

## 概要

本部ははじめに電磁気学を復習する。その後、前部のリーマン多様体から計量を考え、相対性理論について学んでいく。代表的な教科書で既に電磁気、相対論一般を1読していることが望ましい。古典力学から現代物理学への橋渡しを担った電磁気学は現在も尚、議論の必要な分野もあり、力学よりもむしろ基本的な内容をもっている。現代物理学への入口的な要素を多く含み、深く考察をすることで、魅力の湧き出す分野である。現在未だ不十分なところが多いのでインターネット上ではWIKIや大学のオープンコース、WEBコンテンツ、参考文献等を参考に興味あることは各自で深めて欲しい。本部は未完成部分が多く、今後加筆修正される。

# 1 電磁気

## 1.1 静電場 [55]

電場のクーロンの法則 (Coulomb\_Law) は

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

であり、真空の誘電率

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = \frac{1}{4\pi \times 9 \times 10^9} = 8.85 \times 10^{-12} [F/m]$$

で与えられ、電場は発散はあるが回転はない。原点に点電荷  $Q$  がある場合はガウスの法則 (Gauss\_Law) から

$$\oint_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \oint d\mathbf{S} \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

が成り立つ。電荷  $Q$  の代わりに電荷密度  $\rho$  を用いて

$$\oint_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V dV \rho \quad (1.1)$$

さらにガウスの法則から

$$\oint_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{E} = \int_V dV \nabla \cdot \mathbf{E}$$

とかけ、ガウスの法則の微分形

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

が導ける。電荷の大きさを考えないなら電場も電位も原点に発散する。しかし、実際には電荷の大きさがあり、下図のように有限になるべきである。

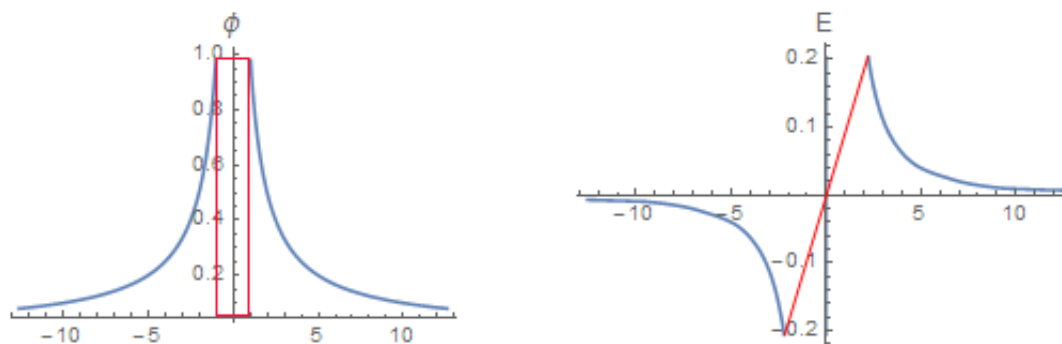


図 1.1: 右が電位、左が電場のグラフ

この時、電場はなめらかとは言えない。内部と外部で次のような電荷密度をとるとする。

$$\rho = \begin{cases} \frac{Q}{\Delta V} & (\text{inside - sphere}) \\ 0 & (\text{outside - sphere}) \end{cases}$$

これから電場がガウスの法則を使って球内部では

$$\mathbf{E} \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \frac{r^3}{a^3} \mathbf{e}_r$$

球外部では

$$\mathbf{E} \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \mathbf{e}_r$$

となるから

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \begin{cases} \frac{\mathbf{r}}{a^3} & (\text{inside - sphere}) \\ \frac{\mathbf{r}}{r^3} & (\text{outside - sphere}) \end{cases}$$

したがって  $a \rightarrow 0$  とすると  $\delta$  関数が出てきて

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{Q}{\epsilon_0} \delta(\mathbf{r})$$

と表すことができる。ここで  $\delta(x)$  と書き換えるとフーリエ級数とみなすことができ

$$\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \kappa x} d\kappa$$

点で決まる電荷が全波数の足し合わせで得られることになる。

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{Q}{\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \kappa x} d\kappa$$

この時、波数の足し合わせを有限にすると次のようになる。

次に電荷の作る電場の回転成分を求めよう。回転の定義は次のようであった。

$$\nabla \times \mathbf{A} \equiv \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_S d\mathbf{S} \times \mathbf{A}$$

これから有用なガウスの外積定理 (Gauss\_outer\_product\_theorem\_of\_vector\_field)

$$\oint_S d\mathbf{S} \times \mathbf{A} = \int_V dV \nabla \times \mathbf{A} \quad (1.2)$$

が成り立つ。電場の場合は

$$\oint_S d\mathbf{S} \times \mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S d\mathbf{S} \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (1.3)$$

となるが

$$\begin{aligned} \nabla \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} &= \left[ \frac{\partial(zr^{-3})}{\partial y} - \frac{\partial(yr^{-3})}{\partial z} \right] \mathbf{i} + \left[ \frac{\partial(xr^{-3})}{\partial z} - \frac{\partial(zr^{-3})}{\partial x} \right] \mathbf{j} + \left[ \frac{\partial(yr^{-3})}{\partial x} - \frac{\partial(xr^{-3})}{\partial y} \right] \mathbf{j} \\ &= \left[ -3zr^{-4} \frac{y}{r} + 3yr^{-4} \frac{z}{r} \right] \mathbf{i} + \dots \\ &= 3r^{-3} [-yz + yz] \mathbf{i} + \dots \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる。これは被積分関数が  $\infty$  にならない限り成り立つ。よってよく知られている通り

$$\oint_S d\mathbf{S} \times \mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S d\mathbf{S} \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0$$

が成り立ち、電場の回転成分は 0 である。これは  $d\mathbf{S}$  と  $\mathbf{r}$  が常に平行であることを表す。

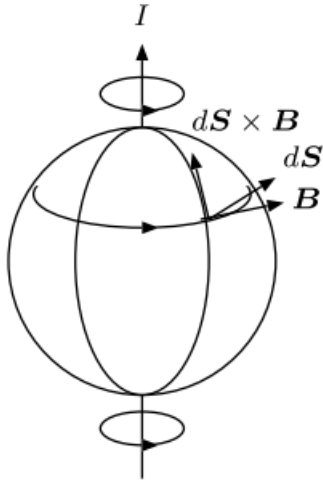


図 1.2: [55] より

次に磁場の回転積分を計算してみよう。直線電流  $I$  の作る磁場はアンペールの法則から電流から距離  $r$  ある位置で大きさは

$$B = \frac{\mu}{2\pi r} I$$

だから、 $1/r$  に比例する。そこで上の図のように球面上で磁場ベクトルの回転積分を試みる。

球の半径を  $R$  とすると  $r = R \sin \theta$

$$\oint dS \frac{\sin \theta}{r} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} R^2 \sin \theta d\theta d\phi \frac{\sin \theta}{R \sin \theta} = 4\pi R$$

である。電流路の長さは  $2R$  に等しいからこれを  $L$  とすると

$$\oint dS \frac{\sin \theta}{R} = 2\pi L$$

が得られる。

### 1.1.1 ストークスの定理 [55]

次に線積分を考えよう。図のように閉曲線に従って、曲線の向きと同じベクトル  $d\mathbf{r}$  を足し合わせていく。これは結局元の位置に戻るわけだから

$$\oint_C d\mathbf{r} = 0$$

となる。

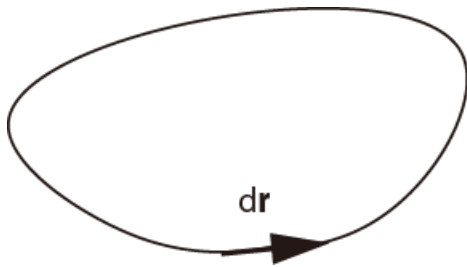


図 1.3: 微小ベクトルを足し合わせると 0 になる

次にこれに重みをつけて足し合わせることを考えよう。結果は囲まれた微小面積ベクトルを  $d\mathbf{S}$  とし、 $x$  方向の単位ベクトルを  $\mathbf{i}$  として

$$\oint_C dx x = d\mathbf{S} \times \mathbf{i}$$

となることをみておこう。

そのために次の図のように閉曲線で囲まれた領域を  $x$  軸に沿って千切りにする。

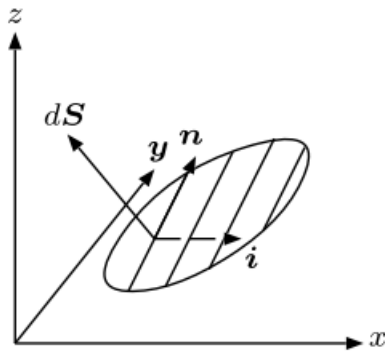


図 1.4: [55] より

$yz$  平面に垂直な多数の面の和を

$$\oint_C dx x = \sum_{i=1}^n \int_{C_i} dx x_i = \sum_{i=1}^n x_i \int_{C_i} dx$$

ここで各長方形の経路の積分は先と同様だから 0 になるの。そこでこの切片の  $i$  番目の長さを  $L_i$  とし、単位ベクトル  $\mathbf{n}$  を右側の切片の向きにとると、この向きは  $d\mathbf{S} \times \mathbf{i}$  の向きに等しいから

$$\int_{C_i} dx_i + \mathbf{n}L_{i+1} - \mathbf{n}L_i = 0$$

となる。これを利用すると 1 つの切片の短冊の面積が  $(x_i - x_{i+1}) L_{i+1}$  となるので

$$\begin{aligned}
\oint_C dx &= \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{n} (L_i - L_{i+1}) \\
&= \mathbf{n} \left( \sum_{i=0}^{n-1} x_i L_i - \sum_{i=1}^n x_i L_{i+1} \right) \\
&= \mathbf{n} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) L_{i+1} \\
&= \mathbf{n} dS \\
&= d\mathbf{S} \times \mathbf{i}
\end{aligned}$$

となる。これからスカラー場  $\phi$  に対して、この微小領域内で微変動をしているなら  $\mathbf{i}$  を

$$\mathbf{i} \rightarrow \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \phi$$

と対応を考えると

$$\oint_C dx \phi = \int_S d\mathbf{S} \times \nabla \phi \quad (1.4)$$

であり、これは閉曲線の線素の足し合わせが面積和になるストークスの定理 (Stokes\_thorem\_of\_scalar\_field) を表している。

これは下図のように向きを一定にした切片の線積分の和が外側の境界の線積分に等しいことになる。重み  $\phi$  が定数であれば積分結果は0である。しかし、この経路に沿って変化を持てば0にならず、その変化を1つの面積ベクトルである右辺で代表させ、ベクトル量であるから、領域内の流れを記述する。注意すべきは微小領域で渦である回転成分があり、たまたま足し合わせたら全体が0になることがあり得ることである。この時、 $\phi$  が一定の場合と区別することができない。つまり、図のように積分表現ではその領域の粗視化がおこなわれる。

あえて平均化  $\langle A \rangle$  と区別するのは量子論を考えてのことである。後に考察するように量子論の不確定性原理は粗視化そのものが近似的ではなく、原理的に働く。

従って内積をとるような周積分から1つ向きを持つ面積ベクトルが得られることになる。

$$\oint_C dx \Rightarrow - \int_S d\mathbf{S} \times \nabla \quad (1.5)$$

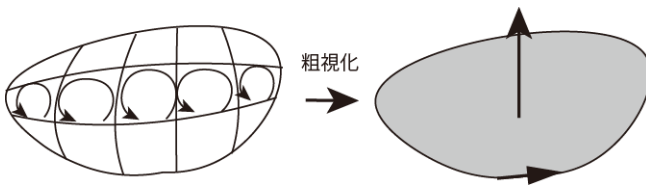


図 1.5: 領域内の  $\phi$  の変化の微小情報の足し合わせが全領域の面積ベクトルと勾配の外積をつくる。

これはスカラーポテンシャルだけでなく、ベクトルポテンシャルにも拡張できる。

$$\oint_C dx \cdot \mathbf{A} = \int_S d\mathbf{S} \cdot \nabla \times \mathbf{A} \quad (1.6)$$

ただし、こちらは内積をとって結果はスカラーであり、物理的には保存量に対応する。

保存力とポテンシャルの関係が

$$\phi(P) = - \int_O^P dx \cdot \mathbf{A}$$

で表された。保存力であれば

$$\oint d\mathbf{r} \cdot \mathbf{A} = 0$$

が成り立つ。つまり、回転積分が0なら保存力になる。

一般に次のようにポテンシャルの展開を考える。

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi(\mathbf{r}_0) + d\mathbf{r} \cdot \nabla\phi$$

また、ポテンシャルの定義から  $\mathbf{r}$  と  $\mathbf{r}_0$  が近いとして、この範囲内では  $\mathbf{A}$  が定数であると考えれば

$$\phi(\mathbf{r}) - \phi(\mathbf{r}_0) = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{A} \simeq -d\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}$$

が成り立つから両式を比較して次の関係が得られる。

$$\mathbf{A} = -\nabla\phi$$

つまり、初等物理で学んだように保存力はポテンシャルの勾配に-をかけたものである。

アンペールの法則は電流路と交わるどんな閉曲線に対して、内積の線積分をとると一定になることを表している。

さらに外積については式 1.5 より

$$\begin{aligned} \oint_C d\mathbf{r} \times \mathbf{A} &= - \int_S (d\mathbf{S} \times \nabla) \times \mathbf{A} \\ &= \int_S (\nabla(d\mathbf{S} \cdot \mathbf{A}) - d\mathbf{S}(\nabla \cdot \mathbf{A})) \end{aligned} \quad (1.7)$$

となり、これはストークスの外積定理 (Stokes\_outer\_product\_theorem) と呼ばれる。

### 1.1.2 回転と発散の両方がある場

しばらくこのベクトル場の発散と回転に注目して電磁場を考えてみよう。物質がある場合、通常は発散も回転もあるベクトル場が登場する。簡単な例として次の a) 円柱と b) 球の場合を考えてみよう。

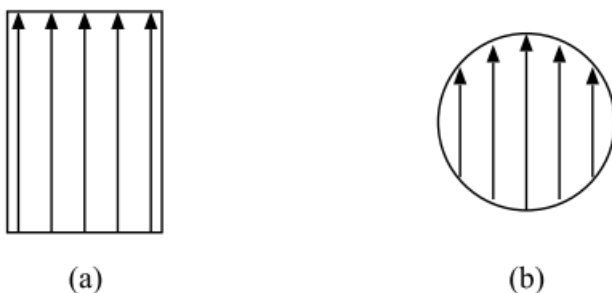


図 1.6: [55] より

この時、外部の場は0であるから図の下端ではベクトルが生じているので a,b 共に正の発散があり、消失する。上端では負の発散がある。このような場合  $\nabla \cdot$  をとると無限大が得られる。端の付近を面に平行な微小板状領域で覆い、発散積分をとる。 $\nabla \cdot$  は面上のデルタ関数になる。a では面密度が  $A$ , b では頭頂核を  $\theta$  として  $A \cos \theta$  となる。

次に  $\nabla \times$  を考えるために図のような閉曲線 (a は長方形、b は円) に沿って回転積分をする。

a は面密度  $A$ 、b では  $A \cos \theta$  になる。

### 1.1.3 磁石と電流 [55]

電場、磁場をそれぞれ電荷、磁荷に対応させて電磁場の理論を構成すると対称的で、理解しやすいものになる。しかし、電場は発散があっても、回転がなく、電流の作る磁場は回転があるが、発散がないという本質的な矛盾が生じた。磁場はモノポールが存在しないことから磁場の発生源は有限の大きさを持ち、かつ各点で方向を持つものと考えられる。そこで磁化を仮定した場合の磁場のクーロン則は

$$\mathbf{H} = \frac{Q_m \mathbf{r}}{4\pi\mu_0 r^3} \quad (1.8)$$

であるが、磁石外部のみで

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{H} \\ &= \frac{Q_m \mathbf{r}}{4\pi r^3} \end{aligned} \quad (1.9)$$

で結ばれる磁束密度  $\mathbf{B}$  を考え、磁場と電流の関係を明らかにしたのがビオ・サバールの法則 (Biot-Savart law) である。ここでは電流素片  $I d\mathbf{r}'$  という電流に沿った微小変位ベクトルと電流の積を単位として考えた。これはよく実験結果とあうことから採用された。

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I d\mathbf{r}'}{4\pi} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

この時の電流素片が図のようにあたかも微小棒磁石のように考えれば、クーロン則とよくなじむわけであるが、モノポールと同様に単独で電流素片は存在しない。

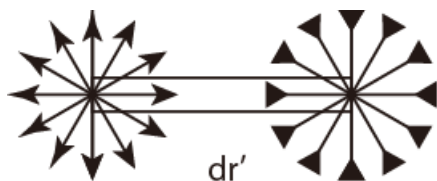


図 1.7: 電流素片の概念図 これを接続していくと接続面の磁場はキャンセルする  
両端もつなげれば、発散のない電流のループができる。

単位磁場のモデルとして電流素片の変わりに小さなソレノイドを考えることができる。

つまり、はじめから輪にしてしまっこれを単位に考える。

従って図、中央のように磁石の側面には電流が流れていることになる。もちろんこの電流は観測ができない。磁石の磁力が時間変化したりすれば見ることはできる。注意すべきは電磁的な慣性は磁束のほうにあることだ。

一定の磁束があっても電流は生じないが、一定の電流があれば磁場は生じる。

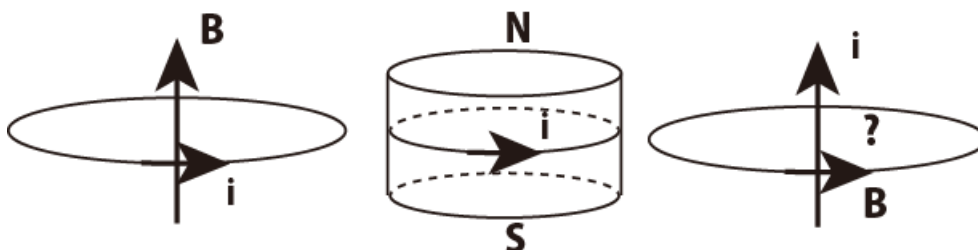


図 1.8: 単位ソレノイドは電流密度のベクトルを持つ

しかし、円電流が定常的である時、電流のループの中にどこかで電位の差が空間的なくてはいけない。

これは電流をつくるために磁場の変化が時間的になくてはいけないことと対をなしている。  
 そこでこれを時空間的に眺めたらどうなるだろう。  
 基本的には次の図のように周回している時には直交する方向にずれがあるということである。  
 逆に直交性とは図右のようにこのずれが見えない方向のことだと定義してもよい。

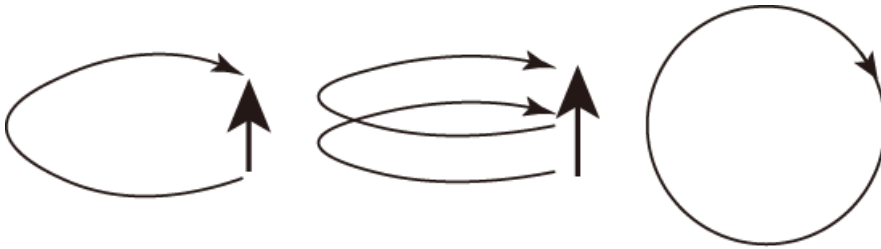


図 1.9:

例えばずれる方向を時間推進の向きにとれば場の変化は周回数の変化であるといえる。  
 図左は微分 2 形式で表すことができ、さらに高次元の形式をつくることができる。  
 この時の最も大きい  $n$  形式は 1 次元になるのでこれを基本的な時間軸とみなす。  
 上図左の基本形は後に考察する 4 次元時空間そのものを作ると考えられる。  
 このように、磁場、電場は基本的な構造として不連続点を 1 つもっている。  
 しかし、両者で見ると互いにこれをキャンセルすることができる。  
 下図右のように磁場と電場が絡んでいないと回転成分が 0 になる。  
 図左のように絡んでいるように見えても反対向きのループを対で用意し、切りこみをいれれば回転成分はない。



図 1.10: 図左では回転成分がキャンセルする。これは絡みがないのと同等である

磁石を縦につなげば、接続部の N と S はキャンセルし、全体の境界が残る。  
 そこで  $K$  を磁石の単位長さあたりの電流密度、 $S$  を断面積とすると磁荷が

$$Q_m = \mu_0 K S \tag{1.10}$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} [H/m]$$

とおける。

$\mu_0$  は磁荷単位と電流を結びつけるための磁気定数 (magnetic constant) と考える。

これから磁束密度が

$$B = \mu_0 K \tag{1.11}$$

となる。一方電荷  $Q_e$  が

$$Q_e = \epsilon_0 E S$$



$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = 8.85 \times 10^{-12} [F/m]$$

となることに対応する。棒磁石の場合は内部の磁場を測ることができないが、ソレノイドで置き換えることができる。次の図左で見るとソレノイドの内部だけに存在する磁場は先端部分に発散がある。

これがちょうどクーロン場の発散を打ち消すので発散が足され、結果  $0$  になる。

つまり磁場はなめらかに連続する。これを電流モデルという。

注意すべきは発散がなくなる代わりにソレノイドの側面には回転成分が現れる。

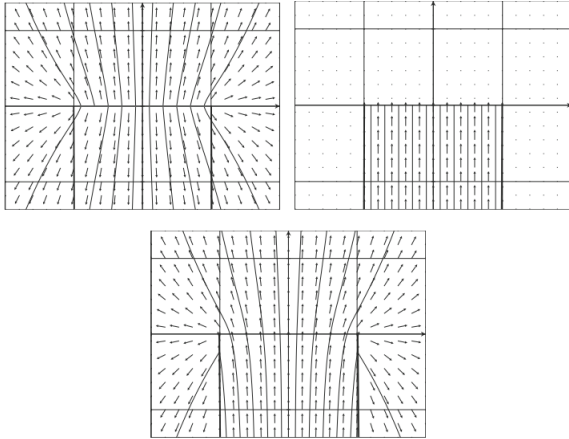


図 3.3 磁石の端での磁荷モデルの磁場 (左上) にソレノイド内の一様磁場 (右上) を加えると、電流モデルの磁場 (下) になる。

図 1.11: [55] より

#### 1.1.4 ビオ・サバールの法則 [55]

先の電流素片のモデルを使って実際に磁場を計算してみよう。

これは電流素片からつくられる磁場をもとめることになり、ビオ・サバールの法則を導くことになる。

ソレノイドによる電流モデルは次のように発散をもたない。

$$\oint_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{B} = 0$$

これから微小電流ループの作る磁場の発散も  $0$  になる。この式の積分を外せば

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

であり、磁場はいたるところで発散をもたない。磁石内部においても磁極から生じるように見える磁力線は、内部の磁力線と連続であると考えた。

次に回転成分については電流の微小ループが完全に閉曲面の内部にあれば  $0$  である。

しかし、微小ループと閉曲面に絡みがあると  $0$  になるとは限らない。

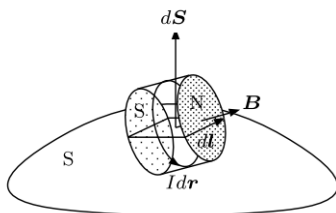


図 1.12: [55] より : N 極か S 極が閉曲面  $S$  と交差する場合

この時、下図のように微小領域が閉曲面  $S$  と交差している場合は磁石の厚さを  $L$  とし、交差領域の面積を  $dS$  とすれば

$$dS = \frac{L}{\sin \theta} dl$$

とみなせる。

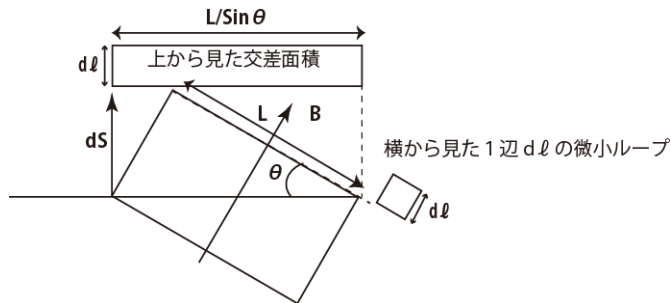


図 1.13: 微小ループでの積分を足し合わせると境界でのループになる。

$K$  は磁石の単位長さあたりの電流密度で  $B = \mu_0 K$  だから上図のように  $\mathbf{B}$  と  $d\mathbf{S}$  のなす各が  $\theta$  として微小ループで足し合わせると、結局境界のループになるので

$$\begin{aligned} d\mathbf{S} \times \mathbf{B} &= \frac{L}{\sin \theta} dl \mu_0 K \sin \theta \\ &= \mu_0 L K dl \\ &= \mu_0 I dl \end{aligned}$$

$$I = KL = KLdl$$

と考えることができるが、重要なのは  $N, S$  極を絡まないと積分は周積分になり、 $\mathbf{0}$  になることであった。そこであえて経路依存性を残し、次のように表す。

$$\oint_S d\mathbf{S} \times \mathbf{B} = \mu_0 I \int_C d\mathbf{r}$$

全体で電流密度  $\mathbf{J}$  を用いると

$$\begin{aligned} \oint_S d\mathbf{S} \times \mathbf{B} &= \mu_0 i \int_C d\mathbf{r} \\ &= \mu_0 \int_V dV \mathbf{J} \end{aligned} \tag{1.12}$$

右辺の結果はこの微小磁石が閉曲面の内部にあれば、始点と終点が一致するので  $0$  になり、外部にあっても明らかに  $0$  になる。

よってループが絡む時にのみ値を持つ。

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$$

が成り立つ。この式が磁石の電流モデルのみから導いていることを留意しておく。

さらに  $\nabla \cdot \nabla \times = 0$  だから

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

が常に成り立つ。これは電流の連続性を表し、**電流連続の法則** (current continuity law) と呼ばれる。

ストークスの定理からアンペールの法則が導かれる

$$\int_S d\mathbf{S} \cdot \nabla \times \mathbf{B} = \oint_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{B} = \mu_0 \int_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{J} = \mu_0 I \quad (1.13)$$

図 1.8 の両脇の図は左がビオ・サバールの法則を表し、右がアンペールの法則を表している。

1つの疑問はこれらはお互いに導きあうことができるかどうかである。

もし、単純なループの交差モデルであれば電流と磁場は簡単に入れかえができそうである。

しかし、そう単純にはならない。

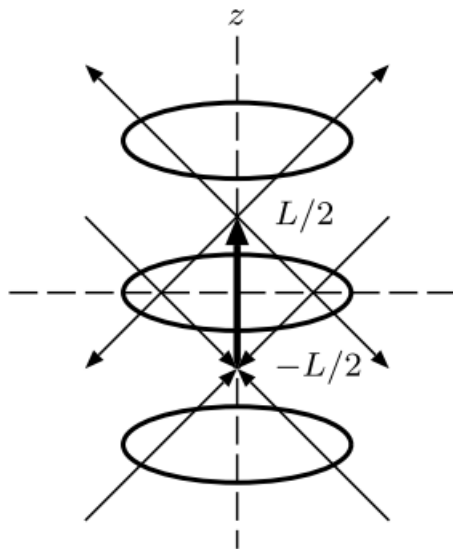


図 1.14: [55] より

この図は図 1.7 を縦に見ていて、長さ  $L$  の磁気双極子である、上の端点には正の磁荷があり、下の端点には負の磁荷があると考えることができる。各端点から放射される磁束が距離  $r$  だけ離れた円内にどれだけ入るかをまず計算する。これは次の図のような立体角  $\Omega$  を計算することに等しいので、球の半径を  $r$  とし角度  $\theta$  では

$$\Omega = \int_{\theta}^0 2\pi r^2 \sin \theta d\theta = 2\pi r^2 (1 - \cos \theta)$$

となる。

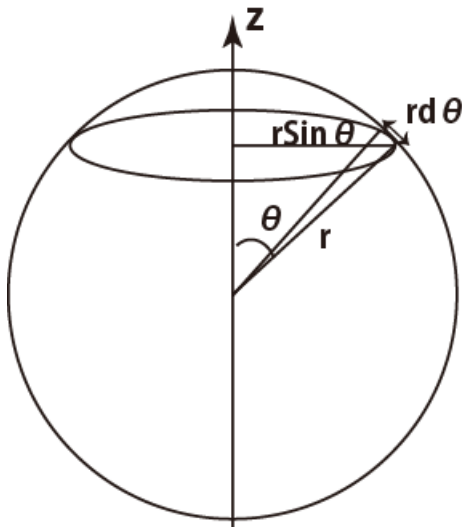


図 1.15: 立体角の計算、単位球であれば  $4\pi$  である

そこで、 $z$  のところに半径  $\rho = r \sin \theta$  の円を通過する放射状の電流  $i_\rho$  は  $z > 0, z < 0$  のそれぞれについて、全球表面積  $S = 4\pi r^2$  とすると

$$i_{\rho+} = I \frac{\Omega}{S} = I \frac{1 - \cos \theta}{2} = I \left( \frac{1}{2} - \frac{z}{2\sqrt{\rho^2 + z^2}} \right), \quad (z > 0)$$

$$i_{\rho-} = \frac{I}{S} \Omega = I \frac{1 - \cos \theta}{2} = -I \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{2\sqrt{\rho^2 + z^2}} \right), \quad (z < 0) \quad (1.14)$$

となる。

さらに次の図のように電流素片の方向を  $z$  軸にとり、軸から半径  $\rho$  の薄い円版を考える。

側面の高さを  $l$  とする。

この円板の表面で面積分をおこなうと電流は  $z$  軸対称であるから磁場は右ねじの法則に従って円周上にてできる。

円板の上下面での外積が全て中心を向き積分は 0 になる。

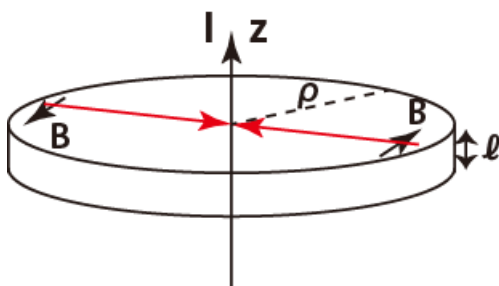


図 1.16:  $d\mathbf{S} \times \mathbf{B}$  は上下面では中心を向き、打ち消す。側面では電流の方向を向く

残る側面からの影響については側面の  $d\mathbf{S}$  が遠心方向を向くので外積の向きは  $z$  方向に揃う。この積分の結果は

$$d\mathbf{S} \times \mathbf{B} = 2\pi\rho B \mathbf{e}_z \quad (1.15)$$

となる。

一方で体積中の電流ベクトルの総和は式 1.14 から位置  $z$  に依存し、内部には電流  $I$  があることに注意すると

$$\begin{aligned}
 & I \left( \frac{1}{2} - \frac{z - \ell/2}{2\sqrt{\rho^2 + (z - \ell/2)^2}} \right) - I \left( \frac{1}{2} - \frac{z + \ell/2}{2\sqrt{\rho^2 + (z + \ell/2)^2}} \right), \quad (z > L/2) \\
 & I \left( \frac{1}{2} + \frac{z - \ell/2}{2\sqrt{\rho^2 + (z - \ell/2)^2}} \right) - I \left( \frac{1}{2} - \frac{z + \ell/2}{2\sqrt{\rho^2 + (z + \ell/2)^2}} \right) + I, \quad (L/2 > z > -L/2) \\
 & -I \left( \frac{1}{2} + \frac{z - \ell/2}{2\sqrt{\rho^2 + (z - \ell/2)^2}} \right) + I \left( \frac{1}{2} + \frac{z + \ell/2}{2\sqrt{\rho^2 + (z + \ell/2)^2}} \right), \quad (z < -L/2)
 \end{aligned}$$

となる。ここで次の近似を使うと

$$\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z \pm \ell/2)^2}} = \frac{1}{r} \mp \frac{z\ell}{2r^3}$$

おもしろいことに結果はどの位置でも同じになり

$$\begin{aligned}
 I \left\{ \frac{1}{2} - \frac{z - \ell/2}{2r} - \frac{z\ell(z - \ell/2)}{4r^3} - \frac{1}{2} + \frac{z + \ell/2}{2r} - \frac{z\ell(z + \ell/2)}{4r^3} \right\} &= I\ell \left( \frac{1}{2r} - \frac{z^2}{2r^3} \right) \\
 &= I\ell \left( \frac{1 - (z/r)^2}{2r} \right)
 \end{aligned}$$

$z/r = \cos \theta$  だからこの結果は

$$\frac{I\ell \sin^2 \theta}{2r}$$

となる。式 1.12、式 1.15 から

$$\oint_S d\mathbf{S} \times \mathbf{B} = \mu_0 \int dV \mathbf{j}$$

を用いて次のように表される

$$2\pi\rho B = \mu_0 \frac{I\ell \sin^2 \theta}{2r}$$

$\rho = r \sin \theta$  だから

$$B = \frac{\mu_0 I\ell \sin \theta}{4\pi r^2} \tag{1.16}$$

となる。

向きを省略したがこれはビオ・サバルの法則である。

微分形は電流密度  $\mathbf{j}$ 、体積  $dV$  を用いて

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I ds \times \mathbf{r}}{4\pi r^3} = \frac{\mu_0 dV \mathbf{j} \times \mathbf{r}}{4\pi r^3} \tag{1.17}$$

この時の電場も同様にして電荷密度を  $\sigma$  とすれば

$$d\mathbf{E} = \frac{\sigma dV \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

