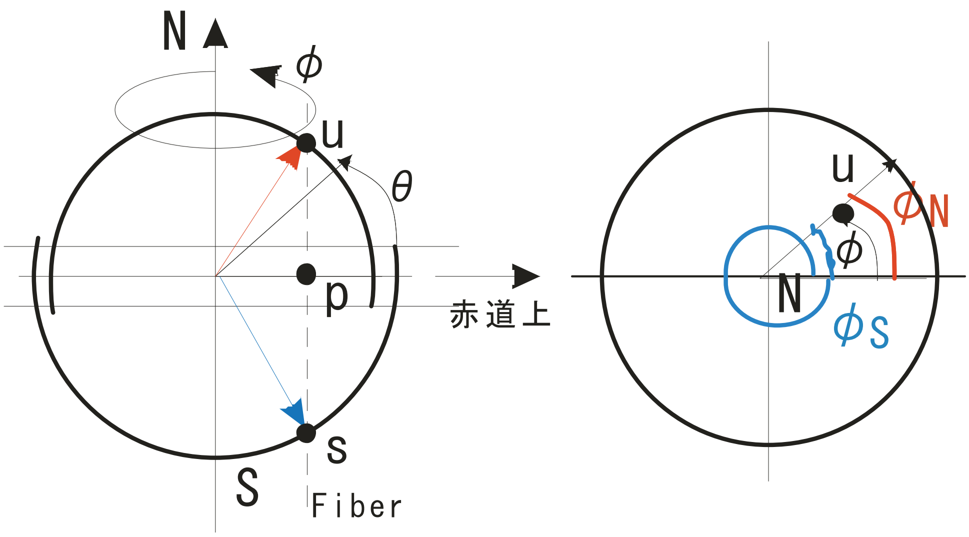

図 15.3: 左図は軸側からみた領域、右図は北極側からみたもの

上図のように $\{U_N, U_S\}$ を S^2 の北、南極側の開被覆とする。極座標を用いて ϵ を微小な正の数として次のように球面を覆う

$$U_N = \{(\theta, \phi)|0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} + \epsilon,\ \ 0 \le \eta < 2\pi\}$$

$$U_S = \{(\theta, \phi)|\frac{\pi}{2} - \epsilon \le \theta \le \pi + \epsilon,\ \ 0 \le \eta < 2\pi\} \tag{15.2}$$

この時、$U_N \cap U_S$ は赤道部分である。ここで $p = \pi(u)$ として局所自明化で $\phi(u)$ を導入し、次のような変数の組でおく。

$$\phi_N^{-1}(u) = (p, \exp(i\phi_N))$$

$$\phi_S^{-1}(u) = (p, \exp(i\phi_S)) \tag{15.3}$$

それぞれは同じファイバー上の u を持ち、底空間の p に射影するが位相が異なり、これによって北極側の被覆と南極側の被覆に対応している。赤道上では共通部分になるので変換関数が存在し、これを ψ_{NS} とすると ψ_{NS} は赤道 S^1 を U^1 に写す関数でないといけない。これは次のように書ける。

$$\exp(i\phi_N) = \psi_{NS} \exp(i\phi_S)$$

またホモトピーからすると S^1 は 1 点に縮めることができないので

$$\pi_1(S_1, x) = \mathbb{Z}$$

となり、整数 $\mathbb{Z}$ に分類される。従って、整数 n がに対応した変換関数は次のようになる。

$$\psi_{NS} = \exp(in\phi)$$

よって図右のようにファイバー座標 ϕ_N, ϕ_S の間の位相変換が次のように決まる。

$$\exp(i\phi_N) = \exp(in\phi) \exp(i\phi_S) = \exp(i(n + \phi_S))$$

もし $n = 0$ であれば変換関数は $U(1)$ の単位元であり、自明束 $P = S^2 \times S^1$ が得られる。しかし $n \neq 0$ の場合は $U(1)$ 束 P は捻れていることになる。

$U(1)$ は可換なので右、左作用も同じ結果が得られ右作用を $g = e^{i\lambda}$ とすると

$$\phi_N^{-1}(ug) = (p, \exp(i\phi_N + \lambda))$$

$$\phi_S^{-1}(ug) = (p, \exp(i\phi_S + \lambda))$$

が得られ右作用は U(1) ゲージ変換に対応している。

15.4 同伴束

主束 $P(M, G)$ が与えられると次のように同伴ファイバ-を定義できる。

G が多様体 M に左から作用するとして $g \in G$ の $P \times F$ への作用を

$$(u, f) \to (ug, g^{-1}f) \;\; u \in P,\; f \in F \tag{15.4}$$

と定義する。この時同伴ファイバ束は (E, π, M, G, F, P) は 2 点 $(u, f), (ug, g^{-1}f)$ を同一視した商空間

$$P \times F/G \tag{15.5}$$

で定義される。

例えばファイバ F が k 次元ベクトル空間 v である場合、ρ を G の k 次元表現とすると 2 点 $(u, v), (ug, \rho^{-1}v)$ を同一視した商空間

で定義されるので M 上のファイバ R^k のベクトル束は $P(M, GL(k, R^k))$ に同伴する。同伴束 $E = P \times_\rho V$ の構造は射影

$$\begin{aligned} \pi_E : E &\to M \;\; : dimE = k \\ \pi_E(u, v) &\to \pi(u) \\ \pi(ug) &\to \pi(u) \end{aligned}$$

これから

$$\pi_E(ug, \rho(g)^{-1}v) = \pi_E(ug) = \pi_E(u, v)$$

とみなせる。また、局所自明化が

$$\phi_i : U_i \times V \to \pi_E^{-1}(U_i)$$

で与えられると変換関数も

$$\rho(\psi_{ij})$$

で与えられる。

また逆にベクトル束が与えられるとそれに同伴する主束が自然に誘導できる。例えば $E \underset{\to}{\pi} M$ を k 次元のベクトル束とすると

$$P(E) \equiv P(M, G) \tag{15.6}$$

となる主束 P が同じ変換則を用いて導ける。この時の構造群 G は $GL(k,R) or GL(k,C)$ になる。

主束 P 上では点があるファイバーから別なファイバーに写る。G はリー代数を満たすとして

$$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(G)$$

の要素 A に対してベクトル場 X とすると

$$\left[X^A, X^B\right] = X^{[A,B]}, \forall A, B \in \mathcal{L}(G)$$

主ファイバー束は E が M 上のベクトル束でそのファイバーが $\mathbf{R}^r$ とする。局所的に 1 つの標構 $\{e_1 \cdots e_r\}$ を選び接続を考えてきた。

しかし E の標構を全て同時に考えると主ファイバー束 P がつくられる。

まず、ベクトル束 E から主ファイバー束 P をつくる。点 $x \in M$ を固定し、x でのファイバー E_x のベース $\{e_1 \cdots e_r\}$ を全部考え、その集合を P_x とおく、$\mathbf{R}^r$ のベースを

$$\begin{aligned}
B &= \{b_1, b_2, \cdots b_r\} \\
b_1 &= (1, 0, \cdots 0) \\
b_2 &= (0, 1, \cdots 0) \\
&\vdots \\
b_r &= (0, 0, \cdots 1)
\end{aligned}$$

とすると x でのファイバー E_x のベース $\{e_1 \cdots e_r\}$ を選ぶことは同型写像

$$u : \mathbf{R} \to E_x$$

において $u(b_r) = e_\lambda$ となるように選ぶことと同じである。これから P_x は同型写像の全体と考え、

$$P_x = \{u : \mathbf{R}^r \to E_x ; \text{同型写像}\}$$

とおける。1 つの E_x の基を決めればあとは線形変換で全ての基が得られるから P_x は群 $GL(r;\mathbf{R})$ と 1 対 1 の対応を持つ。

しかし、1 つの基を選ぶことで対応付けされるので自然な対応ではなく、P_x に自然な群構造が入るわけではない。

逆に主ファイバー束 P とその構造群 G の表現

$$\rho : G \to GL(r;\mathbf{R})$$

が与えられると $\mathbf{R}^r$ をファイバーとするベクトル束 E が商空間を $(P \times \mathbf{R}^r)/G = P \times_\rho \mathbf{R}^r$ とかくことにすると

$$E = P \times_\rho \mathbf{R}^r$$

で定義できる。これの意味は群 G を次の $P \times \mathbf{R}^r$ に

$$s : (u, y) \to (us, \rho(s)^{-1} y)$$

で対応させる。ただし

$$s \in G, \ \ (u, y) \in E = P \times \mathbf{R}^r$$

これは $P \times G$ において (u, y) と $(us, us, \rho(s)^{-1} y)$ を同一視することになる。すると P を局所的に $U \times G$ としたとき、写像

$$U \times \mathbf{R}^r \to U \times G \times \mathbf{R}^r, \ \ (x, y) \to (u, 1_G, y)$$

が 1 対 1 の対応

$$U \times \mathbf{R}^r \to (U \times G) \times_\rho \mathbf{R}^r$$

を引きおこすことに対応している。この関係は一般化できる。例えば

$$\rho : GL(r; \mathbf{R}) \to GL(r; \mathbf{R})$$

を恒等写像とすれば元のベクトル束 E が得られるし

$$\rho : GL(r; \mathbf{R}) \to GL(N; \mathbf{R})$$

とすればベクトル束 $P \times \mathbf{R}^r$ が得られ、

$$\rho(s) =^t s^{-1}$$

とすると双対ベクトル束 E^* が得られる。このように P から G の表現 ρ によってつくられるベクトル束は第 4 部でみたように P に同伴するベクトル束といった。

Lie 群 G と H を閉じた Lie 部分群であるとすると商空間 G/H に射影

$$\pi : G \to G/H$$

を定義して商位相を入れる。このとき G の単位元 e の近傍 U 内の部分多様体を S とすると

$$e \in S$$

であり、S は部分多様体 $H \subset G$ と e で横断的に交わるので次のように分解できる。

$$T_e G = T_e S \oplus T_e H$$

この時、G/H には π が微分可能な写像であり、G は主ファイバーになり G/H を底とし、H が構造群になる。自然に多様体の構造が入る。そこで前節の結果から例えば

Lie 群 G は主束 P の構造群であり、g は Lie 環であるので多様体の構造が入る。この時、

主ファイバー束 P 上の g 値 1 次微分形式 ω は 2 つの作用を持つ。1 つは G の P に対する作用でもう一つが g の作用である。

元 $a \in G$ による P の変換 $u \to ua$ を右作用 $R_a : P \to P$ と表すと $da = 0$ から

$$\begin{aligned}
R_a^* \omega &= a^{-1} s^{-1} \omega s a + a^{-1} s^{-1} d\,(sa) \\
&= a^{-1} s^{-1} \omega s a + a^{-1} s^{-1} s da + a^{-1} s^{-1} ds\, a \\
&= a^{-1} \left(\omega + s^{-1} ds \right) a \\
&= a^{-1} \omega' a
\end{aligned}$$

であり、同じように

$$R_a^*\theta = a^{-1}\theta a$$

となる。

次に $A \in g$ をとる。前節でみたように 1 パラメタ変数部分群 e^{tA} の作用が P 上にベクトル場 A^* を引き起こす。

このとき接続 ω の 2 つめの性質として、次の関係が成り立つ。

$$\omega(A^*) = A$$

これは次のように示すことができる。A^* はファイバーに沿ったベクトル場であったので U_α 上の微分形式が ω_α だから

$$s_\alpha^{-1}\omega_\alpha\left(A^*\right)s_a = 0$$

となる。

16 Hopf_fibration[12],[40],[47]

前節で fiber が射影と逆のイメージのようにとらえてきた。これをうまくつかうと多次元をイメージする道具に使える。

その 1 つの例が Hopf_fibration である。fiber は繊維と一般に訳される。線が点に射影されるのは直線的な棒を立て、真上からみることに対応するが、fibration はその逆になる。点としてみたいたことが 1 つ次元の上の世界からみると線として見えることになる。物理学は変化を扱う。点の変化がどう線の変化に絡んでいくのか Hopf_fibration はこの問題に大きな指針を与える。

16.1 SU(2)

SU(2) は微分写像で単位 4 元数の埋め込まれた $M_2(\mathbb{C})$ 多様体から S^3 への写像をつくる。$\mathbb{C}^2$ 上の $SU(2)$ は Lie 代数により、自然な作用を $\mathbb{R}^3$ 上に展開することができる。つまり、

$$Lie(SU(2)) = \mathfrak{su}_2 = span_R\{i\sigma_1, i\sigma_2, i\sigma_3\}$$

パウリ行列 σ_i は $\mathfrak{su}2$ の基底で

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

であり、スピンの章で見たようにこれらは次の交換関係をみたした。

$$[\sigma_i, \sigma_j] = \Sigma_k c_{ij}^k \sigma_k$$

また、

$$\sigma_j^2 = I_2$$

$$i\sigma_i \cdot \sigma_j = \sigma_k$$

となり、通常のベクトルのように直交していれば内積が 0 になるわけでなく、のこりの基底がでてくる。

これらの基底を用いれば任意の $X \in \mathfrak{su}_2$ として

$$X = -\frac{i}{2}\alpha\mathbf{n}\cdot\sigma,\ \alpha \in \mathbb{R}, \mathbf{n} \in S^2$$

と表すことができる。。このとき、$\mathbf{n}$ ベクトルについて内積は

$$\mathbf{n}\cdot\vec{\sigma} = \sum_{i=1}^{3} n_i\sigma_i$$

で定義される。1 パラメタの $SU(2)$ の部分空間は X が行列であることに注意し、

$$\eta(t) = \exp(tX)$$

とおけたので、2 次元の単位行列を I_2 とすると偶数冪では

$$(\mathbf{n}\cdot\vec{\sigma})^2 = I_2$$

であり、全て単位行列になるという特徴がわかる。よって 1 パラメタ部分群は

$$\begin{aligned}
\eta(t) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-ti\alpha\mathbf{n}\cdot\vec{\sigma}/2)^k}{k!} \\
&= I_2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(\alpha t)^{2k}}{(2k)!} + i(\mathbf{n}\cdot\vec{\sigma})\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(\alpha t)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= I_2\cos(t\alpha) + i\mathbf{n}\cdot\sigma\sin(t\alpha) \qquad (16.1)
\end{aligned}$$

とかける。虚成分には $\mathbf{n}\cdot\sigma$ がかかることに注意する。
一般的に $SU2$ 上の要素 $A \in SU(2)$ は単位球上の回転として次のような複素数

$$z = a_0 + ia_3, \omega = a_1 + ia_2 \qquad (16.2)$$

から次のような行列をつくる。

$$A = a_0 I_2 + i(\mathbf{a}\cdot\vec{\sigma}),\ \mathbf{a} = (a_0, a_1, a_2, a_3) \qquad (16.3)$$

とすると

$$A = \begin{pmatrix} z & -\bar{\omega} \\ \omega & \bar{z} \end{pmatrix}$$

となり、エルミート共役をとれば

$$AA^\dagger = A^\dagger A = \begin{pmatrix} det|A| & 0 \\ 0 & det|A| \end{pmatrix}$$

となる。この時、

$$det|A| = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$$

である。極めて標準的な物理量を表すと期待できる。

ここで $f(A) \in M_3(\mathbb{R})$ を $SU(2)$ 上の作用として f を $SU(2) \mapsto SO(3)$ の準同型写像になるように作ってみよう。すると行列の列添え字 j として次の関係式から実係数を持つように比較することができる。

$$A\sigma_j A^* = \sum_i f(A)_{ij}\sigma_i \qquad (16.4)$$

この変換をすることで実成分をもつ次の Matrix$f(A)$ が得られる。
$f(A) \in M_3(\mathbb{R})$ を式 16.4 から $i = 1, 2, 3$ について

$$f(A) = \begin{pmatrix} Re[z^2 - \bar{\omega}^2] & Im[z^2 + \bar{\omega}^2] & 2Re[z\bar{\omega}] \\ -Im[z^2 - \bar{\omega}^2] & Re[z^2 + \bar{\omega}^2] & -2Im[z\bar{\omega}] \\ -2Re[z\omega] & -2Im[z\omega] & |z|^2 - |\omega|^2 \end{pmatrix} \tag{16.5}$$

これは $f(A) = f(-A)$ であれば $\mathbb{Z}/2 \subsetneqq ker(f)$ であり、$[A, \sigma_i] = 0$ であれば $A\sigma_i A^* = \sigma_i$ となる。$SU(2)$ において交換するのは唯一スカラーの基底 $\pm I_2$ をもつときのみで

$$A = \lambda I_2$$

となる。また、一般に $A \in SU(2)$ は単位球上の回転とみなさせるがら余弦を第一成分にとるような角度 α を考え、$\mathbf{a}$ ベクトルと同じ向きを持つ単位ベクトルを次のように決める。

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= a_0 \\ \mathbf{n} &= \vec{a}/|a| \end{aligned}$$

これから A を次のように決めることができる。式 16.1 から

$$A = \exp\left[i\alpha(\mathbf{n} \cdot \vec{\sigma})\right] = I_2 \cos(\alpha) + i(\mathbf{n} \cdot \vec{\sigma}) \sin(\alpha)$$

よって式 17.17 から

$$f(A)_{ab} = \delta_{ab} \cos\alpha + (1 - \cos\alpha) n_a n_b - \epsilon_{abc} n_c \sin\alpha = \exp\left[\alpha(\mathbf{n} \cdot \vec{1})\right]$$

となり、これは $SO(3)$ の要素になる。

$$\mathbb{Z}/2 \mapsto SU(2) \mapsto SO(3)$$

のように準同型写像がつくられている。これを利用して $Hopf$ 写像がつくれる。

16.2 Hopf_Map

Hopf 写像を求めるために、先の 4 元数をつかい 4 元数の集合 $\mathbb{H}$ と $\mathbb{R}^4$ との対応を次のようにとる

$$\{a_0, a_1, a_2, a_3\} \leftrightarrow r = a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$$

この時、3 次元単位球面 $S^3 = \{r \in \mathbb{H} : |r| = 1\}$ は群になる。また、虚数部分から

$$S^2 = \{x \in Im[\mathbb{H}] : |x| = 1\}$$

として Hopf 写像 π は $\pi : S^3 \to S^2$ をし、

$$\pi(a) = a\mathbf{i}a^{-1}$$

とする。さらに S^2 の単位接束を US^2 とし、これを $S^2 \times S^2$ の部分集合と同一視する。

$$US^2 = \{(x, v) \in S^2 \times S^2 : \langle x, v \rangle = 0$$

として自然な射影として

$$\pi_1 : US^2 \to S^2,\ \pi_1(x, v) = x$$

fibration として

$$\pi_2 : S^3 \to US^2,\ \pi_2(a) = (a\mathbf{i}a^{-1}, a\mathbf{j}a^{-1})$$

とするとこの π_2 は 2 重被覆になり

$$\pi_2(-a) = \pi_2(a) \tag{16.6}$$

$$\pi(a) = \pi_1 \circ \pi_2$$

となる。
では Hopf 写像を具体的に考えよう、まず式 16.2 から $\chi \in \mathbb{C}^2$ として

$$\chi = (z, w)$$

をとる。Hopfs 写像は次のような写像であった。

$$\pi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}^3$$

この射影を前節の内容を用いて求めてみよう。、
はじめに式 17.17 からパウリ行列を変換し、

$$\chi = (z, \omega) \mapsto \mathbf{r} := \chi^* \vec{\sigma} \chi = \left(z\bar{\omega} + \omega\bar{z}, i(z\bar{\omega} - \omega\bar{z}), |z|^2 - |\omega|^2\right)$$

となる 3 次元球上のベクトル $\mathbf{r}$ を導く。このノルムをとると

$$Norm[\mathbf{r}] = \chi^*\chi = \begin{pmatrix} z \\ \omega \end{pmatrix} (\bar{z}, \bar{\omega}) = r = det|A| = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

であり、4 次元球の半径である。ところがエルミート行列をつくると

$$\begin{aligned}
\chi\chi^* &= (z, \omega) \begin{pmatrix} \bar{z} \\ \bar{\omega} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} |z|^2 & z\bar{\omega} \\ \omega\bar{z} & |\omega|^2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\left(|z|^2 + |\omega|^2\right) I_2 + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} |z|^2 - |\omega|^2 & z\bar{\omega} \\ \omega\bar{z} & |\omega|^2 - |z|^2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\left(rI_2 + \mathbf{r} \cdot \vec{\sigma}\right)
\end{aligned}$$

従って射影 π は次のような図式で表すことができる。

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{C}^2 & \to & A & \to & \mathbb{C}^2 \\
\downarrow & & & & \downarrow \\
\pi & & & & \pi \\
\downarrow & & & & \downarrow \\
\mathbb{R}^3 & \to & f(A) & \to & \mathbb{R}^3
\end{array}$$

つまり射影 π は

$$\pi(\chi) = \mathbf{r} \tag{16.7}$$

であり、従って、常に

$$|\pi(\chi)|^2 = |\left(z\bar{\omega} + \omega\bar{z}, i(z\bar{\omega} - \omega\bar{z}), |z|^2 - |\omega|^2\right)|^2 = (|z|^2 + |\omega|^2)^2 = |\mathbf{r}|^2$$