である。

### 1.1.5 微小電流 [55]

微小電流のループが磁石と等価であることを見てきた。ここで微小な電流の作る磁場を計算しておこう。磁場の源と観測系を区別するために源系には'をつける。微小磁石の長さを  $l'$  とし、向きを持つ微小ベクトルとする。負磁荷、正磁荷の位置ベクトルは  $\mathbf{r}'$ ,  $\mathbf{r} + l'$  と表す。

よって位置  $\mathbf{r}$  では式 1.9 から

$$\mathbf{B} = \frac{Q_m}{4\pi} \left( \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}' - l'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}' - l'|^3} - \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right)$$

である。この磁石を限りなく小さくすると次の微分公式を用いる。

$$\begin{aligned} f(\mathbf{r}' + l') - f(\mathbf{r}') &= \mathbf{e}_x (f_x(\mathbf{r}' + l') - f_x(\mathbf{r}')) + \dots \\ &= \mathbf{e}_x \left( \frac{\partial f_x}{\partial x'} l'_x + \frac{\partial f_x}{\partial y'} l'_y + \frac{\partial f_x}{\partial z'} l'_z \right) + \dots \\ &= \mathbf{e}_x (l' \cdot \nabla') f_x + \dots \\ &= (l' \cdot \nabla') f(\mathbf{r}') \end{aligned}$$

よって  $\mathbf{p}_m = l' Q_m$  とすれば

$$\mathbf{B} = \frac{1}{4\pi} (\mathbf{p}_m \cdot \nabla') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (1.18)$$

となる。さらに磁気モーメント  $\mathbf{m}$  を次のように定義する。

$$\mathbf{m} = I \Delta S l' \quad (1.19)$$

すると

$$\mathbf{p}_m = l' Q_m = \mu_0 K \Delta S l' = \mu_0 \mathbf{m}$$

となるので式 1.18 は次のように書き換えられる。

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} (\mathbf{m} \cdot \nabla') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (1.20)$$

$\mathbf{r}' = 0$  とすると  $\mathbf{r}(\nabla \cdot \mathbf{r}) = 3\mathbf{r}$ ,  $(\mathbf{r} \cdot \nabla)\mathbf{r} = \mathbf{r}$  に注意して

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= - \frac{\mu_0}{4\pi} (\mathbf{m} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{r}}{r^3} \\ &= - \frac{\mu_0}{4\pi} \left( -3 \frac{(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{e}_r}{r^4} + \frac{\mathbf{m}}{r^3} \right) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r} - \mathbf{m} r^2}{r^5} \end{aligned} \quad (1.21)$$

となる。このモデルでは磁荷を仮定しているので発散はあるが回転はないはずである。

電流モデルでは逆に回転のみが存在するはずである。このモデルを考えるには

点磁荷に対応したデルタ関数を付加すればよい。そのため、微小電流モデルとして磁場を次のようにおく。式 1.20 に加えて

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} (\mathbf{m} \cdot \nabla') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} + \mu_0 \frac{\mathbf{m}}{l'} \delta'(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

ただし、 $\delta'$  は負磁荷から正磁荷までを結ぶ短い領域のみで  $1/\Delta S'$  の大きさを有する線状のデルタ関数であるとする。これを無限小に極限  $\Delta V \rightarrow 0$  において

$$\delta' = l' \delta$$

のように線状から点状に書き換えれば

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} (\mathbf{m} \cdot \nabla') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} + \mu_0 \mathbf{m} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

のようにかける。デルタ関数は積分されるとステップ関数になる。  
 この場合も実際に次の性質を用いて計算してみる。

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \nabla' \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A})$$

$$\nabla' \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = 0, \quad \nabla' \mathbf{m} = \nabla' \times \mathbf{m} = 0$$

これらから

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} (\mathbf{m} \times \nabla') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (1.22)$$

と書き換えることができる。この式はビオ・サバールの法則を導く上でも有用で、  
 この  $\mathbf{B}$  を微小ループだと考え、これを足し合わせると式 1.13 から

$$\int_S d\mathbf{S} \cdot \nabla \times \mathbf{B} = \oint_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{B} = \mu_0 \int_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{J} = \mu_0 I$$

だったからストークスの定理より

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_S (d\mathbf{S}' \times \nabla') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C d\mathbf{r}' \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

が導け、これは式 1.17 の積分表現である。

しかし、重要なのは次に示すように磁化モデルにデルタ関数を付加する形になっていることである。  
 そこで簡単のために  $\mathbf{r}' = 0$  とする。式 1.21 に対応して

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - m r^2}{r^5} + m \delta(\mathbf{r}) \right) \quad (1.23)$$

のようになる。つまり、原点にのみ影響する磁気モーメントが加わる。

この補正により、磁場は発散成分だけではなく、回転成分を持つようになる。これをみるために

$$\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + a$$

となるような現実的な補正を加えて原点付近において式 1.21 と比べてみると次の図のようになる。



図 1.17: デルタ関数の補正をく加えた磁場 (左)、その発散成分 (中)、回転成分 (右)

文献 [55] ではこの 2 次元モデルとして次のような図が示されている。

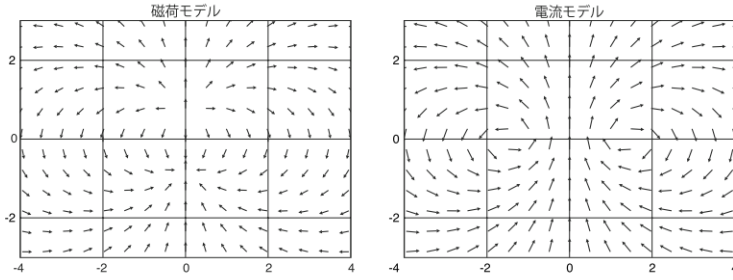


図 1.18: [55] より

興味あることに式 1.21 に原点を中心として半径  $a$  の球面上で  $d\mathbf{S}$  と  $\mathbf{B}$  との内積は頭頂角を  $\theta$  として

$$\begin{aligned} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{B} &= -\frac{\mu_0}{4\pi} d\mathbf{S} \cdot (\mathbf{m} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{r}}{a^3} \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} d\mathbf{S} \cdot \left( -3 \frac{(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{e}_r}{r^4} + \frac{\mathbf{m}}{r^3} \right) \\ &= 2 \frac{\mu_0 dS m}{4\pi a^3} \cos \theta \end{aligned}$$

外積をとると  $\mathbf{e}_r$  方向が 0 になるから

$$\begin{aligned} d\mathbf{S} \times \mathbf{B} &= -\frac{\mu_0}{4\pi} d\mathbf{S} \times (\mathbf{m} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{r}}{a^3} \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} d\mathbf{S} \times \left( -3 \frac{(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{e}_r}{r^4} + \frac{\mathbf{m}}{r^3} \right) \\ &= -\frac{\mu_0 dS m}{4\pi a^3} \sin \theta \end{aligned}$$

と簡単になる。この 2 つの結果が次のようなベクトルの水平・直交成分になっているわけである。そこで球外では式 1.21 が成り立つとし、球内ではこの結果から

$$-\frac{\mu_0}{4\pi a^3} \mathbf{m}$$

の一定ベクトルだとすると、空間のいたるところで回転成分が消え、発散成分のみになる。同様に球内を

$$2 \frac{\mu_0}{4\pi a^3} \mathbf{m}$$

の一定ベクトル場だとすると空間のいたるところで発散成分が消え、回転成分のみになる。さらにおもしろいことに両者の差は

$$3 \frac{\mu_0}{4\pi a^3} \mathbf{m}$$

であるが、これを半径  $a$  の球で体積積分すれば  $\mu_0 \mathbf{m}$  が導かれ、これはデルタ関数の性質に合致している。

### 1.1.6 Ampere の法則 [22, 55]

閉回路をなす電流はループを成し、いつまでも一定で流れることができる。しかし、コンデンサに流れ込むような電流はループをなすことなく、流れるが同時に充電されるから流れる量は一定でない。このような電荷や電流が変化する場合を動的 (dynamic) ととらえてみよう。静的 (static) の場合式 1.9 で見たようにアンペールの法則は

$$\int_S d\mathbf{S} \cdot \nabla \times \mathbf{B} = \oint_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{B} = \mu_0 \int_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{J} = \mu_0 I$$

となったが、磁場があっても  $S$  をコンデンサの極板間にとると  $d\mathbf{S} \cdot \mathbf{J} = 0$  とすることができる。



そこでアンペールの法則に補正を加えて、不連続な電流を連続とみなせるようにすることを考えよう。まず、次のように電荷の変化が電流を生み出すとして

$$\oint_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial Q}{\partial t}$$

が成り立つとする。これにガウスの法則

$$\oint_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{E} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

を用いて

$$\oint_S d\mathbf{S} \cdot \left( \mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = 0$$

が導ける。これはたとえ  $\mathbf{J}$  が不連続であっても ( ) 内の

$$\mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

が連続量になれば、これを電流として拡大解釈できる。そこで実際には伝導路がなく、真空中の補正部分

$$\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

を変位電流 (displacement current) と呼ぶ。ただし、抵抗 0 の導線には電場が存在しないので変位電流も存在しない。そこで

$$\rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}$$

とするとよく知られた連続の式

$$\nabla \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

が電流の連続を表している。変位電流を加えたアンペールの法則は次のようになる。

$$\oint_S d\mathbf{S} \times \mathbf{B} = \int_V dV (\mu_0 \mathbf{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t})$$

これは平曲面に沿って法線方向と磁場の回転積分が閉曲面に囲まれた体積内の電流と変位電流の和になる。磁場は  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  を満たす。回転成分については電流と変位電流が存在すれば生じることになる。よって微分形では

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

が成り立つ。さらに磁場が時間変化することもある。この時は次節で見るようにファラデーの法則が成り立つ。

### 1.1.7 Faraday's の法則 [22]

高校の物理でもおなじみであるがファラデーは閉回路内の磁場が変化すると起電力が生じることを発見した。これはまず、次のレンツの法則

$$V_{emf} = -N \frac{d\psi}{dt} \tag{1.24}$$

が成り立つ。これを電源とみなして、下図のような閉回路を考える。この回路では高校でオームの法則

$$V_f = IR$$

が成り立つとした。また、電場は導体の中では常に 0 であるべきであった。

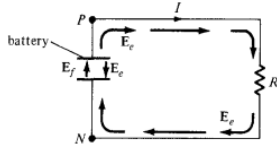


図 1.19: Elements of Electromagnetics(Matthew) より

しかし、よく考えると、導線の内部にも電場があるとし、この電場を  $\mathbf{E}_e$  とする。電磁誘導からの電場を  $\mathbf{E}_f$  としこれがあれば電流が流れる。この時の全電場を

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_f + \mathbf{E}_e$$

で表す。 $\mathbf{E}_f$  は図の電源の中になく、 $\mathbf{E}_e$  は電源の中では向きが反対になることに注意する。電圧についてキルヒホフの法則は  $\mathbf{E}_e$  が保存量であることから、結果的に高校で学習したように積分の結果は 0 になる。

$$\begin{aligned} \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= \oint_L \mathbf{E}_f \cdot d\mathbf{l} + \oint_L (\mathbf{E}_e - \mathbf{E}_e) \cdot d\mathbf{l} \\ &= \int_N^P \mathbf{E}_f \cdot d\mathbf{l} \end{aligned}$$

が成り立ち、結局電磁波の電位が

$$V_{emf} = \int_N^P \mathbf{E}_f \cdot d\mathbf{l} = - \int_N^P \mathbf{E}_e \cdot d\mathbf{l} = IR$$

と同値になる。しかし、これらは閉じた閉回路において成り立つことである。式 1.24 において 1 回巻の閉回路の面積が  $S$  であれば

$$V_{emf} = - \frac{d\psi}{dt} = \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

とかけるが次の 3 つに分けられる。

- 時間変化する磁場  $\mathbf{B}(t)$  がある場合

次の図のように時間変化する磁場内に閉回路がある場合、磁場が増加すれば、それを打ち消すように誘導電流が流れる。これは電磁気学的な慣性を示す基本的な現象で実験事実である。

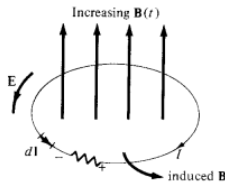


図 1.20: Elements of Electromagnetics(Matthew)

これを電場で書き直すと導線内部には図のような電場が瞬間的に生じ、電位を生む。ところが Stokes の法則は次のように電場の線積分を面積分に行うことができる。

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = - \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

これから磁場と電場の関係が

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

となることを示せる。しかし、電気的な慣性を破るのに時間的な変化と空間的な変化が連動して起きていることを示す、基本関係である。

- 時間変化するループと静磁場  $\mathbf{B}$  がある場合

伝導体の閉回路がある速さ  $\mathbf{u}$  で静磁場  $\mathbf{B}$  の中を運動する場合は高校でおなじみのローレンツ力が働く。

$$\mathbf{F}_m = q\mathbf{u} \times \mathbf{B}$$

ここで運動する電場を  $\mathbf{E}_m$  で表し、

$$\mathbf{E}_m = \frac{\mathbf{F}_m}{q} = \mathbf{u} \times \mathbf{B}$$

ここで  $\mathbf{u}$  がマクロな自由電子の速度であれば、ここに生じる起電力は

$$V_{emf} = \oint_L \mathbf{E}_m \cdot d\mathbf{l} = \oint_L (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

ここで重要なのは  $\mathbf{u}$  が電場と磁場との間の相対速度であることである。このような電磁場は観測者に対して、 $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  のどちらか、あるいは両方が力学的な速度をもっているので運動電磁場と呼ばれる。高校の教科書にある次の2つの例が典型的である。

例えば図の直流モーターの場合ローレンツ力は磁場からみた総電子の平均的な速度は

$$q\mathbf{u} = q \frac{d\mathbf{s}}{dt} = \frac{dq}{dt} \mathbf{l} = I\mathbf{l}$$

と書けるので図の場合  $I\mathbf{l} \perp \mathbf{B}$  だから

$$\mathbf{F}_m = I\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

$$F_m = IlB = qE_m = quB$$

であり、 $\mathbf{E}_m = \mathbf{u} \times \mathbf{B}$  だから

$$V_{emf} = \frac{F_m l}{q} = ulB$$

である。よってストークスの定理は

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{E}_m) \cdot d\mathbf{S} = \int_S \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S}$$

であり、

$$\nabla \times \mathbf{E}_m = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})$$

が成り立つ。

以上のように動的な電場は電荷があると発散があり、磁場の変化があると回転がある。

磁場は発散はないが電流があると回転があり、電場の変化があると回転が生じる。

これらをまとめたのが後節で紹介するの Maxwell の仕事になる。

## 1.2 磁気モーメント [126]

現時点でモノポールが発見されていない。従って、磁場  $B$  よりもここで紹介する磁気モーメントは極めて基礎的な物理量であることになる。

次のような1辺  $l$  の正方形に環状電流  $I$  を流す。すると、右ネジの向きに磁場が生じる。これがまず物理的な事実である。

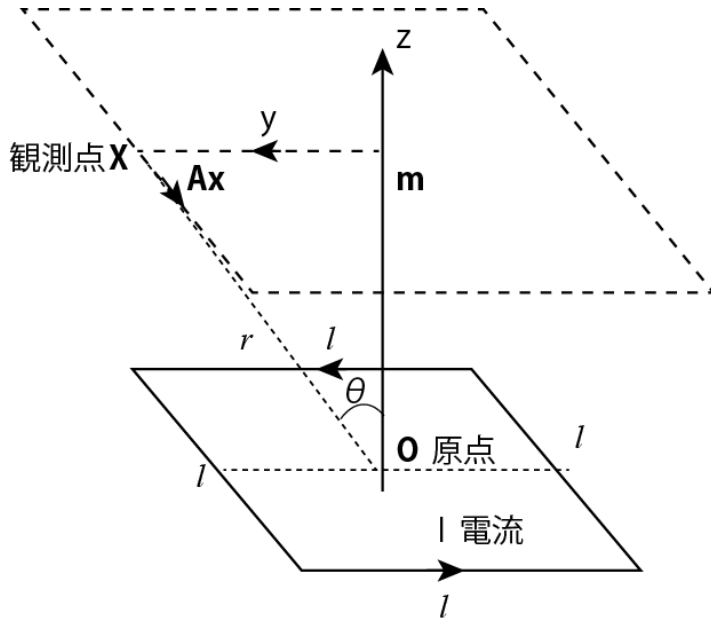


図 1.21: 磁気モーメントの基本単位

この時の磁気モーメント  $\mathbf{m}$  は式 1.19 から、電流の閉ループがつくる（小さい方）の面積を  $\Delta S$  として

$$\mathbf{m} = I\Delta S \quad (1.25)$$

で定義された。このベクトルの向きは図のように面積素辺の法線方向になる。これからもこの定義は局所的で空間分割の単位である。式 1.21 から磁場  $B$  が

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} (\mathbf{m} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (1.26)$$

とかけた。もともと  $B$  は発散演算子を内に持ち、動的な概念であることがわかる。従って、ポテンシャルが背景にあり

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (1.27)$$

とするのは自然であると思われる。この  $\mathbf{A}$  がベクトルポテンシャルであり、スカラーポテンシャル  $\phi$  と共に電磁気を基礎的に表現するのに欠かせない物理量である。これに式 1.27 を用いれば環状電流で、十分観測点  $\mathbf{x}$  が遠方であれば

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{m} \times \frac{\mathbf{x}}{r^3} \quad (1.28)$$

となった。これを図の場合に用いる。

電流面を  $xy$  平面に置いた時、電流を原点に  $z$  軸方向にとる。

$$\begin{aligned} A_x &= \left( \frac{\mu_0}{4\pi} I\ell^2 \mathbf{e}_n \times \frac{\mathbf{x}}{r^3} \right)_x \\ &= \frac{\mu I\ell^2}{4\pi} (\mathbf{e}_z \mathbf{y}) \frac{1}{r^3} \\ &= \frac{\mu I\ell^2}{4\pi} \frac{y}{r^3} \end{aligned}$$

となる。

これは磁気モーメントを用いずに電流面積素片  $ds$  から磁場を求めると、ビオ・サバルの法則 1.16 から

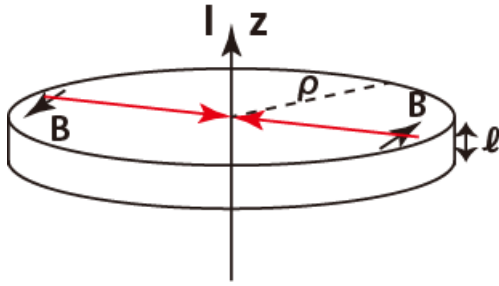


図 1.22: 今の場合 I と B の向きが 90 度ずれているので注意

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I ds \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (1.29)$$

図の場合は電流の外側の単位ベクトル (xy 平面上で進行方向右手) を  $\mathbf{e}_s$  として  
ベクトルポテンシャルの向きは電流要素の向きと同じとなるから、 $A_x$  成分を考えると x 軸に平行、反平行に流れる電流要素の影響を考えればよいため  $x, z$  座標は影響を受けず式 1.29 から式 1.27 を用いて次のようになる。

$$\begin{aligned} A_x &= \frac{\mu_0 I \ell}{4\pi} \int_{r_{y+}}^{r_{y-}} \frac{dr}{r^2} \\ &= \frac{\mu_0 I \ell}{4\pi} \left( \frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) \\ &= \frac{\mu_0 I \ell}{4\pi} \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y + \ell/2)^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y - \ell/2)^2 + z^2}} \right) \end{aligned}$$

$\ell \ll r$  として 2 行目から

$$A_x \simeq \frac{\mu_0 I \ell}{4\pi} \left( \frac{r_+ - r_-}{r_+ r_-} \right) \simeq \frac{\mu_0 I \ell^2 y}{4\pi r^3}$$

よって十分に遠方であれば 1.26 に一致する。

一般に電流の広がりに対して、十分離れた場所での磁気モーメントは体積電流密度を  $\mathbf{J}_V$ 、面積電流密度  $\mathbf{J}_S$ 、閉回路電流  $\mathbf{I}$  として I の囲む面積を  $\mathbf{S}$  とすれば

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int dV \mathbf{x} \times \mathbf{J}_V(\mathbf{x})$$

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int dS \mathbf{x} \times \mathbf{J}_S(\mathbf{x})$$

$$\mathbf{m} = \frac{I}{2} \oint \mathbf{x} \times d\mathbf{x} = I \mathbf{S}$$

ただし、面積ベクトル  $\mathbf{S}$  の x 成分は

$$S_x = \frac{1}{2} \oint (y dz - z dy)$$

であり、閉回路  $yz$  面への射影が囲む面積であることに留意する。

### 1.3 Maxwell 方程式 E-H[24]

アンペールの法則やビオ・サバールの古典的な電磁気の関係式は次の Maxwell 方程式にまとめることができる。

電荷密度を  $\rho$ 、電流密度を  $j$ 、電場を  $E$ 、磁場を  $B$  として Maxwell 方程式は次のよになる。

これらは相対論的にも矛盾のない形式で **E-B** 対応と呼ぶ。

後の節で物質がある場合に有用な  $E-H$  対応の表現を示す。

$$\text{div} \mathbf{B} = 0 \quad (1.30)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \text{rot} \mathbf{E} = 0 \quad (1.31)$$

$$\text{div} \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0 \quad (1.32)$$

$$\text{rot} \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (1.33)$$

ただし、

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$$

$$\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2} \quad (1.34)$$

である。これらは **Matthew** の入門書 Elements of Electromagnetics[24] に次の図のようにまとめられている。

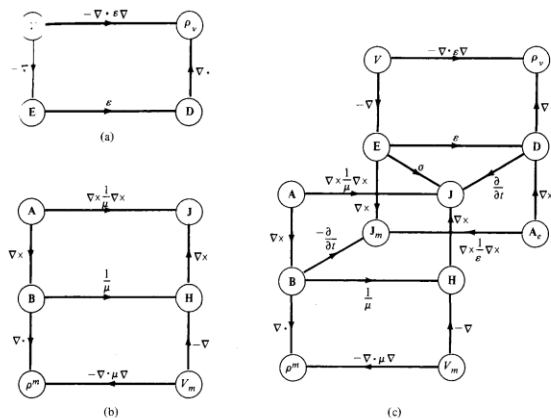


Figure 9.11 Electromagnetic flow diagram showing the relationship between the potentials and vector fields: (a) electrostatic system, (b) magnetostatic system, (c) electromagnetic system. [Adapted with permission from IEE Publishing Dept.]

図 1.23: Elements of Electromagnetics より

これから電磁波の存在が次のように予想される。

第 2 式をさらに  $\text{rot}$  をとり、第 4 式を代入すると

$$\text{rot}(\text{rot} E) = -\frac{\partial}{\partial t} (\text{rot} B) = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E}{\partial t} + \mu_0 j \right)$$

ここで  $j = 0$  として式 1.34 から

$$\text{rot}(\text{rot} E) = -\frac{\partial}{\partial t} (\text{rot} B) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

片やベクトル公式から

$$\text{rot}(\text{rot} E) = \nabla(\nabla \cdot E) - \nabla^2 E$$

だから、ここで  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$  を選ぶことが観測側にまかされる。これは後に重要な「選択」をしたことになる。 $E$  の位相は広がらず連続性を持つパラメタ値  $t$  と回転性のベクトル  $\omega$  から生じ、磁場はベクトル  $k$  と空間ベクトル  $x$  からスカラー値が作られる。結局電場に注目し、ある選択を経て

$$\nabla^2 E = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E \quad (1.35)$$

という波動方程式が得られる。第 2 式から電場の回転が磁場の時間変化を生むので Maxwell 方程式そのものが波動を表しているといえる。ただし、波源としては電荷であって磁荷ではない。

第一が示すように磁場の発散は常に 0 である。こうした非対称の構造が電磁場の基本にあり、これらは電磁場を統一的に表した時にも本質的なものになりそうである。

磁場についても第 4 式の回転をとると第 2 式の rot と grad を入れ替え  $j = 0$  とするから

$$\begin{aligned} \text{rot}(\text{rot}B) &= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\text{rot}E) \\ \nabla^2 E &= -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} B \end{aligned} \quad (1.36)$$

を得る。この時は第 1 式があるので  $\nabla \cdot B = 0$  を選ぶ必要はない。

式 1.35 について波数ベクトル  $k$ 、角速度  $\omega$  を用いれば  $c$  は波の伝達速度であり

$$E = E_0 e^{i(kx - \omega t + \delta)}$$

という一般解を得る。同じように磁場も電場に直交して伝達する電磁場の存在を示す。

また真空中においては式 1.35 について

$$\left(\frac{k}{\omega}\right)^2 = \mu_0 \epsilon_0$$

という関係が成り立つ。これからこの場の伝達速度  $c$  は

$$c = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \quad (1.37)$$

である。これは光の伝達速度に等しい。重要なのはこの速さはあらゆる慣性系で変化しないスカラー値であるということである。

磁場も波として伝達していくことがわかる。ただし、式 2 と式 4 は磁場と電場はお互いの回転が時間微分をつくるので次の関係が空間的な磁場と電場の間になくてはならない。

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{k}}{\omega} \times \mathbf{E}$$

波数ベクトルの空間成分  $\mathbf{k}$  は波のエネルギー伝搬の向きに等しい。従ってこの式は  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$  は進行方向に共に直行し、お互いの位相差は  $\pi$  あることがわかる。ただし、この時の  $\omega$  はスカラーとみなしている。

### 1.3.1 1次元の電磁気学

Maxwell 方程式を理解するために 1 次元の電磁場を考えてみよう。yz 平面は均一とし、x 軸方向だけを考えると面積積分は単なる差分とみなすことができ簡単になる。

### 1.3.2 静電場

はじめに静電場を考える。1 次元の世界を yz 平面が極めて薄いシートとして面電荷の密度分布  $\sigma$  を考えるとこの時の電場は単位ベクトル  $\mathbf{e}_x$  を用いて

$$\begin{cases} \mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{e}_x & (x > 0) \\ \mathbf{E} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{e}_x & (x < 0) \end{cases}$$

となり、電荷のある原点では不連続で、それ以外では連続した場になる。これは発散があって回転がないので

$$\mathbf{e}_x \cdot (\mathbf{E}(x_2) - \mathbf{E}(x_1)) = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma$$

$$\mathbf{e}_x \times (\mathbf{E}(x_2) - \mathbf{E}(x_1)) = 0$$

さらに面電荷が複数あれば

$$\mathbf{e}_x \cdot (\mathbf{E}(x_2) - \mathbf{E}(x_1)) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i \sigma_i$$

連続した分布であれば

$$\mathbf{e}_x \cdot (\mathbf{E}(x_2) - \mathbf{E}(x_1)) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{x_1}^{x_2} dx \rho$$

さらに符号を含めて

$$\mathbf{e}_x dS = d\mathbf{S}$$

とすれば次のようにおける。

$$\sum_{i=1,2} d\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{E}_i = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V dS dx \rho \quad (1.38)$$

この式は式 1.1

$$\oint_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V dV \rho$$

の差分バージョンである。3次元の場合

$$\oint_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{E} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{E}$$

としたが、この場合の  $\nabla \cdot \mathbf{E}$  は微小変化を  $\Delta x$  として電荷密度を体積密度とすると

$$\mathbf{e}_x \cdot (\mathbf{E}(x + \Delta x) - \mathbf{E}(x)) = \frac{1}{\epsilon_0} \Delta x \rho$$

となり、この  $\Delta x \rightarrow 0$  として

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

が導ける。回転成分  $\nabla \times \mathbf{E}$  についても同様に

$$\sum_i d\mathbf{S}_i \times \mathbf{E}_i = 0$$

からは外積だから

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_x \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} &= 0 + -\mathbf{e}_y \frac{\partial E_z}{\partial x} + \mathbf{e}_z \frac{\partial E_y}{\partial x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる。



### 1.3.3 静磁場

次に直線電流により生成される静磁場を考えよう。直線電流を  $x$  方向にとると、右ねじ則から磁場は  $yz$  面方向に一様にはならない。そこでここでは直流電流が  $yz$  面内しか流れず、電流密度の成分  $J_y, J_z$  が至るところで一定になるような面電流  $\mathbf{K}$  を考える。

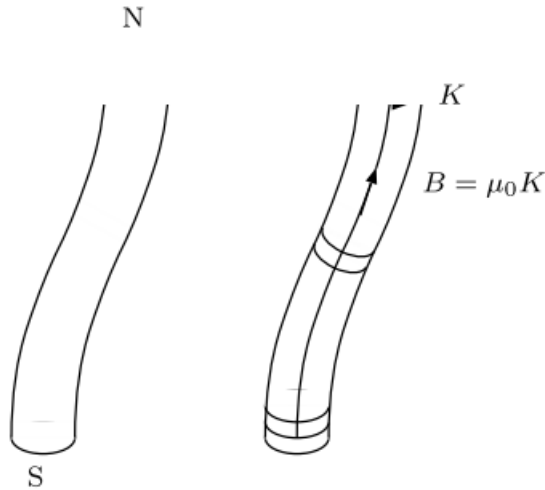


図 1.24: [55] より

面電流は電流密度に面積がかかるので電流を長さで割った形になっている。よってこの面電流がつくる磁場  $\mathbf{B}$  は平面内で次のように表すことができる。

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{2} \begin{cases} \mathbf{K} \times \mathbf{e}_x & (x > 0) \\ -\mathbf{K} \times \mathbf{e}_x & (x < 0) \end{cases}$$

ここで、電荷と同じように 2 枚の  $yz$  平面で囲まれた領域を考える。この領域に電流が存在しなければ 2 枚の平面内は一定の磁場になるため、左右の磁場に差はない。しかし、領域内に電流があればこの差が次のように現れる。

$$\mathbf{e}_x \cdot (\mathbf{B}(\mathbf{x}_2) - \mathbf{B}(\mathbf{x}_1)) = 0$$

$$\mathbf{e}_x \times (\mathbf{B}(\mathbf{x}_2) - \mathbf{B}(\mathbf{x}_1)) = \mu_0 \mathbf{K}$$

さらに  $yz$  方向に電流が分布している場合は

$$\mathbf{e}_x \times (\mathbf{B}(\mathbf{x}_2) - \mathbf{B}(\mathbf{x}_1)) = \mu_0 \int_{\mathbf{x}_1}^{\mathbf{x}_2} dx \mathbf{J}$$

である。微分形は次のようになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_x \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} &= \frac{\partial B_x}{\partial x} = 0 \\ \mathbf{e}_x \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} &= -\mathbf{e}_y \frac{\partial B_z}{\partial x} + \mathbf{e}_z \frac{\partial B_y}{\partial x} = \mu_0 \mathbf{J} \end{aligned}$$

となる。

### 1.3.4 動的な場

動的な場では変位電流も含めることで極めて対称性のよい、磁場と電場の関係式が得られ、これが Maxwell 方程式にまとめられる。電場の回転はファラデーの法則は

$$\mathbf{e}_x \times (\mathbf{E}(x_2) - \mathbf{E}(x_1)) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

さらに変位電流を考慮し、磁場の回転は

$$\mathbf{e}_x \times (\mathbf{B}(x_2) - \mathbf{B}(x_1)) = \mu_0 \int_{x_1}^{x_2} dx \left( \mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$

これらから 1 次元の電磁気のまとめとして  $\nabla \rightarrow \partial/\partial x$  で考えることができ、

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial x} = -\mu_0 \left( J_y + \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \right)$$

または、

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} = -\mu_0 \left( J_z + \epsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} \right)$$

となる。

### 1.3.5 導体

電磁場に影響を与える物質は、導体、誘電体、磁性体の 3 つがある。これらの物質があると近接場にまず影響を与え、その影響が周囲に伝達していく。

導体 (conductor) とは電場を与えると電流が流れる物質であるといえる。通常では、電子の運動は様々なものに妨げられ、古典的には衝突と加速を繰り返すことになる。電子の移動速度はこうしたマクロな現象の平均としてきまる。これはローレンツ力にもあてはまる。

電子が加速され力に比例した臨界速度  $\mathbf{v}$  に達したとしよう。このとき移動度と呼ばれる定数  $\mu_m$  を導入し、電荷を  $Q$  とすれば

$$\mathbf{v} = \mu_m \mathbf{F} / Q$$

とおける。電場を用いて  $\mathbf{F} = Q\mathbf{E}$  とすれば臨界速度  $\mathbf{v}$  は次のようになる。

$$\mathbf{v} = \mu_m \mathbf{E}$$

つまり、臨界速度  $\mathbf{v}$  は場の力や電場で決められる。

電流密度  $\mathbf{J}$ 、電子密度を  $n$  とし

$$\mathbf{J} = nQ\mathbf{v} = nQ\mu_m \mathbf{E} \tag{1.39}$$

となる。よって導電率  $\sigma$  と移動度  $\mu_m$  の関係は全電荷  $nQ$  をかけるだけの違いとして

$$\sigma = \mu_m nQ$$

となることがわかる。一方でローレンツ力

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

この式の両辺に  $\mathbf{v}$  が含まれている。両辺に  $\mu_m/Q$  をかければ

$$\mathbf{v} = \mu_m(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

となり、式 1.39 から  $nQ$  をかければ

$$\mathbf{J} = \sigma \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{nQ} \right)$$

のように本来、電流密度や臨界速度がマクロ的な決定量であり、自分自身の変化の影響を内在している。この補正は場が無限大の熱溜を仮定していない場合に観測量としては全てに通じるものがある。自分自身の影響が場との外積でくりこまれる形になる。

現実的な金属を考えると自由電子の数  $n$  が非常に大きいいため第 2 項が落ちてよく知られているオームの法則

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \tag{1.40}$$

になる。しかし、比較的  $n$  の小さい半導体の場合は第 2 項は無視できない。

この時、ホール効果 (Hall effect) が起きる。

導体はこのホール効果が期待できない場合、 $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$  の発散を取り、

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{J} &= -\frac{d\rho}{dt} \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon} \end{aligned} \tag{1.41}$$

だったから

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{\sigma}{\epsilon_0} \rho = 0 \tag{1.42}$$

が得られる。これは熱伝導方程式の形になっていて

$$\rho = \rho(0)e^{-\sigma/\epsilon_0 \cdot t} \tag{1.43}$$

が得られる。つまり電荷は拡散し、熱力学の法則のように多いところから少ないところに移動していくことがわかる。このような現象が誘電緩和 (dielectric relaxation) という。

これから時間が十分経過すると電流密度の発散がなくなることがわかる。しかし、電荷が保存されているので、その電荷は導体の表面のみに存在することになる。

さらに式 1.40 からは  $\sigma$  が大きくなると。有限の  $\mathbf{J}$  であるためには  $\mathbf{E}$  は小さくなくてはいけない。現実の導体の  $\sigma$  は非常に大きいので電場  $\mathbf{E}$  は非常に小さくなり、これが導体中の電場を 0 とみなす理由である。この時  $\mathbf{E} = 0$  とすると式 1.41 から  $\rho = 0$  となり、これは先の式 1.43 の時間経過後の状態と同じになる。しかし、式 1.43 が表しているように初期  $\rho(0)$  の値が時間変化と同じ影響を与えていることに注意がいる。

さらに Maxwell 方程式から

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

を考えれば  $\mathbf{E} = 0$  の導体内部では磁場が変化できない。

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

これを凍結磁場 (freezing\_of\_magnetic\_field) という。これは超伝導体のように

$$\mathbf{B} = 0$$

とは異なり、磁場の変化がないことを示す。磁場の変化がないことは電場の回転がないことである。

### 1.3.6 誘電体

次に誘電体を考えよう。これは通常、電気的に中性であるが電場をかけると、分極が生じるような物質である。分極電荷の存在は電気双極子モーメント  $\mathbf{p}$  を生む。

$$\mathbf{p} = ql$$

これに前節で導入した線上の  $\delta$  関数  $\delta_L(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  をかけると、この線分  $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  上にだけ電荷が存在するようにできてこれを分極ベクトル (polarization\_vector)

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}\delta_L(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$$

と表すことができる。微小面積  $S$  を考え、下図のような微小体積  $V$  を考えると、この体積内のみ次の値をとる

$$\mathbf{P} = Ql/V = \mathbf{e}_s Q/S$$

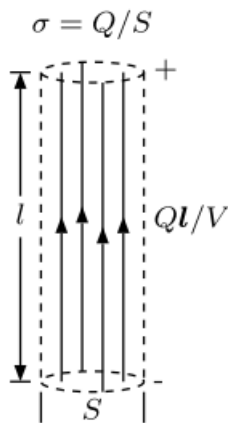


図 1.25: [55] より

従って、全ての分極ベクトルを足し合わせて

$$\mathbf{P} = \sum_i Q_i l_i \delta_L(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i l_i) = \sum_i \mathbf{p}_i \delta_L(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i l_i)$$

とおける。線状デルタ関数を含ませたので次の図にみるようにこの分極ベクトルが存在するのは限られた領域  $\mathbf{r}_i$  になることが特徴になる。

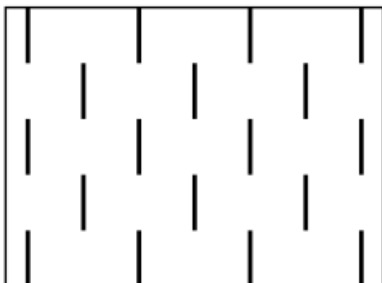


図 1.26: [55] より

現実的にはこの限られた領域はミクロ的に存在しているので、マクロの立場からは次のように平均化される。  
 $n$  を単位体積当たりのモーメントの個数として

$$\mathbf{P} = \frac{1}{V} \int dV \sum_i \mathbf{p}_i \delta_L(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i \mathbf{l}_i) = \frac{1}{V} \sum_i \mathbf{p}_i = n \langle \mathbf{p} \rangle$$

逆に分極ベクトル  $\mathbf{P}$  が与えらえると分極電荷  $\rho_p$  が次のように求まる。=0

$$\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}$$

ミクロでは不連続である分極ベクトル場でもマクロで見ると連続に見える。よって分極ベクトル場はなめらかなベクトル場であるから電荷は領域の縁のみに発生する。

クーロンの法則で表される電荷を自由電荷 (free charge)  $\rho_f$  として次の関係がある。

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_p + \rho_f) = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_f - \nabla \cdot \mathbf{P})$$

これから  $\rho_f$  が

$$\rho_f = \nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P})$$

分極電荷  $\rho_p$  は物質内で束縛されているから束縛電荷 (bounded\_charge) ともいう。これから電束密度 (electric flux\_density)  $\mathbf{D}$  を次のように定義する。

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \tag{1.44}$$

よって

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f$$

とかける。つまり、電束密度は自由電荷の湧き出し、吸い込みがあるベクトル場である。

実験的にもおおくの素材で分極ベクトル  $\mathbf{P}$  は  $\epsilon_0 \mathbf{E}$  に比例することから線型応答 (linera response) があるとし次の関係が成り立つ。

$$\mathbf{P} = \chi_p \epsilon_0 \mathbf{E}$$

この  $\chi_p$  は電気感受率 (electric susceptibility) という。これは一般に正の定数である。式 1.44 から電束密度も

$$\mathbf{D} = (1 + \chi_p) \epsilon_0 \mathbf{E}$$

とあらわされ

$$\epsilon = (1 + \chi_p) \epsilon_0 \tag{1.45}$$

とおくと、 $\epsilon$  は誘電率 (permittivity) といい。これも正である。

透磁率と異なり、誘電率が  $\epsilon_0$  より小さくなることはない。これは伝達速度に上限がることを表している。線型応答する均質な材料では材料中に自由電子がないと

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$$

となる。これは

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$$

を表し、分極電荷も材料中に見ることはできず、材料表面にしか現れない。

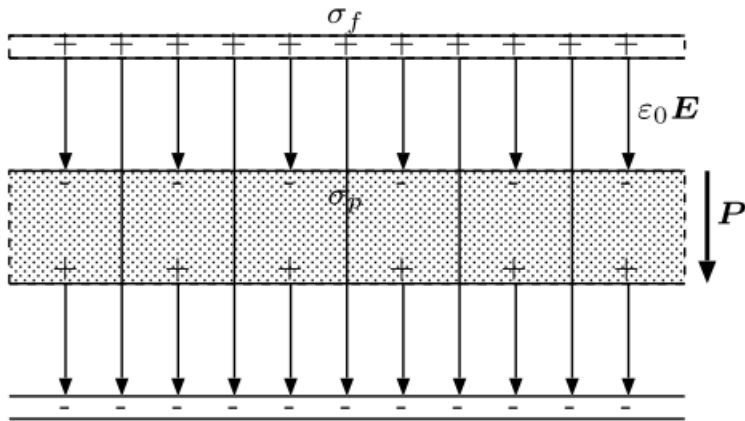


図 1.27: [55] より

例えば図のような平行板コンデンサ内に誘電体を挿入すると、分極電荷は誘電体内部に見られず、表面に現れる。留意点は電束  $\mathbf{D}$  は発生源が自由電子なので極板でしか発生せず、分極電束  $\mathbf{P}$  は誘電体表面でしか発生しない。つまり次のように電荷の面積密度  $\sigma$  を表していることがわかる。

$$|\mathbf{D}| = \sigma_f$$

$$|\mathbf{P}| = \sigma_p \quad (1.46)$$

大きさをのみを考えると、誘電体がなければ

$$D = \epsilon_0 E = \sigma_f$$

誘電体があると比を  $\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0$  として

$$\epsilon_0 E = D/\epsilon_r = \sigma_f/\epsilon_r$$

だから空間中よりも小さくなる。

また、誘電体中の分極は式 1.44 から

$$P = D - \epsilon_0 E = (1 - 1/\epsilon_r)\sigma_f$$

となり、誘電体内で一定であるが外では 0 になる。面状デルタ関数の形をとる。

よって図の誘電体の下面での面密度  $\sigma_p$  は

$$\sigma_p = P = (1 - 1/\epsilon_r)\sigma_f \quad (1.47)$$

つまり誘電体下面の電場は

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \sigma_p$$

となる。高校物理で習ったように  $\sigma_f$  を固定しておいて比誘電率  $\epsilon_r$  を大きくしても  $D$  は変化しない。この時、式 1.47 から

$$\sigma_p \rightarrow \sigma_f$$

となる。このため、極板間の電位差はどんどん小さくなる。逆に電位差を固定し、比誘電率  $\epsilon_r$  を大きくすると面密度  $\sigma_p$  が大きくなる。これが静電容量 (capacitor) の原理になる。

図において空間部分の厚さを  $d_v$ 、誘電体の厚さを  $d_d$  とすると極板間の電位差が  $\phi = Ed = \frac{\sigma_f}{\epsilon_0}d$  から

$$\phi = \frac{(d_d/\epsilon_r) + d_v}{\epsilon_0} \sigma_f$$

となる。これからキャパシタは次のように定義される。

$$C = \frac{\sigma_f S}{\phi} = \frac{\epsilon_0 S}{(d_d/\epsilon_r) + d_v}$$

つまり、 $\epsilon_r$  が大きいと電磁気的な誘電体の厚さが小さくなる。このため静電容量が大きくなる。空間部分の厚さ  $d_v$  と  $d_d/\epsilon_r$  を加えたものが電磁気的な厚みとなる。

### 1.3.7 磁性体

次に磁性体を考えよう。前節までの議論で磁性は円状の電流で説明ができた。ここでも微小電流ループモデルを考える。磁性体にはこの微小電流ループが無数に存在している考える。これを磁化電流 (magnetization\_current) という。電流を  $I$ 、ループにより囲まれた面積を  $\mathbf{S}$  とする時、磁気モーメントは式 1.19 から

$$\mathbf{m} = I\mathbf{S}$$

で表される。分極電荷の時の線状デルタ関数と同様に磁荷がこの面積内にだけ存在するようにするために面上デルタ関数  $\delta_S(\mathbf{r}, \mathbf{S})$  をここではもってくる。そこで次で磁化ベクトル  $\mathbf{M}$  を定義する。

$$\mathbf{M} = \mathbf{m}\delta_S(\mathbf{r}, \mathbf{S})$$

これは次の図のように厚さ  $l$ 、体積  $V$  の領域を考え、マクロな立場からは次のように平均化されて表される。単位体積当たりの磁気モーメントの個数を  $n$  として、

$$\mathbf{M} = \frac{1}{V} \int dV \sum_i \mathbf{m}_i \delta_S(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i, \mathbf{S}_i) = \frac{1}{V} n \langle \mathbf{m} \rangle$$

と平均化される。

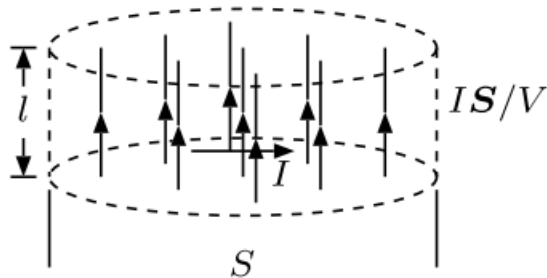


図 1.28: [55] より

図で見ると点線の境界円に張られた円板に電流  $I$  は垂直であるが、磁化ベクトルは電流に対し、平らに張った面ではなく、曲面に対しても定義される。

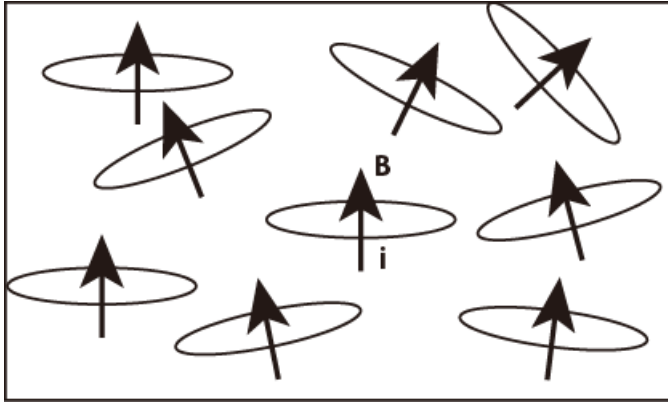


図 1.29: 磁性体中の磁化ベクトル：限定的な領域でのみ存在する。平均化すると上向きのベクトルになる。

逆に磁化ベクトルが得られるとこの回転をとると電流密度  $\mathbf{J}_m$  が得られる。

$$\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M}$$

さらに誘電体の場合は分極の際に瞬間的な電荷の移動があり、これが分極電流  $\mathbf{J}_p$  を流すことが知られている。結局全電流は自由電荷によるもの、磁化電流、分極電流の和になる。

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_f + \mathbf{J}_m + \mathbf{J}_p$$

よって変位電流も考えたアンペールの法則が次のように表される。

$$\nabla \times \mathbf{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 (\mathbf{J}_f + \mathbf{J}_m + \mathbf{J}_p) = \mu_0 \left( \mathbf{J}_f + \nabla \times \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right) \quad (1.48)$$

特に  $\mathbf{J}_m + \mathbf{J}_p$  は物質に束縛されているので自由電流にたいして束縛電流 (bounded current) と呼ばれることがある。

このように一般的に実際の物質では自由に移動して力を伝える粒子と、物質中心で束縛されながら変動する粒子がある。後の観測の理論において重要になる。

また、式 1.48 は時間について 1 階のように見えるが磁場が電場の時間変化で表さるので波動方程式の解を含んでいる。この式から自由電流密度を求めると

$$\mathbf{J}_f = \nabla \times \left( \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \right) - \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \quad (1.49)$$

そこで磁場強度 (strength\_of\_magnetic\_field)  $\mathbf{H}$  を次で定義すると

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \quad (1.50)$$

次のように簡単になる。

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1.51)$$

マクロな立場で均一な物質を考えると次のような線形応答が成立する。

$$\mathbf{M} = \alpha \mathbf{B} / \mu_0$$

式 1.50 から次も成り立つ。

$$\mathbf{H} = \frac{(1 - \alpha) \mathbf{B}}{\mu_0} \quad (1.52)$$



ここで誘電率と同じように

$$\mu = \frac{\mu_0}{1 - \alpha}$$

を透磁率 (permeability) という。また、磁気感受率 (magnetic\_susceptibility) を

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$$

とおくと、式 1.50 から

$$\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} = \mathbf{H} + \mathbf{M} = (1 + \chi_m) \mathbf{H} \quad (1.53)$$

とまとめられる。

式 1.52 から磁気感受率が

$$\chi_m = \frac{\alpha}{\alpha + 1} \quad (1.54)$$

とおけることがわかる。電場の場合の式 1.45 と異なり  $\alpha$  は負になることがある。

$$-1 < \alpha < 0$$

この時、 $\chi_m < 0$  となる。線形応答するような物質では自由電流がないと  $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$  である。この時、式 1.53 から

$$\nabla \cdot \mathbf{M} = 0$$

が成立する。これは次の図のように磁化電流も磁性体表面にしか存在しないことを意味する。

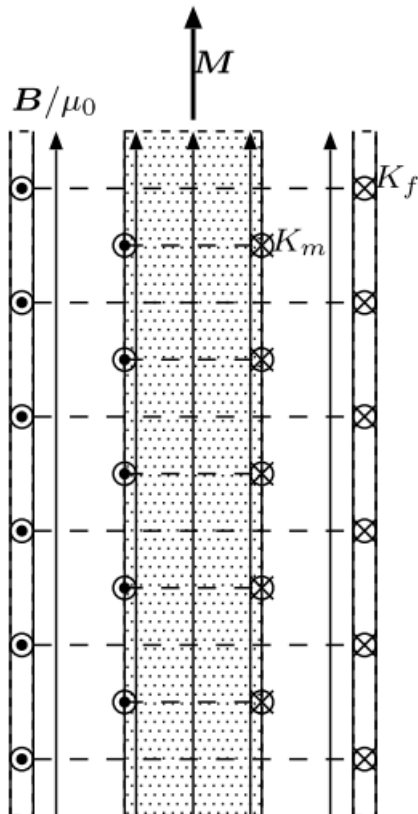


図 1.30: コイル内の棒状の磁性体が磁荷された様子。常磁性体では磁化は磁場と同じ向きになる。磁性体表面に磁化電流が右ねじ則で生じる。[55] より

図では断面に対し、十分長いコイル内に置かれた磁性体の場合、対称性から磁場も磁束密度もインダクタの内部ではコイルの円筒軸方向を向く。自由電流はコイルの内部にしか流れないが、磁化電流は磁性体表面に発生している。つまり、表面と内面が分離され、境界があることを示している。

コイルが十分に長いならばコイルの外部の磁場は 0 とみなせる。自由電子と結びついていた  $\mathbf{H}$  はコイルの内部で自由電流の面密度  $K_f$  に一致し、アンペールの法則

$$\frac{B}{\mu_0} = H = K_f$$

が成り立つ。一方で透磁率  $\mu$  の磁性体中では比透磁率を  $\mu_r = \mu/\mu_0$  として

$$\frac{B}{\mu_0} = \mu_r H = \mu_r K_f$$

となり、自由空間の磁場より強くなる。磁性体中の磁化  $M$  は式 1.53 から

$$M = \frac{B}{\mu_0} - H = (\mu_r - 1)K_f \quad (1.55)$$

磁化電流  $\mathbf{J}_m$  は分極磁化  $\mathbf{M}$  から

$$\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M}$$

で与えられたが、 $\mathbf{M}$  が磁性体内部で一定、外で 0 に突然変化するため面上  $\delta$  関数になる。

磁性体表面で 1.55 から

$$K_m = M = (\mu_r - 1)K_f$$

である。磁束を  $\Phi$  とすると、磁性体の断面積  $S_m$ 、空間の断面積  $S_v$  とすると単位長さあたりのコイルの巻き数  $n$  電流を  $I$  として  $K_f = nI$  とおけるから

$$\Phi = \mu_0(\mu_r S_m + S_v)K_f = \mu_0(\mu_r S_m + S_v)nI$$

これから高校で学習したインダクタンス  $L$  とは自由電流に対する全磁束の比で定義できて巻き数  $N$  はコイルの長さ  $\ell$  を用いて

$$N = n\ell$$

だから

$$L = \frac{N\Phi}{I} = \mu_0(\mu_r S_m + S_v)n^2\ell = \mu_0(\mu_r S_m + S_v)N^2/\ell \quad (1.56)$$

とかける。

### 1.3.8 永久磁石

磁化電流を考えると永久磁石にも次の図のように電流が表面に流れていることになる。

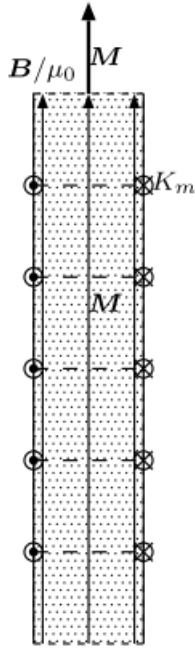


図 1.31: [55] より：永久磁石にも図のように円電流があると考え。これから内部の磁場は磁化と同じ向きになる。

これは先の図のソレノイドの場合と同じで棒の長さが十分に長いなら、外部の磁場はほとんど 0 になると考えられる。面電流密度  $K$  に対応し

$$\frac{B}{\mu_0} = K$$

が成り立つ。よって、磁石のつくる磁場は前節で考えたようにこの一様な磁場が棒内部の領域のみにあり、端点に対する磁化を加えて計算すればよい。

### 1.3.9 Maxwell 方程式 E-H[55]

以上から Maxwell 方程式を再び電束密度  $\mathbf{D}$  と磁場強度  $\mathbf{H}$  を中心にしてまとめておこう。現実の物質中の電場や磁場を計算するときのリファレンスになる。自由電荷がある時、

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho_f \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\end{aligned}$$

物質中で分極がある時、 $\mathbf{B}$  を  $\mathbf{H}$  で置き換える。

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{1}{\epsilon_0} \rho \\ \nabla \times \mathbf{E} &= \mathbf{J}_M - \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{H} &= \frac{1}{\mu_0} \rho_m\end{aligned}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_H + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

ただし、 $\mathbf{J}_M$  を磁流 (magnetic\_current)、 $\mathbf{J}_H$  を電流 (electric\_current) とし、分極ベクトルを  $\mathbf{P}_m = \mu_0 \mathbf{M}$  として

$$\rho = \rho_f - \nabla \cdot \mathbf{P}$$

$$\mathbf{J}_M = -\frac{\partial \mathbf{P}_m}{\partial t}$$

$$\rho_m = -\nabla \cdot \mathbf{P}_m$$

$$\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}$$

$$\mathbf{J}_H = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$$

対称性があるような状況ではアンペールの法則やガウスの法則を用いることができるが現実にはビオ・サバールの法則やクーロンの法則を微小領域に適用し、コンピューターで積分計算する方法がとられる。

## 1.4 ゲージ場 [55]

### 1.4.1 ポアソンの定理

電磁気学では  $\nabla \cdot$  と  $\nabla \times$  の作用が基本的な役割を果たす。

もし  $\nabla \times$  が 0 になることはこれまで見た来たように回転成分がないということであり、任意の閉曲線に沿った積分は 0 になることでもある。

言い換えるとこの積分路を任意の点で 2 分しすると、この 2 つの経路に沿っての積分は互いに反対符号がつくことになる。

ただし、自然界ではこの作用を 2 回作用させるところまでがよく登場する。スカラー量に作用する場合はポアソンの式になる。この式は今後の基本になるのでその意味をよく理解しておこう。

空間のある点を基準として次のように静電ポテンシャルを定義しておく。

$$\phi = - \int_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}$$

閉回路に沿って内積をとるのでスカラー値となる。閉回路でなければ

$$\phi_{ab} = - \int_a^b d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}$$

である。これから

$$\phi_{ab} + \phi_{ba} = 0 \tag{1.57}$$

が成り立てば  $\phi = 0$  である。

微小変化をとると  $\mathbf{E}(E_x, E_y, E_z)$  として

$$d\phi = -(E_x dx + E_y dy + E_z dz) \tag{1.58}$$

となるので

$$E_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x}, E_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y}, E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z}$$

が得られる。つまり微分関係

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi$$

である。これは空間次元数だけ成分を持つベクトル量である。

一方で回転成分  $\nabla \times$  をとると

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times (\nabla \phi) = 0$$

となるので、スカラーポテンシャルの発散の回転成分は常に 0 である。ガウスの法則を使うと

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot (-\nabla \phi) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (1.59)$$

であり、湧き出しがすることを示している。これは次のように一般的にはポアソンの式 (Poisson equation) と呼ばれる。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \nabla^2 \phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

また、高校で学習したようにこの式をみたす  $\phi$  は電位を表し、クーロンポテンシャル (Coulomb potential) と呼ばれる。電荷  $Q$  のつくるポテンシャルは

$$\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

これは  $1/r$  型のポテンシャルであり、電場は  $1/r^2$  型になる。電場が電気力線の密度であることから 3 次元内の表面積が  $4\pi r^2$  となることと対応している。電荷ではなく電荷密度を用いると  $Q = dV\rho$  とかけるので

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV \frac{\rho}{r}$$

となる。ガウスの法則から  $\nabla E = \rho/\epsilon_0$  を用いて

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{1}{4\pi} \int_V dV \frac{\nabla \cdot \mathbf{E}}{r} \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_V dV \frac{\nabla^2 \phi}{r} \end{aligned} \quad (1.60)$$

となる。電荷が存在しない領域では  $\nabla^2 \phi = 0$  である。この時は上の式から  $\mathbf{E} = 0, \phi = 0$  である。しかし  $\nabla \phi = \text{Const}$  であれば  $\nabla^2 \phi = 0$  になることに注意する。

従って微分関係だけでは見ることができないが、ポアソンの式を利用するときには必ずどの領域を考えるかが重要になる。物理的にその領域内に流線の湧き出しがあればポアソンの式は 0 にならない。逆に湧き出し場所を避けた領域を考えれば

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0$$

が成り立ち、 $\mathbf{E} = \mathbf{0}$  となることを意味する。しかし、これは間違いで実際にはその場所には電場が存在する。つまり、我々は対象の領域の内部で完全に領域を埋め尽くすものを選択する必要がある。

同じことは回転成分にもいえる。直線電流が存在すれば全空間に  $\mathbf{B}$  が存在するが、電流を避けた領域を考えれば

$$\nabla \times \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

が成り立ち、 $\mathbf{B} = \mathbf{0}$  となることを意味する。しかし、これは間違いで実際にはその場所には磁場が存在する。よってここでも完全な領域を選択しなくては行けない。しかし、そもそも完全な領域はあるかという疑問がある。むしろ、どんなに流線の湧き出しをすべて覆う領域を考えても観測者の立場からは必ず覆いきれない点 (または線、面...) が存在するのではないかと観測の理論では考える。

#### 1.4.2 ヘルムホルツの定理 (Helmholtz theorem)[55]

静電場のマクスウェル方程式は発生源を持つ場合と持たない場合の 2 つがあった。これらを統一的に表現する方法を考えよう。

これまで見てきたように  $\nabla \times$  が 0 になる場合はスカラー  $S$  を用いて  $\nabla S$  で表現できる。  
 また、 $\nabla \cdot$  が 0 になるような場はベクトル  $\mathbf{V}$  を用いて  $\nabla \times \mathbf{V}$  で表すことができる。  
 これから任意ベクトル場  $\mathbf{X}$  を

$$\mathbf{X} = \nabla\phi + \nabla \times \mathbf{A}$$

となる。これをヘルムホルツの定理 (**Helmholtz theorem**) という。  
 これは発散のない場はベクトルポテンシャルで表現でき、

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

回転のない場はスカラーポテンシャルで表現できることを表す。

$$\nabla \times (\nabla\phi) = 0$$

そこで任意のベクトル場  $\mathbf{X}(X_1, X_2, X_3)$  から次のようにスカラー場とベクトル場をつくる。

$$\phi = \frac{1}{4\pi} \int_V dV \frac{\nabla \cdot \mathbf{X}}{r} \quad (1.61)$$

$$\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z) = \frac{1}{4\pi} \int_V dV \frac{\nabla \times \mathbf{X}}{r} \quad (1.62)$$

これからヘルムホルツの定理を確かめると  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{X}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{X}) - \nabla^2 \mathbf{X}$

$$\begin{aligned} -\nabla\phi + \nabla \times \mathbf{A} &= \frac{1}{4\pi} \int_V dV \frac{-\nabla(\nabla \cdot \mathbf{X}) + \nabla \times (\nabla \times \mathbf{X})}{r} \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_V dV \frac{\nabla^2 \mathbf{X}}{r} \end{aligned}$$

ところが各成分はスカラーから別々にポアソンの定理をつかうと式 1.60 から

$$X_1 = -\frac{1}{4\pi} \int_V dV \frac{\nabla^2 X_1}{r}$$

各成分を足し合わせれば

$$-\nabla\phi + \nabla \times \mathbf{A} = -\frac{1}{4\pi} \int_V dV \frac{\nabla^2 \mathbf{X}}{r} = \mathbf{X} \quad (1.63)$$

となる。ただし、この式はポアソンの定理が成り立っていることを前提にしている。また、物質とそれが含まれている空間が必ず存在しているので物質の内部では

$$\nabla^2 \mathbf{X} \neq 0$$

であり、空間のみの領域では

$$\nabla^2 \mathbf{X} \neq 0$$

を前提にしている。前節のポアソンの定理で見たようにこでもある領域と領域以外が区別されている必要がある。

ヘルムホルツの定理で  $\phi$  はスカラーポテンシャルと呼ばれ、次のように  $\nabla\phi$  に回転がない。

$$\nabla \times (\nabla\phi) = 0 \quad (1.64)$$

また、 $\mathbf{A}$  はベクトルポテンシャルと呼ばれ、次のように  $\nabla \times \mathbf{A}$  に発散がない。

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \quad (1.65)$$

ここで  $\nabla$  をいずれも 2 回作用させていることに注意する。

次節であつかう磁場については特徴的で静磁場であっても動的磁場であっても発散がない。つまり常に

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

である。これから磁場がある領域の縁になっていることがわかる。つまり、内部と外部を分ける境界があることである。

これはベクトルポテンシャルを用いて

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

とかけることを意味している。この時、まさに式 1.65 が成り立つわけである。

これが単に数学的な関係ではないと物理屋は考えている。つまり、後節で見ると実際に  $\mathbf{A}$  が存在しているということである。

また、ヘルムホルツの定理が使えるので式 1.62 から

$$\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi} \int_V dV \frac{\nabla \times \mathbf{B}}{r}$$

が成り立つことになる。さらにこれから電磁気の基本則が次のように導かれる。 $\mathbf{J} = \mu_0 \nabla \times \mathbf{B}$  から

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV \frac{\mathbf{J}}{r}$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi} \int_V dV \frac{\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})}{r}$$

第 1 式からはベクトルポテンシャルがあたかも電流ポテンシャルとして働いているように見える。

向きに関しては電流密度に一定しているわけだ。

第 2 式はベクトルポテンシャルの回転が磁場をつくり、その回転成分が電流密度をつくるので結局回転の作用を 2 回繰り返すとベクトルポテンシャルにもどっているようにみえる。

これは次の図のように周回から 1 つの軸方向が得られるがさらにこの軸もまた、1 つの周回の部分とみることができる階層性に関係している。

つまりベクトルポテンシャルと磁場の関係は空間的なスケールが重要な役割をする。局所的には直線的なベクトルポテンシャルは、大局的には磁場を周回する。

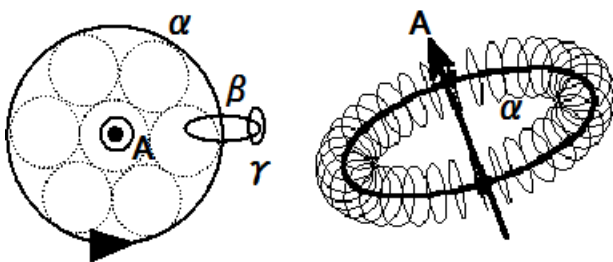


図 1.32: 階層性

回転成分のみ この 2 つの立場を考えてみよう。はじめにベクトルポテンシャルが周回している場合を考える。

この時は積分形

$$\int_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{B} = \oint_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}$$

を利用する。高校でも電場  $\mathbf{E}$  の空間的な分布を得て、線積分から電位  $\phi$  を出したように空間的な磁場  $\mathbf{B}$  の局所的な分布からベクトルポテンシャルを求めることができるだろうか。

左辺が周積分になっているが  $\mathbf{A}$  は多くの自由度があることが問題になる。

しかし、ベクトルポテンシャルが周回し、1つの平面上にあると考えれば、いたるところで1つの成分例えば  $A_z$  を0にしてしまうことができる。すると式から

$$B_x = -\frac{\partial A_y}{\partial z}$$

となるので観測点 P で

$$A_y = -\int B_x dz \tag{1.66}$$

となる。この積分の経路は点 P の xy 平面への垂線の足から点 P までとし、この積分の積分定数を0と仮定してしまう。

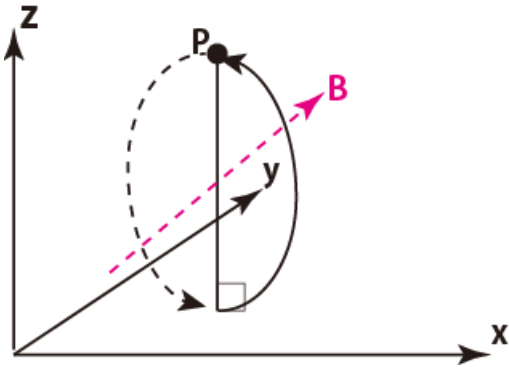


図 1.33:  $A_z$  成分を0にするような xy 平面を見つける。点 P からの垂線の足を始点とする

こうすると  $A_x$  が

$$B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} \tag{1.67}$$

$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \tag{1.68}$$

を同時に満たすから、第一式から

$$A_x = \int B_y dz + f(x, y) \tag{1.69}$$

が得られる。

式 1.66、1.69 を式 1.68 に代入すると

$$\begin{aligned} B_z &= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \\ &= -\frac{\partial \int dz B_x}{\partial x} - \frac{\partial \int dz B_y}{\partial y} - \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \end{aligned}$$

ここで

$$\nabla \cdot (B_x, B_y, B_z) = 0$$

から

$$\frac{\partial B_z}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial x} - \frac{\partial B_y}{\partial y}$$

が常に成り立つ。よって次のように表すことができる。



$$\begin{aligned}
 B_z &= \frac{\partial \int dz B_z}{\partial z} - \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \\
 &= B_z - B_z(0) - \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}
 \end{aligned}$$

ただし  $B_z(0)$  とは  $xy$  平面上での  $B_z$  の値である。これから  $f$  を決めることができ

$$f = - \int dy B_z(0)$$

となり、 $xy$  平面への射影のみが影響を与える。

よって再び式 1.66, 1.69 を用いて次のようにベクトルポテンシャルが求まる。

$$\begin{aligned}
 A_x &= \int_{(x,y,0)}^{(x,y,z)} B_y dz - \int_{(x,0,0)}^{(x,y,0)} dy B_z(0) \\
 A_y &= - \int_{(x,y,0)}^{(x,y,z)} dz B_x \\
 A_z &= 0
 \end{aligned}$$

これから

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \mathbf{A} &= \left( \frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x} \right) \\
 &= (B_x, B_y, B_z(0))
 \end{aligned}$$