が成り立つ。これから $S^3 \to S^2; \zeta \to \mathbf{n}$ の写像が

$$\zeta\zeta^* = \frac{1}{2}(I_2 + \mathbf{n}\cdot\vec{\sigma}) \tag{16.8}$$

ただし、$\mathbf{n}$ は単位ベクトルで、

$$\mathbf{n} = \zeta^*\vec{\sigma}\zeta$$

からつくられるとする。これで実際に Hopf 写像を見ることができる。
そこで新たに $a, b \in \mathbb{R}$ として

$$\zeta = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

これを先の A で変換すると

$$A = \begin{pmatrix} z & -\bar{\omega} \\ \omega & \bar{z} \end{pmatrix}$$

から

$$A\zeta = \begin{pmatrix} az - b\bar{\omega} \\ a\omega + b\bar{z} \end{pmatrix}$$

となる。次にこの射影を考える。式 16.7 から $\pi = \left(z\bar{\omega} + \omega\bar{z}, i(z\bar{\omega} - \omega\bar{z}), |z|^2 - |\omega|^2\right)$ に代入し、次のように射影が決まる。

$$\pi\left(A\zeta\right) = \begin{pmatrix} (az - b\bar{\omega})\overline{(az + b\bar{\omega})} + \overline{(az - b\bar{\omega})}(az + b\bar{\omega}) \\ i\left[(az - b\bar{\omega})\overline{(az + b\bar{\omega})} - \overline{(az - b\bar{\omega})}(az + b\bar{\omega})\right] \\ |az - b\bar{\omega}|^2 - |a\omega + b\bar{z}|^2 \end{pmatrix} \tag{16.9}$$

一方で f が $SU(2) \mapsto SO(3)$ の準同型写像であったから次のように合成写像をつくると

$$f(A)\cdot\pi(\zeta) = \begin{pmatrix} Re[z^2 - \bar{\omega}^2] & Im[z^2 + \bar{\omega}^2] & 2Re[z\bar{\omega}] \\ -Im[z^2 - \bar{\omega}^2] & Re[z^2 + \bar{\omega}^2] & -2Im[z\bar{\omega}] \\ -2Re[z\omega] & -2Im[z\omega] & |z|^2 - |\omega|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a\bar{b} + \bar{a}b \\ i(a\bar{b} - \bar{a}b) \\ |a|^2 - |b|^2 \end{pmatrix} \tag{16.10}$$

となる。そこで

$$f_A \circ \pi(\zeta) = \pi(A\zeta) \tag{16.11}$$

であることを見てみよう。それには式 16.4 から

$$f_A(\zeta^*\vec{\sigma}\zeta) = (A\zeta)^*\vec{\sigma}(A\zeta)$$

$$f_{A^{-1}}(\sigma_i) = A^*\sigma_i A$$

となることを利用する。
左辺の成分は添え字の順番に注意して

$$\begin{aligned}
\left[\pi(A\zeta)\right]_i &= (A\zeta)^*\sigma_i(A\zeta) = \zeta^*(A^*\sigma_i A)\zeta = \zeta^* f_{A^{-1}}(\sigma_i)\zeta \\
&= \zeta^*\left(\sum_{j=1}^{3}\left(f_{A^{-1}}\right)_{ji}\sigma_j\right)\zeta = \zeta^*\left(\sum_{j=1}^{3}\left(f_A\right)_{ij}\sigma_j\right)\zeta \\
&= \sum_{j=1}^{3}\left(f_A\right)_{ij}\left(\zeta^*\sigma_j\zeta\right) = \left[f_A\left(\zeta^*\vec{\sigma}\zeta\right)\right]_i
\end{aligned}$$

となる。

例えばはじめの成分を比較すると、式 16.9 の第一成分は

$$
\begin{aligned}
(az-b\bar{\omega})\overline{(az+b\bar{\omega})}+\overline{(az-b\bar{\omega})}(az+b\bar{\omega}) &= \left(|a|^2-|b|^2\right)(z\bar{\omega}+\omega\bar{z})+a\bar{b}(z^2-\omega^2) \\
&\quad +\bar{a}b(\bar{z}^2-\bar{\omega}^2) \\
&= \left(|a|^2-|b|^2\right)2Re\left[z\bar{\omega}\right]+\left(a\bar{b}+\bar{a}b\right)Re\left[z^2-\bar{\omega}^2\right] \\
&\quad +i\left(a\bar{b}-\bar{a}b\right)Im\left[\bar{z}^2-\omega^2\right]
\end{aligned}
$$

$$
=\left(Re[z^2-\bar{\omega}^2],Im[z^2+\bar{\omega}^2],2Re[z\bar{\omega}]\right)\begin{pmatrix} a\bar{b}+\bar{a}b \\ i(a\bar{b}-\bar{a}b) \\ |a|^2-|b|^2 \end{pmatrix}
$$

となり確かに 16.11 が成りたっていることがわかる。一方で $\lambda, z, \omega \in \mathbb{C}$ として一般に次が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
(\lambda+\bar{\lambda})Re(z^2-\bar{\omega}^2)+i(\lambda+\bar{\lambda})Re(z^2+\bar{\omega}^2) &= \frac{1}{2}[(\lambda+\bar{\lambda})(z^2-\bar{\omega}^2+\bar{z}^2-\omega^2) \\
&\quad +(\lambda-\bar{\lambda})(z^2+\bar{\omega}^2-\bar{z}^2-\omega^2) \\
&= \frac{1}{2}\left[2\lambda\left(z^2-\omega^2\right)+2\bar{\lambda}(\bar{z}^2-\bar{\omega}^2)\right] \\
&= \lambda\left(z^2-\omega^2\right)+\bar{\lambda}\left(\bar{z}^2-\bar{\omega}^2\right)
\end{aligned}
$$

また、次の関係も有用である。

$$
Re(\lambda)Re(z^2-\bar{\omega}^2)+Im(\lambda)Re(z^2+\bar{\omega}^2)=\frac{1}{2}\left[2\lambda\left(z^2-\omega^2\right)+2\bar{\lambda}(\bar{z}^2-\bar{\omega}^2)\right]
$$

16.3 Euler angles

そこで具体的に $\pi: S^3 \to S^2$ をオイラー角 $(\theta,\phi,\psi)\to(\theta,\phi)$ を考えることにする。

$$
\pi(\theta,\phi,\psi)=(\theta,\phi)
$$

式 16.6 から 2 重被覆であることを考え、

$$
z=\cos(\frac{\theta}{2})\exp\left(\frac{i}{2}\left(\psi+\phi\right)\right)
$$

$$
\omega=\sin(\frac{\theta}{2})\exp\left(-\frac{i}{2}\left(\psi-\phi\right)\right)
$$

とおく、この時は

$$
\begin{aligned}
\pi(\theta,\phi,\psi) &= \pi\left(\cos(\frac{\theta}{2})\exp\left(\frac{i}{2}\left(\psi+\phi\right)\right),\sin(\frac{\theta}{2})\exp\left(-\frac{i}{2}\left(\psi-\phi\right)\right)\right) \\
&= \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{-i\phi}+\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\phi} \\ i(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{-i\phi}-\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\phi}) \\ \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}=(\theta,\phi)
\end{aligned}
$$

となることを意味する。$\zeta \in S^3$ であり、n を単位ベクトルとすると式 16.8 から $\zeta\zeta^* = \frac{1}{2}(I_2 + \mathbf{n}\cdot\vec{\sigma})$ だから

$$(\mathbf{n}\cdot\vec{\sigma})\zeta = (2\zeta\zeta^* - I_2)\,\zeta = 2\zeta - \zeta = \zeta$$

ここで $\pi : S^3 \to S^2$ の射影に対応する fibre を S^3 上の $SU(2)$ の移動で表すことを考えよう。
$\mathbf{n}$ 軸周りの回転座標系を $stab$ で表し、$B \in SU(2), f(B) \in stab_{SO3}(\mathbf{n})$,$B\zeta \in S^3$ とすると

$$\begin{aligned}\pi^{-1}(\mathbf{n}) &= \{B\zeta : \pi(B\zeta) = \mathbf{n}\} = \{B\zeta : f(B)\pi(\zeta) = \mathbf{n}\} \\ &= \{B\zeta : f(B)\mathbf{n} = \mathbf{n}\} = \{B\zeta : f(B) \in stab_{SO3}(\mathbf{n})\}\end{aligned}$$

が成り立つと考える。これにより $SO(3)$ の部分群は $SO(2) \simeq S^1$ の円周に準同型になる。
パラメタ t を用いてこの部分群は式 16.8 から

$$\begin{aligned}B(t)\zeta &= e^{-\frac{i}{2}t\mathbf{n}\cdot\vec{\sigma}}\zeta = \left(\cos\frac{t}{2}I_2 - i\sin\frac{t}{2}\mathbf{n}\cdot\vec{\sigma}\right)\zeta \\ &= \left(\cos\frac{t}{2} - i\sin\frac{t}{2}\right)\zeta = e^{-\frac{i}{2}t}\zeta = e^{i\alpha}\zeta\end{aligned}$$

16.4 Clifford Torus[44]

16.4.1 立体射影

第 1 部で複素数を用いた立体射影、円の反転等に触れた。ここではまずに立体射影を一般的に考えてみよう。はじめに 3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ 内に埋め込まれた S^2 を

$$\mathbb{S}^2 = \{\mathbf{x} = (x, y, z) : |\mathbf{x}| = 1\}$$

で定義する。図のような平面への立体射影を $\pi(\mathbf{x})$ として

$$\pi(\mathbf{x}) = \frac{1}{1-z}(x, y) \tag{16.12}$$

を考え、

$$\mathbb{S}^2 \setminus \{(0,0,1)\}\, onto\, \mathbb{R}^2\{(x,y,0)\}$$

とすればこの写像は 1 対 1 の単射である。

Each point $\mathbf{p} \in \mathbb{S}^2\backslash\{(0,0,1)\}$ determines a unique line passing through $\mathbf{p}$ and $(0,0,1)$. The line l, in turn, intersects the x, y-plane in a unique point $\mathbf{q}$. We set $\pi(\mathbf{p}) = \mathbf{q}$.

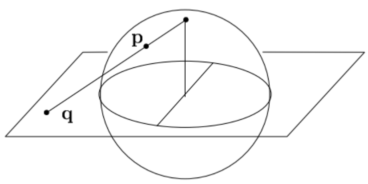

Figure 1: Stereographic Projection.

図 16.1: [44]

次に赤道上の大円を

$$C = \{\mathbf{x} \in \mathbb{S}^2 :\, x^2 + y^2 = 1\} = \{\mathbf{x} : x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$$

とすると $\pi(C) = C$ となる。

次に立体射影上の回転を考えよう。はじめに球面上 y 軸の ϕ の回転を

$$R^y_\phi(C) = \{(x\cos\phi, y, x\sin\phi) : x^2 + y^2 = 1\}$$

とすると立体射影上の回転は式 16.12 より次の合成写像で表される。

$$\pi \circ R^y_\phi(C) = \left\{ \left(\frac{x\cos\phi}{1 - x\sin\phi}, \frac{y}{1 - x\sin\phi} \right) : x^2 + y^2 = 1 \right\}$$

となる。

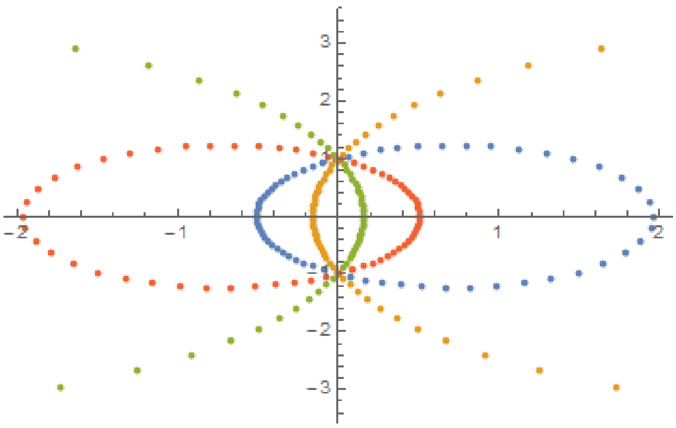

図 16.2: $\pi \circ R^y_\phi(C)$ のフラフ $\phi = \pi/5, 2\pi/5, 3\pi/5, 4\pi/5$ の場合

もし、π の逆があり

$$\pi^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^2$$

とすると、

$$\pi \circ R^y_\phi(C) = \{\mathbf{a} = (a, b) : \pi^{-1}(\mathbf{a}) \in P\}$$

から逆に

$$\pi^{-1}(\mathbf{a}) = \frac{1}{|\mathbf{a}|^2 + 1} \left(2a, 2b, |\mathbf{a}|^2 - 1\right)$$

とすると $\pi^{-1}(\mathbf{a}) \in P$ は球面上の点でないといけないから

$$a^2 + b^2 = 1 + 2a\tan\phi$$

つまり、次のような円が球面上に描ける。

$$(a - \tan\phi)^2 + b^2 = \sec^2\phi$$

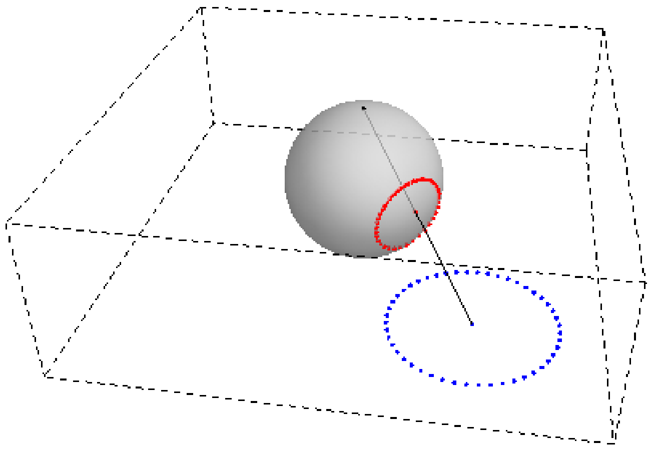

図 16.3: 球面上の円周の射影

さらにこの回転を y 軸周りだけではなく、z 軸まわりの θ, ψ の回転を合成すると

$$R^z_\psi \circ R^y_\phi \circ R^z_\theta = R$$

また、一般に回転行列は

$$R^z_\psi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

とおけた。単位ベクトルを

$$\mathbf{e}_1 = (1,0,0),\ \mathbf{e}_2 = (0,1,0),\ \mathbf{e}_3 = (0,0,1)$$

とすると、これらの単位ベクトルがどう回転するかをみてみよう。

$$R^z_\theta(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_3$$

となるから

$$R^z_\psi \circ R^y_\phi \circ R^z_\theta(\mathbf{e}_3) = R^z_\psi \circ R^y_\phi(\mathbf{e}_3)$$

となるので

$$\begin{aligned} R(\mathbf{e}_3) &= R^z_\psi \circ R^y_\phi(\mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi & 0 & -\sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\phi & 0 & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ 0 \\ \cos\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\psi\sin\phi \\ -\sin\psi\sin\phi \\ \cos\phi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

16.4.2　4 次元の場合

次に 4 次元に拡張して考えてみよう。$\mathbb{S}^3 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : |\mathbf{x}| = 1\}$ として Clifford torus を

$$Cl = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 = z^2 + w^2 = \frac{1}{2}\}$$

で表そう。これを立体射影を用いて $\mathbb{R}^3$ 上に射影すると

$$w^2 = \frac{1}{2} - z^2 = x^2 + y^2 - z^2$$

だから

$$x^2 + y^2 + z^2 +$$

$$Cl = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left(\sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{2}\right)^2 + z^2 = 1\}$$

という回転対称性を持ったリングができる。

16.5　Hopf_fibration

一般に $\mathbb{R}^{n+1}$ 内に S^n を埋め込むと

$$\left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2 + \cdots + \left(x^n\right)^2 = 1$$

例えば $S^3 \to S^2$ において $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ とすると、

$$\left((a^2 + b^2 - c^2 - d^2\right)^2 + (2(ad + bc))^2 + (2(bd - ac))^2 = 1$$

となるので射影 h は

$$h(a, b, c, d) = (a^2 + b^2 - c^2 - d^2, 2(ad + bc), 2(bd - ac)) \tag{16.13}$$

で表すことができる。
ここで次元にとらわれない、ベクトルの回転と並進を表すことを考えよう。
そこで $\mathbb{R}^3$ において次のような軸性ベクトルとその回転 θ を決めよう。

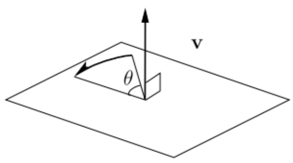

Figure 1: A rotation in $\mathbb{R}^3$ is specified by an angle θ and a vector $\mathbf{v}$ giving the axis.

図 16.4: [40] より

ここで次のような $(3+1)$ 次元の組を考える

$$(k\mathbf{v}, \theta + 2n\pi)$$

ただし、k は正のスカラー、n は整数である。さらに $\mathbf{v}$ は 3 次元、θ は 1 次元の実数である。
これで 1 つのユークリッド平面に対して法線ベクトルを決めることができる。しかし、1 組の

$$(\mathbf{v}, \theta)$$

は同じ回転を自由にするのでこの回転を決めないといけない。これを軸の回転と呼ぶ。

この 2 つの回転をどう決めるかは 19 世紀半ばに William_Rowan_Hamilton により 4 元数を用いて表わされた。

これを $\mathbb{R}^4$ 上で次のような基底を考える。

$$\mathbf{i} = (0, 1, 0, 0)$$

$$\mathbf{j} = (0, 0, 1, 0)$$

$$\mathbf{k} = (0, 0, 0, 1)$$

ただし、前部のクリフォード代数を用いて複素数を拡張し、次のような乗法の規則をつける。

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$ij = k,\ jk = -i,\ ki = j \tag{16.14}$$

4 元単位ベクトルとスカラー値を用いて次のような位置ベクトルをつくる。

$$r = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$$

とした時、共役として

$$\bar{r} = a - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}$$

であり、ノルムは

$$||r|| = \sqrt{r\bar{r}} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

で定義する。また、結合則

$$p(qr) = (pq)r$$

が成立する。逆元についても

$$r^{-1} = \frac{\bar{r}}{||r||^2}$$

であるから、もし、単位ベクトルであれば

$$r^{-1} = \bar{r}$$

となることに注意する。ノルムが一定になる場合は球面上の位置ベクトルとみなすことができる。

さらに、単位円周上にあり、$||r|| = \sqrt{r\bar{r}} = 1$ とすると

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$$

となる。

ここで R_r を 3 次元空間回転を与える演算子としよう。もし、$r = \pm 1$ であれば R_r は恒等写像である。

重要なアイディアは R_r の固有方程式を考えることである。

この R_r の固有ベクトルを $\mathbf{w}(b, c, d)$ にとる。これは先の図でみたように回転 R_t の軸ベクトルになる。

図のように位置 r で紙面垂直になり、回転で向きを変えない。

固有値は 1 をとると次の固有方程式がみつかる。

$$R_r\mathbf{w} = \mathbf{w} \tag{16.15}$$

次に、ベクトル $\mathbf{w}(b, c, d)$ に対して直交するベクトルを $\mathbf{v}$ を考える。この時、

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = 0$$

この $\mathbf{v}$ の成分について、少なくとも b, c のうち 1 つが 0 ではないから

$$\mathbf{v} = c\mathbf{i} - b\mathbf{j}$$

$c = b = 0$ であれば

$$\mathbf{v} = \mathbf{i}$$

がとれる。
次に下図のように $\mathbf{v}$ を θ だけ回転させた $R_r\mathbf{v}$ を考える。
これは $\mathbf{w}(b, c, d)$ に直交するから一般には $b^2 + c^2 + d^2 = 1 - a^2$ だから

$$a^2 - b^2 - c^2 - d^2 = 2a^2 - 1$$

また、$\mathbf{v}$ と回転させた $R_r\mathbf{v}$ とのなす角 θ は式 16.14 から $||\mathbf{v}|| = 1$ として

$$\begin{aligned}
\cos\theta &= \frac{\mathbf{v} \cdot R_r\mathbf{v}}{||\mathbf{v}||^2} \\
&= \frac{\langle (a - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}) | (a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}) \rangle}{1} \\
&= \frac{a^2 - b^2 - c^2 - d^2}{1} \\
&= 2a^2 - 1
\end{aligned}$$

これから

$$a = \sqrt{\frac{1 + \cos\theta}{2}} = \cos\frac{\theta}{2}$$

の関係が下の図のようになっていることがわかる。

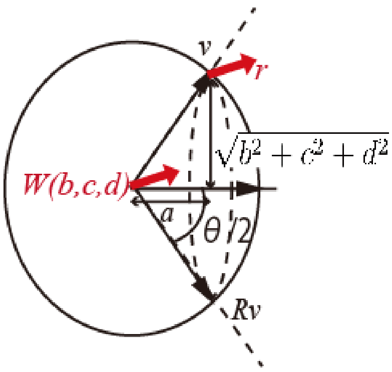

図 16.5: 軸ベクトル $\mathbf{W}$ とその回転

この (b, c, d) を軸ベクトルにとり、角度 θ は次の関係がある。

$$\theta = 2\cos^{-1}(a) = 2\sin^{-1}\left(\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}\right)$$

さら r, s が単位 4 元ベクトルであれば、に回転の演算子の合成則

$$R_r \circ R_s = R_{rs}$$

が満たされ群の条件を満たしている。
ここでは直交群 SO_3 と商群

$$S^3/\{1,-1\} \simeq SO_3$$

が同値になっている。

16.6　例 S3

例えば S^2 上に点 $P_0 = (1,0,0)$ をとる。S^3 上の点を (a,b,c,d) で表す。単位 4 元数を

$$r = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + c\mathbf{k}$$

で表す。球面上の回転を先と同じ R_r で表す。この時の Hopf_fibration は次のように表すことができる。

$$r \mapsto R_r(P_0) = r\mathbf{i}\bar{r} \tag{16.16}$$

これは具体的には式 16.13 と同じである。また、図のような球面上の移動を表している。

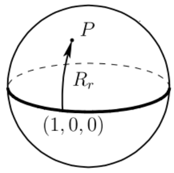

Figure 3: The unit quaternion r moves $(1,0,0)$ to P via R_r. The Hopf map takes r to P.

図 16.6: [40] より

これは S^3 上の円周である点集合 C は Hopf 写像 h によって全て点 $(1,0,0)$ に写される。

$$C = \{\cos t, \sin t, 0, 0\}|t \in \mathbb{R}\} \mapsto (1,0,0) \tag{16.17}$$

この C は $\mathbb{R}^4$ 上の単位円と考えることができる。よって $h^{-1}(1,0,0)$ は Hopf 写像の $(1,0,0)$ におけるファイバー束であると考えることができる。つまり Hopf 写像によって円周は点に射影される。

16.7　円による空間の充填

1 つの問題として、いくつかの独立な同心円と、直交する 1 つの直線で 3 次元の空間を埋めることができるかを考えてみよう。例えば次の図のようにそれぞれの同心円が独立している場合を考えると簡単にイメージできる。

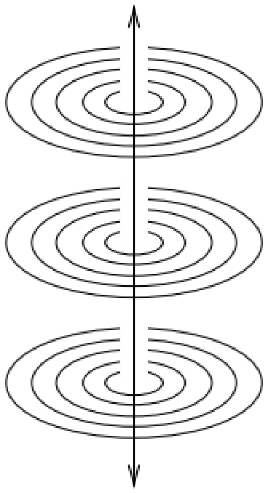

Figure 4: One way to fill $\mathbb{R}^3$ with disjoint circles and a line. Now try to arrange for every pair of circles to be linked!

図 16.7: [40] より

しかし、これらの円にすべて関連性を持たせるにはどうすればよいか。その答えの一つが Hopf_fibrers である。

例えば次の図のように球面上においえ A から B に移動することを考えよう。

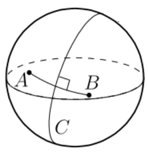

Figure 5: The axis of any rotation taking A to B must pass through the great circle C that bisects $\overline{AB}$.

図 16.8: [40] より

この時、弧 AB に直交する大円が必ずかけて、これを C とする。この球面上の A から B への移動は次の 2 つの回転によって可能である。

回転 R_1 の回転軸は AB の中点 M を通る。この回転軸は大円 C の半径 OM 上にある。これに対し回転 R_2 は $A \times B$ の回転で回転軸が大円 C の半径 ON 上にあり、

$$OM \perp ON$$

になっている。注目すべきはこれらの回転が 4 元数で表すことができることである。

前節の式 16.15 の表現を利用すると

$$R_1 = R_{r_1}, R_2 = R_{r_2}$$

とすると $(1,0,0)$ から点 $P(p_1,p_2,p_3)$ の回転をつくる 2 つの軸ベクトルが $r_1 \cdot r_2 = 0$ を満たすようにつくると

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{1}{\sqrt{2(1+p_1)}}\left((1+p_1)i + p_2 j + p_3 k\right) \\ r_2 &= \sqrt{\frac{1+p_1}{2}}\left(1 + \frac{-p_3 j}{1+p_1} + \frac{p_2 k}{1+p_1}\right) \end{aligned} \tag{16.18}$$

で表すことができる。

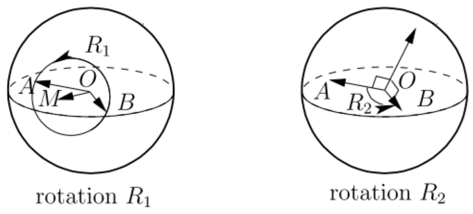

Figure 6: Two rotations taking A to B.

図 16.9: [40] より

よって円周上の点 $e^{it} = \cos t + i \sin t$ からファイバー $h^{-1}(P)$ は $\mathbb{R}^4$ 内の円として、
次のように書くことができる。

$$h^{-1}(P) = \left\{r_1 e^{it}\right\}_{0 \le t \le 2\pi}$$

$$h^{-1}(P) = \left\{r_2 e^{it}\right\}_{0 \le t \le 2\pi}$$

と表すことができる。ただし $P(-1, 0, 0)$ は特別な場合で

$$h^{-1}((-1, 0, 0)) = \left\{k e^{it}\right\}_{0 \le t \le 2\pi}$$

である。

16.8 Hopf fibration

Hopf fibration の例として第 1 部で紹介した図のような立体射影を考える。

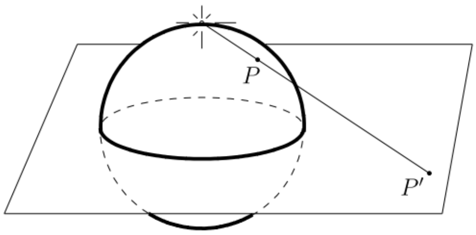

Figure 7: Stereographic projection.

図 16.10: [40] より

これは $\mathbb{R}^3$ 上の S^2 上の極を除く点を $\mathbb{R}^2$ の点に射影する。

$$(x, y, z) \mapsto \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right)$$

この逆は

$$\mathbb{R}^2 \to S^2 \setminus (0, 0, 1)$$

であり、平面上の点 (a, b) から半球上の点を決めることができる。

これを応用し、次元を拡大して 4 次元球を想像してみよう。S^2 では次の図のように立体射影すと 1 つの平面上に円、または直線が射影される。

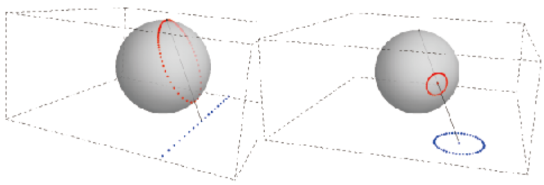

図 16.11: 直線に写す射影と円に写す立体射影

そこで、3 次元に射影することを考えるためにまず、特別な点 $(1,0,0),(-1,0,0)$ を考えよう。
s を立体射影

$$S^3 \setminus (0,0,0,1) \to \mathbb{R}^3$$

を表すものとし、

$$(w,x,y,z) \mapsto \left(\frac{x}{1-w},\frac{y}{1-w},\frac{z}{1-w}\right) \tag{16.19}$$

を考える。式 16.17 で見たように点 $P(1,0,0)$ のファイバーは単位円であった。
4 次元でも同じことが s を合成して考えれば成り立つはずであるから
$\mathbb{R}^3$ において x 軸が

$$s \circ h^{-1}\left((1,0,0)\right) \to x - axis$$

で射影され、yz 平面の単位円が

$$s \circ h^{-1}\left((-1,0,0)\right) \to y,z - unit\,circle$$

に射影される。
つまり次の図のように球上の点 $(1,0,0),(-1,0,0)$ は式 16.18 の直交する 2 つの回転の自由度が加わるわけだ。
これを次の図では射影中心を回転させ、$(1,0,0)Red\ \ (-1,0,0)Green,\ \ (p_1,p_2,p_3)Blue$
で描いてみている。赤は直線、緑が単位円、青は y-z 平面にはから傾いいた円である。

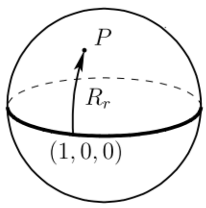

Figure 3: The unit quaternion r moves $(1,0,0)$ to P via R_r. The Hopf map takes r to P.

図 16.12: 射影基準を変化させた時の Hopf 写像

図の青色に相当する $(1,0,0),(-1,0,0)$ 以外の球面 S^2 上の点 $P(p_1,p_2,p_3)$ は $s \circ h^{-1}$ によって yz 平面には 2 つの点として写される。この時必ず 1 つの点 A は単位円の中に、もう一つの点 B は単位円の外に写される。この点 A と B はベクトル

$$\vec{AB}(0,p_3,-p_2)$$

を $y-z$ 平面に作る。重要なのは単位円はこのベクトル AB と交差し、x 軸とも絡むことである。$y-z$ 平面上の単位円を中心に見ると次の図のように絡んでいることがよくわかる。

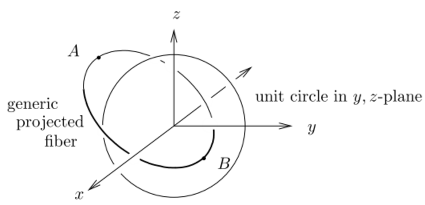

Figure 8: A generic projected Hopf fiber. A and B mark the intersections of the fiber with the y, z-plane.

図 16.13: [40] より

これは別な P 点をとっても同じであり、任意の射影された円、C, D は次の図のように絡むことが Hopf 写像の特徴である。

しかも次部で扱う絡み数で考察するが、この絡みの数は位相不変になっている。例えば次のような写像を考えよう。先の 4 元数を用いて CD を回転させる写像 ϕ が次のように作られる。

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \;\; f(x) = kr^{-1}x$$

$$\phi = s \circ f \circ s^{-1}$$

これによって CD が $C'D'$ に写ったとしても次の図のように絡みの関係が保たれる。

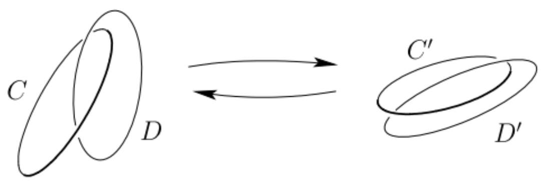

Figure 9: If the continuous bijective images C', D' of circles C, D are linked, then C and D must also be linked.

図 16.14: [40] より

以上から Hopf fibration の簡単なイメージとして次の図のようにまとめることができる。

$\mathbb{R}^4$ 上の S^3 の絡んだ円 $h^{-1}(P), h^{-1}(Q)$ は $\mathbb{R}^3$ 上の S^2 球面上の点 P, Q のファイバーになっていて、図のように S^3 から射影される。一方で同じ円 $h^{-1}(P), h^{-1}(Q)$ は立体射影により $\mathbb{R}^3$ 上の絡んだ円に写さる。

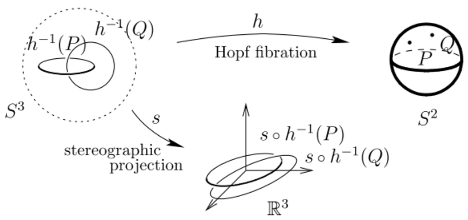

Figure 10: Stereographic projections of Hopf fibers. Any two projected fibers are linked circles, except $s \circ h^{-1}(1,0,0)$ is a line.

図 16.15: [40] より

これらは物理的な微小時間変化についての重要な示唆を含んでいる。絡んだ円により満たされると同時に 1 つの並進ベクトルを持つ空間とはどんなものになるか、次部で考察を深めることにしよう。

Hopf 写像の回転をシミュレーションすることが $Mathematica$[42]　などの数式処理ソフトを利用すると可能になる。

下図では左側に 3 次元の S^2 上の点を色を付けて表示し、対応する 4 次元上の S^3 の絡み合う円が同じ色で描かれている。

実際のソフト上では任意に回転することができるので円の回転による幾何的な模様として見ることができる。

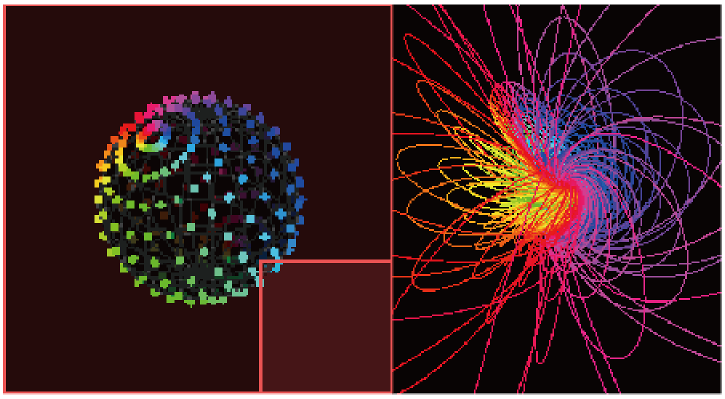

図 16.16: S^2 上の点と対応する S^3 上の円　参照 [42]　を利用すれば回転させてみることができる。

16.9　例 U1 束

具体的に S^3 が S^2 上の $U(1)$ 束になる場合を考える。ファイバーを実際にみるためにこの Hopf 写像を考えよう。

$\mathcal{R}^4$ に埋め込まれた 3 次元単位球面は

$$\left(x^1\right)^2+\left(x^2\right)^2+\left(x^3\right)^2+\left(x^4\right)^2=1$$

を満たす。ここで複素数 z を

$$z^0=x^1+ix^2,\quad z^1=x^3-ix^4$$

とおくと

$$|z^0|^2+|z^1|^2=1$$

となる。次に S^2 を

$$\left(\xi^1\right)^2+\left(\xi^2\right)^2+\left(\xi^3\right)^2=1 \tag{16.20}$$

で表すと Hopf 写像 π は $\pi:S^3\to S^2$ として

$$\begin{aligned}\xi^1 &= 2(x^1x^2-x^3x^4)\\ \xi^2 &= 2(x^2x^3-x^1x^4)\\ \xi^3 &= \left(x^1\right)^2+\left(x^2\right)^2-\left(x^3\right)^2-\left(x^4\right)^2\end{aligned}$$

となる。(X,Y) を S^2 の南半球 U_s の点の北極点からの立体射影とする。S^2 の赤道を通る複素平面をとると $Z=X+iY$ 半径 1 の円の中にあり、第 1 部でみたメビウス変換

$$Z=\frac{\xi^1+i\xi^2}{1-\xi^3}=\frac{x^1+ix^2}{x^3+ix^4}=\frac{z^0}{z^1}\quad(\xi\in U_S)$$

になる。

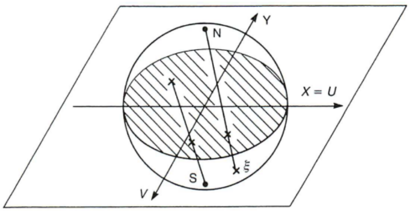

図 9.9. 球面 S^2 の立体射影座標. (X, Y) は北極点から射影され, (U, V) は南極点から射影される.

図 16.17: [12] より

ここで $\lambda \in U(1)$ とするとこの Z は次の変換では不変である。

$$(z^0, z^1) \mapsto (\lambda z^0, \lambda z^1)$$

$|\lambda| = 1$ だから、点 $(\lambda z^0, \lambda z^1)$ 　も S^3 上にある。
南極からの射影を図のように (U, V) で表すと、

$$W = U + iV = \frac{\xi^1 - i\xi^2}{1 + \xi^3} = \frac{x^3 + ix^4}{x^1 + ix^2} = \frac{z^1}{z^0} \ \ (\xi \in U_N)$$

である。赤道は $U_N \cap U_S$ であり

$$Z = \frac{1}{W}$$

が成立している。ファイバー束構造を求めると、まず南、北半球上の局所自明化を

$$\phi_S^{-1} : \pi^{-1}(U_S) \to U_S \times U(1),\ \ (z^0, z^1) \mapsto (z^0/z^1, z^1/|z^1|)$$

$$\phi_N^{-1} : \pi^{-1}(U_N) \to U_N \times U(1),\ \ (z^0, z^1) \mapsto (z^1/z^0, z^0/|z^0|)$$

として定義する。U_N 上では $z^0 \neq 0$ であり、U_S 上では $z^1 \neq 0$ である。
また、赤道上では $\xi^3 = 0$ であるから、式 16.20 から $|z^0| = |z^1| = 1/\sqrt{2}$ である。
これから赤道上の局所自明化を

$$\phi_S^{-1} : (z^0, z^1) \mapsto (z^0/z^1, z^1/\sqrt{2}z^1)$$

$$\phi_N^{-1} : (z^0, z^1) \mapsto (z^1/z^0, z^0/\sqrt{2}z^0)$$

これから赤道上の変換関数が

$$\begin{aligned} t_{NS}(\xi) &= \frac{\sqrt{2}z^0}{\sqrt{2}z^1} = \frac{\sqrt{2}(x^1 + ix^2)}{\sqrt{2}(x^3 - ix^4)} \\ &= 2(x^1x^2 - x^3x^4) + 2i(x^2x^3 - x^1x^4) \\ &= \xi^1 + i\xi^2 \in U(1) \end{aligned}$$

と表される。

16.10 複素 Hop Map [45]

ここで $\mathbb{R}^4$ を $\mathbb{C}^2$ として考える。つまり、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \simeq \mu = \begin{pmatrix} x+iy \\ z+iw \end{pmatrix}$$

とみなすことにする。この時、S^3 は

$$S^3 = \{\psi \in \mathbb{C} | \, |\psi| = 1\} \tag{16.21}$$

と表される。そこで単位ベクトルを $\mu \in \mathbb{C}^2$ とし、複素平面上の μ 方向の複素直線を

$$L_\mu = \{c\mu | c \in \mathbb{C}\}$$

とする。また、S^3 と、L_μ の境界部分を

$$C_\mu = L_\mu \cap S^3 = \{e^{i\phi}\mu | \phi \in \mathbb{R}\}$$

とすると、これは S^3 表面上の円 S^1 であり、この円によって結合された領域を考えてみよう。

視覚化するために $\mathbb{R}^4$ を S^3 へ立体射影する変換を考える。$\mu \in \mathbb{R}^4$ を 3 次元の球座標からの類推で次のようにおいてみる。

$$\begin{cases} x = \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma \\ y = \sin\alpha \sin\beta \cos\gamma \\ z = \sin\alpha \cos\beta \\ w = \cos\alpha \end{cases}$$

ここで $\alpha, \beta \in [0, \pi], \gamma \in [0, 2\pi)$ であることに注意する。

実際に C_μ はこの変換を μ に作用させると

$$C_\mu = e^{i\phi} \begin{pmatrix} x+iy \\ z+iw \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

立体射影式 16.19 の類推で

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{1-w} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

の射影を考えると、$\mathbb{R}^3$ の図が得られる。

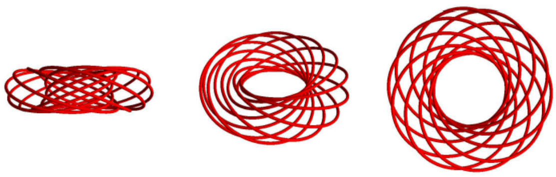

図 16.18: [45] より

16.11 Qubit2 準位量子状態

Hopf 写像が 2 次元の複素空間の組 $\mathbb{C}^2$ と対応していたことを利用し、物理的な応用がいくつかある。2 次元複素ヒルベルト空間を考え、2 準位モデル qubit を考えてみよう。2 つの複素数の内積を

$$\langle z, w\rangle = \bar{z_1}w_1 + \bar{z}_2 w_2 = z^\dagger w$$

で定義する。量子力学的な純粋状態は密度演算子 ρ によって

$$\rho = \frac{zz^\dagger}{Z^\dagger Z}$$

と表された。ある観測 A の状態の期待値は密度演算子との対角和

$$Tr\,A\rho \tag{16.22}$$

で表され、これは実数でなくてはならないので A はエルミート演算子である必要があった。
よって期待値は

$$\frac{z^\dagger Az}{z^\dagger z}$$

で表される。ただし、次のように状態ベクトルは規格化しておく。

$$\langle z, z\rangle = 1$$

この時、幾何学的位相でみてきたように実数 α として、位相因子

$$e^{i\alpha}$$

の自由度があり、これを決定することができなかった。そこでこれを射影演算子 P を用いて

$$P(\mathbb{C}^2) = \mathbb{C}P_1$$

から対応を対応を考えてみよう。
そこでまず密度演算子を決めることから始めよう。パウリ行列を

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

とおく。第 3 部で見たようにこれらはスピン 1/2 粒子の運動量関係していた。そこで

$$\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$$

とおくと密度演算子によって期待値が式より uector として

$$\mathbf{R} := Tr\,\rho\sigma \in \mathbb{R}^3$$

のようにおける。そこでこれから純粋状態であれば

$$\mathbf{R}(z) := \frac{z^\dagger \sigma z}{z^\dagger z}$$

ただし、$\mathbf{R}^2(z) = 1$

17　ファイバーバンドル [47]

Rupert Way は主束の写像と物理的な固有値の考え方を発展させ前節の Hopf 写像を応用している。参考文献 [47] には非常に豊富にファーバーをイメージするために図が掲載されている。そこで改めてファーバーを用いてディラックモノポールや Hopf 写像を考えてみる。

はじめにファイバーバンドルを改めてとりあげる。

多様体 M 上に空間 P を考え、接続 G, 射影 π を持つ主束を (P, M, G, π) とする。G は左作用の Lie 群であるとする。また、射影 π は

$$\pi : P \to M$$

とし、$q \in P, x = \pi(q) \in M, p \in \pi^{-1}(x)$ である。左作用は

$$\Phi : G \times P \to P$$

$$\Phi(g, p) = \Phi_g(p) = p \cdot q$$

と表される。これは [47] にわかりやすい図があるので引用する。

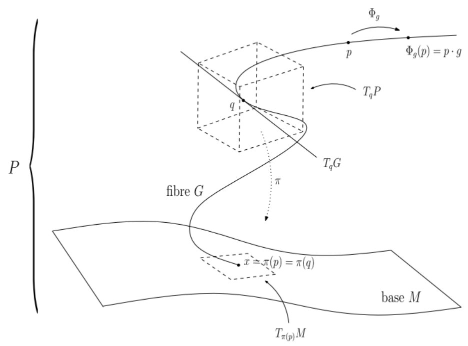

Figure 2.1: Visualizing a local representation of a principal bundle.