を得る。従って、磁場のある点を決めると磁場の分布からベクトルポテンシャルを得ることができる。

直線成分のみ 次に局所的に  $\mathbf{A}$  は直線とみなせる場合を考えよう。

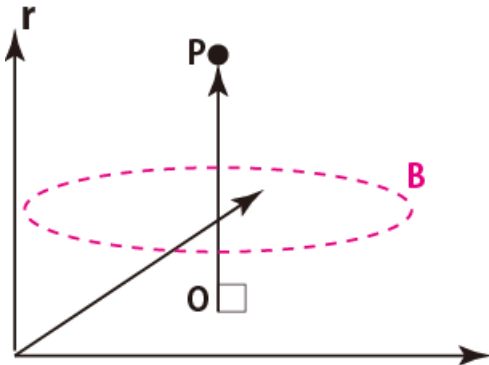


図 1.34:  $\mathbf{A}$  が  $r$  依存しない直線的な場合

この時は  $\mathbf{A}$  の  $r$  方向の成分を 0 とできることを利用する。この場合は極座標を用いて

$$\mathbf{A} = \frac{1}{r} \int_0^P dr \mathbf{B} \times \mathbf{r}$$

となる。

従って、この場合でも

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$$

となる。

### 1.4.3 ゲージ性

前節の問題はベクトルポテンシャルが多くの自由度を残し、観測者側がわりと身勝手に基準を設定できることにある。しかし、これでは物理学として普遍性を満足できない。しかし、この「身勝手な自由度が」本質的にぬぐえないところがあるのである。

ベクトルポテンシャルは次のような形式的な置き換えから登場した。

ベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  を利用して、Maxwell の方程式を書き換えると

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

とベクトルポテンシャルを定義すると Maxwell の方程式の 1 つは

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times \left( \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (1.70)$$

となる。よって  $\nabla \times (\nabla \phi) = 0$  だから

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (1.71)$$

となり、電場はベクトルポテンシャルの時間変化とスカラーポテンシャルの空間変化の和になる。

したがって、空間的なスカラーポテンシャルがなくてもベクトルポテンシャルが時間的に変化すれば電場がベクトルポテンシャルの向き生じる。他の Maxwell の方程式からは真空中において

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \frac{1}{\mu_0} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \epsilon_0 \left( \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \right) \\ &= \frac{1}{\mu_0} \nabla^2 \mathbf{A} + \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \nabla \left( \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot \mathbf{A} + \epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \\ &= \mathbf{J} \end{aligned}$$

とおくと  $c^2 = (\mu_0 \epsilon_0)^{-1}$  として

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla \left( \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (1.72)$$

となる。また、式 1.71 から

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= -\nabla \cdot \left( \nabla \phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \\ &= -\nabla^2 \phi - \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) \\ &= \rho \end{aligned}$$

つまり、

$$\nabla^2 \phi - \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

とおける。これで電流密度と電荷密度がベクトルポテンシャルとスカラーポテンシャルで定義された。ゲージ変換でふれたように、この式は次の変換においても不変になる。

$$\begin{aligned} \mathbf{A}' &= \mathbf{A} + \nabla \psi \\ \psi' &= \psi - \frac{\partial \psi}{\partial t} \end{aligned}$$

これはベクトルポテンシャルとスカラーポテンシャルの間にはある自由度が残されていることになり、これらは現在ゲージ理論として知られている。

まず、前節の内容を発展させて、 $\nabla \cdot$  も  $\nabla \times$  も共に 0 にならない動的な場を考えてみよう。

Maxwell の式にもどり式 1.70 から

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times \left( \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$$

$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  から

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial(\nabla \times \mathbf{A})}{\partial t}$$

となるから

$$\nabla \times \left( \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$$

これからベクトル場には回転成分がない時は  $\nabla \cdot$  で書けたから

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \phi$$

となる。よって、

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla^2 \phi + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

また、 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  からは式 1.72 より

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla \left( \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (1.73)$$

となった。ベクトルポテンシャルの自由度は次のように再定義してみるとよくわかる。

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \chi$$

さらに両辺の回転をとると  $\nabla \times (\nabla \chi) = 0$  となるから

$$\nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A}$$

のように同じ表記になる。これから  $\mathbf{A}'$  と  $\mathbf{A}$  は同じ磁場を与える別のベクトルポテンシャルであるといえる。しかし、興味深いことに  $\nabla \cdot \mathbf{A}'$  をとると

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla^2 \chi$$

よって  $\mathbf{A}'$  は  $\nabla^2 \chi$  の影響をうける。動的な変化を考えると、これはスカラーポテンシャルにも影響し、式 1.73 から

$$\nabla^2 \mathbf{A}' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}'}{\partial t^2} - \nabla \left( \nabla \cdot \mathbf{A}' + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi'}{\partial t} \right) = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (1.74)$$

を簡略にするために

$$\phi' = \phi + \frac{\partial \chi}{\partial t}$$

とすれば

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi'}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla^2 \chi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2}$$

となる。つまり 4 次元の表記で  $A^\mu(\phi, \mathbf{A})$  とおくと

$$\partial_\mu \chi = dA_\mu$$

であり、計量に自由度があることがわかる。

このような  $A^\mu(\phi, \mathbf{A})$  に  $\chi$  の選びかたの自由度を当てることはゲージ変換 (gauge transformation) として知られている。重要なことは  $\phi, \mathbf{A}$  に同じ  $\chi$  の変化を与えても現実の電場と磁場に観測される変化がないということである。これをゲージ不変性 (gauge\_invariance) という。

クーロンゲージ はじめに次のように  $\mathbf{A}$  の発散を 0 としたものをクーロンゲージ (Coulomb\_gauge) という。

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

これを式 1.74 に代入すると

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (1.75)$$

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

ここで次のダランベール演算子 (d'Alembertian) を定義する。

$$\square \equiv \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

とすると式 1.80 は

$$\square \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (1.76)$$

$$\square \phi(\mathbf{x}, t) = -\frac{\rho(\mathbf{x}, t)}{\epsilon_0}$$

とまとめることができる。これらは波動方程式 (wave\_equation) と呼ばれることもある。これらは波源から有限の速度で波が空間に広がっていくことを表現している。従って時間差があり、離れた距離にある場合の影響について次に考察する。

ファラデーゲージ 次にスカラーポテンシャルを 0 にするゲージを採用する。これをファラデーゲージ (Faraday\_gauge) という。

$$\phi - \frac{\partial \chi}{\partial t} = 0$$

これを式 1.74 に代入すると

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \mu_0 \mathbf{J} \quad (1.77)$$

$$\frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{A})}{\partial t} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.78)$$

となる。第 2 式を積分すると

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{1}{\epsilon_0} \int dt \rho$$

これを第一式に代入すると

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0} \int dt \nabla \rho - \mu_0 \mathbf{J}$$

となる。これは  $\mathbf{A}$  に関する波源付きの波動方程式になっていて、後の交流解析に使う。特に電荷と電流がなければ波動方程式そのものである。

ローレンツゲージ 次にローレンツゲージ (Lorentz\_gauge) を次のようにとる。

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (1.79)$$

これにより式 1.72 は次のようにシンプルになる。

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \mathbf{J} \\ \nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \end{aligned} \quad (1.80)$$

後半の2つの式は4次元に拡張することで1つの式にまとめることができる。ただし、第1式があるので空間部分と時間部分が独立していない。第1式が時空間の構造に対して有用な式である。

また、この式を少し変形し、

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{\partial(\phi/c)}{\partial(ct)} &= 0 \\ \nabla^2(\phi/c) - \frac{\partial^2(\phi/c)}{\partial t^2} &= -\mu_0(c\rho) \\ \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial(ct)^2} &= -\mu_0 \mathbf{J} \end{aligned}$$

さらに式 1.76 から

$$\mathbf{E}/c = -\nabla(\phi/c) - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial(ct)}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

これらは  $\mathbf{A}$  と  $\phi/c, \mathbf{J}$  と  $c\rho, \mathbf{B}$  と  $\mathbf{E}/c$  が同次元になることを示し、統一的な理論が存在していることを示唆している。

キルヒホフの法則 前節のストークスの定理式 1.7 から

$$\oint_C d\mathbf{r} \times \mathbf{A} = \int_S (\nabla(d\mathbf{S} \cdot \mathbf{A}) - d\mathbf{S}(\nabla \cdot \mathbf{A}))$$

$$\oint_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{A} = \int_S d\mathbf{S} \cdot \nabla \times \mathbf{A}$$

が成り立つ。これらを用いて回路に関する理論との関係をもておこう。

高校でも既習したキルヒホフの電流則 (Kh-I) とキルヒホフの電圧則 (Kh- $\phi$ ) を考える。

$\mathbf{J}_K$  をキルヒホフの電流密度とする。電流則からは任意の点に流れ込む電流の和が0になるので

$$\oint_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{J}_K = 0 \quad (1.81)$$

とかける。これから発散をとっても

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_K = 0 \quad (1.82)$$

が成り立つ。

しかし、一般には電流の湧き出しは前節でもみたように変位電流をふくむ。

$$\mathbf{J}_K = \mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.83)$$

こうしておかないと式 1.82 は成立しない。従ってキルヒホフの電流密度は常に変位電流を考慮していることになる。

実際にコンデンサやコイルを含む場合は重要な内容である。

次に  $\text{Kh-}\phi$  についてキルヒホフ回路の電場を  $\mathbf{E}_K$  とすると、この内容は回路に沿って電位の和をとるので次のようになる。

$$\oint_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_K = 0$$

ストークスの定理からこれは

$$\int_S d\mathbf{S} \cdot \nabla \times \mathbf{E}_K = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_K = 0$$

を表す。しかし、この場合についても Maxwell の式からは

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \neq 0$$

でないといけない。従ってこの時も  $\mathbf{B}$  は  $\nabla \times \mathbf{A}$  で置き換えて

$$\mathbf{E}_K = \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \phi \quad (1.84)$$

で置き換える必要がある。また、これから回路のスカラーポテンシャルは電位に等しい。

#### 1.4.4 静磁場 [55]

高校等で学習する電磁気学には電位  $V$  が登場する。これはスカラーポテンシャルでいわばベクトルポテンシャルの 1 つの成分を見ているにすぎない。そのため、高校物理では電場と磁場がはじめから切り離されて説明されていく。しかし、 $V = \phi$  として

$$\mathbf{E} = -\nabla \cdot \phi$$

$$\mathbf{B} = -\nabla \times \mathbf{A}$$

で記述され、相対論により  $E, B$  は次節に示すように

$$\mathbf{F}^\mu = \partial_\nu A^{\mu\nu}$$

で共変的にまとめあげられる。つまり、 $E, B, \phi, A$  は時空間が  $x, ct$  と独立次元が貼られ、連続性と接続の条件が決定されていくことと関係しているわけである。

ベクトルポテンシャルは前節でもみたように電磁気では基本的な役割をするが直観的なイメージをつかみにくい。基礎的な電磁気学をここでベクトルポテンシャルを主役にして考えなおしてみよう。

まず、電荷が源になる場合、電場のスカラーポテンシャルである電位は  $V$  を体積として次のように書ける。

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV \frac{\rho}{r} \quad (1.85)$$

もし、電荷密度が線であれば  $dL$  で、面であれば  $dS$  で足しあげればよい。

また、電流が源となり、ベクトルポテンシャルができて

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV \frac{\mathbf{J}}{r} \quad (1.86)$$

となる。両者の相違は

$$\epsilon_0 \leftrightarrow \frac{1}{\mu_0}$$

とあんとところで、これは

$$c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$$

であるから比をとると

$$\left| \frac{\phi}{\mathbf{A}} \right| = c, \quad \frac{\rho}{|\mathbf{J}|} = \frac{1}{v}$$

となる。

この式から微小電流がつくるベクトルポテンシャルが電流と同じ向きであることがわかる。

クーロンポテンシャルと同様に距離により減衰する。

高校で習う直線電流の周りの磁場についてベクトルポテンシャルで求めてみよう。

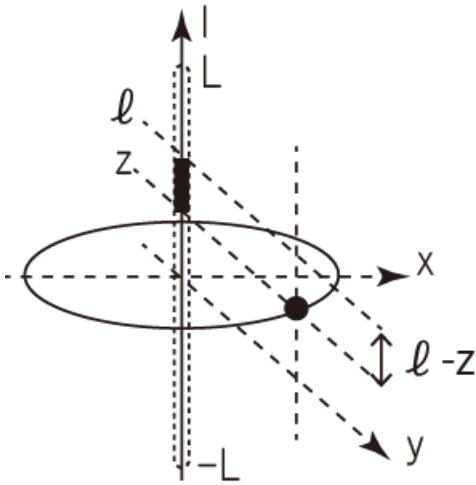


図 1.35: 直線電流の周りのベクトルポテンシャルを求める。

そのためには電流ベクトルを  $x, y, z$  の 3 成分にわけろ。しかし、ここでは  $A_z$  のみを求めればよいので

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

とすると式 1.86 から長さを  $(-L, L)$  として、図のように  $z$  を固定し、 $l$  で積分する。

$$\begin{aligned} A_z &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-L}^L dl \frac{1}{\sqrt{(l-z)^2 + x^2 + y^2}} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \log \left[ \sqrt{(l-z)^2 + x^2 + y^2} \right]_{-L}^L \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \log \frac{\sqrt{(L-z)^2 + r^2} + (L-z)}{\sqrt{(L-z)^2 + r^2} - (L-z)} \\ &\simeq \frac{\mu_0 I}{2\pi} \log \frac{2(L-z) + r^2/2(L-z)}{r^2/2(L+z)} \\ &\simeq \frac{\mu_0 I}{2\pi} \log \frac{2L}{r} \end{aligned} \tag{1.87}$$

ここでは  $L$  に対して  $r, z$  は小さいとして近似をした。

また、別にアンペールの法則から磁束密度  $B$  は

$$\mathbf{B} = \mu_0 \frac{I}{2\pi r} \mathbf{e}_r$$

であることを利用し、

$$\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A}$$

だから

$$A_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi}$$

また、電流を  $I$  の電荷密度を持つ直線状の一樣電荷が分布しているとみると

$$E = \frac{I}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

とみなせる。これからスカラーポテンシャルは

$$\begin{aligned} \phi &= \int_r^a E dr = \frac{I}{2\pi\epsilon_0} [\log]_r^a \\ &= \frac{I}{2\pi\epsilon_0} \log \frac{a}{r} \end{aligned}$$

であり、置き換え

$$\epsilon_0 \rightarrow \frac{1}{\mu_0}, a \rightarrow 2L$$

とすれば式 1.87 に一致する。この時  $A_y = A_x = 0$  であり、ベクトルポテンシャルは  $z$  方向を向いている。つまり、ベクトルポテンシャルは常に電流源のほうを向き、遠方で減衰する形になっている。また、これから磁場が

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{y}{r^2}$$

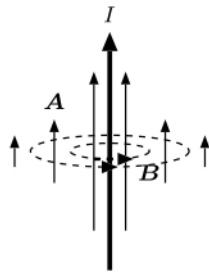
$$B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{x}{r^2}$$

$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = 0$$

と求まる。ベクトル表現で

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{r}}{r^2}$$

であり、次の図のような関係になっている。



直線電流が作るベクトルポテンシャル（実線）と磁場（破線）の概要。

図 1.36: [55] より

注意すべきはソレノイドではほとんど外部の磁場は無視できたがベクトルポテンシャルは外部にも存在し得るということである。よって後節でみるがベクトルポテンシャルはソレノイドの外でも影響を考えないといけない。

$z$  方向に長軸を持つ半径  $a$  の無限長円筒を考え、その表面を面電流が  $z$  軸右ねじの方向に回転しながら流れているとする。単位長さあたりの面電流密度は  $K$  とする。この時、電流の各成分は  $-y$  方向で最大、 $+y$  方向には負で最大になる。





図 1.37: [55] より:負に帯電した円柱と正に帯電した円柱をすこしずらして重ねる。

つまり電流密度はに  $x$  軸からの偏角を  $\theta$  として、

$$x \text{ 成分} : -K \sin \theta$$

$$y \text{ 成分} : K \cos \theta$$

となる。ベクトルポテンシャルの  $x$  成分は  $-y$  方向に正、 $+y$  方向に負で帯電した円筒のつくる電位に対応する。線電荷の作る電位は前節から  $\log$  だからこれ  $-\sin \theta$  の重みをかけて積分すればいいがかなり、面倒になるので図のようにずらした円板を考えはみ出した電荷の分布がちょうど  $-\sin \theta$  になることを利用する。

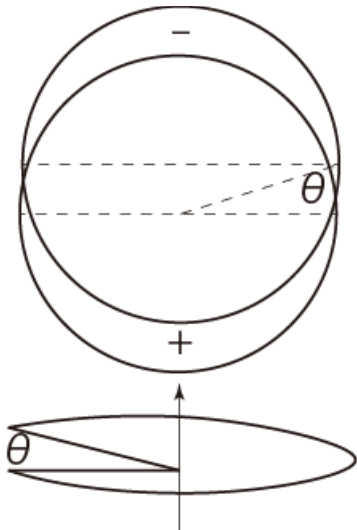


図 1.38: 正、負に帯電した円柱をずらして重ねると  $-\sin \theta$  に比例した電荷分布が得られる

密度  $\rho$  で正に一様帯電した円柱の作る 電場  $E$  はガウスの法則から  $r \geq a$  では

$$E \cdot 2\pi r h = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \pi a^2 h$$

$$E = \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

だから

$$V = \int_r^a E dr$$

から、内部と外部の電位  $\phi$  は次のように与えられる。

$$\phi = \begin{cases} \frac{\rho}{4\epsilon_0} (a^2 - r^2) & (r \leq a) \\ -\frac{a^2 \rho}{2\epsilon_0} \log \frac{r}{a} & (r \geq a) \end{cases}$$

これから  $y$  軸側に  $\delta$  だけずらすことを考えると

$$\phi = \begin{cases} \frac{\rho}{4\epsilon} (- (x^2 + y^2) + (x^2 + (y - \delta)^2)) & (r \leq a) \\ -\frac{a^2 \rho}{2\epsilon_0} \left( \log \frac{x^2 + y^2}{a^2} - \log \frac{x^2 + (y - \delta)^2}{a^2} \right) & (r \geq a) \end{cases}$$

ここでも  $\delta$  は小さいとしてで置き換えると  $y$  方向に  $\delta$  ずれた  $\phi$  からは

$$A_x = \phi_{\delta y} = -\frac{\rho\delta}{4\epsilon_0} 2y \quad (r \leq a) \tag{1.88}$$

$$A_x = \phi_{\delta y} = -\frac{a^2 \rho}{2\epsilon_0} \frac{2y\delta}{x^2 + y^2} \quad (r \geq a)$$

さらに

$$\frac{\rho\delta}{\epsilon_0} = \mu_0 K$$

で置き換えると

$$A_x = \begin{cases} -\frac{\mu_0 K}{2} y & (r \leq a) \\ -\frac{\mu_0 K}{2} \frac{a^2 y}{r^2} & (r \geq a) \end{cases}$$

だから  $A_y$  も同様にして  $x$  方向に  $\delta$  ずれた  $\phi$  から

$$A_y = \begin{cases} \frac{\mu_0 K}{2} x & (r \leq a) \\ \frac{\mu_0 K}{2} \frac{a^2 x}{r^2} & (r \geq a) \end{cases}$$

となる。

$$\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A}$$

だったから、この結果から

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{x}{r^2} \right) = \frac{d}{dx} \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{-x^2 + y^2}{r^2}$$

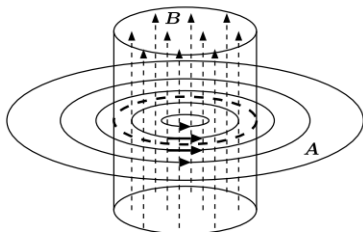
$$\frac{d}{dx} \left( \frac{y}{r^2} \right) = \frac{d}{dx} \left( \frac{y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{x^2 - y^2}{r^2}$$

となることに留意すると

$$B = \begin{cases} (0, 0, \mu_0 K) & (r \leq a) \\ (0, 0, 0) & (r \geq a) \end{cases}$$

となり、見事にソレノイドの外の磁場は打消しあって 0 になることがわかる。

境界で飛びが生じるわけである。これから磁場とベクトルポテンシャルの図が次のようになる。



ソレノイドが作るベクトルポテンシャル (実線) と磁場 (破線)

図 1.39: [55] より:ベクトルポテンシャルは電流のように現れ、中心から遠ざかると弱くなる。

ベクトルポテンシャルの関数型がソレノイドの境界から log 型に変化することで回転項がなくなり、磁束が抑えられている。ベクトルポテンシャルは空間を満たしているのでベクトルポテンシャルがあるかないかではなく、その関数型が磁場の存在を決めている。

#### 1.4.5 微小ループ

微小な閉曲線のつくる電流ループは、その面の法線方向に磁場を発生させる基本的な構成単位である、これをベクトルポテンシャルでみてみよう。簡単のためにループは  $xy$  平面にあり、原点を中心にもつ。電流は  $I$  とする。電流の  $x$  成分は電流と  $x$  軸のなす角を  $\theta$  とすると  $-I \sin \theta$  となる。よって前節と同様にして、ループに囲まれた正負の一樣電荷密度を  $\sigma$  とすると、この円板を微小だけずらしたものを考えることで電流の  $x$  方向の分布を考えることができる。

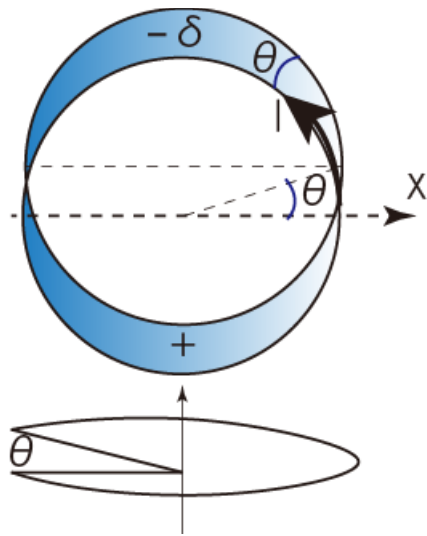


図 1.40: 正、負に帯電した円柱をずらして重ねると  $-\delta \sigma \sin \theta$  の電荷を持つ

図のように負帯電板を  $+y$  方向に面積  $\delta$  だけずらすと多くの部分では正負が中和するが  $+y$  方向の縁には負電荷、 $-y$  方向の縁には正電荷がはみ出す。このはみ出した量は  $\delta$  が十分小さければ三日月型の角度  $\theta$  までののはみ出し部分の面積が

$$\delta \sin \theta$$

となる。はみ出し量は負の面電荷密度  $\sigma$  を持つので角度  $\theta$  では電荷が

$$-\sigma \delta \sin \theta$$

であるから

$$I = \delta \sigma$$

と置き換えればよい。従って  $\delta$  は単位時間あたりの面積になる。

このことから  $-y$  方向に分極した電気双極子が面上にならんでいるとみなして、原点に置かれた電気双極子の作る電位は

$$\begin{aligned} \phi_{\delta y} &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y - \delta)^2 + z^2}} \right) \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d}{dy} \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) \delta \\ &= - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\delta y}{r^3} \end{aligned}$$

となる。 $r$ の大きい十分遠方では $\delta$ は小さく電気双極子の位置には依存しないとみなしてよい。これから

$$\epsilon_0 \rightarrow \frac{1}{\mu_0}, Q \rightarrow \sigma S$$

の置き換えをおこなうと式 1.88 から

$$\begin{aligned} A_x &= \phi_{\delta y} \\ &= -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\delta y}{r^3} \\ &= -\frac{\mu_0 \delta \sigma S}{4\pi} \frac{y}{r^3} \\ &= -\frac{\mu_0 I S}{4\pi} \frac{y}{r^3} \end{aligned}$$

同様に  $x$  方向に  $\delta$  ずらせば

$$\begin{aligned} A_y &= \phi_{\delta x} \\ &= -\frac{\mu_0 I S}{4\pi} \frac{x}{r^3} \end{aligned}$$

となる。よってベクトル表記で  $\mathbf{e}$  方向につじて

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I S}{4\pi} \frac{\mathbf{e} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

となり、電流と同じようにベクトルポテンシャルもループ状になっていることがわかる。ベクトルポテンシャルが広義の電流のようにふるまい、回転成分があればそこに

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

の磁場が出てくるわけである。十分遠方ではベクトルポテンシャルが電流とループの面積により決まると考えてよいことになる。実際に磁場  $\mathbf{B}$  を求めると

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} \\ &= \frac{\mu_0 I S}{4\pi} \nabla \times \left( \frac{\mathbf{e} \times \mathbf{r}}{r^3} \right) \\ &= \frac{\mu_0 I S}{4\pi} \left[ \mathbf{e} \left( \nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) - (\mathbf{e} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right] \\ &= \frac{\mu_0 I S}{4\pi} \left[ \mathbf{k} \delta(\mathbf{r}) + \frac{3(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - \mathbf{k}r^2}{r^5} \right] \end{aligned}$$

が得られる。

ところが図のように  $x$  軸から偏角  $\theta$  で電流は螺旋状に  $z$  軸を巻いていくので  $y$  方向からみれば  $\theta$  だけ半径分が切れ込みがはいることになる。 $z$  軸側からみた時にこの現象は平面的に対称なのでどこにこの切れ込みが入るかはまったく任意である。次の節でこの点を考察しよう。

#### 1.4.6 Dirac のひも [56]

ソレノイドのつくるベクトルポテンシャルがソレノイドの境界付近で変化するのでこの様子を詳細にみていこう。後部で紹介するアラハノフ・ボーム効果を考える。

次の図のように無限に長いソレノイドコイルを考える磁場  $B$  が

$$\mathbf{B} = (0, 0, B_0)$$

で与えられているとする。この時ベクトルポテンシャルは次のように  $z$  成分以外を持ち、

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{B} \times \mathbf{r} = \frac{1}{2}B_0(-y, x, 0) \quad (1.89)$$

この場の強さは  $z$  軸からの距離に関する関数  $\rho$  で決まる。これは常に  $z$  軸に垂直である。

ソレノイドコイルの外では  $\mathbf{B} = 0$  としよう。しかし、前節でみたように  $\mathbf{B} = 0$  でも  $\mathbf{A} = 0$  ではない。磁場  $\mathbf{B}$  は磁束密度であるから磁束  $\Phi$  は次のように与えられる。ソレノイドコイルの半径を  $a$  とすると、

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = B_0 \pi a^2$$

これはストークスの定理から線積分に変換できて

$$\Phi = \oint \text{rot} \mathbf{B} \cdot \mathbf{dr} = \oint \mathbf{A} d\mathbf{r} = B_0 \pi a^2 \quad (1.90)$$

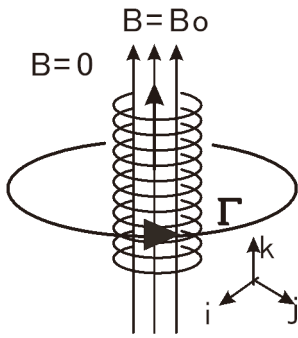


図 1.41: 無限に長いソレノイドコイル。内部のみに一定な磁場がある。

となる。ではいかにしてソレノイドの外の  $\mathbf{A}$  を求めるべきか、1つは  $\mathbf{B}$  に比例する形で

$$\mathbf{A} \propto (-y, x, 0)$$

であり図の閉曲線  $\Gamma$  の半径を  $\rho_0$  とすると半径が大きくなれば  $A$  は弱くなると考えるべきだから

$$|\mathbf{A}| \propto \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

である。以上の考察から

$$\mathbf{A} = \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2}} (-y, x, 0) = \frac{k}{\rho_0} \mathbf{e}_\phi \quad (1.91)$$

とおける。よって式 1.90 に代入し、

$$\oint_\Gamma \mathbf{A} d\mathbf{r} = \frac{2\pi k \rho_0}{\rho_0} = B_0 \pi a^2$$

から定数  $k$  が次のように求まる。

$$k = \frac{B_0 a^2}{2}$$

これからソレノイドコイル内と外でベクトルポテンシャルは次のように求まる。

$$\mathbf{A}_{in} = \frac{1}{2} B_0 (-y, x, 0)$$

$$\mathbf{A}_{out} = \frac{1}{2} \frac{B_0 a^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} (-y, x, 0)$$

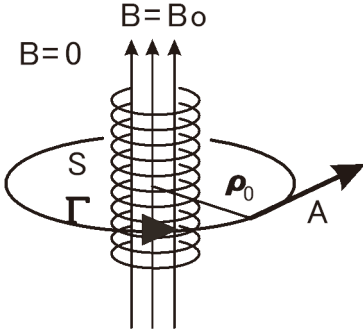


図 1.42: コイルの外のベクトルポテンシャル

ところが、境界  $\sqrt{x^2 + y^2} = a$  においてベクトルポテンシャルは一致しない。

ソレノイドの内と外で何か不連続なことが起きているのだろうか。これを見るために第 1 部の完全微分方程式の例で紹介した次のような関数を用意する。

$$\phi = \tan^{-1} \frac{y}{x} \tag{1.92}$$

これは  $x$  軸から  $y$  軸方向にみた角度を表している。しかし、次の図で見ると  $x=0$  では定義されない領域を持つ。 $y > 0$  の  $y$  軸部分では正回転では  $\pi/2$ 、負回転では  $-3\pi/2$  であり第 1 部で見たように 1 価性を保つためには  $xy$  平面の空間のどこかに  $0 \sim \infty$  の切れ込みをいれて接続しない限り不可能でここでは  $\phi$  が  $\pi$  だけ一気にジャンプするかのようである。ただ、この半直線を原点からどの向きに取るかは任意である。座標系をどう選ぶかは自由であるのと同様である。どう選んでも半直線はジャンプする必要がある特異な領域になる。

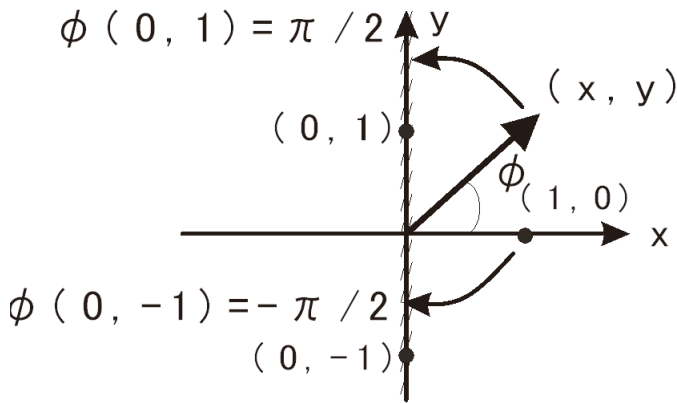


図 1.43:  $xy$  平面のどこかに特異な半直線が必要になる。

3次元のグラフ表した様子は次ようになる。



図 1.44:

次の公式を用いると

$$\{\tan^{-1} x\}' = \frac{1}{1+x^2}$$

となるからこの  $\phi$  を微分すると次のようになる。

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \tan^{-1} \frac{y}{x} = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1 + (y/x)^2} = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \tan^{-1} \frac{y}{x} = \frac{\frac{1}{x}}{1 + (y/x)^2} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

この結果は式 1.91 より、まさに  $A_x, A_y$  に比例定数を除いて一致している。そこでパラメタ  $t$  を導入し、次のような関数を定義する。

$$\chi(t, x, y, z) = -\frac{B_0 a^2}{2} \phi(x, y) \quad (1.93)$$

そして次のようにベクトルポテンシャルを書き直す。

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \chi \quad (1.94)$$

するとこれは次のように成分表示される。

$$\mathbf{A}' = \frac{B_0 a^2}{2} \begin{pmatrix} \frac{-y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{B_0 a^2}{2} \begin{pmatrix} \frac{-y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.95)$$

つまり、 $\nabla \chi$  を加えたことにより 0 になる。式 1.94 はゲージ変換の 1 つである。半直線上ではこのようなゲージ変換された  $\mathbf{A}'$  を考えれば

$$\mathbf{A}' = 0$$

とすることができる。そこで  $z$  成分を無視すると次の図のように 2 次元の問題として考えることができる。 $\chi$  は  $x = 0, y > 0$  の領域で不連続である。

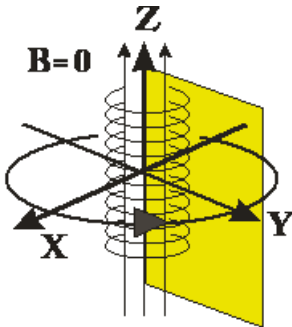


図 1.45: 不連続になる半平面

この様子を  $\delta$  関数を参考にして考えてみる。ディラックのデルタ関数は次のような不連続的な性質を持っていた。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0) \quad (1.96)$$

デルタ関数はヘビサイドのステップ関数  $\theta$  によって次のようにも定義できた。

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (1.97)$$

$$\delta(x) = \frac{d\theta}{dx} \tag{1.98}$$

$\phi$  が半直線上でジャンプするように、この関数はまさしく  $x = 0$  でジャンプしている。  
この半直線は電磁気の場合下図のように *DiracString* という。

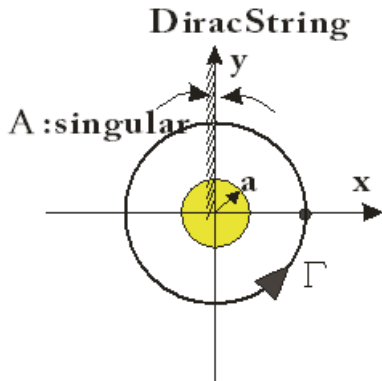


図 1.46: Dirac のひも

このステップ関数により  $f(\infty) = 0$  とすると

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta}{dx} f(x) dx &= [\theta(x)f(x)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \theta(x)f'(x) dx \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) dx \\ &= - [f(x)]_0^{\infty} = f(0) \end{aligned}$$