図 17.1: principal bandle[47] より

この図で見るように P 上の点 q を通る連続曲線が $fibreG$ である。よって T_qG は接線で描かれている。これに対し、T_qP は線ではなく、空間になる。$fibreG$ 上の異なる点 p は

$$\Phi_g(p) = p \cdot g \tag{17.1}$$

によってファイバー上を移動する。しかし、$T_{\pi(p)}M$ への射影はファーバー上で区別はできなく

$$x = \pi(p) = \pi(q) \tag{17.2}$$

である。

前節式??で見たようにベクトル空間は接空間 T_qP は垂直部分空間 V_qP と水平部分空間 H_qP に分けることができた。これを図では立体空間として表現してある。

$$T_qP = V_qP \oplus H_qP$$

ただし、垂直部分空間は次のように定義された。

$$V_qP = ker(\pi_*)$$

ここで π_* は 14.6 でみた引き戻し (pull back) の逆で (push forward) で先に移動させることを表す。これは局所的な規則で強力である。この時、水平部分空間 H_qP は次元が

$$dim(T_qP) - dim(T_qG)$$

で決まる。よって今度は V_qP は接線で描かれたのに対し次の図のように H_qP が面を表している。これは式 **??**で定義したような 1 形式と 2 形式がつくられ、V_qP, H_qP が次のような 3 重積のように対応する。

$$A \cdot (B \times C)$$

従って接続 G 上に沿った移動は g によって垂直空間は

$$\Phi_g : V_{q \cdot g}P$$

に写るが、水平空間は次のように先に移動する。

$$(\Phi_g)_* : H_{q \cdot g}P$$

が対応する。これは連続した曲面を構成していく。

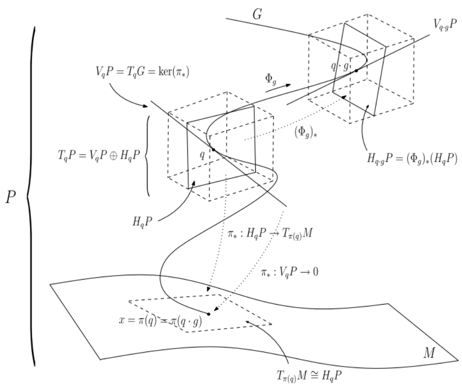

Figure 2.2: Horizontal spaces.

図 17.2: Horizontal spaces[47] より

この時 fibreG 上を　点 p が次の写像 Φ_g で $p \cdot q$ に移動したが H_qP を表している面は

$$H_{q \cdot g}P = (\Phi_g)_*(H_qP)$$

で移動している。$(\Phi_g)_*$ は左作用し、H_qP の部分空間に

$$(\Phi_g)_* : T_qP \to T_{\Phi_g(q)}P$$

として作用するとみなせる。
これは M 上に $x = \pi(q) = \pi(p)$ が射影されているがこれを含む面が

$$\pi_*(H_qP) = T_{\pi(q)}M \tag{17.3}$$

で表されることになる。この図で点 q, 線 T_qG, 面 $T_{\pi(p)}M$ の関係をイメージしておくことが重要である。また、この写像が同相であるためには次元が等しく、

$$dim(H_qP) = dim(T_{\pi(q)}M)$$

になっている。

17.1 one-parameter 表示

ここでリー代数 $\mathfrak{g} \in G$ を用いて接空間での各点 q はリー代数の要件を満たすとする。

$$T_q G \simeq \mathfrak{g}$$

とすると、Lie 代数をもちいて微分幾何を構築できる。そこで $\mathfrak{g}$ を P 上の 1 形式として接続 1 形式を考える。$e \in G$ として $\mathfrak{g} \simeq T_e G$ とし、$\mathfrak{X}$ を前節式??で定義した左不変のベクトル空間とする。$X_\xi \in \mathfrak{X}_L(G)$ として

$$X_\xi \in \mathfrak{X}_L(G)$$

で左不変のベクトルを表す。この時、$\xi \in \mathfrak{g}$ とし、次を満たす点を $t=0$ で考える。

$$X_\xi(e) = \xi$$

これは前節式??から $g_\xi(t)$ が積分曲線になることを示し、G の one-parameter 部分空間になる。

$$exp(\xi) = g_\xi(1)$$

$$exp(t\xi) = g_\xi(t) \in G$$

この時 $\mathcal{V} \in T_q P$ をベクトルとして $H_p P$ と $V_p P$ の射影関係を参照 [47] では次のように図示している。

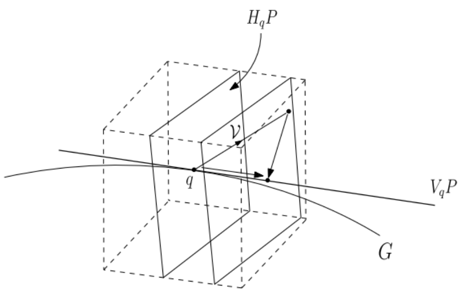

図 17.3: $T_q P = V_q P \oplus H_q P$[47] より

これは前節の図 12.6 に相当している。点線の立体が $T_q P = V_q P \oplus H_q P$ を表す。
one-parameter 部分群の生成は次のようになされた。

$$\xi_P(q) = \frac{d}{dt}\Phi(g_\xi(t), q)|_{t=0}$$

ファイバー上の移動は $\Phi(g,q) = q \cdot g$ だから

$$\begin{aligned}
\xi_P(q) &= \frac{d}{dt}\Phi(g_\xi(t), q)|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}\left(q \cdot g_\xi(t)\right)|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}\left(q \cdot exp(t\xi)\right)|_{t=0} \\
&= q\,\xi
\end{aligned}$$

となり、ベクトル場 X_ξ と積分曲線の関係がパラメタ t の曲線で参照 [47] では次のように空間 P を図示している。

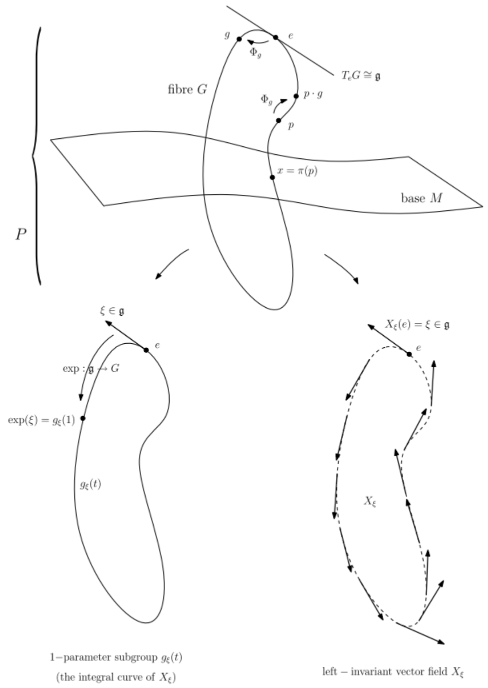

図 17.4: 主束上の左作用 [47] より

つまり、one-parameter 群と左作用不変のベクトル場は同じものを表していて、ファイバーの底空間を貫通していく閉曲線を形成する。Φ_g がこの曲線上の移動をになっている。

さらに $\omega_p \in \mathfrak{g}$ の 1 形式として次の関係式を満たす。

$$\begin{aligned} \omega_p(\xi_P(q)) &= \xi \ \ \forall \xi \in \mathfrak{g} \\ \omega_{\Phi_{g(q)}}\left([(\Phi_g)_*|_q]\,\mathcal{V}\right) &= Ad_g(\omega_g(\mathcal{V})),\ \ \forall \mathcal{V} \in T_qP, \forall g \in G \end{aligned} \tag{17.4}$$

ここで $Ad_g : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}(g \in G)$ は式 8.11 の随伴演算子である。よって内積の要請から

$$Ad_g(\sigma) = g^{-1}\sigma g \ \ g \in G, \sigma \in \mathfrak{g}$$

である。これから式 17.4 は

$$\omega_{\Phi_{g(q)}}\left([(\Phi_g)_*|_q]\,\mathcal{V}\right) = \Phi_g^{-1}(\omega_q(\mathcal{V}))\Phi_g,\ \ \forall \mathcal{V} \in T_qP, \forall g \in G \tag{17.5}$$

で表される。この様子を参照 [47] では次のように図示している。

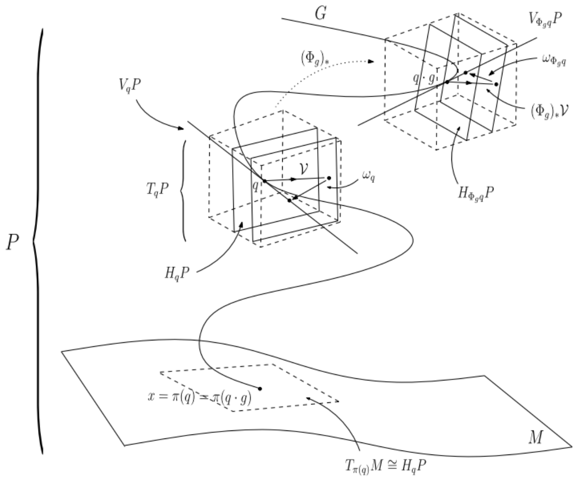

図 17.5: G 不変な接続形式 [47]

このイメージ図から式 17.3 と 17.5 の間の双対性が連続したパラメタ曲線に必要であることを示唆している。射影空間上の値が 2 次元、3 次元の空間の作用から決まる力学をさらに考察していく必要がある。

17.2 平行移動

主束 P 上で $t \in [c, d] \subset \mathbb{R}$ として Path を次で表す。

$$t \mapsto q(t) \in P$$

平行移動

この Path は水平空間にあり、接ベクトル $\dot{q}(t)$ は各 t での $H_{q(t)}P$ の接続により決められる。

しかし、式 17.4 で見たように水平部分空間は 1 形式の ω の接続の Kernel の定義によって決められる。従って、全ての $\forall t$ に対して

$$\omega(\dot{q}(t)) = 0 \tag{17.6}$$

をみたす path が $q(t)$ である。

これから常に垂直空間において $q(t)$ に対しての接ベクトル $\dot{q}(t)$ の成分が 0 になるわけである。

この水平部分空間上の Path$q(t)$ の時間変化 $q(t_1), q(t_2), q(t_3)$ の様子が次に描かれている。

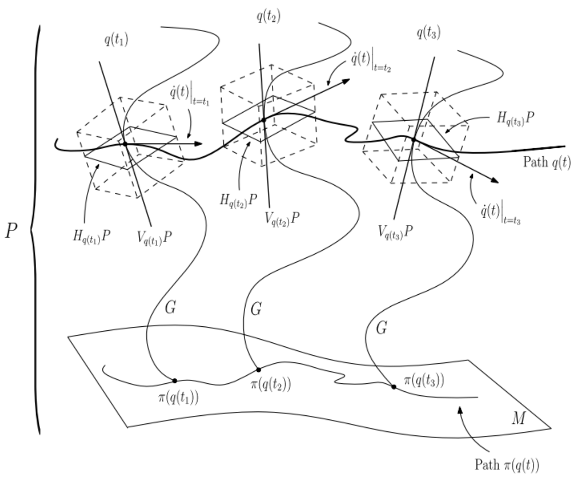

図 17.6: 主束上の Path の t の変化 [47]

これは前節式??でみた水平持ち上げの様子を表している。その式の図と比べてみると時間の進みがよくわかる。この図では時間推進毎に曲線 G が描かれていることに注意する。

今回の水平持ち上げを次のように表そう。

$$\hat{q}(t) = q(t)a(t) \tag{17.7}$$

ただし

$$a(t) \in G$$

Rupert Way は次のような微分である。式 17.7 の時間微分について考えると接続 ω について式 17.6 の関係がある。

$$\omega\left(\dot{\hat{q}}(t)\right) = 0$$

ここでこの $a(t)$ に前節の接続の微分方程式式??から次の条件を課す。

$$\dot{a}(t)a^{-1}(t) = -\omega\left(\dot{q}(t)\right) \tag{17.8}$$

この時、$a(c) = e$ を満たす c は次を満たす。

$$q(c) = \hat{q}(c)$$

この様子を図示すると次のようになる。

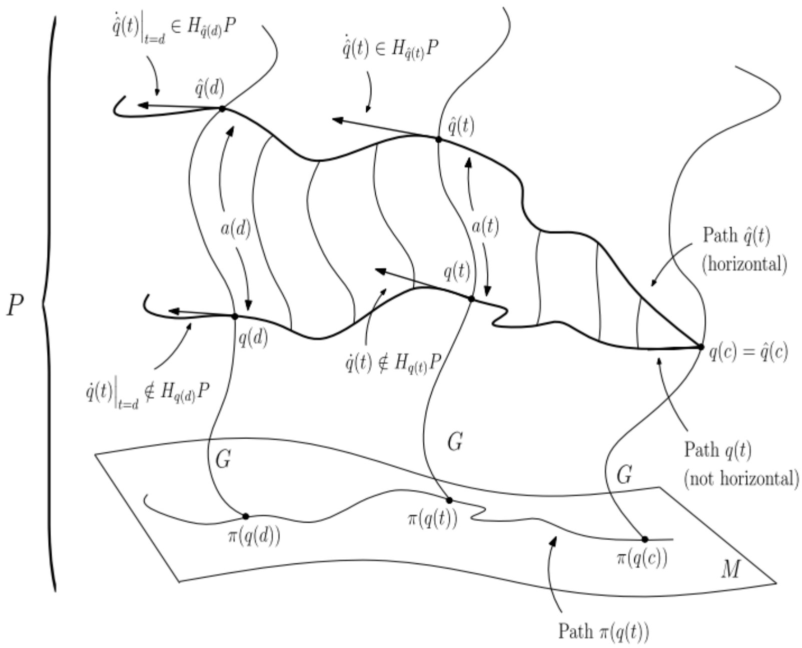

図 17.7: 垂直移動を伴う水平方向の変化 [47]

この図は水平部分空上での path の変化が持ち上げのない場合と比較して描かれている。

持ち上げられている path は $\hat{q}(t)$ でそうでない path が $q(t)$ である。重要なのは接ベクトルを考える場合で $\hat{q}(t)$ に沿った接ベクトルは

$$\dot{\hat{q}}(t) \in H_{\dot{\hat{q}}(t)}P$$

となるが

$$\dot{q}(t) \notin H_{\dot{q}(t)}P$$

であり、水平部分空間の要素ではなくなる。

17.3 Hopf 写像

Rupert Way はもし物理的な観測可能な u が解として得られれば c を複素数として

$$c = re^{i\theta}$$

u は固有値として superfluous な情報を持つ。しかし、これらは通常の解析の対象に現れることがない。例えば大きさを表す r と位相をしめす θ がそうである。

従ってここで考える自然な空間は前節でも取り上げた複素射影空間 $\mathbb{C}P^{n-1}$ を考えると $\mathbb{C}^n$ 上の path に沿って進んだ場合の固有値として重要な意味を持つ。その例が Hopf 写像である。前節で紹介したように Hopf 写像は

$$\pi : S^{2n-1} \to \mathbb{C}P^{n-1} \ \ z \in S^{2n-1}$$

で与えられる。これを次のような写像で表す。

$$z = (z_1, z_2, \cdots z_n) \in S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n \mapsto [z_1, z_2, \cdots z_n] \in \mathbb{C}P^{n-1}$$

これを先の水平、垂直空間にわけることに対応させる。主束を $U(1)$ とし、底の base を $\mathbb{C}P^{n-1}$ とし、全空間が S^{2n-1} となる次のような対応を考える。

$$\begin{array}{cc} & S^{2n-1} \\ U(1) \to & \downarrow \\ & \mathbb{C}P^{n-1} \end{array}$$

つまり、主束 $P = S^{2n-1}$ とし、底の多様体を $M = \mathbb{C}P^{n-1}$、接続は $G = U(1)$ とし、リー代数を $\mathfrak{g} = i\mathbb{R}$ とする。$n = 2$ において Hopf 写像を次のようにおく

$$\pi : \mathbb{C}^2 \supset S^3 \to S^2$$

$$(z_1, z_2) \mapsto \pi(z_1, z_2) = \left(\bar{z}_1 z_2 + z_1 \bar{z}_2, i(\bar{z}_1 z_2 - z_1 \bar{z}_2), |z_1|^2 - |z_2|^2\right)$$

するとたしかに

$$|\pi(z_1, z_2)|^2 = \left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right)^2$$

が成り立つののので

$$(z_1, z_2) \in S^3 \implies \pi(z_1, z_2) \in S^2$$

である。さらに $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ 上の各点は写像 π によって $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ 上の点に写る。

さらに、$e^{i\theta} \in U(1)$ として

$$\pi(e^{i\theta}(z_1, z_2) = \pi\left((e^{i\theta} z_1, e^{i\theta} z_2)\right) = \pi\left((z_1, z_2)\right)$$

が成り立っている。

ここでは v, ω の記号を用いて

$$v \in S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$$

とし、さらに

$$\omega \in S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$$

$$\theta \in \mathbb{R}$$

として v を $v(e^{i\theta},[\omega])$ で表す。ただし、$[\omega]\in\mathbb{C}P^{n-1}$ とする。すると $\omega, e^{i\theta}$ らは共に S^{2n-1} 上の点であり

$$\pi : S^{2n-1}\to\mathbb{C}P^{n-1}$$

$$e^{i\theta}\omega\mapsto[\omega]$$

が対応する。ファイバーの考えでは要素 $[\omega]\in\mathbb{C}P^{n-1}$ が $S^1-fibre$ で S^{2n-1} 上の点で底は同じ点に射影される。$\mathbb{C}P^{n-1}$ 上では同じでも θ が位相として S^{2n-1} 上の差を表す。垂直ベクトルはファイバーの接ベクトルから決められ、θ によってパラメタライズされると考えてよい。

この時、垂直ベクトルは間隔

$$\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\right\}$$

で決められる。

一般に $\mathbb{C}^{n+1}$ 内のトーラスは $\mathbb{C}^*=GL_1(\mathbb{C})$ であり、スカラー積 v

$$\vec{z}\mapsto\lambda\cdot\vec{z}$$

から連続した曲線をつくる。射影 $\mathbb{C}P^n$ により、これは $\mathbb{C}^{n+1}$ 内のモジュライ 1 次元部分空間を単位球 $S^{2n+1}\in\mathbb{C}^{n+1}$ 上につくる。これは結局 $S^1=U(1)\leq C^*$ となる $S^1-bundle$ を次のようにつくることである。

$$S^1\hookrightarrow S^{2n+1}\xrightarrow{\pi}\mathbb{C}P^n$$

Hopf バンドルは $n=1$ の特別な場合であり、このとき

$$\mathbb{C}P^1\simeq S^2$$

である。

17.4 位相空間の階層

立体射影と Hopf 写像を見てきたのでこれを用いて $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 上の path を考える。単位球 S^{2n-1} 上の path を $\mathbb{C}P^{n-1}$ の成分と S^1 の成分に分けることを考えよう。前節で $S^1-bundle$ の構造を持つ Hopf 写像を見てきた。そこで自然な階層分けとして次のような階層を考える。

$$\begin{array}{ccc}
(u\in) & \mathbb{C} & \simeq\ \mathbb{R}^{2n} \\
 & \downarrow & \\
(u\in) & \mathbb{C}\setminus\{0\} & \\
 & \downarrow & \\
(v,\omega\in) & S^{2n-1} & \\
 & \downarrow & \\
([v],[\omega]\in) & \mathbb{C}P^{n-1} &
\end{array}$$

ここでは Hopf バンドルの path$v$ を次のような自然なパラメタを用いて記述する。

$$v(x)=e^{i\theta(x)}\omega(x)$$

$$x\in[x_0,x_1]\subset\mathbb{R}$$

ただし、$x\in\mathbb{R}$ とし $v(x)$ は単位球 S^{2n-1} 上の path であり、$\omega(x)$ もまた単位球 S^{2n-1} 上の path である。