となるから式 1.96 が成り立つ。ベクトルポテンシャルの連続性はこのようなステップ関数のような不連続な関数を原点におくことで保たれている。これは古典的な物理学においても原点で特異な (0 で割るような) 場合に考慮する必要がある。ある連続的な関数が  $r(x_0) = 0$  となっていれば

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(r(x))dx = \frac{f(x_0)}{|r'(x_0)|}$$

が成り立つ。ただし  $r(x)$  は一価の関数である。ここでは原点でなく、半直線上で作用しないといけない。

#### 1.4.7 アラハノフ・ボーム効果 [55]

アラハノフ・ボーム効果 (以下 AB 効果) はソレノイド内の磁場とソレノイド外のベクトルポテンシャルが直接影響し、観測可能な磁束の変化をつくる。後部のゲージ論のところでこの内容は詳しく考察したい。

無限長のソレノイドの外側の磁場はほぼ 0 とすることができる。AB 効果により、このソレノイドの上下を通る荷電粒子のビームを作るとこれは図のように偏向する。問題は磁場があればローレンツ力で偏向するが磁場がなくても同じような偏向がおきることである。

図のように間隔  $d$  だけ離れたスリットを通過して 2 つに分離した電子のビームを上向きの電場の中を通す。電子は  $-e$  の電荷があるので電場と反対方向に力をうけて偏向する。もちろん電場がないところでは偏向はしない。スカラーポテンシャル  $\phi$  があれば

$$F = eE = e\phi/d$$

の力を電子が受ける。ところがこの偏向はヤングの実験のように干渉を伴う。

つまり、古典論では説明できない。電子のビームに波動的な性質を備える必要があるのである。



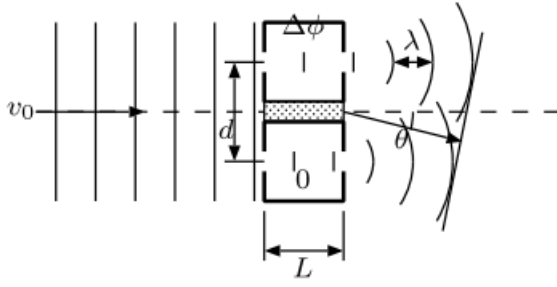


図 1.47: [55] より

量子力学では位相変化は次のようになる。

$$\Delta\psi = \frac{Q}{\hbar} \int (\mathbf{dr} \cdot \mathbf{A} - dt\phi) \quad (1.99)$$

このような位相変化を考慮しないとこの問題は説明ができない。

これは 4 次元の対応がみれる。位相変化がないとは

$$\mathbf{A}d\mathbf{r} = \phi dt \quad (1.100)$$

であり、 $A(\mathbf{A}, \phi)$ ,  $s(\mathbf{r}, t)$  とすれば

$$A \cdot ds = 0 \quad (1.101)$$

である。

はじめに古典的にカラーポテンシャルのみの場合の位相変化を求める。

$L$  をスリット直後からポテンシャルの異なる領域の長さ、 $v_0$  はスリット手前での電子の速さ、 $m$  を電子の質量とすると領域を通過する時間は

$$t = \frac{L}{v_0}$$

$y$  方向の運動方程式はポテンシャルの差を  $\Delta\phi$  とすると  $F = QE$  から

$$m\dot{v}_y = \frac{Q\Delta\phi}{d}$$

$y$  方向の初速を 0 とすれば

$$v_y = \dot{v}_y t = \frac{QL\Delta\phi}{md v_0}$$

従って

$$\tan\theta = -\frac{v_y}{v_0} = -\frac{QL\Delta\phi}{mv_0^2 d} \quad (1.102)$$

を得る。この結果は粒子的な電子を考えて得られた。

次に量子論を用いるとスリット通過後の時間を  $\tau$  とし、スカラーポテンシャル  $\Delta\phi$  の空間を電荷  $Q$  の粒子が通過すると波動関数は  $\psi = Et/\hbar$  の位相変化を受けることになるから

$$\Delta\psi = -\frac{Q\Delta\phi\tau}{\hbar}$$

だけ位相が変化する。さらに電子のド・ブローイ波長  $\lambda$  は

$$p = mv_0 = \frac{2\pi\hbar}{\lambda}$$

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{mv_0}$$

である。ヤングの実験からスリット  $d$  の行路差から、この場合は位相差から

$$\Delta s = \frac{xd}{L} = \frac{\Delta\psi}{2\pi}\lambda$$

となるから

$$x = \frac{QL\Delta\phi\tau}{2\pi\hbar d}\lambda = \frac{QL\Delta\phi\tau}{mv_0d}$$

この時の  $\tau$  は領域から出た時の偏角が  $\theta$  なので

$$\tan\theta \simeq -\frac{x}{v_0\tau} = -\frac{QL\Delta\phi}{mv_0^2d}$$

となり、同じ結果を得る。

次にベクトルポテンシャルを図のように考えると

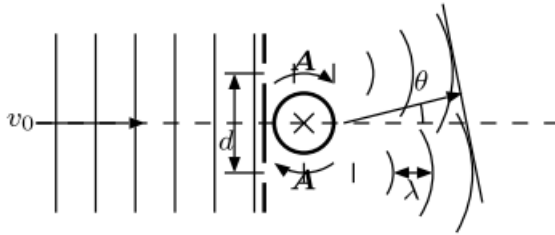


図 1.48: [55] より

ベクトルポテンシャルのみが存在する場合の 2 本のビームの位相差は

$$\Delta\psi = \frac{Q}{\hbar} \int d\mathbf{r} \cdot \mathbf{A} \quad (1.103)$$

だったから積分路を 1 つのソレノイドを一周する経路で考えると、この積分はソレノイド内の全磁束  $\Phi$  に等しかったから

$$\Delta\psi = \frac{Q}{\hbar} \Phi$$

となる。位相差  $\Delta\psi$  が領域内の積分結果で表されたことを留意しておく。

よって行路差はド・ブROI波長を用いて

$$\Delta s = \frac{\Delta\psi}{2\pi}\lambda = \frac{Q}{2\pi\hbar} \Phi \cdot \frac{2\pi\hbar}{mv_0} = \frac{Q\Phi}{mv_0}$$

である。プランク定数が消えて、これをスリット間隔  $d$  で割れば偏角  $\tan\theta$  が得られ、

$$\tan\theta = \frac{Q\Phi}{mv_0d}$$

となる。

一方で古典的には荷電粒子のうけるローレンツ力は  $Qv_0B$  である。これが進行方向に垂直に働くので等速円運動を仮定し、

$$\begin{aligned} m \frac{v_0^2}{R} &= Qv_0B \\ R &= \frac{mv_0}{QB} \end{aligned}$$

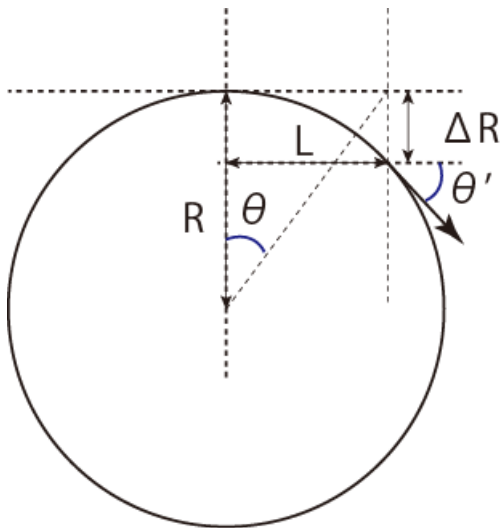


図 1.49:  $\Delta R$  が小さい時  $\theta = \theta'$

図のように  $L$  に対して半径を十分大きい  $R$  として  $\theta = \theta'$  とすると  
これから偏角を  $\theta$  が

$$\tan \theta = \frac{L}{R} = \frac{QBL}{mv_0}$$

となる。もちろんこの結果は磁場では荷電粒子は円軌道をとるし、量子論を用いた場合には放物運動を仮定しているがこれは上図のような近似を 1 次までとっていることによる。

これらから

$$\begin{aligned} \Phi &= L\Delta\phi/v_0 \\ &= BLd \end{aligned}$$

の関係があることがわかる。さらに右辺からは基本的な磁場が一定の時の電磁誘導の関係

$$\Delta\phi = Bv_0d$$

が得られる。電位差が  $v_0$  と  $B$  の外積から得られていることがわかる。次の節でもう少し考察する。

これからローレンツ力  $\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$  が実は  $A(\phi, \mathbf{A})$  と演算子  $D(\nabla, \frac{\partial}{\partial t})$  の積に近い形をしている。しかし、時間微分は磁場ではなく物質の位置  $\mathbf{r}$  にかかり、空間微分はスカラーポテンシャルのみにかかる。この内積の生成にはこの時空間接続が入り、マクロ的に  $(\mathbf{r}, t)$  を決める。この操作を  $\mathcal{O}$  とすると

$$\mathbf{F} = Q\mathcal{O}(DA) \tag{1.104}$$

であり、ローレンツ力が時空の構造と関係していることになる。

後節で詳しくみてみよう。

#### 1.4.8 ファラデーの法則

先にみたようにソレノイドに変位電流を流すと、そのまわりに電場が発生する。この初等的な実験事実は今だに極めて興味のない現象である。ベクトルポテンシャルを  $\mathbf{A}$  として

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{1.105}$$

だったのでこれを閉曲線でループ積分すると

$$\oint_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{A} = \int d\mathbf{S} \cdot \mathbf{B} = \Phi \tag{1.106}$$

のように閉曲線内の磁束が得られる。これははじめの 1.105 によって閉曲線上の  $\mathbf{A}$  によって面内の磁束が決まっていくことを意味する。しかし、閉曲線外の磁束については何も得られないことが重要である。

この時の電場はベクトルポテンシャルを用いると式 1.104 から

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

と単純における。今度はこれを閉曲線でループ積分してみると

$$\oint_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \oint_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{A} = -\frac{\partial}{\partial t} \int d\mathbf{S} \cdot \mathbf{B} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (1.107)$$

となり、磁場の存在しない外部、存在する内部を問わず誘導電場を計算できることを示してしる。内部についてはここで導体に速さ  $\mathbf{v}$  があると磁場に起因するローレンツ力が働く、これにより電荷が偏在し、電場が発生するが、磁場による力と釣り合ったところで電荷の移動は止まるのでどこまでも大きな電位差ができるわけではない。結局

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

が成り立ち、導体の移動により

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

がなりたち、導体には起電力が発生することになる。

式 1.107 をミクロ的にみれば電位の周積分、ベクトルポテンシャルの周積分は時間で接続されていないといけない。

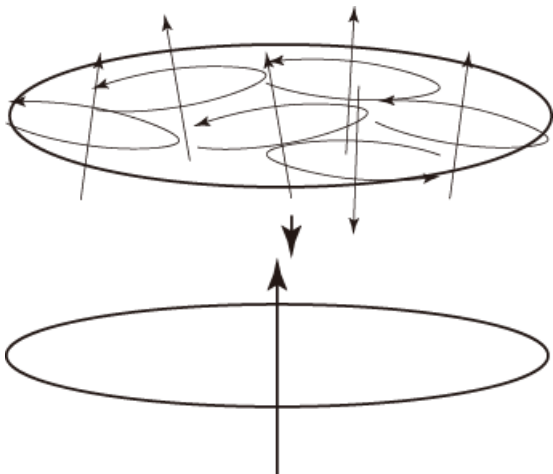


図 1.50: 最遠周のベクトルポテンシャルの周積分が面内部の磁束を決定する。

#### 1.4.9 ベクトルポテンシャルの測定

次の図のようにトランスを内側を 1 次コイル、外側を 2 次コイルとする。このコイルをベクトルポテンシャルを用いて考えてみよう。

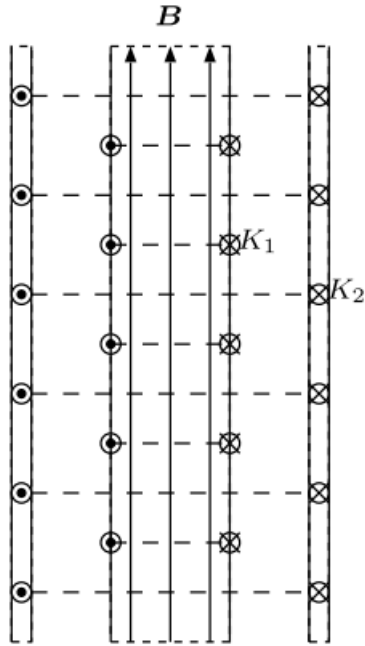


図 1.51: [55] より、内側が 1 次、外側が 2 次

コイルは十分長く、長さを  $l$ 、1 次の巻数密度は  $n_1$ 、2 次の巻数密度を  $n_2$  とし、電流をそれぞれ  $I_1, I_2$  が流れている。面電流密度をそれぞれ

$$K_1 = n_1 I_1, \quad K_2 = n_2 I_2$$

とする。この時、重ね合わせの原理から 1 次の内側には  $K_1, K_2$  が影響をするが 1 次と 2 次コイルの間には  $K_2$  のみが影響をする。そこで断面積を  $S_1, S_2$  とし電流が 1 周するときの 1 次コイルの磁束はアンペールの法則から磁束はほぼソレノイドの中心に集中するので

$$\Phi_1 = \mu_0 (K_1 + K_2) S_1$$

2 次コイルには

$$\Phi_2 = \mu_0 (K_1 S_1 + K_2 S_2)$$

の磁束が通過する。

これから巻き数を考慮した全磁束は  $N_1 = n_1 l, N_2 = n_2 l$  とし

$$\begin{aligned} \Phi'_1 &= N_1 \Phi_1 = \mu_0 N_1 (K_1 S_1 + K_2 S_2) \\ &= (\mu_0 S_1 n_1^2 l) I_1 + (\mu_0 S_1 n_1 n_2 l) I_2 \end{aligned} \quad (1.108)$$

$$\begin{aligned} \Phi'_2 &= N_2 \Phi_2 = \mu_0 N_2 (K_1 S_1 + K_2 S_2) \\ &= (\mu_0 S_1 n_1 n_2 l) I_1 + (\mu_0 S_1 n_2^2 l) I_2 \end{aligned} \quad (1.109)$$

これから自己インダクタンスを  $L$ 、相互インダクタンスを  $M$  としよく知られたトランスの関係式が次のように得られる。

$$N_1 \Phi_1 = L_1 I_1 + M I_2$$

$$N_2 \Phi_2 = L_2 I_2 + M I_1$$

トランスの2次のコイルを開放すると  $I_2 = 0$  となる。このとき  $I_1$  のみを考えると

$$N_2 \Phi_2 = \mu_0 N_2 K_1 S_1$$

から誘導起電力が

$$\phi = N_2 \frac{d\Phi_2}{dt} = \mu_0 N_2 S_1 \frac{dK_1}{dt}$$

だけ生じる。これは1次側の  $N_2$  倍になる。これは磁束に触れない2次コイルを用いて1次コイルの作る磁束が測定できそうである。これは磁束の時間微分を観測していることになる。しかし、現実には2次コイルで発生する抵抗のために光速で変動する1次側の磁束の測定はできても、ゆっくりとした磁束の変化、1次側の直流磁束を測定することができない。

ファラデーの法則では磁束の時間変化が周囲に電場を発生させていることになっているので当然ではある。

そこでベクトルポテンシャルである。特にスカラーポテンシャルを分離できるように2次側に超伝導コイルを用いると、磁束そのものを測定することが可能になる。

次の式のように周回路の作る電位の過去からの現在までの積分をつくると、これはファラデーの法則の積分表現になるから  $\mathbf{B}\Delta\mathbf{S}$  の足し合わせになると考えてよい。

$$\int_{-\infty}^t dt \left( \int_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E} \right) = \int d\mathbf{S} \cdot \mathbf{B}$$

これはファラデーの法則以上のことを含んでいる。ここには積分定数が入る余地がないのである。これをベクトルポテンシャルを用いて見てみよう。

超伝導体は磁場のないところでも左辺が成り立つので式 1.105 から次のように書き換える。

$$\int_{-\infty}^t dt \left( \int_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E} \right) = \int_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}$$

この共通している積分記号をはずすと

$$\int_{-\infty}^t dt \mathbf{E} = \mathbf{A}$$

つまり、磁場の発生する以前より電場測定装置を用いて電場の時間積分を測定すると直接ベクトルポテンシャルがみられると岡部氏は指摘している。[55]

#### 1.4.10 ローレンツ力

ニュートンが運動方程式を導き、質量と加速度を関係づけた。質量のない電磁気の世界に力は Newton の運動方程式を超え、共変性をもって登場する。ローレンツ力は加速度をもたず、磁場と電場の間の相対速度  $\mathbf{v}$  から次のように与えられる。

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (1.110)$$

例えば電磁石を用意し、次の図のように異極を近づけた時の磁力線を描くと下図のようになる。

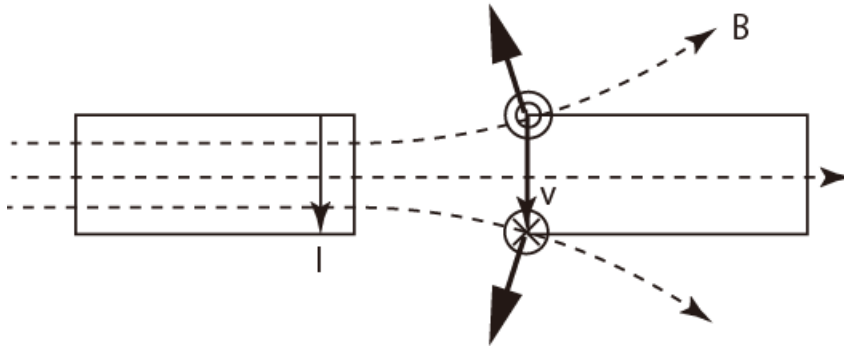


図 1.52: 電磁石に働く力

ここでは電場はないので相手側のソレノイドコイルがつくる磁場  $\mathbf{B}$  と自分の電流がもつ  $Q\mathbf{v}$  が外積によって力  $\mathbf{F}$  が生まれる。これは図のように磁場がコイルの外で曲がっている分だけ図の鉛直方向から内に向き、この力を電流  $I$  に沿って足し合わせると引力 (図左向き) の力が残る。

これがローレンツ力になる。従ってわずかに磁場が曲がっていることが力の向きを決めている。

ここでストークスの原理から次の有用な式をつかう。局所的には

$$\oint_C d\mathbf{r} \times \mathbf{A} = -(d\mathbf{S} \times \nabla) \times \mathbf{A} = \nabla(d\mathbf{S} \cdot \mathbf{A}) - d\mathbf{S}(\nabla \cdot \mathbf{A}) \quad (1.111)$$

また、大局的には

$$\oint_C d\mathbf{r} \times \mathbf{A} = - \int_S (d\mathbf{S} \times \nabla) \times \mathbf{A} = \int_S [\nabla(d\mathbf{S} \cdot \mathbf{A}) - d\mathbf{S}(\nabla \cdot \mathbf{A})] \quad (1.112)$$

これらはストークスの外積定理 (Stokes outer\_product\_theorem\_of\_vector\_field) として知られている。この定理をつかうと

$$\int d\mathbf{r} = -(d\mathbf{S} \times \nabla)$$

とおけるので磁気モーメントを磁荷を  $Q_m$  として

$$\mathbf{m} = I d\mathbf{S} = \frac{Q_m}{\mu_0} \ell$$

で定義すると  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$  だから

$$\ell \times \mathbf{F} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$$

となるからローレンツ力は

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= I \int d\mathbf{r} \times \mathbf{B} = -I(d\mathbf{S} \times \nabla) \times \mathbf{B} = -(\mathbf{m} \times \nabla) \times \mathbf{B} \\ &= I \nabla(d\mathbf{S} \cdot \mathbf{B}) - I d\mathbf{S}(\nabla \cdot \mathbf{B}) \end{aligned} \quad (1.113)$$

一方で磁場からの力は

$$\mathbf{F}_m = \frac{Q_m}{\mu_0} (\mathbf{B}(\mathbf{r} + \ell) - \mathbf{B}(\mathbf{r})) = (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{B} \quad (1.114)$$

となる。ここでこの両者の式の差をとってみるとこれは勾配の外積から勾配の内積を引くので

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{F} - \mathbf{F}_m)_x &= \left( m_z \frac{\partial}{\partial x} - m_x \frac{\partial}{\partial x} \right) B_z - \left( m_x \frac{\partial}{\partial y} - m_y \frac{\partial}{\partial x} \right) B_y \\
 &\quad - \left( m_x \frac{\partial}{\partial x} + m_y \frac{\partial}{\partial y} + m_z \frac{\partial}{\partial z} \right) B_x \\
 &= -m_x \nabla \mathbf{B} + m_y (\nabla \times \mathbf{B})_z - m_z (\nabla \times \mathbf{B})_y \\
 &= (\mathbf{m} \times \nabla \times \mathbf{B})_x
 \end{aligned}$$

となるので

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_m + \mathbf{m} \times \nabla \times \mathbf{B}$$

と表すことができる。

この式は磁場のないところではなく、その回転

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \mathbf{B} &= 0 \\
 \mathbf{i} &= 0
 \end{aligned}$$

つまり、電流がないところでは一致する。

しかし、電流や変位電流があると一致しないことを表す。しかし、磁場と電流が

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \mathbf{I}$$

から、ほとんど全ての場合に磁場があれば電流は存在する。

#### 1.4.11 最小作用の原理

興味あることにこのローレンツ力は古典論、量子論双方を最小作用の原理から導きことができる。量子論ではベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  を導入し、次の図のようにソレノイドの周囲を通る2つの経路を考える。

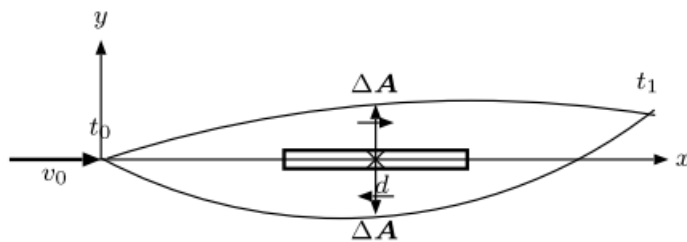


図 1.53: [55] より

そこで電磁場のポテンシャル  $Q\phi$  を次のように相互作用で置き換えラグランジアン  $L$  をおこう。

$$L = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 - Q(\phi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A})$$

2つの経路の内上の経路を通るベクトルポテンシャルを

$$-\Delta A_x$$

このベクトルポテンシャルの影響で速度が

$$v_0 + \Delta v$$



になったとすると、ベクトルポテンシャルによりこの時の作用積分は次のようになる。

$$\begin{aligned} S_{up} &= \int_{t_0}^{t_1} dt \left[ \frac{1}{2} m (v_0 + \Delta v)^2 + Q (v_0 + \Delta v) (-\Delta A_x) \right] \\ &= \int_{t_0}^{t_1} dt \left[ \frac{1}{2} m v_0^2 + v_0 (m \Delta v - Q \Delta A_x) + O^2 \right] \end{aligned}$$

同様にして下の経路では

$$\begin{aligned} S_{down} &= \int_{t_0}^{t_1} dt \left[ \frac{1}{2} m (v_0 + \Delta v)^2 + Q (v_0 + \Delta v) (\Delta A_x) \right] \\ &= \int_{t_0}^{t_1} dt \left[ \frac{1}{2} m v_0^2 + v_0 (m \Delta v + Q \Delta A_x) + O^2 \right] \end{aligned}$$

となる。よってこの経路による  $\Delta S$  が 0 であるためには上下の軌道で

$$m \Delta v = \pm Q \Delta A_x$$

となる必要がある。電荷がベクトルポテンシャルの変化を受けることで力学的な運動量を変化させることがわかる。これから上の経路で

$$\Delta v = + \frac{Q \Delta A_x}{m}$$

下の経路で

$$\Delta v = - \frac{Q \Delta A_x}{m}$$

だけ速度差が出る。よって上の経路ではやや早めに、下の経路はやや遅めに粒子が運動していないといけない。ベクトルポテンシャルの領域の長さを  $l$ 、スリット間隔を  $d$  とすると下の軌道でスリットに到着している時に上の軌道ではスリットより

$$l \frac{2 \Delta v}{v_0} = 2l \frac{Q \Delta A_x}{m v_0}$$

だけ先にいることになる。従って、2つの軌道を通る粒子が同時にスクリーンに到着するためにはスリットを出てから斜め下に動くしかない。その振れ角は

$$\sin \theta = \frac{2l Q \Delta A_x}{m v_0 d} = \frac{Q \Phi}{m v_0 d}$$

となり、先の結果と一致する。これは古典論と量子論が同じ結果を導くことで興味があるが、もし、ポテンシャルが空間的に振動をしているとビームに広がりが生じ、粒子性を失う。つまり、波長とスリット幅の関係が重要になる。ポテンシャル側の波長が小さいとビームの方向性は不確かなものになり、波動性が強くなるので古典粒子を扱うにはポテンシャルの空間変化が緩やかな場合である必要がある。

スカラーポテンシャルが無視できないと式 1.101 から

$$\Delta \psi = \frac{Q}{\hbar} \int (d\mathbf{r} \cdot \mathbf{A} - dt\phi)$$

のように第2項が影響してくる。

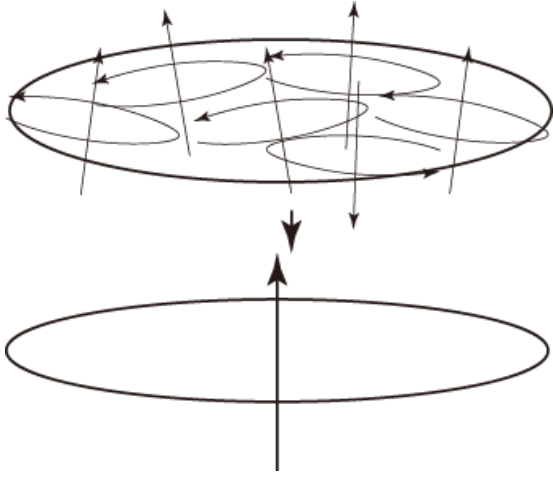


図 1.54: 時間軸のずれ

これは再び上図のように大局的とは十分広い空間で積分され、その面に対して法線方向に時間軸が決まっているが、局所的であるとは局所的な時間軸の大局的な時間軸の方向に対し、ずれが空間的な位置に生じていることで、

$$\Delta\psi_t = \frac{Q}{\hbar} \int dt\phi \neq 0$$

となる。よって量子的な純粋状態にあると時空間の接続に整数  $n$  を用いて

$$\oint \mathbf{dr} \cdot \mathbf{A} = n \oint dt\phi$$

が成り立つ時で、古典論では  $n = 0$  の切断に相当する。

#### 1.4.12 動的スカラーポテンシャル [55]

原点に  $t = 0$  で突然  $Q_0$  の電荷が現れ、その後変化しない場合を考える。ただし、過渡的に

$$Q(t) = Q_0 t / \tau \quad (0 \leq t \leq \tau)$$

とし、電荷のみ存在するのでベクトルポテンシャルは

$$\mathbf{A} = 0$$

である。電荷はクーロン場を発生する。しかし、時刻  $t < r/c$  においてはまだ何も生じない。その後  $\tau$  の時間で電荷は立ち上がり、それ以後は定常状態になる。

$$\phi = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r} \begin{cases} 0 & (t \leq r/c) \\ \frac{t-r/c}{\tau} & (r/c \leq t \leq r/c + \tau) \\ 1 & (r/c + \tau \leq t) \end{cases}$$

#### 1.4.13 電流によるベクトルポテンシャル [55]

前節で電荷密度  $\rho$  がある時のスカラーポテンシャルは静電場のある時

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV \frac{\rho}{r}$$

である。これを時刻  $t$  で空間的に眺めてみると原点近くでは定常的なクーロン場を感じ、 $ct < r$  の遠方では何も感じていない。つまり

$$\phi = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r} \begin{cases} 1 & (\text{inside sphere : } r \leq c(t - \tau)) \\ \frac{t-r/c}{\tau} & (\text{on spherical shell : } c(t - \tau) \leq r \leq ct \\ 0 & (\text{out side sphere) : } ct \leq r \end{cases}$$

これと  $\mathbf{A} = 0$  と組み合わせて考えると、上式第 2 行の遷移時間のところではローレンツ条件が満たされない。これは突然に電荷  $Q_0$  を置いたことによるもので電荷があるところには電流が流れていないといけない。そうすればこの電流がベクトルポテンシャルを作るのでこうした矛盾はおきない。

## 1.5 エネルギー

### 1.5.1 コンデンサ

具体的にエネルギーの流れを考えていこう。高校で学んだ、コンデンサの充電を考える。

キャパシタの充電するには負極板から正極板に正の電荷を運ぶ必要がある。充電が進むと、正極板側は負極板に対し、電位が上がってくる。このため、電位差に逆らって、電荷を運ぶのにエネルギーがより必要になってくる。

電位差が  $\phi$  の時に  $\delta Q$  の電荷を運ぶのに  $\phi\delta Q$  のエネルギーを使う必要がある。キャパシタンスを  $C$  とすると  $\phi = Q/C$  だから  $Q$  だけの電荷を充電するのに外部が使うエネルギー  $U$  は

$$U = \int_0^Q dQ\phi = \int_0^Q dQ \frac{Q}{C} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q\phi}{2} \quad (1.115)$$

これを静電エネルギー (electro-static energy) といった。

図のような深さ  $x$  のところまで比誘電率  $\epsilon_r$  の誘電体をいれることを考える。

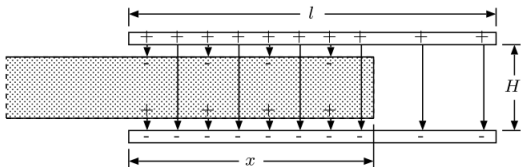


図 1.55: [55] より：誘電体を引き込む向きに力が働く。

この静電容量を  $C(x)$  とすると、この電気エネルギーは

$$U = C(x) \frac{Q^2}{2} \quad (1.116)$$

誘電体の挿入がない状態では

$$U_0 = \frac{Q^2}{2C_0} \quad (1.117)$$

とおく。誘電体が横向きに受ける力は  $Q$  が保存されるので  $\phi = Q/C$  だから

$$F = -\frac{\partial U}{\partial x} \Big|_Q = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{Q^2}{2C(x)} \Big|_Q = \frac{Q^2}{2C(x)^2} \frac{dC(x)}{dx} = \frac{\phi^2}{2} \frac{dC(x)}{dx}$$

つまり静電容量が  $x$  に対して増加すればこの  $F$  は正である。

この場合の具体的な静電容量の式は極板の奥行きを  $W$  として

$$C(x) = \frac{\epsilon_0 (\epsilon_r x + (\ell - x)) W}{H}$$

$$\frac{dC(x)}{dx} = \frac{\epsilon_0(\epsilon_r - 1)W}{H}$$

となる。この場合は外部から電源を加えていないことに留意する。定電圧にする場合は外部から電源を加える。

この時は  $Q(t)$  が変化し  $\phi = \phi_0$  とするが、外部電源が仕事  $Work$  をするので

$$F = -\left. \frac{\partial(U - Work)}{\partial x} \right|_{\phi_0}$$

となることに注意する。

物質のある電磁気学が全電荷と全電流を考慮し、真空での電磁気学で置き換えることができた。

この視点で外部電源を持たないキャパシタを考える。

比誘電率 (これは単なる数値) が  $\epsilon_r$  の誘電体から出る電束が

$$\frac{Q}{\epsilon} = \frac{1}{\epsilon_r} \frac{Q}{\epsilon}$$

となるから  $\epsilon_r$  の比誘電率を持つ誘電体で満たされれば電極上に  $Q$  があるので誘電体上には分極電荷  $Q_p$  が

$$-Q_p = -\left(Q - \frac{Q}{\epsilon_r}\right)$$

と表される。従って全電荷が

$$Q_{total} = Q - Q_p = \frac{Q}{\epsilon_r}$$

になる。従ってこの電荷が真空にあると考えれば、この時の電気エネルギーが

$$U = \frac{H}{2\epsilon_0 W \ell} Q_{total}^2 = \frac{H}{2\epsilon_0 \epsilon_r^2 W \ell} Q_{total}^2 = \frac{1}{\epsilon_r} \frac{Q^2}{2C_0} = \frac{U_0}{\epsilon_r}$$

となる。このエネルギーの変化を  $dU$  として誘導電荷  $Q_p$  の符号に留意し、極板電荷を  $Q_f$  とすると

$$\begin{aligned} dU &= \phi(Q_{total})dQ_f = \phi(Q_{total})(dQ_{total} + dQ_p) \\ &= \phi(Q_{total})dQ_{total} + \phi(Q_{total})dQ_p \end{aligned}$$

と表すと第一項が通常の電荷の移動によるエネルギーの変化を表し、第2項が誘導電荷が生じる際にもエネルギーを必要としていることがわかる。

また、キャパシタの体積  $V$  が

$$V = HW\ell$$

であるから式 1.46 から表面電荷密度  $\sigma$  が電束密度をのものであったのでエネルギー密度を

$$u = \frac{U}{V} = \frac{1}{2\epsilon} \frac{Q^2}{W\ell} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon} = \frac{\mathbf{D}^2}{2\epsilon} = \frac{\mathbf{D}\mathbf{E}}{2}$$

で表すことができ

$$du = \mathbf{E}d\mathbf{D} \tag{1.118}$$

という有用な関係式が得られる。全体の静電エネルギーはこれを積分すればよい。

### 1.5.2 コイル

コイルに電流を流せば、磁束  $\Psi$  が生じる。高校物理で習ったように電流変化に対する応答は電流変化を打ち消す向きにインダクタンスを  $L$  として

$$\phi = \frac{d\Psi}{dt} = L \frac{dI}{dt}$$

が生じた。これは電源からみれば負荷のように振る舞うのでコイルに対し仕事をするようになる。その結果がコイルに蓄えられる内部エネルギーというわけだ。式 1.118 に対応して電力  $P = I\phi$  だから  $\Psi = LI$  の関係を使うと

$$U = \int P dt = \int dt \left( I \frac{d\Psi}{dt} \right) = L \int I dI = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \Psi I$$

この磁気エネルギーはコイルの両端を短絡しておく、電源を切った後でもインダクタ内に蓄えられる。

次にインダクタンス  $L(x)$  を考えよう。長さ  $\ell$ , 単位長さあたりの巻き数密度  $n$  のコイルに図のように深さ  $x$  まで磁性体を挿入する場合を考える。先のコンデンサと同様にこの磁性体に働く力を考えてみよう。ここでは定電流源を考え、電流を一定にしている場合を考える。

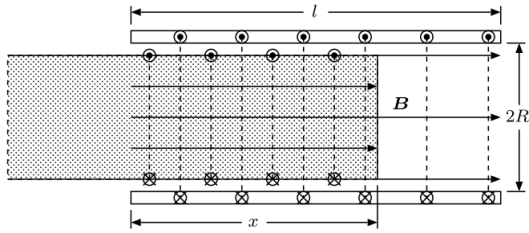


図 1.56: [55] より：コイル内に棒状の磁性体を深さ  $x$  に挿入する。

深さ  $x$  の部分の磁気エネルギーは

$$U(x) = \frac{1}{2} L(x) I^2$$

である。

しかし、インダクタンス  $L(x)$  は  $x$  の関数であるから、当然電源から見た負荷が  $x$  の関数になる。それでも定電流を供給するためには電源が仕事をする事になり、この補正を考慮しないといけない。電源のする仕事は定電流であることに注意すると

$$\int dt \left( I \frac{d\Psi}{dt} \right) = I \int d\Psi = I\Psi$$

であるから補正したエネルギーは

$$U'(x) = U(x) - I\Psi = \frac{1}{2} L(x) I^2 - L(x) I^2 = -\frac{1}{2} L(x) I^2$$

となるから

$$F = -\frac{\partial U'}{\partial x} = \frac{I^2}{2} \frac{\partial L(x)}{\partial x} \quad (1.119)$$

挿入量  $x$  が増えると  $L(x)$  も増えるのでこの時の  $F > 0$  であり、磁性体は引き込まれる向きに力を受ける。これはコンデンサの時と同様な結果である。

磁性体の半径  $R$  がソレノイドの内径に等しいとき式 1.56 からインダクタンス  $L(x)$  は真空の透磁率  $\mu_0$ 、比透磁率  $\mu_r$ 、断面積  $S$  として、

$$L(x) = \mu_0 (\mu_r x + (\ell - x)) n^2 S$$

とできるから

$$F = \frac{\mu_0 n^2 S I^2 (\mu_r - 1)}{2}$$

となる。また、式 1.119 に  $\Psi = LI$  を使うと

$$F = \frac{I}{2} \frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

だから抵抗 0 でコイルの両端を短絡すると外部の仕事をして 0 にすることができ、この時、コイルに鎖交する磁束の総和が一定である。これは電源から放したコンデンサに対応する。

一様な磁性体で満たされたソレノイドの場合は  $L = \mu n^2 \ell S$  とおけて、 $\mu = \mu_r \mu_0$  から

$$U = \frac{LI^2}{2} = \frac{\mu n^2 \ell S I^2}{2} = \frac{\mu_0 \mu_r n^2 \ell S I^2}{2} \quad (1.120)$$

となるので内部エネルギーは誘電体があると  $\mu_r$  倍されることがわかる。  
ところが自由電流と磁化電流の和が真空中にあるとすると

$$I_{total} = I + I_m = \mu_r I$$

が真空中の電流の総和になる。このとき、

$$U_{total} = \frac{LI^2}{2} = \frac{\mu n^2 \ell S I_{total}^2}{2} = \frac{\mu_0 \mu_r^2 n^2 \ell S I^2}{2} \quad (1.121)$$

となり、先の結果とことなる。これはコンデンサの時の総電荷と極板電荷  $Q_f$  を区別したようにコイルの磁束を  $\Psi_f = \Psi$  としてエネルギーの変化は

$$dU = I(\Psi_{total})d\Psi_f$$

とかける。ところが誘導磁化を  $\Psi_m$  とすると

$$d\Psi_f = d\Psi_{total} - d\Psi_m$$

だから

$$dU = I(\Psi_{total})d\Psi_f = I(\Psi_{total})d\Psi_{total} - I(\Psi_{total})d\Psi_m$$

となる。この積分から  $U_{total}$  が作られるので式 1.120 のエネルギーは式 1.121 のエネルギーから磁化に必要な仕事を引いたものだと考えないといけない。

また、式 1.120 を磁性体の総エネルギーとすると次のようにエネルギー密度が定義できる。

$$u = \frac{U}{S\ell} = \frac{\mu n^2 I^2}{2} = \frac{\mu K^2}{2}$$

ただし、式 1.10 から  $K$  は単位長さあたりの電流密度で巻き数密度を  $n$  として、

$$K = nI$$

であった。磁束密度とは式 1.11 から

$$\mathbf{B} = \mu K$$

電流を磁束密度で置き換えて

$$u = \frac{\mu K^2}{2} = \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu} = \frac{\mathbf{H}\mathbf{B}}{2}$$

が成り立つ。また  $dU = Id\phi$  に対応して、単位体積当たりのエネルギー密度が

$$u = \int \mathbf{H}d\mathbf{B}$$

とかける。

### 1.5.3 応力テンソル

高等学校で学習したようにコンデンサとコイルは空間内に、電場、磁場のエネルギーをため込むことができる。ため込む過程にはどちらも、仕事を加えて行く必要がある

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B}$$

で表される誘電率、透磁率により分極や磁化を考えた。これにより単位空間内に

$$U_E = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}$$

$$U_B = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}$$

のエネルギーをためることができ、静電容量  $C$  のコンデンサが

$$Q = C\phi$$

$$U_C = \frac{1}{2} Q\phi$$

の電荷とエネルギーをため、自己インダクタンス  $L$  のコイルが巻き数を  $N$  として

$$N\Phi = LI$$

$$U_L = \frac{N}{2} \Phi I$$

の磁束とエネルギーをためることができた。真空であれば

$$c^2 = \epsilon_0 \mu_0$$

で電磁波の速度が決まった。

ここでは簡単に物質のない場合についてまず考える。先にも見たように磁場中を運動している自由電荷に働くローレンツ力は

$$\mathbf{f} = \rho(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (1.122)$$

r

$$\rho = \nabla \cdot \mathbf{E} \quad (1.123)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (1.124)$$

$$\mathbf{J} = -\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1.125)$$

だから外積の順序に注意して

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} \\ &= \mathbf{E} (\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}) - \mathbf{B} \times \left( \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} \right) + \mathbf{B} \times \left( \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \\ &= \epsilon_0 \mathbf{E} \nabla \cdot \mathbf{E} - \epsilon_0 \mathbf{E} \times \nabla \times \mathbf{E} \\ &\quad + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \nabla \cdot \mathbf{B} - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \times \nabla \times \mathbf{B} \\ &\quad + \epsilon_0 \mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \end{aligned}$$

空間成分の単位ベクトル  $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$  とすると

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \left\{ \epsilon_0 \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( E_x^2 - \frac{1}{2} \mathbf{E}^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y} (E_x E_y) + \frac{\partial}{\partial z} (E_x E_z) \right] \right. \\ &+ \left. \frac{1}{\mu_0} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( B_x^2 - \frac{1}{2} \mathbf{B}^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y} (B_x B_y) + \frac{\partial}{\partial z} (B_x B_z) \right] \right\} \mathbf{e}_x \\ &+ \{\dots\} \mathbf{e}_y + \{\dots\} \mathbf{e}_z - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \\ &= \sum_i \frac{\partial T_{ix}}{\partial x} \mathbf{e}_x + \sum_i \frac{\partial T_{iy}}{\partial y} \mathbf{e}_y + \sum_i \frac{\partial T_{iz}}{\partial z} \mathbf{e}_z - \frac{\partial \mathbf{g}_m}{\partial t} \end{aligned}$$

ただし、 $T_{ij}$  をマクスウェル応力テンソル (Maxwell\_stress\_tensor)、 $\mathbf{g}_m$  を電磁場の運動量として

$$\begin{aligned} T_{ij} &= \epsilon_0 \left( E_i E_j - \delta_{ij} \frac{\mathbf{E}^2}{2} \right) + \frac{1}{\mu_0} \left( B_i B_j - \delta_{ij} \frac{\mathbf{B}^2}{2} \right) \\ \mathbf{g}_m &= \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B} \end{aligned} \quad (1.126)$$

とおく。

ローレンツ力を運動量  $\mathbf{g}_k$  の時間微分とすると上式は  $\nabla \cdot T$  をテンソル算で成分があることに留意し、

$$\frac{\partial \mathbf{g}_k}{\partial t} = \nabla \cdot T - \frac{\partial \mathbf{g}_m}{\partial t} \quad (1.127)$$

となる。

これらは次節で示すように 4 次元に拡張するとベクトルポテンシャルで

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

と定義できて運動量・エネルギー密度テンソルを用いて

$$\partial_\beta T^{\alpha\beta} = 0$$

と簡単に表現できるようになる。式 1.127 を体積積分すると次の力学と電磁気学の力を総合した流れの式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V dV (\mathbf{g}_k + \mathbf{g}_m) = \oint_S d\mathbf{S} \cdot T \quad (1.128)$$

応力テンソルを簡単に見るためには主軸変換をおこなう。はじめに磁場がなく、電場のみの場合の主軸は  $\mathbf{E}$  の方向にあり、固有値が  $\epsilon_0 \mathbf{E}^2/2$  の値をとる。また、第 2、第 3 の主軸はこれと直交していて、固有値は縮退し  $-\epsilon_0 \mathbf{E}^2/2$  の固有値を持つ。この様子が電気力線で表現される。 $\mathbf{E}$  の方向には電気力線は引っ張りの力を受け、垂直方向には膨張の力をうける。よって電気力線が交わることなく、空間や導体表面に一樣に広がっていく。導体表面で電荷が一樣に分布するのもこれが理由である。

次に電場のない磁場のみを考え、主軸変換すると同様に  $\mathbf{B}$  の方向に  $\mathbf{B}^2/2\mu_0$  の引っ張りの力を受け垂直方向には膨張の力をうける。磁力線が電気力線と同じように、空間に一樣に広がるのもこのせいである。

少々重要なのはループ状の電流があり、磁力線も電気力線も混在する場合である。

このときの主軸変換は複雑になる。しかし、静的であれば電荷が電気力線にかかわり、電流が磁力線にかかわる。逆に動的であるとは電荷や電流が両方にかかわる場合である。

さらに式 1.128 から話題によくなるのが作用・反作用の法則である。

作用反作用は力の体積積分により 0 になるはずであるが、この式はそうになっていない。

動的に変化する場合を考えると左辺は遠方で場が弱くなり、表面積分はほとんど無視できる。しかし、電磁場の運動量  $\mathbf{g}_m$  が残る。従って、この項を無視してしまうと作用反作用は成立しない。式 1.126 を真空場から物質場にもっていくとは式の上では簡単で



$$T_{ij} = \epsilon \left( E_i E_j - \delta_{ij} \frac{\mathbf{E}^2}{2} \right) + \frac{1}{\mu} \left( B_i B_j - \delta_{ij} \frac{\mathbf{B}^2}{2} \right) \quad (1.129)$$

となる。従って応力は

$$\frac{\epsilon_0 \mathbf{E}^2}{2} \rightarrow \frac{\epsilon \mathbf{E}^2}{2}$$

$$\frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} \rightarrow \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu}$$

と変更される。これは力学的な応力が加わったからで、電気的な応力に変化はないことに留意がいる。物質場になることで電磁場の伝達は光速から遅れる。これらは物質と相互作用していることによる。 $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{H}$  のような誘電、磁化を考えてエッジ効果を受ける。ローレンツ力は

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} \\ &= \mathbf{E} \nabla \cdot \mathbf{D} - \mathbf{B} \times \nabla \times \mathbf{H} + \mathbf{B} \times \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ &= \mathbf{E} \nabla \cdot \mathbf{D} - \mathbf{D} \times \nabla \times \mathbf{E} \\ &\quad + \mathbf{H} \nabla \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B} \times \nabla \times \mathbf{H} \\ &\quad + \mathbf{B} \times \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \mathbf{D} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{aligned}$$

空間成分の単位ベクトル  $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$  とすると

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial x} (E_x D_x - \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + u_e) + \frac{\partial}{\partial y} (E_x D_y) + \frac{\partial}{\partial z} (E_x D_z) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\mu_0} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (H_x B_x - \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} + u_m) + \frac{\partial}{\partial y} (H_x B_y) + \frac{\partial}{\partial z} (H_x B_z) \right] \right\} \mathbf{e}_x \\ &\quad + \{\dots\} \mathbf{e}_y + \{\dots\} \mathbf{e}_z - \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{D} \times \mathbf{B}) \\ &= \sum_i \frac{\partial T_{ix}}{\partial x} \mathbf{e}_x + \sum_i \frac{\partial T_{iy}}{\partial y} \mathbf{e}_y + \sum_i \frac{\partial T_{iz}}{\partial z} \mathbf{e}_z - \frac{\partial \mathbf{g}_m}{\partial t} \end{aligned}$$

となる。ただし、部分積分から

$$D_x \frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial (E_x D_x)}{\partial x} - E_x \frac{\partial D_x}{\partial x}$$

$$E_x \frac{\partial D_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \int E_x dD_x \right)$$

となるので

$$u_e = \int \mathbf{E} d\mathbf{D}$$

$$u_m = \int \mathbf{H} d\mathbf{B}$$

とできる。よってこの時、応力が

$$T_{ij} = E_i D_j - \delta_{ij} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} - u_e) + B_i H_j - \delta_{ij} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{B} - u_m) \quad (1.130)$$

$$\mathbf{g} = \mathbf{D} \times \mathbf{B}$$

となる。

### 1.5.4 ポインティングベクトル

一般的なローレンツ力が式 1.122 から

$$\mathbf{F} = \rho(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \rho\mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}$$

だったので外積の条件から  $\mathbf{v}$  との内積をとると磁場の回転は落ちて

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = Q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}$$

となるのから分布電荷に対する式として単位体積あたりでは

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$$

となるので物質がない場合、式 1.125 と Maxwell の方程式

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

と  $\mathbf{B}$  との内積を引いて変形すると

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} &= \mathbf{E} \cdot \left( \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \\ &= \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ &= -\frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 \right) \\ &= -\nabla \cdot \mathbf{S} - \frac{\partial u}{\partial t} \end{aligned}$$

となる。ここでポインティングベクトル  $\mathbf{S}$ 、と単位体積当たりの電磁場のエネルギー  $u$  である。

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}, \quad u = \frac{1}{2} \left( \epsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2 \right)$$

一方で左辺は仕事率だから

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{S} - \frac{\partial u_m}{\partial t}$$

とかける。つまり、ポインティングベクトルは単位時間、単位面積あたりに流れ出るエネルギーであるが、媒質に蓄えられる力学的エネルギーも含んでいることに注意がいる。

真空中の場合、式 1.126 から

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \mathbf{g}_m = c^2 \mathbf{g}_m$$

であり、相対論的な粒子が

$$\mathbf{E}^2 = c^2 \mathbf{p}^2$$

を満たすから電磁場は質量 0 の粒子の運動と考え得ることを示唆する。

## 1.6 電磁場

### 1.6.1 動的ポテンシャル [55]

ここでは波動的な立場にたつてポテンシャルの波動方程式を考え、動的なベクトル、スカラーポテンシャルを導く。

まず、原点に  $Q(t)$  で変化する点電荷が存在し、これが作るポテンシャルは球対称であるべきだから  $\phi(r, t)$  とおく。ただし、 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  であるからラプラシアンは次のようになる。

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{dr}{dx} = \frac{x}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \frac{dr}{dx} \left( \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = \left( \frac{x}{r} \right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = -\frac{x}{r^3}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = \frac{r - x(x/r)}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \left( \frac{x}{r} \right)^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2}$$

よって

$$\nabla^2 = \Delta \phi = \frac{3r - r}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = \frac{2}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r\phi)}{\partial r^2}$$

と都合よく  $(r\phi)$  を 1 つの変数とみなすことができ、そうすれば 1 次元波動方程式である。従って、スカラーポテンシャルの波動方程式は  $r = 0$  以外では  $\rho = 0$  とすると

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r\phi)}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0$$

または

$$\frac{\partial^2 (r\phi)}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 (r\phi)}{\partial t^2} = 0$$

となる。この解はよく知られているように次のような先進、遅延関数の和である。

$$\phi = \frac{f(t - r/c)}{r} + \frac{g(t + r/c)}{r}$$

とかける。これは中心から外へ出ていく進行波と、逆に外から中に入ってくる後退波の和になっている。これから原点付近のみ電荷があり、これが波源だとすると位置  $r$  では

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{Q(t - r/c)}{r} + \frac{Q(t + r/c)}{r} \right\}$$

のように離れた効果が入ってくる。これは境界内の領域に定常波を考えて出発したことから得られた結果である。時空間に計量を入れることが領域内の定常波を考えることに対応している。

これから空間に電荷が一様に分布している時のスカラー、ベクトルポテンシャルは次のようになる。

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho\left(\mathbf{x}, t \mp \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{x}|}{c}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{x}|} dV \quad (1.131)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\mathbf{J}\left(\mathbf{x}, t \mp \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{x}|}{c}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{x}|} dV \quad (1.132)$$

これらは遅延、先進ポテンシャルと呼ばれ、後節で Green 関数を用いて考察する。

### 1.6.2 点電荷問題 [55]

物質と場の関係を見つめてみよう。

放送大学の岡部 [55]、東北大学の川上教授は次のようなモデルを考えて、スカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルの関係を探求した。

前節でもみたように原点に  $t = 0$  で突然電荷  $Q_0$  が現れてその後変化しない場合を考える。

この時の過渡的な状況は

$$Q(t) = \frac{Q_0 t}{\tau} \quad (0 \leq t \leq \tau)$$

と表され、有限な微小時間  $\tau$  が立ち上がりの時間である。

ここでは電荷だけが存在し、ベクトルポテンシャルは  $\mathbf{A} = 0$  であるとみなせるのでスカラーポテンシャルは

$$\phi = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r} \times \begin{cases} 0 & \text{outside sphere } ct \leq r \\ \frac{t-r/c}{\tau} & \text{spherical shell } c(t-\tau) \leq r \leq ct \\ 1 & \text{inside spher } r \leq c(t-\tau) \end{cases} \quad (1.133)$$

と立ち上がりの  $\tau$  の領域で増加していく幅をもったステップ関数を考える。

従って原点からスカラーポテンシャル（電位）は球面状に広がるが球面半径  $ct$  より遠い位置ではスカラーポテンシャルを感じるができない。

しかし、これは第 2 行の遷移時間のところでローレンツ条件式 1.79

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

を満たしていない。

これは電荷だけが突然現れたことによる。実際には電荷の出現と電流が同じように出る必要がある。

そこで次に電流の影響を考え、スカラーポテンシャルの修正を試みる。

**対称励振** まず、空間は等方的で、球対称性をもった場合を考える。ここに電荷を対称性を維持しながら挿入する場合を考える。

ベクトルポテンシャルを知るためにステップ関数を用いた電流の分布を考える。

電流が無遠のあらゆる方向から原点に対称的に流れ込むとすると一瞬の大電流が必要でこの微小時間を  $\tau$  とする。よって原点において電流の大きさは

$$\frac{Q_0}{\tau}$$

とする。

原点から  $r$  離れたところでは電流密度はクーロン則のように

$$J_r = -\frac{Q_0}{4\pi\tau} \frac{u(t) - u(t-\tau)}{r^2} \quad (1.134)$$

とおく。

$u(t)$  はステップ関数で  $t = 0$  からは 1 をとり、その前は 0 である。よって  $u(t-\tau)$  は  $t = \tau$  から 1 となる。このような 2 つの波を考えると時間差  $\tau$  があるために次のような球殻内の電流にしか影響を与えない。電源の座標を  $\mathbf{r}'$ 、観測点を  $\mathbf{r}$  とし、観測点から電流源をみた座標を

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$$

とする。すると

$$c(t-\tau) \leq R \leq ct$$

の球殻内の領域がベクトルポテンシャルとして値を持てる。

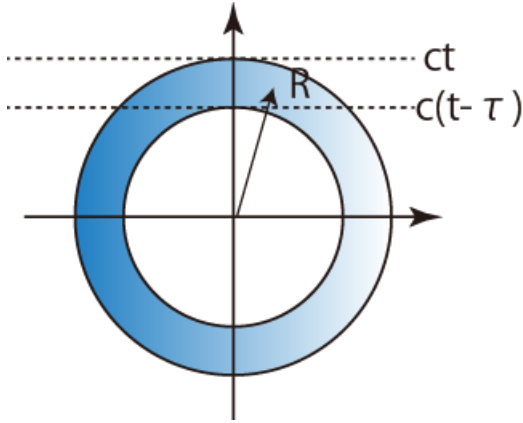


図 1.57: 階段関数により領域の限定

また、球対称性から波の合成は  $\mathbf{r}$  方向のみがのこるので式 1.132 の積分は球積分をすればいいから

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\mathbf{J}\left(\mathbf{x}, t \mp \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{x}|}{c}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{x}|} dV \quad (1.135)$$

$$J_r = -\frac{Q_0}{4\pi\tau} \frac{u(t) - u(t-\tau)}{r^2}$$

より球殻の体積  $dV$  を  $2\pi R \sin\theta \times dR \times R d\theta$  で置き換え、第 1 部のポアソンの公式

$$u(t) - u(t-\tau) = \frac{r/R + \cos\theta}{r'}$$

で置き換えると

$$\begin{aligned} A_r &= -\frac{Q_0}{\tau} \frac{\mu_0}{4\pi} \int 2\pi R^2 \sin\theta dR d\theta \frac{1}{4\pi r'^2} \frac{r + R \cos\theta}{R r'} \\ &= -\frac{\mu_0 Q_0}{8\pi\tau} \int dR d\theta \frac{(r + R \cos\theta) R \sin\theta}{\sqrt{R^2 + 2rR \cos\theta + r^2}^3} \end{aligned} \quad (1.136)$$

複雑そうに見えるがこれは

$$\begin{aligned} A_r &= -\frac{\mu_0 Q_0}{4\pi\tau r^2} \int_{c(t-\tau)}^t dR R (u(R+r) - u(R-r)) \\ &= -\frac{\mu_0 Q_0}{8\pi\tau} \begin{cases} 0 & \text{inside sphere} \\ 1 - \left(\frac{c(t-\tau)}{r}\right)^2 & \text{sphere shell} \\ \left(\frac{ct}{r}\right)^2 - \left(\frac{c(t-\tau)}{r}\right)^2 & \text{outside sphere} \cap \tau \leq t \\ \left(\frac{ct}{r}\right)^2 & \text{outside sphere} \cap 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & t \leq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (1.137)$$

となる。式 1.136 の被積分関数を  $R, \theta$  を変数に描画させると次のようになる。

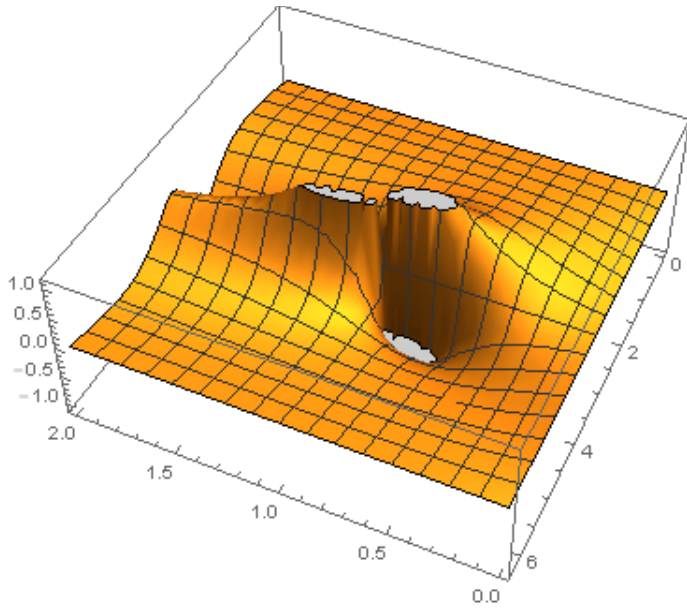
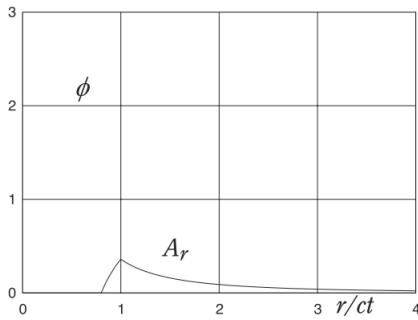


図 1.58:  $R, \theta$  を変数にとった 3D グラフ

図で見るように境界上で不連続な変化をとる。しかし、定常波をつくる合成のようにスカラーポテンシャルと反対で、領域内で 0、領域外で値をとることが重要である。



対称励振により発生する対称なポテンシャルの半径方向の変化。

図 1.59: [55] より

これから電場や磁場を求めることができる。

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$$

から

$$\mathbf{E} = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0} \times \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{t}{\tau} & 0 \leq t \leq \tau \\ 1 & \tau \leq t \end{cases}$$

過渡的な状態を除きクーロン則を満たす。しかし、興味あるのは磁場とこなり、光速の伝播の項が出てこない点である。

これは原点に向かう電流を全領域に強制的に考えたが、原点で電流が連続であるためには逆向きに変位電流が流れていないといけない。式 1.32 から磁場が無い時

$$\mathbf{J} = -\epsilon_0 \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$$

から変位電流は電場の時間微分に比例する。よって電場は領域全体に発生する。

その後電流が止まると原点の電荷が作る伝播域内部の電場との連続性から外部にはも同じ形の電場が残ることになる。これが領域全体にクーロン型として電場の存在する理由である。一方で導体中にはこれに比例した電流が流れる。よって見かけの誘電緩和過程には光速が登場しない。このような空間対称性がある場合はローレンツ条件を用いるとベクトルポテンシャルを計算しやすくなる。ローレンツ条件  $\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$  から

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

となる。式 1.133 から

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0\tau r}$$

だから

$$\Phi = \nabla \cdot \mathbf{A} = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\mu_0}{4\pi r} \frac{Q_0}{\tau} \times \begin{cases} 0 & \text{inside sphere} \\ 1 & \text{sphere shell} \\ 0 & \text{outside sphere} \end{cases}$$

のように電荷とみなせる。これから式 1.137 が次のように導ける。

ガウスの法則を用いて球対称性から

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS$$

$$\int_V \Phi dV = 4\pi r^2 \cdot A_r$$

となるので式 1.136 を代入すると次のようにベクトルポテンシャルとスカラーポテンシャルが興味ある結果として得られる。

$$\phi = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r} \times \begin{cases} 1 & \text{inside sphere} \\ 0 & \text{outside sphere} \end{cases}$$

$$A_r = -\frac{\mu_0 c^2 Q_0 t}{4\pi r^2} \times \begin{cases} 0 & \text{inside sphere} \\ 1 & \text{outside sphere} \end{cases}$$

ベクトルポテンシャルは時間に比例した形になっている。同じ位置で観測すると、時間と共に大きさは増える。しかし、境界が到達するとその瞬間に消滅するのである。

**非対称励振** 次に非対称に電荷を挿入する場合を考えよう。図右のように  $z$  軸に沿って負側から直線電線に沿った電流によって原点に電荷が挿入される場合を考える。前回と同様に一定時間  $0 \leq t \leq \tau$  の間に定電流  $Q/\tau$  が流れたとする。 $z$  軸から距離  $R$  離れた位置で観測することを考える。

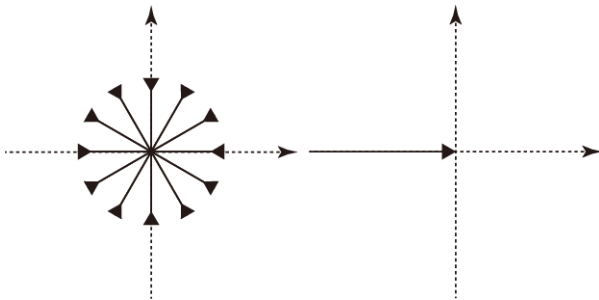


図 1.60: 対称励振 (左) と非対称励振 (右)

この時、電荷だけに注目すると対称の場合と電荷の形に変化がないので電荷のつくるスカラーポテンシャルに変化はない。一方電流の作るベクトルポテンシャルは  $z$  軸を中心とした円柱座標で距離  $R$  だけ離れた観測点では伝播の遅れが生じる。そのため、半径  $r$  が

$$c(t - \tau) < r < ct$$

だけに存在する電流を考えればよいことになる。 $z$  軸上の点源の座標を  $z'$  とすると  $R = \sqrt{x^2 + y^2}$  とおけるから

$$c(t - \tau) \leq \sqrt{(z' - z)^2 + R^2} \leq ct$$

となる。よって  $z$  軸上の距離が

$$\sqrt{c^2(t - \tau)^2 - R^2} \leq |z' - z| \leq \sqrt{c^2 t^2 - R^2}$$

となる。つまり、電流路の 2ヶ所から影響を受ける。 $R$  が大きくなれば、この 2ヶ所は接近し、さらに  $ct \leq R$  となるとこの領域は消滅する。

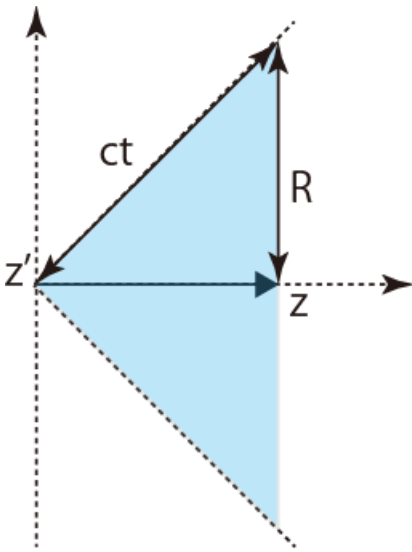


図 1.61: 電流の影響は光速で伝播するが、立ち上がりの時間  $\tau$  があるため、円柱座標で  $z$  軸から距離  $ct$  離れたると電流の影響は受けない。

これからベクトルポテンシャルが計算できる。式 1.137 を用いると

$$A_z = \frac{\mu_0 Q_0}{4\pi\tau} \int dz' \frac{1}{\sqrt{(z' - z)^2 + R^2}} \quad (1.138)$$

から不連続部分の区切り、で定積分の和を表すとして、

$$\begin{cases} \text{inside cylinder} & R \leq c(t - \tau) \\ \text{cylindrical shell} & c(t - \tau) \leq R \leq ct \\ \text{outside cylinder} & ct \leq R \end{cases}$$

とおくと  $A_z$  は

$$= \frac{\mu_0 Q_0}{4\pi\tau} \times \begin{cases} \log \left( z' - z + \sqrt{(z' - z)^2 + R^2} \right) \Big|_{z - \sqrt{c^2(t - \tau)^2 - R^2}, z + \sqrt{c^2\tau^2 - R^2}}^{z - \sqrt{c^2(t - \tau)^2 - R^2}, z + \sqrt{c^2\tau^2 - R^2}} & \text{inside cylinder} \\ \log \left( z' - z + \sqrt{(z' - z)^2 + R^2} \right) \Big|_{z - \sqrt{c^2 t^2 - R^2}, z + \sqrt{c^2(t - \tau)^2 - R^2}}^{z + \sqrt{c^2 t^2 - R^2}, z + \sqrt{c^2(t - \tau)^2 - R^2}} & \text{cylindrical shell} \\ 0 & \text{outside cylinder} \end{cases}$$



$$= \frac{\mu_0 Q_0}{4\pi\tau} \times \begin{cases} \log \frac{(ct + \sqrt{c^2 t^2 - R^2}) [c(t-\tau) - \sqrt{c^2(t-\tau)^2 - R^2}]}{(ct - \sqrt{c^2 t^2 - R^2}) [c(t-\tau) + \sqrt{c^2(t-\tau)^2 - R^2}]} & \text{inside cylinder} \\ \log \frac{ct + \sqrt{c^2 t^2 - R^2}}{ct - \sqrt{c^2 t^2 - R^2}} & \text{cylindrical shell} \\ 0 & \text{outside cylinder} \end{cases}$$

と計算できる。簡単にするために被積分関数のみを考えて、単純化してみる。

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{d}{dx}(\sinh^{-1} x)$$

であることを利用すると式 1.138 は

$$A = \sinh^{-1}(x - 1 + \delta) + \sinh^{-1}(1 - x)$$

とおくことができる  $\delta$  は緩和のためのもので  $\delta = c\tau$  とおける。この  $\delta$  がないと明らかにこの  $A$  は 0 である。しかし、 $\delta$  の正で次の図のようにピークをとる関数になる。