どんな $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 上の path も次のように射影される。例えば $n=2$ とすると

$$\pi\circ P:\mathbb{R}^4\to S^3\to S^2$$

この様子は次の図で表される。

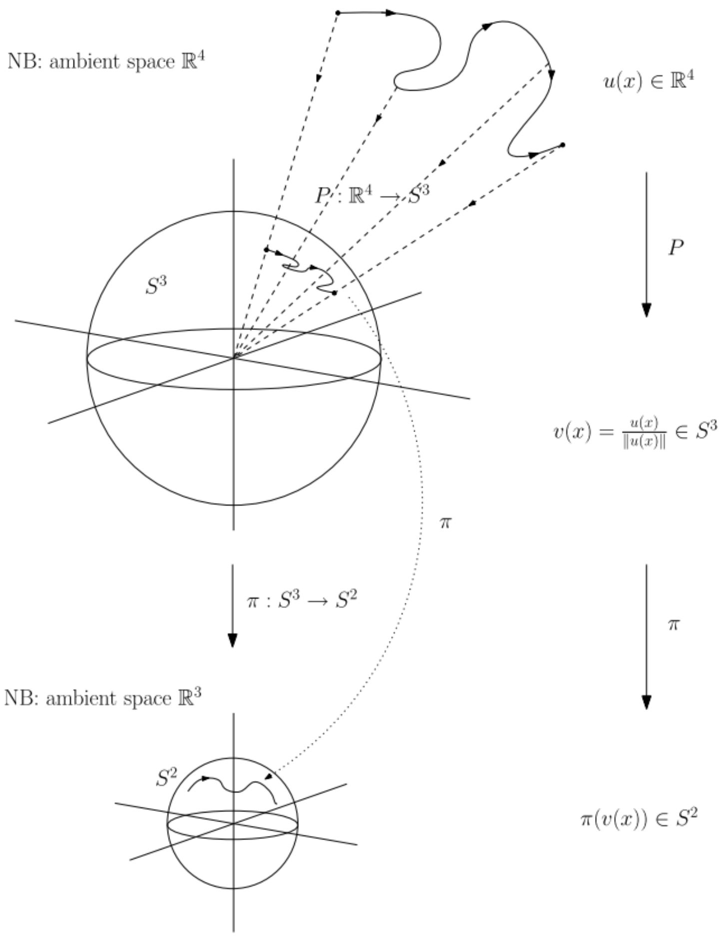

図 17.8: 合成写像による空間の階層化 [47] より

つまり、$\mathbb{R}^4$ 内の連続曲線が射影 P により $\mathbb{R}^4$ 内に埋め込まれた S^3 上の曲線に射影される。

次にこの S^3 上の曲線は射影 π により $\mathbb{R}^3$ 内に埋め込まれた S^2 上の曲線に射影される。

ここで $\omega(x)$ も S^{2n-1} 上の path とし、$\theta(x)$ は局所座標に依存するとする $v(x)$ と $\omega(x)$ は S^{2n-1}上 にあるわけだから、次のような回転で結ばれる。

$$v(x) = e^{i\theta(x)}\omega(x) \tag{17.9}$$

これらは式 17.2 から $\mathbb{C}P^{n-1}$ 上では同じ path を通る。

式 17.8 において

$$a(x) = e^{i\theta(x)}$$

とすると $v(x)$ が S^3 にあり、これを射影し $\pi(v(x))$ は S^2 にある。図には S^3 では 2 周期分が S^2 で 1 周期分になることに注意する。

ベクトル束の式 17.8 で見たように $\omega(x)$ が接続の性質を満たせば

$$\left[\frac{d}{dx}(e^{-i\theta(x)})\right] e^{i\theta(x)} = -\omega(v_x)$$

となるがこれはすなわち

$$\theta_x(x) = -i\omega(v_x)$$

であることを示す。これは 1 形式が一般に積分を表すとするとバンドル上の接続 1 形式は path に沿って続 1 形式を積分すると虚軸上に位相の S^{2n-1} 上の曲りを示す。x が x_0 から x_1 に変化する間に $\theta(x)$ が $v(x)$ の速さで球上を動く。

これが Hopf バンドルの姿でもある。この局所的な周回に依存し、別な周回と接触するところでは打消しあうことができない。

17.5 Hopf_bundle の接続 [47]

ここで $\mathbb{C}^n$ 上の接ベクトルを考える。$q \in S^{2n-1}, \mathcal{V} \in T_q S^{2n-1}$ として自然な接続を水平部分の成分を用いて

$$\omega_q(\mathcal{V}) = q^H \mathcal{V} \tag{17.10}$$

で表す。ただし、肩の H は Hermitian 転置を表す。従って次が成り立つ。

$$qq^H \neq q^H q = 1$$

$\mathcal{V}$ は S^{2n-1} 上の単位ベクトルだから Orr-Sommerfeld_equation から

$$\mathcal{V} = (1 - qq^H)\omega + i\alpha q,\ \ \alpha \in \mathbb{R}, \omega \in \mathbb{C}^n \tag{17.11}$$

とかける。この方程式は接空間へのベクトル場からの射影を表している。

これは Stiefel_manifold の特別な場合である。これを水平部分空間での式 17.10 から $q^H q = 1$ を用いると

$$\begin{aligned}
\omega_q(\mathcal{V}) &= q^H \mathcal{V} = q^H \left[(1 - qq^H)\omega + i\alpha q\right] \\
&= \left(q^H - q^H qq^H\right)\omega + i\alpha q^H q \\
&= \left(q^H - q^H\right)\omega + i\alpha \\
&= i\alpha
\end{aligned}$$

となる。従って、ω_q は接ベクトルを Lie 代数 $i\mathbb{R}$ に写す

$$T_q S^{2n-1} \to \mathfrak{g}$$

よって右作用素 Φ と Lie 代数 $\xi \in \mathfrak{g}$ さらに $q \in S^{2n-1}$ として微小変化の演算子

$$\xi_P(q) = q\xi$$

を用いて

$$\omega_q(\xi_P(q)) = \omega_q(q\xi) = q^H q\xi = \xi$$

の関係が必要になる。

ここで $\gamma(s)$ を S^{2n-1} 上の path とする。ただし、$\gamma(0) = q$ である。この時、接ベクトルは

$$\mathcal{V} = \frac{d}{ds}\gamma(s)|_{s=0}$$

である。この $\gamma(s)$ 上の $U(1)$ の右作用は

$$\Phi_g(\gamma(s)) = \gamma(s) \cdot g$$

のようになる。これは

$$\begin{aligned}
\left[(\Phi_g)_*|_q\right]\mathcal{V} &= \left[(\Phi_g)_*|_q\right]\left(\frac{d}{ds}\gamma(s)|_{s=0}\right) \\
&= \frac{d}{ds}\Phi_g(\gamma(s))|_{s=0} \\
&= \frac{d}{ds}(\gamma(s)\cdot g)|_{s=0} \\
&= \left(\frac{d}{ds}\gamma(s)|_{s=0}\right)g \\
&= \mathcal{V}g \quad \forall g \in U(1)
\end{aligned}$$

であり、随伴表現を用いると

$$\begin{aligned}
\omega_{\Phi_g q}\left([(\Phi_g)_*|_q]\mathcal{V}\right) &= \omega_{q\cdot g}(\mathcal{V}g) \\
&= (qg)^H(\mathcal{V}g) \\
&= g^H q^H \mathcal{V} g \\
&= g^{-1}(q^H\mathcal{V})g \quad since\ g \in U(1) \\
&= Ad_g(\omega_q(\mathcal{V})) \qquad (17.12)
\end{aligned}$$

となる。

17.6 平行移動

S^{2n-1} 上のベクトルを

$$v(x) = \begin{pmatrix} v_1(x) \\ \vdots \\ v_n(x) \end{pmatrix} \in S^{2n-1} \subset \mathbb{C}$$

とすると path に沿った自然な接続として

$$\begin{aligned}
\omega &= v^H dv \\
&= Re\left(v^H dv\right) + i\,Im(v^H dv)
\end{aligned}$$

と書くことができる。しかし、複素数の表現を

$$v_1 = (x_1 + iy_1), \cdots v_n(x_n + iy_n),\ ||v|| = 1$$

とすると

$$Re(v^H dv) = 0$$

だから

$$\omega = i\,Im(v^H dv) \qquad (17.13)$$

である。

$$v = \frac{u}{||u||}$$

だから移動の速度の比として

$$\omega = i\,Im(v^H dv) = i\,\frac{Im(u^H du)}{u^H u} \qquad (17.14)$$

を得る。これからいわゆる自然な接続として水平空間上に局所座標の関数として

$$\theta_x(x) = -iv^H v_x = Im(v^H v_x) \qquad (17.15)$$

が成り立つ。

17.7 位相の曲り

水平、垂直部分空間に分けるというアイディアを考えたが、水平空間からのずれは $\mathbb{C}^n$ 内にある S^{2n-1} の実球への接続に相当し、これが前節で紹介した Hopf_bundle と呼ばれるものになる。

ここで Path に沿ったベクトルを $u(x) \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ とし、これに関連してユニークに決まる位相変化を $\theta(x)$ とするとこれが水平空間からのずれになる。従ってこの位相の曲り $\theta(x)$ をいかに決めるかが重要な課題になる

一般的な path を $\hat{\gamma} : \mathbb{R} \supset [x_0, x_1] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ を考え、これは立体射影を表すとする。この path に沿って接続を積分するために S^{2n-1} 上に γ を引き戻し、次のように計算する。これは前部で紹介した S^{2n-1} 上の 1 形式

$$\omega = f(u)du$$

と置き換えることで簡単になる。式 17.14 を用いて

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma} \omega &= \int_{[x_0,x_1]} (\gamma)^* \omega \\
&= \int_{x_0}^{x_1} \left(f(u(x)) \frac{du}{dx} \right) dx \\
&= \int_{x_0}^{x_1} \left(i \, \frac{Im(u^H u_x)}{u^H u} \right) dx
\end{aligned}$$

従って位相 θ は式 17.15 を用いて一般的に $u = u(s)$ として、

$$\theta(x) = \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{Im(u^H u_s)}{u^H u} \right) ds \tag{17.16}$$

となる。この位相変化が局所的な経路に依存することは別部の不可積分位相で取り上げた幾何学的位相と同じである。

そこでさらに次の固有方程式が条件として付け加える場合を考えよう。

$$u_x = Au, \;\; u(x) \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}, \;\; x \in \mathbb{R}, \;\; A \in M_n(\mathbb{C}), \;\; u(0) = u_0 \tag{17.17}$$

これは $u_x = Au$ が位相のみで変化することを表す。$M_n(\mathbb{C})$ は $n \times n$ の複素行列である。これにより $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ に射影される。球上への射影を

$$v(x) = \frac{u(x)}{||u(x)||} \in S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n \tag{17.18}$$

とする。これが作用 A でどう変化するかを見てみよう。大きさと向きに分けてベクトルを微分すると式 17.17 から

$$\begin{aligned}
v_x &= \left(\frac{u}{||u||} \right)_x \\
&= \frac{u_x}{||u||} + u \left[(u^H u)^{-1/2} \right]_x \\
&= \frac{u_x}{||u||} + u \left(\frac{-1}{2} \right) (u^H u)^{-3/2} \left(u_x^H u + u^H u_x \right) \\
&= \frac{Au}{||u||} - \frac{1}{2} \frac{u}{||u||} \frac{1}{||u||^2} \left[(Au)^H u + u^H (Au) \right] \\
&= \frac{Au}{||u||} - \frac{1}{2} \frac{u}{||u||} \left[\frac{u^H}{||u||} A^H \frac{u}{||u||} + \frac{u^H}{||u||} A \frac{u}{||u||} \right] \\
&= Av - \frac{1}{2} v \left[v^H A^H v + v^H A v \right]
\end{aligned}$$

ここで肩の H がエルミート転置であることを考えると

$$\frac{1}{2} \left[\bar{z} + z \right] = Re[z]$$

だから結局

$$v_x = Av - vRe(v^H Av)$$

となる。さらに次の関係を用いると

$$v^H Av = Re\left(v^H Av\right) + iIm\left(v^H Av\right)$$

$$v_x = \left(I - vv^H\right) Av + ivIm\left(v^H Av\right) \tag{17.19}$$

が得られ、**これが** S^{2n-1} **上の** $v(x)$ **を決める運動方程式**である。
次に局所座標を用いて $S^1 \times \mathbb{C}P^{n-1}$ に射影するために

$$v(x) = e^{i\theta(x)}\omega(x)$$

を考えるとこれから $v^H Av = \omega^H A\omega$ が成り立つことを利用し、これを引きもどして

$$\begin{aligned}
\omega_x &= \left(e^{-i\theta(x)}v(x)\right)_x \\
&= e^{-i\theta}v_x - ie^{-i\theta}\theta_x v \\
&= e^{-i\theta}\left[\left(I - vv^H\right)Av + ivIm\left(v^H Av\right)\right] - ie^{-i\theta}\theta_x v \\
&= \left(I - \omega\omega^H\right)A\omega + i\omega Im\left(\omega^H A\omega\right) - i\omega\theta_x \\
&= \left(I - \omega\omega^H\right)A\omega + i\omega Im\left(\omega^H A\omega - \theta_x\right)
\end{aligned} \tag{17.20}$$

となり、位相の x に対する変化は虚成分に効くことがわかる。この項については後に考察する。
この式が $v(x)$ **に対応する fibre**$\omega(x)$ **を決める。運動方程式**である。つまり、初期値 x_0 を考えると次のように $v(x)$ と $\omega(x)$ は $\theta(x_0) = 0$ であれば同じ点からスタートする。

$$v(x) : \{v(x_0)\}, \quad \omega(x)\{v(x_0), \theta(x_0)\}$$

しかし、$\theta(x)$ が変化すると $v(x), \omega(x)$ は S^{2n-1} 上では異なる点に変化していく、$\theta(x)$ の周期性と規格化条件から $\omega(x)$ は S^{2n-1} 上では式 17.18 から S^1 を描く、これが Hopf 写像に相当する。しかし、今後考察しなくてはいけないのはこの $\theta(x)$ の任意性である。この θ が fibre と fibre を結ぶわかだが曖昧な点が多い。
例えばもし、θ_x が一定であれば $v(x)$ と $\omega(x)$ は決まった位相差 θ_0 で結ばれる。これはゲージ変換であり、この空間にゲージ場にる相互作用が働いていることを意味する。この位相差はあらゆる時空点で一挙に一定の θ_0 にならないといけない。こうした θ_x, θ が幾何学的位相やゲージ自由度と関連し、物理現象の時間推進と相互作用を明らかにする観測問題の重要な課題の 1 つである。
この様子を次に図示する。

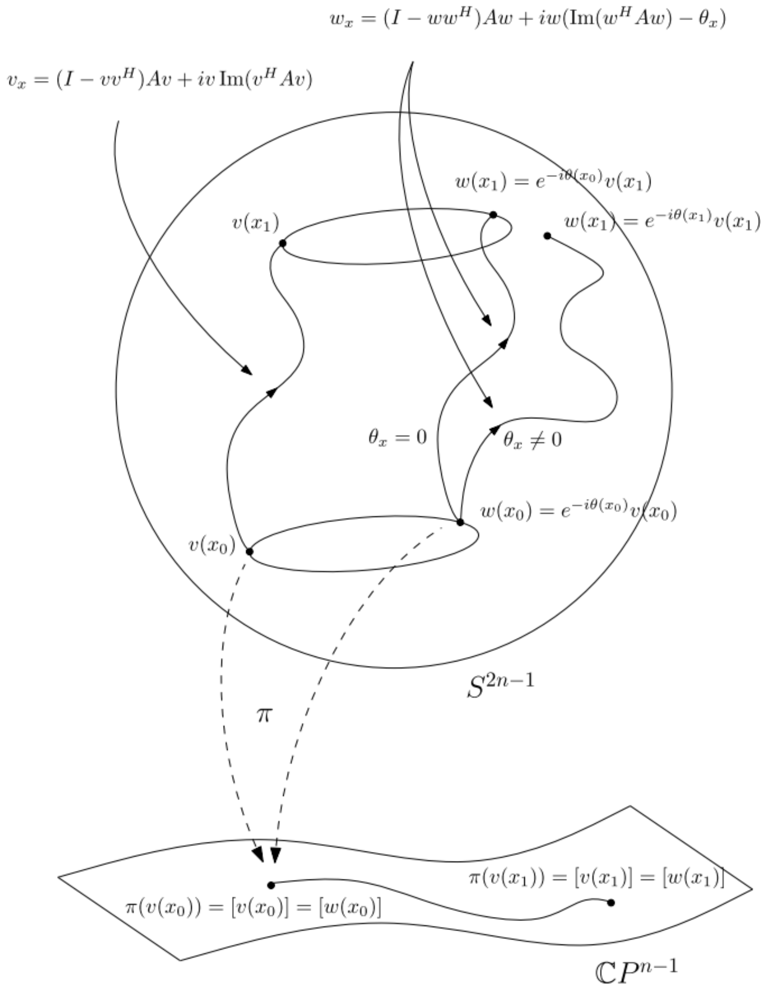

図 17.9: [47] より

注目すべきは $\theta(x)$ の x による変化量が 0 である時の $\omega(x_1)$ と $\theta(x)$ の x による変化量が 0 ではない時の $\omega(x_1)$ はでは S^{2n-1} 上の点が異なることである。また、まとめると次のような特徴がある。

- $x \in [x_0, x_1] \subset \mathbb{R}$, の時は $v(x), \omega(x)$ 共に射影面 CP^{n-1} 上では同一点で S^{2n-1} 上では同一 path 上の点になる。

- S^{2n-1} 上の $v(x)$ の path 上の点それぞれに対応し、円周 $S^1 - fibre$ が $\omega(x) = e^{-i\theta(x)}v(x)$ に対応し、これらは射影平面 $\mathbb{C}P^{n-1}$ 上では同じ点になる。

次に式 17.20 の虚数項にある

$$i\,Im(\omega^H A\omega)$$

について考える。これは $\omega(x)$ の path が

$$u_x = Au \;\; u \in \mathbb{C}^n, A \subset M_n(\mathbb{C})$$

の微分方程式に従い、水平部分空間上の自然な接続条件

$$\theta_x(x) = Im\left(\omega^H A\omega\right)$$

が成り立つとすると式 17.20 は単純に

$$\omega_x = (I - \omega\omega^H)A\omega$$

となるが、これは水平部分空間では実空間上の微分方程式

$$u_x = Au \;\; u \in \mathbb{R}^n, A \subset M_n(\mathbb{R})$$

と同じである。従ってこのような微分方程式が成り立つ場合位相 $\theta(x)$ は式から

$$\theta(x_1) = \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{Im(u^H Au)}{u^H u} \right) ds \tag{17.21}$$

となり、これを足し合わせ

$$\sum^n \theta(x) \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{Im\left(u^H Auu^H Au \cdots uu^H Au\right)}{\left(u^H u\right)^n} \right) ds$$

を考えると

$$uu^H = 1, \;\; u^H u = 1$$

が成り立てば

$$\sum^n \theta(x) = \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{Im(u^H Au)^n}{u^H u} \right) ds = \theta^n$$

が成り立つ。

17.8 4 元数

Hopf bundle を考えるのに式 16.14 でみた 4 元数を用いよう。前回と同様に次のように定義する。

$$\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

4 元数の行列として、$J_1, J_2, J_3, K_1, K_2, K_3$ を次のように決める。 b

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{17.22}$$

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{17.23}$$

すると Lie 代数を満たす $\mathfrak{so}(4)$ の基底ができる。これにより、例えば

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix} = aI_4 + bK_2 + cK_3 + dK_1$$

である。これらの定義により各成分が次の関係を満たす。

$$J_i^2 = -I_4, \;\; K_i^2 = -I_4 \;(i = 1, 2, 3)$$

$$J_i J_j = \epsilon_{ijk} J_k \;\; K_i K_j = \epsilon_{ijk} K_k \;(i = 1, 2, 3)$$

また、次の共役作用素を定義する

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

この時、J, K は次の関係で結ばれる。

$$K_1 = R^T J_3 R$$

$$K_2 = R^T J_1 R$$

$$K_3 = R^T J_2 R$$

この関係は逆もまた同様に成り立つ。

重要なのはこれらから $\mathbb{R}^4$ の基底をつくることができることである。例えば

$$\xi \in \mathbb{R}^4,\ \ \xi \neq 0$$

をとると $i \neq j$ の時、K_i の歪対称性を利用して $\langle \xi | K_j \xi \rangle = 0$ であり

$$\langle K_i \xi | K_j \xi \rangle = \left\langle \xi | K_i^T K_j \xi \right\rangle = \langle \xi | - K_i K_j \xi \rangle = \langle \xi | - \epsilon_{ijk} K_k \xi \rangle = 0$$

だから

$$\{\xi, K_1\xi, K_2\xi, K_3\xi\}$$

の基底は互いに直交している。

これから 1 つの S^3 に直交した 4 元ベクトル $v \in S^3$ をとると接ベクトルは直交する他の 3 成分の距離になるから

$$T_v S^3 = span\{K_1 v, K_2 v, K_3 v\}$$

となるののでこれらの 4 元ベクトルは 3 次元球の接空間の基底を表すのに適している。

18 Hopf 束

再び、ここで Hopf 束を考える。式 16.21 で見たように複素平面を考え、

複素座標として $(z_1, z_2) \in S^3 \subset \mathbb{C}^2$ をとると

$$\Phi : S^1 \times S^3 \to S^3$$

を次の写像で表す。

$$(e^{i\theta}, (z_1, z_2)) \mapsto (e^{im\theta} z_1, e^{in\theta} z_2),\ \ (m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$$

特に S^3 の点を異なる点に回転させると S^1 の作用は

$$m, n = \pm 1$$

の場合は特別に異なった座標系で示すことができる。Cushman の著書などに紹介されている。

ここでは複素座標として $z \in S^3 \subset \mathbb{C}^2$ をとり、$m = n = 1$ の場合

$$\Phi : S^1 \times S^3 \to S^3$$

$$(e^{i\theta}, z) \mapsto e^{i\theta} z \tag{18.1}$$

を考えよう。この時の Hopf 写像は次のようになる。

$$\pi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2Re(z_1\bar{z}_2) \\ 2Im(z_1\bar{z}_2) \\ |z_1|^2 - |z_2|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 z_2 + z_1\bar{z}_2 \\ i(\bar{z}_1 z_2 + z_1\bar{z}_2) \\ |z_1|^2 - |z_2|^2 \end{pmatrix}$$

ここで z は次のような成分を持つ

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + iy_1 \\ x_2 + iy_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

さらにここで次のような実、虚座標を成分に持つ 4 元ベクトルを

$$v \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Re(z_1) \\ Re(z_2) \\ Im(z_1) \\ Im(z_2) \end{pmatrix} \in S^3 \subset \mathbb{R}^4 \tag{18.2}$$

と置き、さらに射影 π を

$$\pi : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(x_1x_2 + y_1y_2) \\ 2(x_2x_1 - x_1y_2) \\ x_1^2 + y^2 - x_2^2 - y_2^2 \end{pmatrix}$$

とすると位置 v において接平面写像 $\pi_* : T_vS^3 \to T_{\pi(v)}S^2$ が定義できて、

$$\pi_* = 2 \begin{pmatrix} x_2 & x_1 & y_2 & y_1 \\ -y_2 & y_1 & x_2 & -x_1 \\ x_1 & -x_2 & y_1 & -y_2 \end{pmatrix}$$

となる。この時確かに、

$$\pi_* v = \begin{pmatrix} 2(x_1x_2 + y_1y_2) \\ 2(x_2x_1 - x_1y_2) \\ x_1^2 + y^2 - x_2^2 - y_2^2 \end{pmatrix}$$

が成り立つ。

次に前節で水平、垂直部分空間に分けたので、ここでも Hopf 主束を垂直空間として v, V_v を考える。ただしこれらは $Ker(\pi_*)$ になっている。今 $a \in T_vS^3$ を考える。ただし、この接空間の基底は式 17.23 の 4 元数を用いて

$$\{K_1v, K_2v, K_3v\}$$

で表されたから、一般に a は $c \in \mathbb{R}$ として、

$$a = c_1K_1v + c_2K_2v + c_3K_3v$$

従って垂直空間のベクトルは実成分のかけ算で push forward と距離 span を用いて次のようにおく。

$$\begin{aligned} V_v &= \ker(\pi_*)|_{T_vS^3} \\ &= span\{K_3 v\} \\ &= span\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right\} \\ &= span\left\{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}\right\} \\ &= \left\{\alpha\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}\right\} \end{aligned} \tag{18.3}$$

ただし、$\alpha \in \mathbb{R}$ である。ただし、これを元の複素数で表示すると

$$\left[\alpha\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}\right] \in \mathbb{R}^4 \leftrightarrow \left[\alpha\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + i\alpha\begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}\right] \in \mathbb{C}^2$$

という対応があるが、

$$\begin{aligned} \alpha\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + i\alpha\begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} &= -i\alpha\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ -x \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right] \\ &= -i\alpha\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

とかけるので

$$V_z = \{-i\alpha z : \alpha \in \mathbb{R}\} = span\{iz\}$$

となる。しかし、重要なのは複素座標上では式 18.1 のように位相がかかり $e^{i\theta}z$ が位置を示すがこれが次のような微分の関係で表すことができることである。

$$\left[\frac{d}{d\theta}\left(e^{i\theta}z\right)\right]_{\theta=0} = ie^{i\theta}z|_{\theta=0} = iz$$

$\theta = 0$ の切断により、この微分演算を作用に選ぶとうまく当てはまるが、他の演算も定義できる可能性もある。

18.1 群作用

複素作用での群作用が

$$\Phi : S^1 \times S^3 \to S^3, (e^{i\theta}, z) \mapsto e^{i\theta}z$$

で表されたが、これを実座標で表現すると次のように変数を分離できる。

$$\begin{aligned} e^{i\theta}z &= \begin{pmatrix} e^{i\theta}z_1 \\ e^{i\theta}z_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\cos\theta + i\sin\theta)(x_1 + iy_1) \\ (\cos\theta + i\sin\theta)(x_2 + iy_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1\cos\theta - y_1\sin\theta \\ x_2\cos\theta - y_2\sin\theta \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} x_1\cos\theta + y_1\sin\theta \\ x_2\cos\theta + y_2\sin\theta \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{18.4}$$

そこで実、虚空間を共に表現するための G_θ を用いる。前節式 17.1 で定義したように G がファイバーである。

$$\begin{aligned} G_\theta v &= G_\theta \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1\cos\theta - y_1\sin\theta_1 \\ x_2\cos\theta - y_2\sin\theta \\ x_1\cos\theta + y_1\sin\theta \\ x_2\cos\theta + y_2\sin\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I_2\cos\theta & -I_2\sin\theta \\ I_2\sin v & I_2\cos\theta \end{pmatrix} v \end{aligned} \tag{18.5}$$

と表され、これはまさに実、虚空間の回転に相当する。

ここで G はリー群であり、リー環を構成するとする。すると前節でみたように指数写像を持つことができて $t \in \mathbb{R},\ \xi \in \mathfrak{g}$ として

$$t \mapsto \exp(t\xi)$$

と書ける。$t = 0$ での接ベクトルは $\exp(\xi)$ となる。1 パラメタ群を

$$\exp(t\xi) = g_\xi(t) \in G$$

で表すとする。ここでは 4×4 の行列を考え、

$$K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$G_\theta = e^{-K_3\theta}$$

とおくと、写像

$$\phi : G \to H$$

は Lie 群の写像で $\forall g_1, g_2 \in G$ であれば

$$\phi(g_1 \circ g_2) = \phi(g_1) \circ \phi(g_2)$$

が成り立つ。さらに H が一般線型群 $GL_n(\mathbb{R})$ か $GL_n(\mathbb{C})$ であれば ϕ は G の表現である。

行列を利用して Lie 群と Lie 代数を表すことができる。これは $m\times m$ の行列を A とすると e^A もまた、$m\times m$ の行列になる。

$\{K_1,K_2,K_3\}$ を Lie 代数 S^3 の基底として、式 18.3 から

$$\mathfrak{g}\simeq T_eG,\ T_vS^3=span\{K_1v,K_2v,K_3v\}$$

とおくと、これは Lie 群 $SU(2)$ が Lie 代数 S^3 と微分同相であるとして $\theta\in\mathbb{R}$ を用いて T_vS^3 上のベクトルを K_3v で表す。式 17.23 から次の行列を対応させる。

$$\theta\to\exp(\theta K_3)$$

これは $\mathbb{R}^4$ を張り、内訳が 1 パラメタの S^1 の $U(1)$ 群と S^3 の $SU(2)$ 群になる。これから $\theta=0$ で K_3v になる。これを垂直成分の方向にとる。θ の符号が反対の場合もあり得るので

$$G_\theta=e^{-K_3\theta} \tag{18.6}$$

とかける。$\{K_1,K_2,K_3\}$ を基底として一般に T_vS^3 の実成分 $a,b,c\in\mathbb{R}$ を用いて

$$\tilde{K}=aK_1+bK_2+cK_3$$

と表すことができるから 4 元数の性質を用いれば

$$\begin{aligned}
\tilde{K}^2 &= (aK_1+bK_2+cK_3)(aK_1+bK_2+cK_3)\\
&= \left(-a^2-b^2-c^2\right)I_4+(aK_1bK_2+\cdots bK_2aK_1+\cdots)\\
&= \left(-a^2-b^2-c^2\right)I_4+(abK_3+\cdots-abK_3+\cdots)\\
&= \left(-a^2-b^2-c^2\right)I_4
\end{aligned}$$

となるので $\alpha^2=a^2+b^2+c^2$ とおけば

$$\tilde{K}^2=-\alpha^2I_4$$

と単純になることを利用して、式 18.6 を展開すると奇数と偶数に分けて、

$$\begin{aligned}
e^{\tilde{K}\theta} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\tilde{K}\theta)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\tilde{K})^n\theta^n}{n!}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\tilde{K})^{2n}\theta^{2n}}{2n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\tilde{K})^{2n+1}\theta^{2n+1}}{(2n+1)!}\\
&= I_4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\alpha^2)^n\theta^{2n}}{2n!}+\tilde{K}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\alpha^2)^n\theta^{2n+1}}{(2n+1)!}\\
&= I_4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\alpha^{2n}\theta^{2n}}{2n!}+\tilde{K}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\alpha^{2n}\theta^{2n+1}}{(2n+1)!}\\
&= I_4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(\alpha\theta)^{2n}}{2n!}+\frac{\tilde{K}}{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(\alpha\theta)^{2n+1}}{(2n+1)!}\\
&= I_4\cos(\alpha\theta)-\frac{\tilde{K}}{\alpha}\sin(\alpha\theta)\\
&= I_4\cos(\alpha\theta)-\frac{\sin(\alpha\theta)}{\alpha}(aK_1+bK_2+cK_3)\\
&= \begin{pmatrix}
\cos(\alpha\theta) & -b\frac{\sin(\alpha\theta)}{\alpha} & -c\frac{\sin(\alpha\theta)}{\alpha} & -a\frac{\sin(\alpha\theta)}{\alpha}\\
b\frac{\sin(\alpha\theta)}{\alpha} & \cos(\alpha\theta) & a\frac{\sin(\alpha\theta)}{\alpha} & -c\frac{\sin(\alpha\theta)}{\alpha}\\
c\frac{\sin(\alpha\theta)}{\alpha} & -a\frac{\sin(\alpha\theta)}{\alpha} & \cos(\alpha\theta) & b\frac{\sin(\alpha\theta)}{\alpha}\\
a\frac{\sin(\alpha\theta)}{\alpha} & c\frac{\sin(\alpha\theta)}{\alpha} & -b\frac{\sin(\alpha\theta)}{\alpha} & \cos(\alpha\theta)
\end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{18.7}$$

と求まる。
注目すべきはこの行列要素は全て実数である点である。もし

$$a = b = 0,\ c = -1$$

$$G_\theta = \begin{pmatrix} I_2 \cos\theta & -I_2 \sin\theta \\ I_2 \sin v & I_2 \cos\theta \end{pmatrix} = I_4 \cos\theta - K_3 \sin\theta \tag{18.8}$$

とすれば、これは 18.5 に等しい。
また、$a^2 + b^2 + c^2 = 1, \alpha = \pm 1$ の時が Hopf 写像になる。

18.2　水平作用

$\{K_1 v, K_2 v, K_3 v\}$ が $T_v S^3$ の直交成分になった。この内、$K_3 v$ は垂直方向をしめした。そこで次に水平成分 $H_v S^3$ について考えよう。まず接ベクトル空間を次のように分解する。

$$T_v S^3 = V_v S^3 \oplus H_v S^3$$

そこでの移動は式 17.4 定義した push forward を用いて

$$(\Phi_g)_*(H_v S^3) = H_{\Phi_g(v)} S^3 \tag{18.9}$$

で表し、$\{K_1 v, K_2 v\}$ が水平部分空間の基底であると考える。
そこで垂直方向の変化が水平方向に影響すると考え、次のようなベクトルを仮定すると

$$\{K_1 v + \delta_1 K_3 v, K_2 v + \delta_2 K_3 v\}$$

微小な距離

$$\begin{aligned} \zeta_1(\delta_1) &= K_1 + \delta_1 K_3 \\ \zeta_2(\delta_2) &= K_2 + \delta_2 K_3 \end{aligned} \tag{18.10}$$

を定義できる。よって

$$K_1 v + \delta_1 K_3 v = \zeta_1 v$$

$$K_2 v + \delta_2 K_3 v = \zeta_2 v$$

とかけ、位置 v で次のような空間ベクトルを定義できる。

$$\{\zeta_1 v, \zeta v_2\}$$

これは式 18.9 を満たし、次のように表すことができる。

$$span\{G_{\theta *}(\zeta_1 v), G_{\theta *}(\zeta_2 v)\} = span\{\zeta_1 G_{\theta *}(\zeta_1 v), G_{\theta *}(\zeta_2 v)\}$$

ただし、次のような対応があったことを思い出そう。

$$G_\theta : S^3 \to S^3,\ \ G_{\theta *} : T_v S^3 \to T_{G_\theta(v)} S^3$$

また、接ベクトル $\mathcal{V} \in \mathbb{R}^4$ は S^3 上の $v(t)$ の path において $t = 0$ において

$$\mathcal{V} = \frac{d}{dt} v(t)|_{t=0}$$

で定義される。よって G_θ が θ のみに依存することから

$$\begin{aligned}
[G_{\theta*}|_v]\,\mathcal{V} &= [G_{\theta*}|_v]\,\frac{d}{dt}v(t)|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}\left[G_\theta(v(t))\right]_{t=0} \\
&= G_\theta\left[\frac{d}{dt}(v(t))\right]_{t=0} \\
&= G_\theta\mathcal{V}
\end{aligned}$$

であるから

$$(G_\theta)_* = G_\theta \tag{18.11}$$

が確認できる。つまり群作用は path の移動に対して不変である。

また、次のように入れ替えができる。

$$span\left\{G_\theta(\zeta_1 v), G_\theta(\zeta_2 v)\right\} = span\left\{\zeta_1(G_\theta v_1), \zeta_1(G_\theta v_1)\right\}$$

$$span\left\{G_\theta K_1 v + \delta_1 G_\theta K_3 v, G_\theta K_2 v + \delta_2 G_\theta K_3 v\right\} = span\left\{K_1 G_\theta v + \delta_1 K_3 G_\theta v, K_2 G_\theta v + \delta_1 K_3 G_\theta v\right\} \tag{18.12}$$

となるが、式 18.8 から、

$$G_\theta = I_4\cos\theta - K_3\sin\theta$$

があるので、次のように変換することがわかる。

$$K_1 G_\theta = K_1\cos\theta - K_1K_3\sin\theta = K_1\cos\theta + K_2\sin\theta \tag{18.13}$$

$$K_2 G_\theta = K_2\cos\theta - K_2K_3\sin\theta = K_2\cos\theta - K_1\sin\theta \tag{18.14}$$

$$G_\theta K_1 = K_1\cos\theta - K_3K_1\sin\theta = K_1\cos\theta - K_2\sin\theta \tag{18.15}$$

$$G_\theta K_2 = K_2\cos\theta - K_3K_2\sin\theta = K_2\cos\theta + K_1\sin\theta \tag{18.16}$$

となるのでこれらは交換しない。つまり、

$$[K_1, G_\theta] = 2K_2\sin\theta,\ \ [K_2, G_\theta] = 2K_1\sin\theta,$$

しかし、K_3 については

$$\begin{aligned}
K_3 G_\theta &= K_3\cos\theta - K_3K_3\sin\theta \\
&= K_3\cos\theta + I_4\sin\theta \\
&= G_\theta K_3
\end{aligned}$$

で交換する。さらに重要な関係式として次が導ける。

$$\begin{aligned}
\cos 2\theta &= \cos^2\theta - \sin^2\theta \\
\sin 2\theta &= 2\sin\theta\cos\theta
\end{aligned} \tag{18.17}$$

であることを利用し、

$$
\begin{aligned}
G_\theta K_1 \cos 2\theta + G_\theta K_2 \sin 2\theta &= (K_1 \cos\theta - K_2 \sin\theta)\cos 2\theta + (K_2\cos\theta + K_1 \sin\theta)\sin 2\theta \\
&= (K_1 \cos\theta - K_2 \sin\theta)\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) \\
&+ (K_2\cos\theta + K_1\sin\theta)(2\sin\theta\cos\theta) \\
&= K_1\cos^3\theta + K_1\sin^2\theta\cos\theta + K_2\sin^3\theta + K_2\sin\theta\cos^2\theta \\
&= K_1\cos\theta\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) + K_2\sin\theta\left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right) \\
&= K_1\cos\theta + K_2\sin\theta
\end{aligned}
$$

となり、G_θ が位相に関係していることがわかる。さらに式 18.13 から

$$
\begin{aligned}
G_\theta K_1 \cos 2\theta + G_\theta K_2 \sin 2\theta &= K_1\left(I_4\cos\theta - K_3\sin\theta\right) \\
&= K_1 G_\theta
\end{aligned}
$$

となることがわかる。同様にして

$$
\begin{aligned}
-G_\theta K_1 \sin 2\theta + G_\theta K_2 \cos 2\theta &= - (K_1 \cos\theta - K_2 \sin\theta)\sin 2\theta + (K_2\cos\theta + K_1 \sin\theta)\cos 2\theta \\
&= - (K_1 \cos\theta - K_2 \sin\theta)(2\sin\theta\cos\theta) \\
&+ (K_2\cos\theta + K_1\sin\theta)\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) \\
&= K_2\cos^3\theta + K_2\sin^2\theta\cos\theta - K_1\sin^3\theta + K_1\sin\theta\cos^2\theta \\
&= K_2\cos\theta\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) - K_1\sin\theta\left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right) \\
&= K_2\cos\theta - K_1\sin\theta \\
&= K_2\left(I_4\cos\theta - K_3\sin\theta\right) \\
&= K_2 G_\theta
\end{aligned}
$$

となり、G_θ の右作用と回転との関係がうかがえる。
まとめると次のようになる。

$$
\begin{aligned}
K_1 G_\theta &= G_\theta K_1 \cos 2\theta + G_\theta K_2 \sin 2\theta \\
K_2 G_\theta &= -G_\theta K_1 \sin 2\theta + G_\theta K_2 \cos 2\theta \\
K_3 G_\theta &= G_\theta K_3
\end{aligned}
\tag{18.18}
$$

18.3 標準接続

標準接続として $\delta_1 = \delta_2 = 0$ の場合を考えよう。この時、距離

$$
span\left\{G_\theta K_1 v, G_\theta K_2 v\right\} = span\left\{K_1 G_\theta v, K_2 G_\theta v\right\}
$$

また、ベクトル $v_1, v_2, \omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}^n$ として

$$
span\left\{v_1, v_2\right\} = span\left\{\omega_1, \omega_2\right\} \Longleftrightarrow \exists a\ nonsingular 2\times 2\, Matrix\, M
$$

の行列 M について回転と関係しそうであるから

$$
\begin{array}{ccc}
[v_1|v_2] & = & [\omega_1|\omega_2]\ M \\
(n\times 2) & & (n\times 2)\ \ (2\times 2)
\end{array}
$$

とおく。例えば

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{21} \\ m_{12} & m_{22} \end{pmatrix}$$

とすると、

$$[K_1 G_\theta v | K_2 G_\theta v] = [G_\theta K_1 v | G_\theta K_2 v] \begin{pmatrix} m_{11} & m_{21} \\ m_{12} & m_{22} \end{pmatrix}$$

とあらわすことができて、これは

$$\begin{aligned} K_1 G_\theta v &= m_{11} G_\theta K_1 v + m_{21} G_\theta K_2 v \\ K_2 G_\theta v &= m_{12} G_\theta K_1 v + m_{22} G_\theta K_1 v \end{aligned}$$

となるので式 18.18 を代入し、

$$\begin{aligned} G_\theta K_1 \cos 2\theta v + G_\theta K_2 \sin 2\theta v &= m_{11} G_\theta K_1 v + m_{21} G_\theta K_2 v \\ -G_\theta K_1 \sin 2\theta + G_\theta K_2 \cos 2\theta &= m_{12} G_\theta K_1 v + m_{22} G_\theta K_1 v \end{aligned}$$

となるので係数を比較し、

$$M = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}$$

を得る。これはまさに 2θ の回転行列である。
次に $\delta_1, \delta_2 \neq 0$ の場合も全く同様にして

$$N = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{21} \\ n_{12} & n_{22} \end{pmatrix}$$

とおくと、式 18.12 から

$$\begin{aligned} &[K_1 G_\theta v + \delta_1 K_3 G_\theta v | K_2 G_\theta v + \delta_2 K_3 G_\theta v] \\ &= [G_\theta K_1 v + \delta_1 K_3 G_\theta v | G_\theta K_2 v + \delta_2 K_3 G_\theta v] \begin{pmatrix} n_{11} & n_{21} \\ n_{12} & n_{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

とおける。これから次の 2 組の対応を考え、

$$\begin{aligned} K_1 G_\theta v + \delta_1 K_3 G_\theta v &= n_{11} G_\theta K_1 v + n_{21} G_\theta K_2 v + (\delta_1 n_{11} + \delta_2 n_{21}) K_3 G_\theta v \\ K_2 G_\theta v + \delta_2 K_3 G_\theta v &= n_{12} G_\theta K_1 v + n_{22} G_\theta K_2 v + (\delta_1 n_{12} + \delta_2 n_{22}) K_3 G_\theta v \\ &\Updownarrow \\ [K_1 G_\theta + \delta_1 K_3 G_\theta] v &= [n_{11} G_\theta K_1 + n_{21} G_\theta K_2 + (\delta_1 n_{11} + \delta_2 n_{21}) K_3 G_\theta] v \\ [K_2 G_\theta + \delta_2 K_3 G_\theta] v &= [n_{12} G_\theta K_1 + n_{22} G_\theta K_2 + (\delta_1 n_{12} + \delta_2 n_{22}) K_3 G_\theta] v \end{aligned}$$