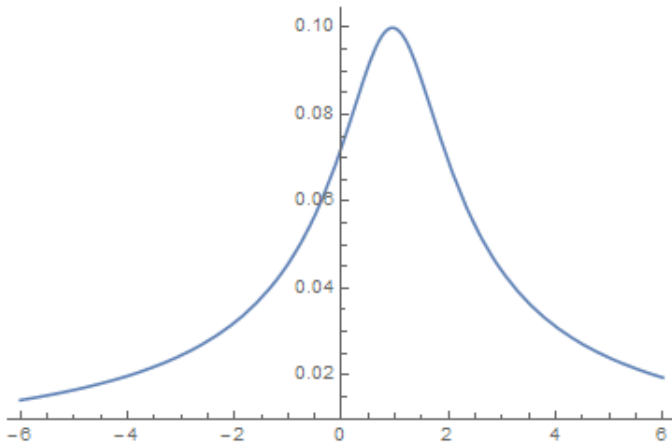


図 1.62:  $\delta = 0.1$  の場合の  $\sinh^{-1}(x - 1 + \delta) + \sinh^{-1}(1 - x)$ 、 $\delta \neq 0$  になると突然にピークが現れる。

また、積分結果についても単純に

$$A' = \log \frac{x + \sqrt{x^2 + \delta}}{x - \sqrt{x^2 + \delta}}$$

とおくとこれは

$$A'' = 2 \sinh^{-1}(x/\delta)$$

次の図のように  $\delta$  に関係なく、原点付近で差が出る。

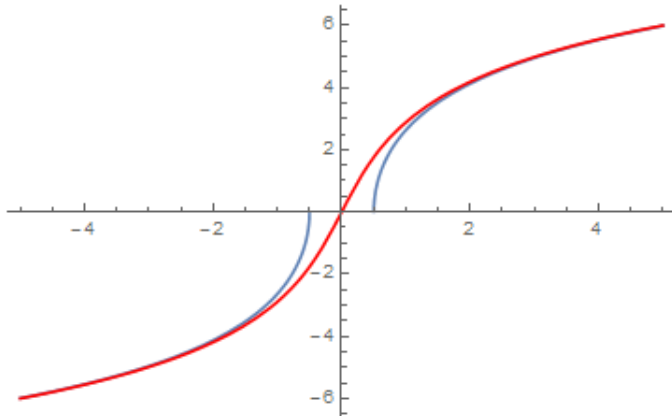


図 1.63:  $A'$  は  $2\delta$  の不連続を持つが原点から離れると  $A''$  に等しい

さらに観測点が原点に近い場合は電流路の1か所からのみ影響を受ける。この場合を含めて書き換えると

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\mu_0 Q_0}{4\pi\tau} \times \begin{cases} \log\left(z' - z + \sqrt{(z' - z)^2 + R^2}\right) \Big|_{z - \sqrt{c^2(t-\tau)^2 - R^2}}^{z - \sqrt{c^2(t-\tau)^2 - R^2}} & \text{inside cylinder} \\ \log\left(z' - z + \sqrt{(z' - z)^2 + R^2}\right) \Big|_{z - \sqrt{c^2(t-\tau)^2 - R^2}, 0}^{z - \sqrt{c^2(t-\tau)^2 - R^2}, 0} & \text{spherical shell, } z \leq 0 \cap \text{inside cylinder} \\ \log\left(z' - z + \sqrt{(z' - z)^2 + R^2}\right) \Big|_{z - \sqrt{c^2 t^2 - R^2}}^0 & \text{spherical shell, elsewhere above} \\ 0 & \text{outside sphere } 0 \leq z \end{cases} \\
 &= \frac{\mu_0 Q_0}{4\pi\tau} \times \begin{cases} \log \frac{c(t-\tau) - \sqrt{c^2(t-\tau)^2 - R^2}}{ct - \sqrt{c^2 t^2 - R^2}} & \text{inside cylinder} \\ \log \frac{(\sqrt{z^2 - R^2} - z) [c(t-\tau) - \sqrt{c^2(t-\tau)^2 - R^2}]}{(ct - \sqrt{c^2 t^2 - R^2}) [c(t-\tau) + \sqrt{c^2(t-\tau)^2 - R^2}]} & \text{spherical shell, } z \leq 0 \cap \text{inside cylinder} \\ \log \frac{\sqrt{z^2 + R^2} - z}{ct - \sqrt{c^2 t^2 - R^2}} & \text{spherical shell, elsewhere above} \\ 0 & \text{outside sphere } 0 \leq z \end{cases}
 \end{aligned}$$

この結果が Lorentz 条件を満たすか見てみる。  $\nabla \cdot \mathbf{A} = \partial A_z / \partial z$ 、  $r = \sqrt{z^2 + R^2}$  だから

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\mu_0 Q_0}{4\pi\tau} \left[ \frac{-1}{\sqrt{z^2 + R^2}} + \frac{1}{r} \right] = 0$$

となり、確かにローレンツ条件が成り立つ。

スカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルの形が決まったので点電荷を導入した時の電場  $\mathbf{E}$  と磁場  $\mathbf{B}$  を明らかにしてみる。

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E} &= -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \\
 &= \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0} \times \begin{cases} \frac{\mathbf{r}}{r^3} - \frac{\mathbf{k}}{c\tau} \left( \frac{1}{\sqrt{c^2(t-\tau)^2 - R^2}} - \frac{1}{\sqrt{c^2 t^2 - R^2}} \right) & \text{inside sphere} \\ \frac{\mathbf{r}}{r^3} \frac{t}{\tau} - \frac{\mathbf{k}}{c\tau} \left( \frac{2}{\sqrt{c^2(t-\tau)^2 - R^2}} - \frac{1}{\sqrt{c^2 t^2 - R^2}} \right) & \text{spherical shell, } z \leq 0 \cap \text{inside cylinder} \\ \frac{\mathbf{r}}{r^3} \frac{t}{\tau} - \frac{\mathbf{k}}{c\tau} \frac{1}{\sqrt{c^2 t^2 - R^2}} & \text{spherical shell, } z \leq 0 \cap \text{elsewhere above} \\ \frac{2\mathbf{k}}{c\tau} \left( \frac{1}{\sqrt{c^2(t-\tau)^2 - R^2}} - \frac{1}{\sqrt{c^2 t^2 - R^2}} \right) & \text{inside cylinder} \\ \frac{2\mathbf{k}}{c\tau} \left( -\frac{1}{\sqrt{c^2 t^2 - R^2}} \right) & \text{cylinder shell} \\ 0 & \text{outside above regions} \end{cases}
 \end{aligned}$$

となる。この電場を作図すると次のようになる。

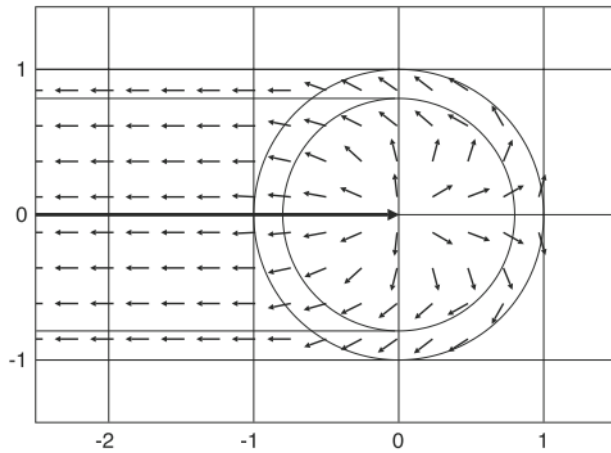


図 1.64: [55] より:非対称励振で原点に電荷を注入する。すると電場は原点から注入元に向かう。

半径  $R$  の球内では時間経過後にはクーロン型にもどる。緩和時間内の球外でも  $z$  軸を中心とした円柱内には一定な電場があり、コンデンサ内の電場のように一様に電流の注入源側を向いている。

これから磁場の場合の単位ベクトル  $\mathbf{t}$  に注意すると、伝播は光速の影響を受け、原点に注入された電荷から発生した電磁場は距離  $ct$  の領域にのみ存在している。過渡的な状態では磁場電場共に変化し、やがてクーロン電場のみが空間を埋める。もし、空間にわずかでもコンダクタンスがあれば光速の影響が残り、分散が生じる。

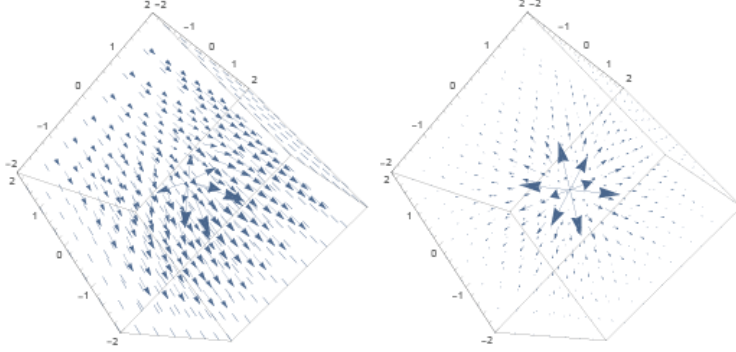


図 1.65: 過渡的な状態図左と定常的な状態図右

このモデルでは過渡的な状態では無限速から  $z$  軸負方向に向かって電場が生じることになり、合成すると図の左のような非対称な電場が原点から広がる。定常的な状態になれば、原点の点電荷のみの影響を受け、クーロンの電場が残る。

次に磁場について見てみる。過渡的な状態では  $z$  軸に沿って原点に向かう電流があるので式 1.135 からベクトルポテンシャルもこの電流に沿ってあると考えられる。よって、この時の磁場は  $z$  軸を中心とした円の接線方向への単位ベクトルを  $\mathbf{t}$  として

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = -\mathbf{t} \frac{\partial A_z}{\partial R} = -\frac{\mu_0 Q_0}{4\pi R} \mathbf{t}$$

$$\times \begin{cases} -\frac{1}{(\sqrt{c^2(t-\tau)^2-R^2})[c(t-\tau)+\sqrt{c^2(t-\tau)^2-R^2}]} + \frac{1}{(ct-\sqrt{c^2t^2-R^2})\sqrt{c^2t^2-R^2}}; \text{inside sphere} \\ -\frac{1}{(\sqrt{c^2(t-\tau)^2-R^2})[c(t-\tau)-\sqrt{c^2(t-\tau)^2-R^2}]} + \frac{1}{(c(t-\tau)-\sqrt{c^2t^2-R^2})\sqrt{c^2(t-\tau)^2-R^2}} \\ -\frac{1}{(\sqrt{z^2+R^2}-z)\sqrt{z^2+R^2}} + \frac{1}{(ct-\sqrt{c^2t^2-R^2})\sqrt{c^2t^2-R^2}}; \text{spherical shell, } z \leq 0 \cap \text{inside cylinder} \\ -\frac{1}{(\sqrt{z^2+R^2}-z)\sqrt{z^2+R^2}} + \frac{1}{(ct-\sqrt{c^2t^2-R^2})\sqrt{c^2t^2-R^2}}; \text{spherical shell, } z \leq 0 \cap \text{elsewhere above} \\ -\frac{1}{(\sqrt{c^2(t-\tau)^2-R^2})[c(t-\tau)-\sqrt{c^2(t-\tau)^2-R^2}]} + \frac{1}{(c(t-\tau)-\sqrt{c^2t^2-R^2})\sqrt{c^2(t-\tau)^2-R^2}} \\ -\frac{1}{(ct+\sqrt{c^2t^2-R^2})\sqrt{c^2t^2-R^2}} + \frac{1}{(ct-\sqrt{c^2t^2-R^2})\sqrt{c^2t^2-R^2}}; \text{inside cylinder} \\ -\frac{R(-ct\sqrt{c^2t^2-R^2}+c^2t^2+z(z-\sqrt{R^2+z^2}))}{(\sqrt{R^2+z^2}-z)(\sqrt{c^2t^2-R^2}-ct)\sqrt{(R^2+z^2)(c^2t^2-R^2)}}; \text{spherical shell, elsewhere above} \\ 0; \text{outside cylinder} \end{cases}$$

のようになる。この結果は電場と異なり、あからさまに光速の影響を受けている。

**電磁波** 電荷を注入している過渡的な状態では電磁場が発生している。しかし、静的な状態になるとこの電磁波は見えない。そこで電荷の発生と、消滅を交互に繰り返せば電磁波が光速で伝播していくとがわかる。遠方で振幅が  $1/r$  になればこれを電磁波という。

伝播の遅れを含めて定常的な変化で生じる点源から  $\mathbf{r}$  のポテンシャルはこれまでの議論から

$$\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{-i\omega(t-r/c)}}{r} \quad (1.139)$$

$$d\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{e^{-i\omega(t-r/c)}}{r} d\mathbf{r} \quad (1.140)$$

とかける。そこで近距離に異電荷がある場合の電気モーメントを考えよう。

正電荷が  $(0, 0, \delta/2)$  の位置にあり、負電荷が  $(0, 0, -\delta/2)$  の位置にあるとする。モーメントを

$$\mathbf{p} = p\mathbf{k}$$

で表す。

$$Q(t) = \frac{p}{\delta} e^{-i\omega t}$$

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = -\omega \frac{p}{\delta} e^{-i\omega t}$$

となり、常に電流が存在する。微小区間  $(\delta, -\delta)$  で定常的な状態になったとすると式 1.139、1.140 から

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{p}{4\pi\epsilon_0\delta} \left\{ \frac{e^{-i(\omega-r(\delta/2)/c)}}{r(\delta/2)} - \frac{e^{-i(\omega+r(\delta/2)/c)}}{r(-\delta/2)} \right\} \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} (\mathbf{p} \cdot \nabla) \frac{e^{-i\omega(t-r/c)}}{r} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} e^{-i\omega(t-r/c)} \left( 1 + \frac{-i\omega}{c} r \right) \frac{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^3} \\ \mathbf{A} &= \frac{\mu_0 \mathbf{p}}{4\pi\delta} \int_{-\delta/2}^{\delta/2} dz' \frac{-i\omega e^{-i\omega(t-r(z')/c)}}{\sqrt{(z'-z)^2 + R^2}} \\ &= \frac{\mu_0 \mathbf{p}}{4\pi} \frac{(-i\omega)}{r} e^{-i\omega(t-r/c)} \end{aligned}$$

ただし、観測点から  $z$  軸上  $z'$  にある原点までの距離を

$$\begin{aligned} r(z') &= \sqrt{(z-z')^2 + R^2} \\ r(\delta) &= \sqrt{(z-\delta)^2 + R^2} \\ r(-\delta) &= \sqrt{(z+\delta)^2 + R^2} \end{aligned}$$

のように表す。この結果は次の図のようにスカラーポテンシャルは平面上に広がる円形波であり、ベクトルポテンシャルをベクトル場で表示すると図のような球面波になる。

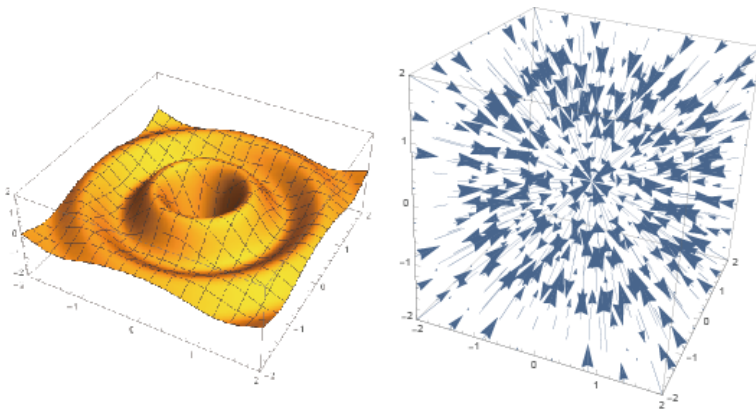


図 1.66: 左図がスカラーポテンシャル、右はベクトルポテンシャルを表す。

さらに次の公式を利用する。

$$\nabla[(\mathbf{p} \cdot \nabla)f] = \nabla[(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r}] + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} \right)$$

これを用いて、ポテンシャルから電場と磁場を計算しよう。

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E} &= -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\nabla\left[\frac{(\mathbf{p}\cdot\nabla)e^{-i\omega(t-r/c)}}{r}\right] - \frac{\mu_0\mathbf{p}}{4\pi}\frac{-i\omega}{r}\frac{\partial}{\partial t}e^{-i\omega(t-r/c)} \\
 &= -\frac{e^{-i\omega t}}{4\pi\epsilon_0}\left[\mathbf{p} + \frac{\mathbf{r}}{r}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})\frac{\partial}{\partial r}\right]\left[\left(1 + \frac{-i\omega r}{c}\right)\frac{e^{-i\omega(t-r/c)}}{r^3}\right] + \frac{\mu_0\mathbf{p}}{4\pi}\frac{\omega^2}{r}e^{-i\omega(t-r/c)} \\
 &= -\frac{e^{-i\omega t}}{4\pi\epsilon_0}\left\{\mathbf{p}\left(1 + \frac{-i\omega r}{c}\right)\frac{e^{-i\omega(t-r/c)}}{r^3}\right. \\
 &\quad \left.+ \frac{\mathbf{r}}{r}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})\left[\frac{\omega^2}{c^2}\frac{e^{-i\omega(t-r/c)}}{r^2} - 3\left(1 + \frac{-i\omega r}{c}\right)\frac{e^{-i\omega(t-r/c)}}{r^4}\right]\right\} + \frac{\mu_0\mathbf{p}}{4\pi}\frac{\omega^2}{r}e^{-i\omega(t-r/c)} \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\left(1 + \frac{-i\omega r}{c}\right)\frac{3(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r} - r^2\mathbf{p}}{r^5} + \frac{\omega^2}{c^2}\frac{r^2\mathbf{p} - (\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^3}\right]e^{-i\omega(t-r/c)}
 \end{aligned}$$

のように  $1/r, 1/r^2, 1/r^3$  に比例する項が見られる。第1項がモーメントから得られる静電場の式で、第2項は近接場と呼ばれ、最後の項は  $\mathbf{A}$  の時間微分から来る項になる。この最後の項

$$\mathbf{E} = \frac{\mu_0\omega^2}{4\pi}\left(\frac{\mathbf{p}}{r} - \frac{(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^3}\right)e^{-i\omega(t-r/c)}$$

### 1.6.3 境界問題 [22]

ここでは第2部の Green 関数を用いて考える。

異なる電場を持つ領域の境界面について考える。法単位ベクトルを  $\mathbf{n}$  とし、電場  $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$  の境界面の単位面積当たりの電荷密度を  $\sigma(\mathbf{x})$  とすると、次の図から

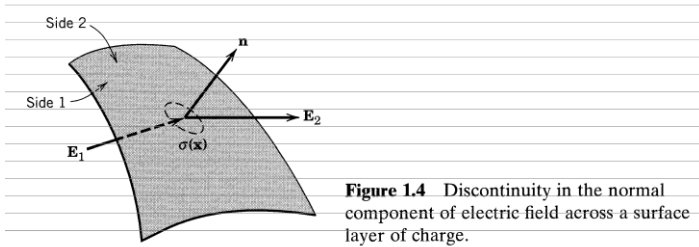


Figure 1.4 Discontinuity in the normal component of electric field across a surface layer of charge.

図 1.67: Classical Electrodynamics より

ガウスの法則は

$$(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \mathbf{n} = \sigma/\epsilon_0$$

が成り立つことを示す。この時、この境界を含む電位を求めようとする

$$\begin{aligned}
 \Phi(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_S\frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}d^3\mathbf{x}' \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_S\frac{\sigma(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}d^2\mathbf{x}'
 \end{aligned}$$

をとる。従って次の図のように境界面には厚み  $d(\mathbf{x})$  (微分記号ではない) が必要である。

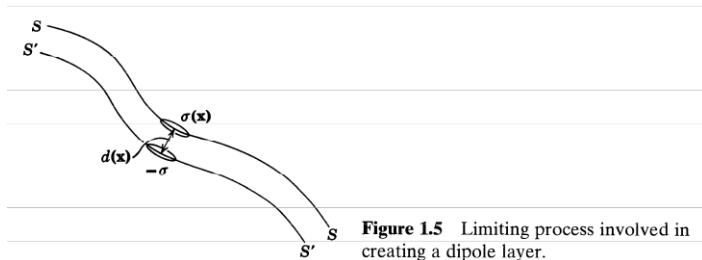


Figure 1.5 Limiting process involved in creating a dipole layer.

図 1.68: Classical Electrodynamics(Jackson) より

よって電束密度  $\mathbf{D}$  を次のように定義しておく必要がある。

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}) = \lim_{d(x) \rightarrow 0} \sigma(\mathbf{x})d(\mathbf{x}) \tag{1.141}$$

これは電場  $\mathbf{E}(\mathbf{x})$  とは異なる。電荷密度に電場方向の厚みをかけて、無限小に刻んだイメージである。ここに数学的に収束する極限があれば電位はその有限な値で「とび」を持つことになる。この「とび」を求めてみよう。

まず、この微小領域にも電場が存在するので図のように表面  $S, S'$  上の微小面積  $\sigma(\mathbf{x})$  は+と-の極性を持つ。このような2重枚構造をつくると電位の計算は公式通りになる。次の図のように面積積分を  $da$  で表すと

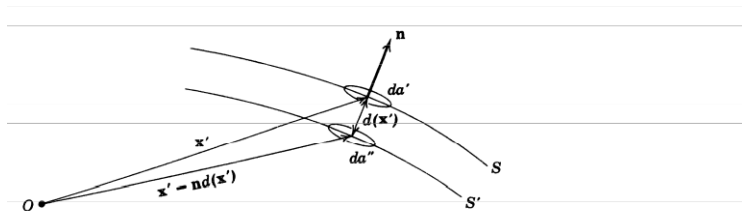


Figure 1.6 Dipole-layer geometry.

図 1.69: Classical Electrodynamics(Jackson) より

定義通りに積分でき

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} da' - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S'} \frac{\sigma(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - (\mathbf{x}' - \mathbf{nd})|} da''$$

で表すことができる。ここでの  $d$  は微小量であれば次の展開公式を用いる。

$$\frac{1}{|\mathbf{x} + \mathbf{a}|} = \frac{1}{x} + \mathbf{a} \cdot \nabla \left( \frac{1}{x} \right) + \dots$$

従って  $d \rightarrow 0$  とすることで、式 1.141 によって第2項が残り、

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S D(\mathbf{x}') \mathbf{n} \cdot \nabla' \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) da' \tag{1.142}$$

となる。ここで双極子モーメント (dipole\_moment) を

$$\mathbf{p} = \mathbf{n}D(\mathbf{x})da'$$

で定義すれば電位は

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}$$

となる。また、式 1.142 は次の図のように立体角を内包しているので

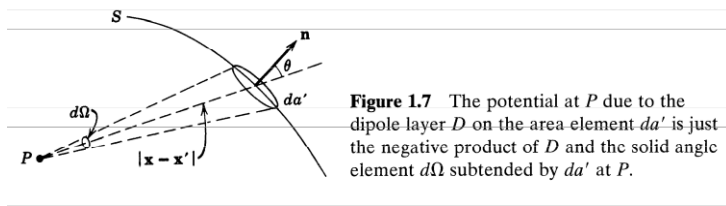


図 1.70: Classical Electrodynamics(Jackson) より

$$\mathbf{n} \cdot \nabla' \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) da = -\frac{\cos \theta da'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} \equiv -d\Omega$$

と、立体角を定義しておく

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S D(\mathbf{x}') d\Omega$$

と単純になる。従って境界面での電位はある「とび」を持ち、その値が

$$\Phi_2 - \Phi_1 = D/\epsilon_0$$

である。ここで前節の調和関数でとり上げた Neumann、Dirichlet の境界問題を思い出してみよう。

$$U = \Phi_2 - \Phi_1$$

とおくと境界問題は領域  $V$  内で調和関数であれば

$$\nabla^2 U = 0$$

さらに Dirichle 問題は

$$U = 0$$

また、Neumann 問題は境界  $S$  上で、

$$\frac{\partial U}{\partial n} = 0$$

だったのでグリーンの第一定理より

$$\int_V (U \Delta U + \nabla U \cdot \nabla U) d^3x = \oint_S U \frac{\partial U}{\partial n} da$$

ここでは

$$\int_V |\nabla U|^2 d^3x = 0$$

が成り立ち、結局  $V, U$  は定数である。さらに Dirichle 問題では明らかに

$$\Phi_1 = \Phi_2$$

である。一般には閉じた閉曲面において、2つのスカラー場を  $\phi, \psi$  とすると

$$\mathbf{A} = \phi \nabla \psi$$

とおく。

グリーンの定理から観測点を  $\mathbf{x}$  として

$$\psi = \frac{1}{R} \equiv \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

とすると第2定理

$$\int_V (\psi \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \psi) dV = \int_S \left( \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) dS$$

は

$$\nabla^2 \phi = -4\pi \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

$$\nabla^2 \psi = -\rho/\epsilon_0$$

から電位を  $\Phi = \phi$  として

$$\int_V \left( -4\pi \Phi(\mathbf{x}') \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + \frac{\rho(\mathbf{x}')}{\epsilon_0 R(\mathbf{x}')} \right) d^3 x' = \oint_S \left( \Phi \frac{\partial}{\partial n'} \left( \frac{1}{R} \right) - \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial n'} \right) da'$$

に置き換わる。下したがってデルタ関数の積分から電位が次のように求まる。

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{x}')}{R} d^3 x' - \frac{1}{4\pi} \oint_S \left( \Phi \frac{\partial}{\partial n'} \left( \frac{1}{R} \right) - \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial n'} \right) da' \quad (1.143)$$

第2部でみたように  $1/r$  に比例するポテンシャルを持つ点源が位置  $\mathbf{x}$  に存在していれば Poisson の方程式

$$\Delta' \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) = -4\pi \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

は第2部の Green 関数を用いて大きさ分の1という特殊関数を  $G$  で置き換えることができ

$$\Delta' G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -4\pi \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (1.144)$$

で表され、一般解が

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + F(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$$

とおけた。ただし、関数  $F$  は

$$\Delta F(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 0$$

である。これから式 1.143 は

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{x}') G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d^3 x' - \frac{1}{4\pi} \oint_S \left( \Phi \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial n'} - G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \frac{\partial \Phi}{\partial n'} \right) da'$$

ここで Dirichlet の境界条件をとると

$$G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 0 \text{ for } \mathbf{x}' \text{ on } S$$

であるから

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{x}') G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d^3 x' - \frac{1}{4\pi} \oint_S \left( \Phi(\mathbf{x}') \frac{\partial G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial n'} \right) da'$$

となる。Neumann の境界条件では注意がいる。まず、条件は

$$\frac{\partial G_N(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial n'} = 0 \text{ for } \mathbf{x}' \text{ on } S$$

である。これをそのまま利用することはできない。なぜなら式 1.144 は、3次元空間では

$$\oint_S \frac{\partial G}{\partial n'} da' = -4\pi$$

であったことを思い出すと

$$\frac{\partial G_N}{\partial n'}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\frac{4\pi}{S} \text{ for } \mathbf{x}' \text{ on } S$$



なるからである。よって式 1.143 は

$$\Phi(\mathbf{x}) = \langle \Phi \rangle_S + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{x}') G_N(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d^3x' + \frac{1}{4\pi} \oint_S \left( \frac{\partial \Phi}{\partial n'} G_N \right) da'$$

ただし

$$\langle \Phi \rangle_S = -\frac{1}{4\pi} \oint_S \left( \Phi \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial n'} \right) da' = \oint_S \left( \frac{\Phi}{S} \right) da$$

であり、 $\langle \Phi \rangle_S$  は全平均ポテンシャルの表面平均である。

#### 1.6.4 先進・遅延ポテンシャル

Green 関数を利用すると

$$\square G(\mathbf{r}, \mathbf{x}, t, t') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{x})\delta(t - t')$$

を満たす Green 関数が求めれば

$$\begin{pmatrix} \phi(\mathbf{r}, t) \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix} = \int dt' \iiint dV \begin{pmatrix} \frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\epsilon_0} \\ \mu_0 \mathbf{J} \end{pmatrix} \square G(\mathbf{r}, \mathbf{x}, t, t') \quad (1.145)$$

からベクトルポテンシャルが求められる。そこでまず

$$\square G(\mathbf{x}, t) = -\delta(\mathbf{x})\delta(t) \quad (1.146)$$

の解を求めて、変数の置き換えを行えばよい。ダランベールの方程式は時間微分の項がなければポアソン型になるので角振動数  $\omega$  を用いてまず次のようにフーリエ変換する。

$$G(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (1.147)$$

この逆変換は

$$\tilde{G}(\mathbf{x}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\mathbf{x}, t) e^{i\omega t} dt \quad (1.148)$$

である。一方でデルタ関数のフーリエ変換から

$$\delta(t - t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t-t')} d\omega \quad (1.149)$$

を式 1.146 に代入し、グリーン関数のフーリエ変換を代入すると次のように変数が分離できるので微分が実行できて

$$\begin{aligned} \left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega &= -\delta(\mathbf{x}) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} d\omega \\ \int_{-\infty}^{\infty} \left( \Delta + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \tilde{G}(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\mathbf{x}) e^{-i\omega t} d\omega \end{aligned}$$

従って結果として次の 3 次元のヘルムホルツ方程式が得られる。

$$\left( \Delta + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \tilde{G}(\mathbf{x}, \omega) = -\frac{\delta(\mathbf{x})}{2\pi} \quad (1.150)$$

ただし、この時のラプラシアンは位相部分は無視でき、 $\mathbf{r}$  だけの関数とみなせるので

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + f(\theta, \phi) = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + f(\theta, \phi) \quad (1.151)$$

であり、 $\omega/c = k$  とおくと式 1.146 は

$$\Delta G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + k^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

とおける。\$G\$ は式 1.151 より

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) G + k^2 G = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rG) + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} G + k^2 G$$

両辺を積分した場合に

$$\int (\Delta G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + k^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) d^3 r = - \int -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^3 r$$

となる。半径 \$R \to 0\$, \$G \to A/R\$ と期待として球上で

$$\int_V k^2 G d^3 r$$

は

$$\int \frac{k^2 A}{R} d^3 r = \int_0^a \frac{k^2 A}{R} 4\pi R^2 dR = 2\pi k^2 A a^2$$

ここで \$R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|\$ とおくと

$$\frac{1}{R} \frac{d^2}{dR^2} (RG) + k^2 G = 0$$

$$\frac{d^2}{dR^2} (RG) + k^2 (RG) = 0$$

これから

$$G = \frac{Ae^{\pm ikR}}{R}$$

とおける。よって計算をすると \$\omega = -2ic/r\$

$$\begin{aligned} \left( \Delta + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \frac{e^{i(\omega/c)r}}{4\pi r} &= \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\omega^2}{c^2} \right) e^{i(\omega/c)r} \frac{1}{4\pi r} \\ &= \left( -\frac{\omega^2}{c^2} + \frac{2i\omega}{rc} + \frac{\omega^2}{c^2} \right) e^{i(\omega/c)r} \frac{1}{4\pi r} \\ &+ e^{i(\omega/c)r} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \frac{1}{4\pi r} \\ &= e^{i(\omega/c)r} \left( \frac{i\omega}{2\pi r^2 c} + \frac{\omega^2}{4\pi r c^2} \right) + e^{i(\omega/c)r} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \frac{1}{4\pi r} \\ &= e^{i(\omega/c)r} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \frac{1}{4\pi r} \\ &= e^{i(\omega/c)r} \Delta \frac{1}{4\pi r} \\ &= -e^{i(\omega/c)r} \delta(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

となるのでヘルムホルツの方程式

$$\left( \Delta + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \tilde{G}(\mathbf{x}, \omega) = -\frac{\delta(\mathbf{x})}{2\pi}$$

と比較して

$$\tilde{G}(\mathbf{x}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{\pm ik|\mathbf{x}|}}{4\pi|\mathbf{x}|}$$

となる。これは球面波を表す。フーリエ変換 1.149 から次のように時間のずれが組み込まれた式が導ける。

$$\begin{aligned}
G(\mathbf{x}, t) &= \int \frac{1}{2\pi} \frac{e^{\pm ik|\mathbf{x}|}}{4\pi|\mathbf{x}|} e^{i\omega t} d\omega \\
&= \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|} \delta\left(t \mp \frac{|\mathbf{x}|}{c}\right)
\end{aligned}$$

第2行は式 1.149 が本質的な役割を果たしている。この式は時間変化の平面波の重ね合わせでその解釈には注意がいる。

これを式 1.145 に代入すると

$$\begin{pmatrix} \phi(\mathbf{r}, t) \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix} = \int dt' \iiint dV \begin{pmatrix} \frac{\rho(\mathbf{x}, t')}{\epsilon_0} \\ \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{x}, t') \end{pmatrix} \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{x}|} \delta\left((t-t') \mp \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{x}|}{c}\right) \quad (1.152)$$

となる。 $t'$  の積分はすぐ実行できて、前節で見た

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho\left(\mathbf{x}, t \mp \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{x}|}{c}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{x}|} dV \quad (1.153)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\mathbf{J}\left(\mathbf{x}, t \mp \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{x}|}{c}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{x}|} dV \quad (1.154)$$

が得られる。

-符号は遅延ポテンシャル (**retarded\_potential**) と呼び、

+符号は先進ポテンシャル (**advanced\_potential**) という。

この2つの解は共に平等である。しかし、現実には未来の電荷密度が現在のポテンシャルに影響を与えることは考えにくいことから、実際に採用されるのは遅延ポテンシャルのみである。先進が抑制されることについては今後考察する。