式 18.6 から差をとると次の対応になる。

$$\begin{aligned} [(K_1 \cos\theta + K_2 \sin\theta) + \delta_1 (K_3 \cos\theta + I_4 \sin\theta)] v &= [n_{11}(K_1 \cos\theta - K_2 \sin\theta) + n_{21}(K_2 \cos\theta + K_1 \sin\theta) \\ &+ (\delta_1 n_{11} + \delta_2 n_{21}) (K_3 \cos\theta + I_4 \sin\theta)] v \\ &\quad [(K_1 \cos\theta - K_2 \sin\theta) + \delta_2 (K_3 \cos\theta + I_4 \sin\theta)] v \\ &= [n_{12}(K_1 \cos\theta - K_2 \sin\theta) + n_{22}(K_2 \cos\theta + K_1 \sin\theta) \\ &+ (\delta_1 n_{12} + \delta_2 n_{22}) (K_3 \cos\theta + I_4 \sin\theta)] v \\ &\Updownarrow \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
[\cos\theta K_1 + \sin\theta K_2 + \delta_1 \cos K_3 + \delta_1 \sin\theta I_4]\, v &= [n_{11}(K_1\cos\theta - K_2\sin\theta) + n_{21}(K_2\cos\theta + K_1\sin\theta) \\
&+ (\delta_1 n_{11} + \delta_2 n_{21})\,(K_3\cos\theta + I_4\sin\theta)]v \\
&\quad [-\sin\theta K_1 + \cos\theta K_2 + \delta_2\cos\theta K_3 + \delta_2\sin\theta I_4]\, v \\
&= [n_{12}(K_1\cos\theta - K_2\sin\theta) + n_{22}(K_2\cos\theta + K_1\sin\theta) \\
&+ (\delta_1 n_{12} + \delta_2 n_{22})\,(K_3\cos\theta + I_4\sin\theta)]v \\
&\Updownarrow
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[\cos\theta K_1 + \sin\theta K_2 + \delta_1 \cos K_3 + \delta_1 \sin\theta I_4]\, v &= [n_{11}\cos\theta + n_{21}\sin\theta)K_1 + (-n_{11}\sin\theta + n_{21}\cos\theta)K_2 \\
&+ (\delta_1 n_{11} + \delta_2 n_{21})\cos\theta K_3 + (\delta_1 n_{11} + \delta_2 n_{21})\sin\theta I_4]v \\
&\quad [-\sin\theta K_1 + \cos\theta K_2 + \delta_2\cos\theta K_3 + \delta_2\sin\theta I_4]\, v \\
&= [n_{12}\cos\theta + n_{22}\sin\theta)K_1 + (-n_{12}\sin\theta + n_{22}\cos\theta)K_2 \\
&+ (\delta_1 n_{12} + \delta_2 n_{22})\cos\theta K_3 + (\delta_1 n_{12} + \delta_2 n_{22})\sin\theta I_4]v
\end{aligned}
$$

とまとめると、$K_1 v, K_2 v, K_3 v$ が直交空間を張っているので係数を比較して次の関係を得る。

$$
\begin{aligned}
\cos\theta &= n_{11}\cos\theta + n_{21}\sin\theta \\
\sin\theta &= -n_{11}\sin\theta + n_{21}\cos\theta \\
-\sin\theta &= n_{12}\cos\theta + n_{22}\sin\theta \\
\cos\theta &= -n_{12}\sin\theta + n_{22}\cos\theta \\
\delta_1 &= \delta_1 n_{11} + \delta_2 n_{21} \\
\delta_2 &= \delta_1 n_{12} + \delta_2 n_{22} \qquad (18.19)
\end{aligned}
$$

特に最初の 4 つからは式 18.17 から

$$
\begin{pmatrix} n_{11} \\ n_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta \\ \sin 2\theta \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} n_{12} \\ n_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin 2\theta \\ \cos 2\theta \end{pmatrix}
$$

だから、まとめて

$$
N = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{21} \\ n_{12} & n_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}
$$

であり、これは 2θ の回転行列を表す。
これらが距離 $span\{\zeta(\delta_1)v, \zeta(\delta_2)v\}$ を満たすのは $\delta_1 = \delta_2 = 0$ の時のみとなる。
従って、水平部分空間の同値性は接空間の座標と直交している時のみ成り立つことになる。

18.4 1 形式と接続

水平部分空間の移動が 1 形式と関係が深い。$\mathcal{V} \in \mathbb{R}^4$ を $\mathbb{S}^3$ 上の接ベクトルとする。$T_v S^3$ の部分空間を考えると水平方向の直積が $T_v S^3$ の総和をつくる。一方、1 形式は水平方向の直交成分と関係し、その核 (kernel) が 1 つの部分空間をつくる。

そこで v を S^3 のベクトルとし $\mathcal{V} \in T_vS^3$ として、$span\{K_1v, K_2v\}$ は次のように K_3 方向との内積で定義する。

$$\omega_v(\mathcal{V}) = \langle K_3v, \mathcal{V}\rangle \tag{18.20}$$

一方で 1 形式を部分空間 $span\{\zeta_1(\delta_1)v, \zeta_2(\delta_2)v\}$ と関連することから

$$\omega_v^\delta(\mathcal{V}) = \langle K_3v - \delta_1K_1v - \delta_2K_2v, \mathcal{V}\rangle$$

とおける。ここで再び同値性の条件式 17.12 から

$$\omega_{\Phi_g v}\left((\Phi_g)_* \mathcal{V}\right) = \Phi_g^{-1}\left(\omega\left(\mathcal{V}\right)\right)\Phi_g$$

とかけるから式 18.11 の移動の不変性から $(G_\theta)_* = G_\theta$ を用いれば

$$\omega_{G_\theta v}(G_\theta\mathcal{V}) = G_\theta^T\left(\omega_v(\mathcal{V})\right)G_\theta$$

である。そこで 1 形式として $I = G_\theta^T G_\theta$ を用いて左作用、右作用は次のようになる。

$$\begin{aligned}
LHS &= \omega_{G_\theta v}(G_\theta\mathcal{V}) \\
&= \langle K_3G_\theta v, G_\theta\mathcal{V}\rangle \\
&= \left\langle G_\theta^T K_3G_\theta v, G_\theta\mathcal{V}\right\rangle \\
&= \langle K_3v, \mathcal{V}\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
RHS &= G_\theta^T\left(\omega_v(\mathcal{V})\right)G_\theta\mathcal{V} \\
&= \left(\omega_v(\mathcal{V})\right)G_\theta^T G_\theta \\
&= \omega_v(\mathcal{V}) \\
&= \langle K_3v, \mathcal{V}\rangle
\end{aligned}$$

これから同値性を満足していることがわかる。さらに δ がある場合の一般的な場合を考えよう。

式 18.19 から

$$\begin{aligned}
LHS &= \omega_{G_\theta v}^\delta(G_\theta\mathcal{V}) \\
&= \langle K_3G_\theta - \delta_1K_1G_\theta v - \delta_2K_2G_\theta v, G_\theta\mathcal{V}\rangle \\
&= \left\langle G_\theta^T K_3G_\theta v - \delta_1G_\theta^T K_1G_\theta v - \delta_2G_\theta^T K_2G_\theta v, \mathcal{V}\right\rangle \\
&= \langle K_3v - \delta_1\left(K_1\cos 2\theta + K_2\sin 2\theta\right) - \delta_2\left(-K_1\sin 2\theta + K_2\cos 2\theta\right), \mathcal{V}\rangle \\
&= \langle\left(\delta_1\left(K_1\cos 2\theta + K_2\sin 2\theta\right)K_1v + \left(-\delta_2\left(-K_1\sin 2\theta - K_2\cos 2\theta\right)\right)\right), \mathcal{V}\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
RHS &= G_\theta^T\left(\omega_v^\delta(\mathcal{V})\right)G_\theta\mathcal{V} \\
&= G_\theta^T\langle K_3v - \delta_1K_1v - \delta_2K_2v, \mathcal{V}\rangle G_\theta \\
&= \langle K_3v - \delta_1K_1v - \delta_2K_2v, \mathcal{V}\rangle G_\theta^T G_\theta \\
&= \langle K_3v - \delta_1K_1v - \delta_2K_2v, \mathcal{V}\rangle
\end{aligned}$$

となり、両者は等しくないが、K_1v, K_2v, K_3v の直交性から両者を等しいとおくと次の関係式が導ける。

$$-\delta_1 = -\delta_1\cos 2\theta + \delta_2\sin 2\theta$$

$$-\delta_2 = -\delta_1\sin 2\theta - \delta_2\cos 2\theta$$

もし、$\delta_1 = \delta_2 = 0$ であればこの同値性は維持される。しかし、周期性が $\theta = \pi$ であり、$\mathbb{R}^4$ 空間ではコーン上に接続があれば不連続ながら維持される。

19 数値シミュレーション

19.1 Hopf 束の力学

ここで応用ができるように $\mathbb{C}^2$ 空間での Hopf 束の力学を構築しよう。
固有方程式を用いて $u \in \mathbb{C}^2$ として

$$\dot{u} = Cu, \quad u(t) \in \mathbb{C}^2, C \in M_2(\mathbb{C})$$

初期状態に近ければ t を独立したパラメタとして考え

$$C = A + iB, \ A, B \in M_2(\mathbb{R})$$

とおき、$z \in \mathbb{C}^2$ として u のノルムを r とすると

$$u = rz, ||z|| = 1, \ r = ||u||, \ u \in \mathbb{C}^2, z \in S^3 \subset \mathbb{C}^2, r \in \mathbb{R} \tag{19.1}$$

とおける。ここで式 18.4 から

$$z \in S^3 \Longleftrightarrow \dot{z} \in T_z S^3 \tag{19.2}$$

であることに注意する。
肩の H は Hermitian 転置で次が成り立ったから

$$qq^H \neq q^H q = 1$$

固有方程式から

$$\dot{u} = Cu$$

は 19.1 から

$$\dot{r}z + r\dot{z} = Crz$$

左から r^H を作用させると式 19.2 から

$$\begin{aligned} \dot{r}z^H z \quad &+ \quad rz^H \dot{z} = rz^H Cz \\ \dot{r} \quad &= \quad r\left(z^H Cz - z^H \dot{z}\right) \\ \dot{r}r^{-1} \quad &= \quad Re\left(z^H Cz\right) \end{aligned}$$

さらに式 17.11 から次のようにおける。

$$\dot{z} = (I - zz^H)Cz + izIm(z^H Cz) \tag{19.3}$$

これから次のように定義する。

$$F(z) := (I - zz^H)Cz + izIm(z^H Cz)$$

よってこの写像 F は式 19.2 から

$$F : S^3 \to T_z S^3$$

となるので位相変化について次の関係が成り立つ

$$F(e^{i\theta} z) = e^{i\theta} F(z)$$

よって z の成分表示が

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + iy_1 \\ x_2 + iy_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

となり、この時のベクトル v は次の実 4 成分を持つ。

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

また、固有方程式 $\dot{z} = F(z)$ から次の変換

$$\dot{v} = (I_4 - vv^T)\Sigma v \tag{19.4}$$

ただし Σ は 4×4 の行列で

$$\sum = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \tag{19.5}$$

である。これを代入すると

$$\begin{aligned}
\dot{v} &= \Sigma v - vv^T \Sigma v \\
&= \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} (x^T \, y^T) \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} Ax - By \\ Bx + Ay \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} (x^T \, y^T) \begin{pmatrix} Ax - By \\ Bx + Ay \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} Ax - By \\ Bx + Ay \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \left(x^T Ax - x^T By + y^T Bx + y^T Ay\right) \\
&= \begin{pmatrix} Ax - By - xx^T Ax + xx^T By - xy^T Bx - xy^T Ay \\ Bx + Ay - yx^T Ax + yx^T By - yy^T Bx - yy^T Ay \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{z} &= (I - zz^H)Cz + izIm(z^H Cz) \\
&= Cz - zRe(z^H Cz) \\
&= (A + iB)\,(x + iz) - (x + iy)Re\left[(x^T - iy^T)(A + iB)(x + iy)\right] \\
&= Ax - By + iBx + iAy - (x + iy)Re[(x^T - iy^T)(A + iB)(x + iy)] \\
&= Ax - By + iBx + iAy \\
&- (x + iy)\left(x^T Ax - x^T By + y^T Bx + y^T Ay\right) \\
&= Ax - By - xx^T Ax + xx^T By - xy^T Bx - xy^T Ay \\
&+ i\left[Bx + Ay - yx^T Ax + yx^T By - yy^T Bx - yy^T Ay\right]
\end{aligned}$$

$\Omega(v)$

$$\Omega(v) := (I_4 - vv^T)\Sigma v \tag{19.6}$$

$$\Omega : S^3 \to T_v S^3$$

18.8

$$\Omega(G_\theta v) = G_\theta \Omega(v)$$

$19.4 \dot{v} \in T_v S^3$

$$\dot{v} = \Omega(v) = \alpha_1(v)K_1 v + \alpha_2(v)K_2 v + \alpha_3(v)K_3 v \;\; \alpha_i \in \mathbb{R} \tag{19.7}$$

ただし、

$$\alpha_1(v)K_1 v + \alpha_2(v)K_2 v \in H_v S^3$$

$$\alpha_3(v)K_3 v \in V_v S^3$$

のように水平、垂直空間に分けられ $\alpha_i(v)$ は

$$\alpha_i(v) = \langle K_i v, \dot{v} \rangle = \langle K_i v, \Omega(v) \rangle$$

のように内積からつくられる実値である。さらに式 19.6 から $v^T \Sigma v$ はスカラー値になることに注意すると $\langle K_i v, v \rangle$ は

$$\begin{aligned} \alpha_i(v) &= \langle K_i v, \Omega(v) \rangle \\ &= \left\langle K_i v, (I_4 - vv^T)\Sigma v \right\rangle \\ &= \langle K_i v, \Sigma v \rangle - \left\langle K_i v, vv^T \Sigma v \right\rangle \\ &= \langle K_i v, \Sigma v \rangle - \left(v^T \Sigma v\right) \langle K_i v, v \rangle \\ &= \langle K_i v, \Sigma v \rangle \end{aligned}$$

となる。これから接ベクトル v の t に対する動きを見ることができる。式 18.2 から $\theta(t) \in \mathbb{R}$ とし $\omega(t)$ は垂直空間内として

$$v(t) = G_{\theta(t)} \omega(t)$$

が成り立つ。再び図を示しておく。

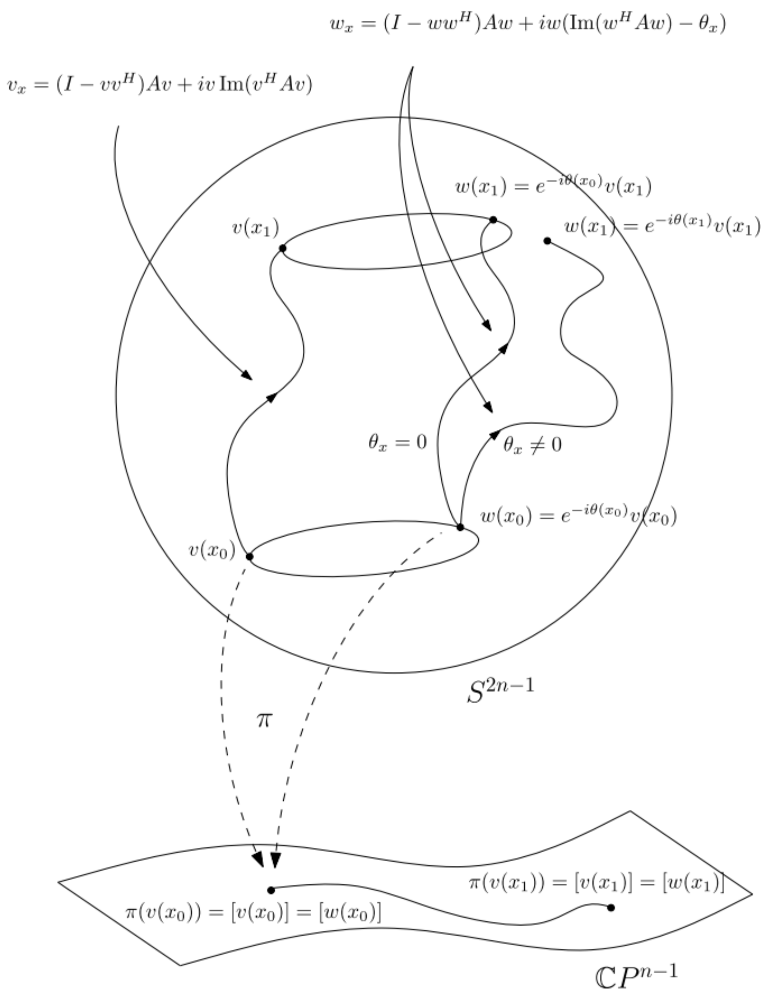

図 19.1: [47] より

よってこれを微分すると

$$\begin{aligned} \frac{dG_\theta}{d\theta} &= -K_3 G_\theta \\ K_3 G_\theta &= G_\theta K_3 \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} \dot{v}(t) &= \frac{dG_\theta}{d\theta}\dot{\theta}\omega(t) + G_{\theta(t)}\dot{\omega}(t) \\ &= -K_3 G_{\theta(t)}\dot{\theta}_{\omega(t)} + G_{\theta(t)}\dot{\omega}(t) \\ &= -\dot{\theta}G_{\theta(t)}K_3\omega(t) + G_{\theta(t)}\dot{\omega}(t) \\ &= G_\theta\left[-\dot{\theta}K_3\omega(t) + \dot{\omega}(t)\right] \end{aligned}$$

となる。また、

$$G^T_{\theta(t)}\dot{v}(t) = -\dot{\theta}K_3\omega(t) + \dot{\omega}(t)$$

となる。しかし、一方で式 19.7 から

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \alpha_1(v)K_1 v + \alpha_2(v)K_2 v + \alpha_3(v)K_3 v \\ &= \alpha_1(G_\theta\omega)K_1 G_\theta\omega + \alpha_2(G_\theta\omega)K_2 G_\theta\omega + \alpha_3(G_\theta\omega)K_3 G_\theta\omega \end{aligned}$$

となるので

$$
\begin{aligned}
G_{\theta(t)}^T\dot{v}(t) &= \alpha_1(G_\theta\omega)G_\theta^T K_1 G_\theta\omega + \alpha_2(G_\theta\omega)G_\theta^T K_2 G_\theta\omega + \alpha_3(G_\theta\omega)G_\theta^T K_3 G_\theta\omega \\
&= -\dot{\theta}K_3\omega(t) + \dot{\omega}(t) \qquad (19.8)
\end{aligned}
$$

また、

$$\alpha_i(v) = \langle K_i v, \Omega(v)\rangle$$

だったから式 18.18 より

$$
\begin{aligned}
\alpha_1(G_\theta\omega) &= \langle K_i G_\theta\omega, \Omega(G_\theta\omega)\rangle \\
&= \langle K_1 G_\theta\omega, G_\theta\Omega(\omega)\rangle \\
&= \left\langle G_\theta^T K_1 G_\theta\omega, \Omega(\omega)\right\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha_2\left(G_\theta\omega\right) &= \left\langle G_\theta^T K_2 G_\theta\omega, \Omega(\omega)\right\rangle \\
&= \langle(-K_1\cos 2\theta + K_2\sin 2\theta)\omega, \Omega(\omega)\rangle \\
&= -\sin 2\theta\left\langle K_1\omega, \Omega(\omega)\right\rangle + \cos 2\theta\left\langle K_2\omega, \Omega(\omega)\right\rangle \\
&= -\sin 2\theta\alpha_1(\omega) + \cos 2\alpha_2(\omega)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha_3\left(G_\theta\omega\right) &= \left\langle G_\theta^T K_3 G_\theta\omega, \Omega(\omega)\right\rangle \qquad (19.9) \\
&= \langle K_3\omega, \Omega(\omega)\rangle \\
&= \alpha_3(\omega)
\end{aligned}
$$

よって式 19.8 を次のようにまとめることができる。

$$\dot{\omega} = \alpha_1(\omega)K_1\omega + \alpha_2(\omega)K_2\omega + \left(\alpha_3(\omega) + \dot{\theta}\right)K_3\omega$$

とまとめることができて、はじめの 2 項が水平空間、最後の $K_3\omega$ の項が垂直空間を表す。

よって $\omega(t)$ は水平経路、$\dot{\omega}(t)$ は水平成分が 0 になっていて、この時は $\alpha_3(\omega) = \alpha_3(G_\theta\omega)=\alpha_3(v)$ となる。従って

$$\dot{\theta}(t) = -\alpha_3(v(t)) = \langle K_3 v(t), \Sigma v(t)\rangle$$

この方程式を $\theta(t)$ について解けば、式 19.9 から、経路 $\omega(t) = G_{\theta(t)}^T v(t)$
となる。具体的には式 18.5 に対応して次のような内積表現になる.

$$
\begin{aligned}
\dot{\theta}(t) &= -\left\langle K_3 v(t), \dot{v}(t)\right\rangle \qquad (19.10) \\
&= -\left\langle \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ -x_1(t) \\ -x_2(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= -y_1\dot{x}_1 - y_2\dot{x}_2 + x_1\dot{y}_1 + x_2\dot{y}_2
\end{aligned}
$$

これは式 18.20 で見た $\Omega(v)$ 上の標準接続を表している。

19.2 数値シミュレーション

基本的な式がそろったのでここではMathematicaなどのPCソフトを利用して数値シミュレーションをしていこう。微分方程式を差分に変えて、数列のリストを作成し、グラフ可する。

例えば次のよに複素行列 C をおくと、$C=A+iB$ だから

$$C=\begin{pmatrix} 3-i & 2+7i \\ 5+6i & 1+9i \end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$$

である。接続の式が式19.6から

$$\begin{aligned} \dot{\theta}(t) &= - & \langle K_3 v(t), \Sigma v(t)\rangle \\ \dot{v} &= & (I_4 - vv^T)\Sigma v \end{aligned}$$

が成り立つ。$t=0$ から $t=t_{max}$ までにおいて初期条件を考える。この行列 C は次のような固有値と固有ベクトルを持つ。

$$\lambda_1=-0.3579-3.8460i,\ \ \xi_1=\begin{pmatrix} 0.8557 \\ -0.4301+0.2867i \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2=4.3579+11.8460i,\ \ \xi_2=\begin{pmatrix} 0.4836-0.0854i \\ 0.8712 \end{pmatrix}$$

19.2.1 固有値を利用する。

次の場合を考えよう。微分方程式として次が成り立つ。

$$u_x=A(x,\lambda)u,\ x\in\mathbb{R}, \lambda\in\Lambda=\mathbb{C}/\{-\infty,-1]\},\ u=u(x,\lambda)=\begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \end{pmatrix}\in\mathbb{C}^2 \tag{19.11}$$

f は実関数として無限遠で0に漸近するように

$$A(x,\lambda)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda+1-2f(x) & 0 \end{pmatrix},\ f(x)=\frac{3}{2}sech^2\frac{1}{2}x$$

と選ぶ。この時、

$$A_\infty(\lambda)=\lim_{x\to\pm\infty}A(x,\lambda)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda+1 & 0 \end{pmatrix}$$

となり、固有値と固有ベクトルは

$$\mu_\pm(\lambda)=\xi_+(\lambda)=\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{\lambda+1} \end{pmatrix}$$

となる。

ここでは $A=A(x,\lambda), A=Re[C]$ とおけ、

$$C=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda+1-2f(t) & 0 \end{pmatrix}=A+iB\in M_2(\mathbb{C})$$

とすると λ は複素数だから

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ Re[\lambda]+1-2f(t) & 0 \end{pmatrix},\ \ B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Im[\lambda] & 0 \end{pmatrix}$$

となり式 19.5 から

$$\Sigma = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ Re[\lambda]+1-2f(t) & 0 & -Im[\lambda] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ Im[\lambda] & 0 & Re[\lambda]+1-2f(t) & 0 \end{pmatrix}$$

これから式 19.11 から微分方程式を解くと

$$\dot{v} = \left(I_4 - vv^T\right)\Sigma v$$

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{||u||}\begin{pmatrix} Re(u_1) \\ Re(u_2) \\ Im(u_1) \\ Im(u_2) \end{pmatrix} \in S^3 \subset \mathbb{R}^4$$

平行移動の方程式は次の式 19.10 から得られる。

$$\dot{\theta}(t) = -\langle K_3 v(t), \dot{v}(t)\rangle$$

これから初期条件 $\theta(L) = 0$ を満たすものとして

$$v = \begin{pmatrix} x_1(L) \\ x_2(L) \\ y_1(L) \\ y_2(L) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{u_\infty^H u_\infty}}\begin{pmatrix} 1 \\ Re(-\sqrt{\lambda+1}) \\ 0 \\ Im\left(-\sqrt{\lambda+1}\right) \end{pmatrix} \in S^3 \subset \mathbb{R}^4$$

を考えて以下で PC シミュレーションをおこなう。
この時、次の 3 つの経路を考察する

経路 1　$\gamma_1 : A_\infty(\lambda)$ の固有値

この時は次の図に示すように固有ベクトルは $u_\infty(\lambda)$ とかけ、パラメタ空間として

$$u_\infty : \Lambda \to \mathbb{C}^2$$

$$\lambda : \mathbb{R} \to \Lambda$$

を考える。これは合成写像

$$u_\infty \circ \lambda$$

を考えるとこれは $A_\infty(\lambda)$ の固有ベクトルの $\mathbb{C}^2$ 上の経路となる。
立体射影 P では

$$P \circ u_\infty \circ \lambda : \mathbb{R} \to S^3$$

経路 2　$\gamma_2 : u_x = Au$ の解

この時は無限遠での固有ベクトルから初期状態の u_∞ が定義される。
正の実数 L を用いて

$$u(L,\lambda) = u_\infty(\lambda)$$

経路 3　$\gamma_3 : A_\infty(\lambda)$ の固有値の **flowed-forward**

γ_3 は単純に γ_2 のホストとして γ_1 を連結したものである。

前節から経路 $\theta(s)$ は γ_1, γ_3 の場合は

$$\theta(s) = \int \left(\frac{Im[u(s)^H u(s)]}{u(s)^H u(s)} \right) ds$$

のように表され、γ_2 の場合は

$$\theta(s) = \int \left(\frac{Im[u(s)^H A u(s)]}{u(s)^H u(s)} \right) ds$$

となる。$A_{\infty}(\lambda)$ と $A_{-\infty}(\lambda)$ は等しくない。

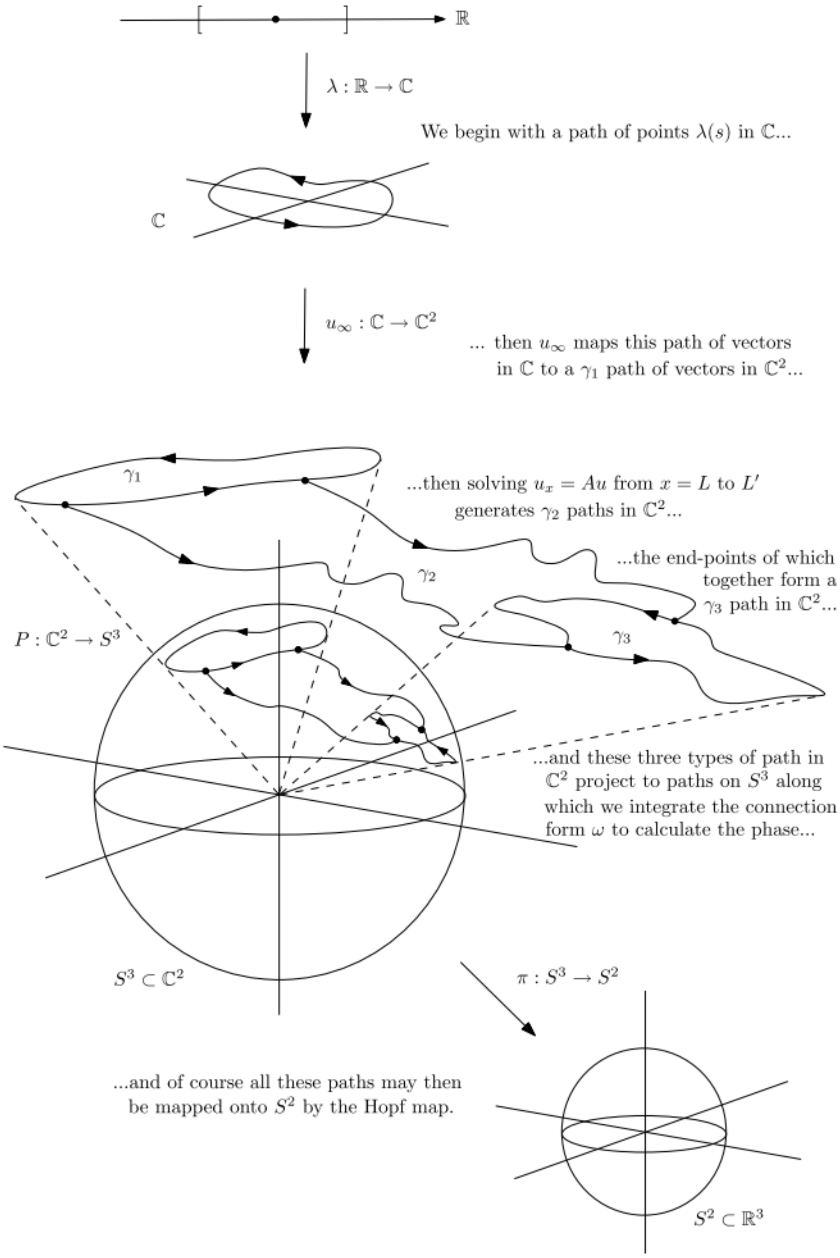

図 19.2: [47] より

19.3　応用例

これまで取り上げた Hopf 写像を用いた複素空間から実空間への射影を用いて固有方程式をとくことは物理への応用が期待できる。そこでいくつかの応用例を見ていく。

19.4　シュレディンガー方程式

次の応用例として時間依存した 1 次元シュレディンガー方程式を考えよう。

$$-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}\psi + V(x)\psi = E\psi,\ \ x\in\mathbb{R}, \psi(x)\in\mathbb{C}, V(x)\in\mathbb{R}, E\in\mathbb{R} \tag{19.12}$$

ここで $E<0$ はエネルギーの固有値である。そこで

$$\dot{\psi} = \phi$$

となる。変数を媒介として式 19.12 を表すことを考えると

$$\dot{\phi} = -2\left(E - V(x)\right)$$

でつなげばいいから、次のような微分方程式を考える。

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -B(x,E) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix}$$

$$B(x) = 2\left(E - V(x)\right)$$

そこでここでは次のような実 Morse ポテンシャルを考える。

$$V(x) = D\left(e^{-2\omega x} - 2e^{-\omega x}\right)$$

ただし、数値シミュレーションとして

$$D = 12,\ \ \omega = 0.204124$$

を選ぶ。この時のポテンシャルは次の図のようになる。

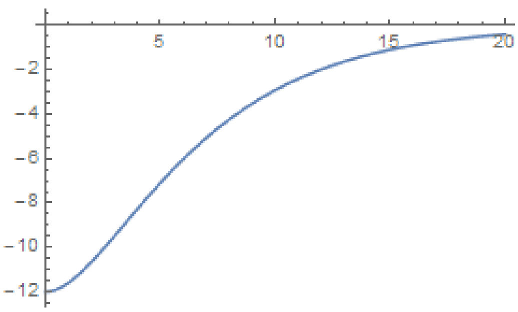

図 19.3: $V(x) = D\left(e^{-2\omega x} - 2e^{-\omega x}\right)$ のグラフ

さらに境界条件として

$$\begin{pmatrix} \phi(a) \\ \psi(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \ \begin{pmatrix} \phi(b) \\ \psi(b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \ a<b\in\mathbb{R}$$

を課し、

$$a = -b = -13.5$$

をとると、このシステムは 24 個に固有値を減少させて、間隔 (-12,0) で次のような値をとるものとする。

$$E_n = -12 + (n + \frac{1}{2}) - \frac{1}{48}(n + \frac{1}{2})^2, \ \ n = 0, .., 23$$

これまでと同じように 4 元ベクトル u は次の固有方程式を満たす。

$$u_x = A(x, E)u$$

参考文献

[1] 菅野礼治　**ゲージ理論の解析力学**　2007

[2] G.M. ザスラフスキー　三島信彦、斉藤徹也、新藤　茂　訳　1989 **カオス-古典および量子力学系-**

[3] 内山龍雄　**相対性理論**　1977　岩波全書

[4] Tristan Needham **Visual complex analysis**　1997　培風館

[5] J.W.Noh, A.Foug'eres, and L.Mandel **Operational approach to the phase of quantum field** 1992 Physical Review A 45

[6] D.T.Pegg, S.M.Barnett **Phase properties of quantized single-mode electromagnetic field** 1989 Physical Review A 39

[7] 小林昭七　**接続の微分幾何とゲージ理論** 1989　裳華房

[8] 野水克己　**現代微分幾何入門**　1969　裳華房

[9] 佐藤光　**群と物理**　1992　丸善株式会社

[10] Tristan Needham **Visual Complex Analysis** 1997 OXFORD

[11] 小沢哲也　**曲線・曲面と接続の幾何**　1997 倍風館

[12] 中原幹生　**理論物理学のための幾何学とトポロジー I,II**　2000 ピアソン・エデュケーション

[13] 丹羽雅昭　**超伝導の基礎**　2002 東京電機大学出版局

[14] 矢吹治一　**量子論における位相**　1998　日本評論社

[15] Tai Tsun Wu,Chen Ning Yang　**Concept of nonintegrable factors and global formulation of gauge fields** 1975 Physical Review D 12

[16] R.Glies　**Reconstruction of gauge potentials from Wilson loops**　1981 Physical Review D 24

[17] Pratul Bandyopadhyay　**Geometry,Topology and Quantum Field Theory**

[18] 深谷賢治　**双曲幾何**　岩波書店　2004

[19] Shinichi Deguchi Kazuo Fujikawa **Second-quantized formulation of geometric phases** 2005 Physical Review A72

[20] 大貫義朗　鈴木増雄　柏太郎　**経路積分の方法**　岩波　現代の物理学

[21] 柏　太郎　サイエンス社　**新版　演習　場の量子論**

[22] J.David Jackson　**Classic Electrodynamics** 2001

[23] 中村　哲・須藤彰三　**電磁気学**　朝倉書店　2012

[24] Matthew N.O. **Elements of Eletromagnetic**

[25] **Lectures on Clifford(Geometric) Algebras and Appliations** Rafal Ablamowicz Garret Sobczyk 2003

[26] Julian Schwinger **シュウインガー――量子力学** Springer 2000

[27] 野村健太郎　**トポロジカル絶縁体・超伝導体の基礎理論** September 11, 2013

[28] 安藤陽一　**トポロジカル絶縁体入門**　2014

[29] Brian R. Greene **STRING THEORY ON CALABI-YAU MANIFOLDS** Columbia University

[30] 深谷　賢治　**ゲージ理論とトポロジー**　1995 Springer

[31] Joseph L.Birman **Geometry,Particles,and Fields** Springer

[32] Charles Nash Sinddhartha Sen **Topoloy and geometry for Physics** Mineola,New York

[33] 二木　昭人　**微分幾何講義-一般理論と現代物理への応用**　サイエンス社

[34] Andre Weil **ケーラー多様体論入門**　1958 Springer

[35] 天野勝利　**Hopf 代数とは**　筑波大学

[36] 谷村省吾　**トポロジー・圏論・微分幾何**　サイエンス社 SGC-52

[37] 坪井　俊　**幾何学３　微分形式**　東京大学出版

[38] Louis H.Kauffman **KNOTS AND PHYIC**S World Sientific 1993

[39] 服部昌夫　**多様体のトポロジー**　岩波　2003

[40] David W. Lyons **An Elementary Introduction to the Hopf Fibration** Lebanon Valley College

[41] Nicholas Wheeler **Transformational principles latent in the theory of CLIFFORD ALGEBRAS** Reed College Physics Department 2003

[42] Mathematica Demonstration Richard Hennigan **Rotating the Hopf Fibration** http://www.wolfram.com/

[43] Ana Cannas da Silva **Lectures on Symplectic Geometry** 2006

[44] **Rotations of the three-sphere and symmetry of the Cliford Torus** John McCuan and Lafe Spietz October 5,1998

[45] Maris Ozols **Geometry of qubit** 2007

[47] Rupert Way **Dynamics in the Hopf bundle, the geometric phase and implications for dynamical systems** University of Surrey U.K 2008

[48] Chris J Isham **Modern Differential Geometry for Physicists**

[50] Robert Gilmore **Lie Groups, Lie Algebras,and Some or Their Applications**

[51] Bo-Yu Hou, Bo-Yuan Hou **DIFFERRENTIAL GEOMETRY FOR PHYSICS** World Scientific 1997

[52] Thomas J.Briidges **The Orr-Sommerfeld equation on a manifold**

[53] 佐古彰史　**超対称性ゲージ理論と幾何学**　2007 日本評論社

[54] 早川尚男　**連続体力学**　京都大学大学院　平成 17 年

[55] 岡部洋一　**電磁気学**　放送大学 2015

[56] Bjorn Felsager **Geometry,Particles,and Fields** Springer 1997

[57] 及川正行　**偏微分方程式**　岩波書店 1955

[60] 三尾典克　**変形体の力学**　東京大学

[61] Daniel Z.Freedman and Antoine Van Proeyen **Supergravity** CAMBRIGE

[62] V.P Nair **Quantum Field Theory** 2005 Springer

[63] **Diagrammatica The Path to Feynman Rules** Martinus Veltman 1995 Cambride University Press

[64] Martin Ammon Johanna Erdmenger **Gauge/Gravity Duality: Foundations and Applications** 2005 Cambride University Press

[65] Kawamura Yoshiharu **相対論的量子力学**　裳華房

[66] 泰泉寺雅夫 **数物系のためのミラー対称性入門**　2014　サイエンス社

[67] 堀川穎二　**複素代数幾何学入門**　岩波書店

[68] Shiing-shen Chern **Complex Manifolds Without Potential Theory** 1995 Springer Verlag New York,LLC

[69] 安藤哲也　**コホモロジー**　2002 日本評論社

[70] Joseph Polchinski **String Theory I,II** Cambride University Press 1998

[71] 坂本眞人　**量子力学から超対称性へ**　SGC ライブラリ 96　2012　サイエンス社

[72] Barton Zwiebach **A First Course in STRING THEORY** 2009 Cambride University Press

[73] 深谷　賢治 編　**ミラー対称性入門**　2009 日本評論社

[74] 白水　徹也　**アインシュタイン方程式**　2012 SGO ライブラリ　サイエンス社

[75] 唐木田健一　**ひとりで学べる一般相対性理論**　講談社 2015

[76] 深谷賢治　**数学者による数学者のための StrigDualit**y　京都大学

[77] 坪井　俊　**幾何学**☒ **ホモロージ入門**　東京大学出版会

[78] 佐藤秀司・佐藤周友　**代数的サイクルとエタールコホモロジー**　Springer　2012

[79] 石橋延幸・村上公一　**弦の場の理論**　2012 SGO ライブラリ　サイエンス社

[80] 伊藤克司　**共形場理論**　2011 SGO ライブラリ　サイエンス社

[81] 高柳　匡　**ホログラフィー原理と量子エンタングルメント**　サイエンス社

[82] 江沢　洋、渡辺敬二、鈴木増雄、田崎晴明　**繰り込み群の方法**　1999 岩波書店

[83] 今村　洋介　**超弦理論の基礎**　2010 SGO ライブラリ　サイエンス社

[84] 江口　徹　菅原　祐二　**共形場理論**　2015 岩波書店

[85] 西森　秀稔　**相転移・臨界現象の統計物理学**　倍風館

[86] Michael E.Peskin, Daniel V.Schroeder **An introduction to quantum Field Theory**

[87] Charles Kittel and Herbrt Kroemer **THERMAL PHYSICS** W.H.Freeman and Company 1980

[88] J.J Sakurai **Modern Quantum Mechanics** 1985 The Benbjamin/Cumming Publishng Company,Inc.

[89] 松田　哲　**複素関数**　理工系の基礎数学 5　岩波書店　1995

[90] 小林　昭七　**複素幾何**　岩波書店　2005

[91] 早川　尚男　**非平衡統計力学**　サイエンス社　SGC ライブラリ　2006

[92] Mukund Rangamani & Tadashi Takayanagi **“Holographic Entanglement Entropy“** 2017

[93] 松枝　宏明　**量子系のエンタングルメントと幾何学**　森北出版 2016

[94] 治部眞里　高橋康　**添削形式による場の量子論**　日本評論社 1997

[95] V.P. ナイア著　阿部泰裕　磯暁　訳　**現代的視点からの場の量子論**　Springer 2005

[96] 大津　元一　**現代光科学　☒、☒　光の物理的基礎**　朝倉書店 1994

[97] 日置　善郎　**相対論的量子場**　吉岡書店 2008

[98] 細谷　暁夫　**量子コンピューターの基礎**　サイエンス社 1999

[99] Michael A. Nielsen & Isaac L. Chuang **Quantum Computation and Quantum Information** Cambride University press 2010

[100] Brian C.Hall **Lie Groups,Lie Algebras, and Represetations An Elementary Introduction** Springer 2015

[101] 谷村省吾 **ホロノミーと力学系**　名古屋大学

[102] Raffaele Rani **On Parallel Transport and Curvature** 2009

[103] 塩濱　勝博,　成　慶明　**曲面の微分幾何学** 日本評論社　2005

[104] 大槻 知忠　**結び目の不変量**　共立出版 2015

[105] 鈴木　増雄　**統計力学**　岩波書店 1994

[106] Anastasios Mallios **MODERN DIFFERENTIAL GEOMETRY IN GAUGE THEPRIES** Springer 2009

[107] **Lectures on Geometry** Edited by N.M,J.WOODHOUSE OXFORD university press 2017

[108] 田中利夫・村上斉　**トポロジー入門**　サイエンス社　SGC ライブラリ 42　2005

[109] 川村嘉春　**基礎物理から理解するゲージ理論**　サイエンス社　SGC ライブラリ 42　2017

[110] 細谷　裕　**ゲージヒッグス統合理論**　サイエンス社　SGC ライブラリ 42　2018

[111] 堺井義秀　山田憲和　野尻美保子　**素粒子物理学**　KEK 2012

[112] 鈴木 増雄 **経路積分と量子解析** サイエンス社 2017

[113] David Tong **Quantum Field Theory** Universith of Cambridge 2006

[114] 並木美喜雄 大場一郎 **散乱の量子力学** 岩波書店 1997

[115] 福田礼次郎　**フーリエ解析**　岩波書店 1995

[116] Adam Lupu-Sax **Quantum Scattering Theory and Applications** Harvard University 1998

[117] 佐藤文隆　児玉英雄　**一般相対性理論**　岩波書店 1992

[118] 松本幸夫　**多様体の基礎**　東京大学出版 1989

[119] Wulf Rossmann **Lie Groups** OXFORD 2002

[120] 佐武一郎　**リー群の話**　日本評論社 1982

[121] F. シャトラン　**行列の固有値**　Springer　1988

[122] 生西明夫　中神⊠臣　**作用素環入門 1**　岩波　2006

[123] 黒田成俊　**関数解析**　共立出版 1980

[124] 堀田昌寛　**量子情報と時空の物理**　第 2 版　サイエンス社 2019

[125] 砂田利一　**行列と行列式**　岩波 2003

[126] 太田 浩一　**電磁気学の基礎⊠⊠**　東京大学出版会 2013

[127] J. マトウシェク著　岡本吉央訳　**離散幾何学講義**　丸善　2001

[128] 根本香絵　**量子力学の考え方　物理で読み解く量子情報論の基礎**　サイエンス社　2008

[129] 甘利　俊一　**情報幾何学の新展開**　サイエンス社　2014