この遅延ポテンシャルを用いて逆に時間発展させればダランベールの方程式を満たすことを確かめよう。まず、時刻  $t_0$  で次の方程式を満たすベクトル場  $\mathbf{P}$  を考える。

$$\nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{x}, t_0) = -\rho(\mathbf{x}, t_0) \quad (1.155)$$

したがって時間発展を

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{P}(\mathbf{x}, t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{J}(\mathbf{x}, t') dt'$$

ただし、

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P}(\mathbf{x}, t)$$

である。連続の式を満たすので、時間発展の発散をとると、式 1.155 から

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) &= \nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{x}, t_0) + \int_{t_0}^t \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}, t') dt' \\
&= -\left(\rho(\mathbf{x}, t_0) + \int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial t'} \mathbf{J}(\mathbf{x}, t') dt'\right) \\
&= -\rho(\mathbf{x}, t)
\end{aligned} \quad (1.156)$$

となり、任意の時刻での密度  $\rho$  の式が求まった。

実際にこの  $\mathbf{P}$  は自由電荷、束縛電荷の区別なしに電荷を考えた場合の双極子モーメント密度と考えることができる。従ってダランベール方程式を満たし、

$$\Box \mathbf{\Pi}(\mathbf{x}, t) = -\frac{\mathbf{P}(\mathbf{x}, t)}{\epsilon_0}$$

が成り立つ。この遅延解を

$$\mathbf{\Pi}_{\text{ret}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\mathbf{P}\left(\mathbf{x} - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{x}|}{c}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{x}|} dV$$

として、両辺を  $t$  で微分すると式 1.154 から

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{\Pi}_{\text{ret}}}{\partial t} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P}\left(\mathbf{x} - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{x}|}{c}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{x}|} dV \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\mathbf{J}\left(\mathbf{x} - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{x}|}{c}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{x}|} dV \\ &= c^2 \mathbf{A}_{\text{ret}}(\mathbf{r}, t) \end{aligned}$$

である。ここで

$$t' = t - |\mathbf{r} - \mathbf{x}|/c$$

とおくと

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{\Pi}(\mathbf{r}, t)}{\partial r} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\partial}{\partial r} \frac{\mathbf{P}(\mathbf{x}, t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|} dV \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \left\{ \mathbf{P}(\mathbf{x}, t') \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|} + \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|} \frac{\partial t'}{\partial r} \frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{x}, t')}{\partial t'} \right\} dV \end{aligned} \quad (1.157)$$

となる。また、 $f$  は  $|\mathbf{r} - \mathbf{x}|$  の関数だから

$$\frac{\partial}{\partial x} f(|\mathbf{r} - \mathbf{x}|) = -\frac{\partial}{\partial r} f(|\mathbf{r} - \mathbf{x}|)$$

であることに注意し、

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\partial}{\partial x} \frac{P(\mathbf{x}, t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|} dV &= \int_V \left\{ P(\mathbf{x}, t') \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|} + \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|} \frac{\partial}{\partial x} [P(\mathbf{x}, t')] \right\} dV \\ &= \int_V \left\{ -P(\mathbf{x}, t') \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|} + \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|} \left\{ \frac{\partial P(\mathbf{x}, t')}{\partial x} + \frac{\partial t'}{\partial x} \frac{\partial P(\mathbf{x}, t')}{\partial t'} \right\} \right\} dV \\ &= \int_V \left\{ -P(\mathbf{x}, t') \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|} + \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|} \left\{ \frac{\partial P(\mathbf{x}, t')}{\partial x} - \frac{\partial t'}{\partial r} \frac{\partial P(\mathbf{x}, t')}{\partial t'} \right\} \right\} dV \end{aligned}$$

となるが左辺はおおよそ  $1/r^2$  程度で減衰すると考え、十分大きな体積で 0 になるとすれば

$$\int_V \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|} \frac{\partial P(\mathbf{x}, t')}{\partial x} dV = \int_V \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|} \left\{ P(\mathbf{x}, t') \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|} + \frac{\partial t'}{\partial r} \frac{\partial P(\mathbf{x}, t')}{\partial t'} \right\} dV$$

これを式 1.157 に代入すると式 1.156 より

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{\Pi}(\mathbf{r}, t)}{\partial r} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \left\{ \mathbf{P}(\mathbf{x}, t') \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|} + \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|} \frac{\partial t'}{\partial r} \frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{x}, t')}{\partial t'} \right\} dV \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|} \frac{\partial P(\mathbf{x}, t')}{\partial x} dV \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{-\rho(\mathbf{x}, t - |\mathbf{r} - \mathbf{x}|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|} dV \\ &= -\phi_{\text{ret}}(\mathbf{r}, t) \end{aligned}$$

となり、遅延ポテンシャルが導ける。この  $\mathbf{\Pi}$  をヘルツベクトルと呼ぶ。結局次のように簡単にまとめることができるので

$$\begin{aligned} \phi_{\text{ret}}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{\partial \mathbf{\Pi}(\mathbf{r}, t)}{\partial r} = -\nabla \mathbf{\Pi}(\mathbf{r}, t) \\ \mathbf{A}_{\text{ret}}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{\Pi}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \end{aligned}$$

この  $\Pi$  をスーパーポテンシャル (Super\_potential) ともいう。  
 これから  $\frac{\partial}{\partial t} \nabla = 0$  のように分離していると考えると

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \Pi) &= \frac{\partial}{\partial t} (\nabla) \Pi + \nabla \frac{\partial}{\partial t} \Pi \\ &= \nabla \frac{\partial}{\partial t} \Pi \end{aligned}$$

であるから

$$\frac{1}{c^2} \left( -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \Pi + \nabla \frac{\partial}{\partial t} \Pi \right) = 0 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \phi_{ret}(\mathbf{r}, t) + \nabla \mathbf{A}_{ret}(\mathbf{r}, t)$$

となりローレンツ条件を満たしていることがわかる。

### 1.6.5 リエナール・ヴィーヘルトポテンシャル

遅延ポテンシャルを用いて運動する電荷の作る電磁ポテンシャルを考える。点電荷  $q$  の軌道を  $\mathbf{s}(t)$  とすると電荷密度と電流密度は次のように軌道に依存する。

$$\rho(\mathbf{x}, t) = q\delta(\mathbf{x} - \mathbf{s}(t))$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = qc\beta(t)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{s}(t))$$

ただし、 $\beta$  は  $v/c$  で、この場合は

$$\beta = \frac{1}{c} \frac{d\mathbf{s}}{dt}$$

となり、 $\mathbf{s}$  に依存する。

次に実際にポテンシャルを計算するわけであるが順序を先に空間積分しないとうまくいかないことに注意する。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \phi(\mathbf{r}, t) \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix} &= \int dt' \iiint dV \begin{pmatrix} \frac{1}{\epsilon_0} q\delta(\mathbf{x} - \mathbf{s}(t')) \\ \mu_0 qc\beta(t)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{s}(t')) \end{pmatrix} \frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{x}|} \delta\left((t - t') \mp \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|}{c}\right) \\ &= \int dt' \begin{pmatrix} \frac{1}{\epsilon_0} \\ \mu_0 qc\beta(t') \end{pmatrix} \frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{s}(t')|} \delta\left((t - t') \mp \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{s}(t')|}{c}\right) \end{aligned} \quad (1.158)$$

ここで  $\delta$  関数について次のように関数を引数に持つ場合、解が複数  $t_i$  である場合は  $f(t) = \frac{df}{dt}(t - t_i)$  とかけるので

$$\delta(f(t)) = \sum_{i=1}^N \frac{\delta(t - t_i)}{\left| \frac{df}{dt}(t_i) \right|}$$

となる。また、

$$\mathbf{R}(t') = \mathbf{r} - \mathbf{s}(t')$$

$$R(t') = |\mathbf{r} - \mathbf{s}(t')|$$

とすると位置のずれを考慮し、

$$f(t') = t - t' - \frac{R(t')}{c}$$

として

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}) &= 2R \frac{dR}{dt} = 2\mathbf{R} \cdot \frac{d\mathbf{R}}{dt} \\ \frac{dR}{dt} &= \frac{\mathbf{R}}{R} \frac{d\mathbf{R}}{dt}\end{aligned}$$

から  $|\beta| < 1$  に注意して

$$\left| \frac{df}{dt'} \right| = \left| -1 + \frac{\mathbf{R}(t')}{R(t')} \beta(\mathbf{t}') \right| = 1 - \frac{\mathbf{R}(t')}{R(t')} \beta(\mathbf{t}')$$

となる。  $t < t'$  における  $f(t') = 0$  の解を  $t' = t_R$  とおくと

$$t_R = t - \frac{R(t_R)}{c}$$

である。よって式 1.158 が次のように解ける。

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \phi(\mathbf{r}, t) \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R(t_R) - \mathbf{R}(t_R) \cdot \beta(\mathbf{t}_R)} \right) \\ \frac{\mu_0 q}{4\pi} \left( \frac{c\beta(\mathbf{t}_R)}{R(t_R) - \mathbf{R}(t_R) \cdot \beta(\mathbf{t}_R)} \right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{SR(t_R)} \right) \\ \frac{\mu_0 q}{4\pi} \left( \frac{c\beta(\mathbf{t}_R)}{SR(t_R)} \right) \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{1.159}$$

ただし、

$$S = \left. \frac{df}{dt'} \right|_{t'=t_R} = 1 - \frac{\mathbf{R}(t_R)}{R(t_R)} \beta(\mathbf{t}_R)$$

よって 1.159 はふつうの解と変わらない形ではあるが  $S$  による補正が必要であるとみなすことができる。

この時の  $\mathbf{S}(t_R), t_R$  を遅延位置 (retarded\_position), 遅延時間 (retarded\_time) という。

興味ある点はこの 1.159 は近似を用いていない厳密解である。

しかし次の図に示すように点電荷の運動を考えると  $[\ ]$  を遅延時間、空間での値として

$$[\mathbf{v}] \cdot \frac{[\mathbf{R}]}{c} \sim [\mathbf{R} \cdot \beta]$$

とする近似に対応する。

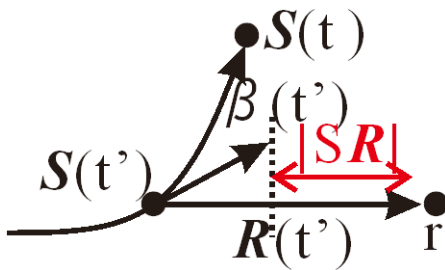


図 1.71: リエナール・ヴィーヘルトベクトル

図において

$$\mathbf{R}(t') = \mathbf{r} - \mathbf{S}(t')$$

$$|SR(t')| = |\mathbf{R}(t')| - \beta(t') \cdot \mathbf{S}(t')$$

であり、  $\beta(t') \cdot \mathbf{S}(t')$  だけの差が出る。

式 1.159 が求まったので式 1.158 の

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \quad (1.160)$$

に代入すれば電場が求まるはずである。陽に  $t$  を含むのはデルタ関数だけになったので

$$\mathbf{E} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int dt' \left\{ \left( \nabla \frac{1}{R} \right) \delta \left( (t-t') - \frac{R}{c} \right) + \frac{1}{R} \delta \left( (t-t') - \frac{R}{c} \right) + \frac{\beta}{cR} \frac{\partial}{\partial t} \delta \left( (t-t') - \frac{R}{c} \right) \right\}$$

となる。この積分を実行すると  $[\ ]$  を遅延時間、空間での値として

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \left[ \frac{\mathbf{e}_R}{R^2} \right] + \left[ \frac{R}{c} \right] \frac{d}{dt} \left[ \frac{\mathbf{e}_R}{R^2} \right] + \frac{1}{c^2} \frac{d^2}{dt^2} [\mathbf{e}_R] \right\} \quad (1.161)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \left\{ \left[ \frac{\mathbf{e}_R}{R} \right] \times \frac{d}{dt} [\mathbf{e}_R] + \left[ \frac{\mathbf{e}_R}{c} \right] \times \frac{d^2}{dt^2} [\mathbf{e}_R] \right\} \quad (1.162)$$

を得る。変位ベクトルの単位ベクトルで表現することができた。これは時間微分の2次まで含んでいて2次の項は加速度になるから電磁波の放射に関係する。

電場を  $\mathbf{e}_R$  に直交した向き  $\mathbf{e}_\theta$  について

$$\dot{\mathbf{e}}_R = \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta$$

$$\dot{\mathbf{e}}_\theta = -\dot{\theta} \mathbf{e}_R$$

とすると

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \left[ \frac{1}{R^2} - \frac{2\dot{R}}{cR^2} - \frac{\dot{\theta}^2}{c^2} \right] \mathbf{e}_R + \left[ \frac{\dot{\theta}}{Rc} + \frac{\ddot{\theta}}{c^2} \right] \mathbf{e}_\theta \right\}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu_0 q}{4\pi} \left\{ \dot{\theta} \left[ \frac{\mathbf{e}_R}{R} \right] \times \mathbf{e}_\theta + \left[ \frac{\mathbf{e}_R}{c} \right] \times \left[ \ddot{\theta} \mathbf{e}_\theta - \dot{\theta}^2 \mathbf{e}_R \right] \right\} \\ &= \frac{\mu_0 q}{4\pi} \left\{ \left[ \frac{\dot{\theta}}{R} - \frac{\ddot{\theta}}{c} \right] \mathbf{e}_\omega \right\} \end{aligned}$$

となる。また、式 1.161 に左から  $[\mathbf{e}_R/c]$  を外積すると次のような関係が成り立つことがわかる。

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} [\mathbf{e}_R] \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (1.163)$$

これは移動する点電荷のつくる磁場は電場とともに  $[\mathbf{e}_R]$  とも直交していることがわかる。

さらに式 1.161 を変形し、近傍と遠方での働き、 $1/R^2, 1/R$  で整理すると

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{(\mathbf{e}_R - \beta)(1 - \beta^2)}{R^2(1 - \mathbf{e}_R \cdot \beta)^3} + \frac{1}{Rc} \frac{\mathbf{e}_R \times \left\{ (\mathbf{e}_R - \beta) \times \frac{d\beta}{dt} \right\}}{(1 - \mathbf{e}_R \cdot \beta)^3} \right] \quad (1.164)$$

となるが時間の扱いについては注意が必要で

$$\left[ \frac{d\beta}{dt} \right] \equiv \frac{d\beta(t')}{dt'} \Big|_{t'=t_R}$$

であるがヘヴィサイドの方程式に現れた  $[\beta]$  については

$$\frac{d[\beta]}{dt} = \frac{d}{dt} [\beta(t')] \Big|_{t'=t_R}$$

これから電場に関しては、運動している電荷と、静止している電荷が区別されることがわかる。つまり運動している電荷が作る電場は  $[\mathbf{e}_R]$  に対して直交していない。

式 1.164 のはじめの項は遠方で急速に減衰する。したがって第 2 項のみが遠方では寄与すると考えればこれは電荷の加速度  $d\beta/dt$  に比例し、 $[\mathbf{e}_R]$  に対して直交している。しかし、近傍では第 1 項が寄与するために図のような補正が入ることになる。

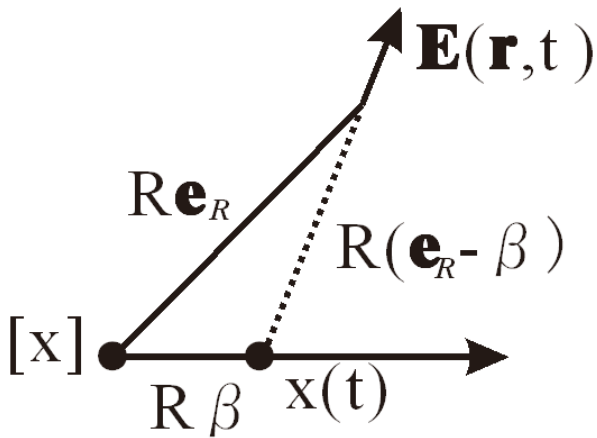


図 1.72: 等速運動する電荷のつくる電場

過去である遅延時刻に  $[x]$  にあった点電荷の影響が観測点  $\mathbf{r}$  まで  $[R/c]$  の時間をかけて伝播し、時刻  $t$  における電場  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  を作る。この電場の方向が図のように時刻  $t$  における現在の点電荷の位置から観測点の方向に

$$\mathbf{r}(t) - \mathbf{x}(t) = [R(\mathbf{e}_R - \beta)]$$

と常に一致している。決して遠隔的に  $\mathbf{x}(t)$  の電荷が瞬時に電場  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  を作るわけではない。

また、第 2 項が加速度  $d\beta/dt$  に比例することから電荷と慣性系にあればこの項は 0 である。

よって第 2 項の寄与は消える。これから第 1 項からの寄与のみ考えた場合は  $\beta$  にも依存することがわかる。これは下図のようにローレンツ変換のように電場が進行方向に対してつぶれていく。また、図のように  $x$  方向に  $\beta$  の向きを決めると磁場の成分は図の  $y$  方向にある。

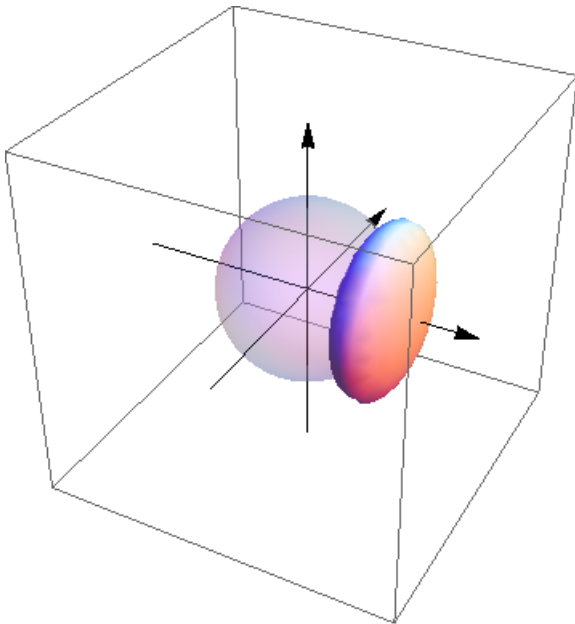


図 1.73: 電場が進行方向 ( $x$ ) に対してつぶれる。この時、磁場は  $y$  方向にある。

式 1.164 のはじめの項から  $\beta$  が光速に達していない場合進行方向にも電磁場の成分が残る。しかし、 $\beta$  が 1



になると電磁場の成分は外積の関係を完全に満たし、進行方向と直行する成分しか持たない、電磁波と同じ状態に移行する。式 1.164 がこの移行を示していることは重要である。

### 1.6.6 ジェフィメンコ方程式

前節までの議論からベクトルポテンシャルが物理的な実態をもつことが理解できた。

[ ] を遅延時間、空間での値とし、位置  $\mathbf{x}$  にある点電荷を位置  $\mathbf{r}$  で観測する場合を考える。前節から  $R = |\mathbf{r} - \mathbf{x}|$  とおく。また、位置  $\mathbf{r}$  での微分を強調するために  $\partial/\partial r_i$  という記号を用いる。

移動する点電荷はなく、電荷密度、電流密度の変化が時間変化を担う場合を考える。前節から

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{[\rho]}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|} dV \quad (1.165)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{[\mathbf{j}]}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|} dV \quad (1.166)$$

この時  $\mathbf{x}$  は単なるパラメタにすぎず、実際の物理量は  $t' = t - R/c$  として、 $t, \mathbf{r}$  の両方に依存すること、 $\nabla'$  がベクトルであることに留意し、

$$[\nabla'\rho] = \nabla'[\rho] - \left[ \frac{\partial\rho}{\partial t'} \right] \nabla'(t - R/c) = \nabla'[\rho] - \frac{\mathbf{R}}{c} \left[ \frac{\partial\rho}{\partial t'} \right]$$

$$\begin{aligned} [\nabla' \times \mathbf{j}] &= \nabla' \times [\mathbf{j}] + \left[ \frac{\partial\mathbf{j}}{\partial t'} \right] \times \nabla'(t - R/c) \\ &= \nabla' \times [\mathbf{j}] + \frac{1}{c} \left[ \frac{\partial\mathbf{j}}{\partial t'} \right] \times \mathbf{R} \end{aligned} \quad (1.167)$$

次のように観測点  $\mathbf{r}$  で勾配をとると  $\mathbf{R} = R\mathbf{e}_R$  だから

$$\frac{\partial}{\partial r_i} [\rho] = \frac{\partial t'}{\partial r_i} \frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t')}{\partial t'} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t'} (\mathbf{e}_R)_i$$

となる。よって

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi(\mathbf{r}, t)}{\partial r_i} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \left( \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r_i} \rho(\mathbf{x}, t') + \rho(\mathbf{x}, t') \frac{\partial}{\partial r_i} \frac{1}{R} \right) dV \\ &= \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \left( \frac{1}{Rc} \frac{\partial \rho}{\partial t'} + \frac{\rho(\mathbf{x}, t')}{R^2} (\mathbf{e}_R)_i \right) dV \end{aligned}$$

となる。また、ベクトルポテンシャルも  $R$  が時間変化しない場合

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{1}{R} \frac{\partial \mathbf{j}(\mathbf{x}, t')}{\partial t'} dV$$

を得る。これらを式 1.160 に代入し、

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \left\{ \frac{1}{R^2} \left( \rho(\mathbf{x}, t') + \frac{d\rho(\mathbf{x}, t')}{dt'} \frac{R}{c} \right) \mathbf{e}_R - \frac{1}{Rc^2} \left( \frac{d\mathbf{j}(\mathbf{x}, t')}{dt'} \right) \right\} dV \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \left\{ \frac{1}{R^2} [\rho] \mathbf{e}_R + \frac{1}{Rc} \left[ \frac{d\rho}{dt} \right] \mathbf{e}_R - \frac{1}{Rc^2} \left[ \frac{d\mathbf{j}}{dt} \right] \right\} dV \end{aligned} \quad (1.168)$$

となる。磁場についても

$$\epsilon_{klm} \frac{\partial}{\partial r_l} j_m(\mathbf{x}, t') = \frac{1}{c} \epsilon_{klm} \frac{\partial j_l}{\partial t'} (\mathbf{e}_R)_m$$

と変換することに留意し、式 1.167 より

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= [\nabla \times \mathbf{A}] \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \left( \frac{1}{R^2} [\mathbf{j}] + \frac{1}{Rc} \left[ \frac{d\mathbf{j}}{dt} \right] \right) \times \mathbf{e}_R dV\end{aligned}\quad (1.169)$$

となる。

古典的に電流密度  $i$ , 電荷密度  $\rho$  とする。時間依存する電荷密度は  $\Delta q$ 、としこのポテンシャルは  $\Delta\phi$  とする、この点電荷が次のように表される。

$$\rho = \Delta q(t)\delta(\mathbf{R})$$

電流が存在しないので 1.75 から Maxwell 方程式はどこでも成立するから

$$\nabla^2(\Delta\phi) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2(\Delta\phi)}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0} \Delta q(t)\delta(\mathbf{R})$$

ただし、原点では  $\delta(\mathbf{R}) = 0$  ( $\mathbf{R} \neq 0$ ) だから

$$\nabla^2(\Delta\phi) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2(\Delta\phi)}{\partial t^2} = 0$$

でないといけない。

ここで式 1.72 は次のようになる。  $|\mathbf{R}| = R$  としてクーロンポテンシャルを

$$\Delta\phi = \frac{\chi(R, t)}{R}$$

とすると次のダランベールの式を満足する。

$$\frac{\partial^2 \chi(R, t)}{\partial R^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi(R, t)}{\partial t^2} = 0$$

これは波動方程式だから、この解として時間の先進、遅延を

$$\chi(R, t \pm \frac{R}{c})$$

としてみよう。

$$\frac{\partial^2 \chi(R, t \pm \frac{R}{c})}{\partial R^2} = \frac{\chi''(R, t)}{c^2}$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi(R, t \pm \frac{R}{c})}{\partial t^2} = \ddot{\chi}(R, 0)$$

電場、磁場はアンペール、ビオ・サバルの法則から時間変化しない場合は

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{1}{R^2} \rho(\mathbf{r}) \mathbf{e}_R dV'$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{1}{R^2} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{e}_R dV'$$

とあらわすことができた。Maxwell の方程式は

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left( \mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$

であった。これらはいつでも満たされなければならない。そこで時間変化する場合について

近接作用を考えると波源の変化は有限の時間後に伝達するので過去の影響のみ考えると  $R = |\mathbf{r} - \mathbf{x}|$  過去の時間  $t_r$  として式 1.168, 1.169 から

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \left\{ \frac{1}{R^2} \left( \rho(\mathbf{r}, t) + \frac{d\rho(\mathbf{r}, t_r) R}{dt_r c} \right) \mathbf{e}_R - \frac{1}{Rc^2} \left( \frac{d\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)}{dt_r} \right) \right\} dV' \quad (1.170)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{1}{R^2} \left( \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \frac{d\mathbf{j}(\mathbf{r}, t_r) R}{dt_r c} \right) \times \mathbf{e}_R dV' \quad (1.171)$$

を考えるとこれは Maxwell の方程式を満足する。これをジェフィメンコ方程式という。ここで Maxwell の方程式は時間反転に対して対称である。ところが上式は対称ではない。つまり別の要請から非対称を選択するわけである。ベクトルポテンシャルを用いれば遅延解が次のようになる。

$$A_{ret} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}, t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (1.172)$$

$$\phi_{ret} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}, t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

もちろん  $\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}$  だけ遅れるだけでなく前の符号を+にかえれば先進解をつくることのできる。この式は球面波  $f(r)/r$  の遅延表現

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{f(0, t - \frac{r}{v})}{r}$$

を  $r'$  にわたって積分した結果であり、ホイヘンスの原理による定常波としてベクトルポテンシャルが成り立っている。

### 1.6.7 変位電流と遠隔作用

この結果を利用し、ここでは未だによく高校教育で問題になる変位電流が磁場をつくるかという問題を考えてみよう。結果的には電流密度が因果的が原因になるが変位電流はなれない。変位電流を用いた表現は時間を静的にとらえた遠隔的な表現になっているだけである。これはもとは局所的な変位電流を用いない表現に変えることができる。

図のように閉曲線  $C$  が貼る閉曲面  $S$  を考える。任意の場所の磁場はジェフィメンコ方程式から過去の電流密度を足し合わせればよいから式 1.171、1.172 から  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \square \mathbf{A}$  とローレンツ条件式 1.79 を利用し、

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{r} &= \iint_S \nabla \times \left\{ \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{1}{R^2} \left( \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \frac{d\mathbf{j}(\mathbf{r}, t_r) R}{dt_r c} \right) \times \mathbf{e}_R dV' \right\} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \iint_S \nabla \times \left\{ \nabla \times \left( \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}, t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \right) \right\} \cdot d\mathbf{S} \\ \mathbf{J} &= -\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mu_0 \iint_S \left( \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \nabla \phi_{ret} + \frac{\partial A_{ret}}{\partial t} \right) \right) \cdot d\mathbf{S} \\ &= \mu_0 \iint_S \left( \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}_{ret} \right) \cdot d\mathbf{S} \end{aligned} \quad (1.173)$$

とかける。第2項が電流密度以外の項で、これが結局過去の電場の時間変化からの影響であり、変位電流に相当する。下図の  $r'_1, r'_2$  は過去の電流密度で曲線  $C$  上にある。電流は点  $r_b$  で閉曲面  $S$  を貫く。 $r_a$  で磁場を観測する。

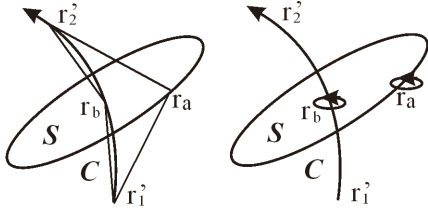


図 1.74: 近接作用 (左)、遠隔作用 (右)

これをまず図左の近接作用で考えると点  $r_a$  でのベクトルポテンシャルは過去の影響の和であるから

$$\mathbf{A}_{ret} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}, t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV'$$

であったから

$$\oint_C \mathbf{B}(\mathbf{r}_a, t) \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \mathbf{j} \left( \mathbf{r}, t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c} \right)$$

となる。

一方で、図右の遠隔作用では点  $r_a$  には電流密度はない。しかし、平曲面ないの  $r_b$  には電流密度があるのでこれを考えないといけない過去の電流密度が  $\nabla \times \mathbf{B}$  に影響を与えこれが変位電流をつくる。

これはローレンツ条件を用いて式 1.173 より

$$\oint_C \mathbf{B}(\mathbf{r}_a, t) \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \iint_S \left( \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}_{ret} \right) \cdot d\mathbf{S}$$

となる。この表現には過去の影響は直接見えない。代わりに電場の時間変化が加わる。

これは変位電流そのものが相対的な運動の関係で生じることを表す。

次節で扱う特殊相対論では時間と空間がほぼ対等に扱われる。電磁場テンソルを用いれば簡単に

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -4\pi J^\nu$$

のように表すことができる。変位電流はこの左辺に組み込まれるがローレンツ変換されれば時間も空間も入り交り、変化する。

観測者の座標の運動に依存するわけだ。ローレンツ力は磁場と電場の相対速度に依存する。電磁気は相対論的なのである。

どちらにしても場が電流密度によりつくられていることが本質である。

しかし、さらに興味あることはこれらは観測者が連続して観測している結果であることである。ベクトルポテンシャルが定常状態で張られるためには境界が必要であるが、これらが過去の遅延ポテンシャルに連続して生じ、未来には閉じない。そのような時空の構造についてはまだ、未踏の領域があるはずである。

### 1.6.8 放射

ジェフィメンコ方程式を  $\mathbf{e}_R$  に垂直な成分に分けることを考える。

$R = |\mathbf{r} - \mathbf{x}|, t' = t - R/c$  であったから

$$\frac{\partial [j_i]}{\partial x_i} = \left[ \frac{\partial j_i}{\partial x_i} \right] - \frac{1}{c} \left[ \frac{dj_i}{dt} \right] \frac{\partial R}{\partial x} = - \left[ \frac{d\rho}{dt} \right] + \frac{1}{c} \left[ \frac{dj_i}{dt} \right] (\mathbf{e}_R)_i$$

となるので式 1.170 の第 2 項が

$$\frac{1}{Rc} \left[ \frac{d\rho}{dt} \right] \mathbf{e}_R = \frac{-1}{c} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} [j_i] \right) \frac{\mathbf{e}_R}{R} + \frac{1}{Rc^2} \left( \left[ \frac{d\mathbf{j}}{dt} \right] \cdot \mathbf{e}_R \right) \mathbf{e}_R$$

と書き直せるので  $\mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{A}) = \mathbf{e}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{A}) - \mathbf{A}$  を利用して

$$\frac{1}{Rc^2} \left\{ \left( \left[ \frac{d\mathbf{j}}{dt} \right] \cdot \mathbf{e}_R \right) \mathbf{e}_R - \left[ \frac{d\mathbf{j}}{dt} \right] \right\} = \frac{1}{Rc^2} \left( \left[ \frac{d\mathbf{j}}{dt} \right] \times \mathbf{e}_R \right) \times \mathbf{e}_R$$

とまとまるので第  $k$  成分を考えると

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{R_k}{R^2} \right) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{r - x_k}{(r - x)^2} \right) (\mathbf{e}_R)_k \\ &= \left( \frac{2(r - x_k)}{(r - x)} + \frac{-1}{(r - x)^2} \right) (\mathbf{e}_R)_k \\ &= \frac{-1}{R^2} (\mathbf{e}_R)_k + \frac{2\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_R}{R^2} (\mathbf{e}_R)_k \end{aligned}$$

だから

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} [j_i] \right) \frac{(\mathbf{e}_R)_k}{R} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{[j_i] R_k}{R^2} \right) - [j_i] \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{R_k}{R^2} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{[j_i] R_k}{R^2} \right) + \frac{[j_i] - 2([\mathbf{j}] \cdot \mathbf{e}_R)(\mathbf{e}_R)_k}{R^2} \end{aligned}$$

体積積分すれば第 1 項は表面積分で 0 になる。さらに全成分をとれば第 2 項は

$$\frac{[\mathbf{j}] - 2([\mathbf{j}] \cdot \mathbf{e}_R)\mathbf{e}_R}{R^2} = -\frac{([\mathbf{j}] \cdot \mathbf{e}_R)\mathbf{e}_R + ([\mathbf{j}] \times \mathbf{e}_R) \times \mathbf{e}_R}{R^2}$$

を利用できるから

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \left\{ \frac{[\rho]}{R^2} \mathbf{e}_R + \frac{([\mathbf{j}] \cdot \mathbf{e}_R)\mathbf{e}_R + ([\mathbf{j}] \times \mathbf{e}_R) \times \mathbf{e}_R}{R^2 c} + \frac{1}{Rc^2} \left( \left[ \frac{d\mathbf{j}}{dt} \right] \times \mathbf{e}_R \right) \times \mathbf{e}_R \right\} dV \quad (1.174)$$

時間依存しないならば第 3 項は落ちる。

第 2 項については定常状態であればこれは  $\nabla[j]$  に比例するが、連続の式から 0 にすることができ、結局有効なのは第 1 項のみになる。

この式は  $R$  について整理してあるので  $R$  が小さいところでは第 1、第 2 項が主要で  $R$  の大きいところでは第 3 項のみが生きると考える。

そこで  $R$  から遠方のみを考えれば  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} [\mathbf{e}_R] \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  だったから

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \left\{ \left( \frac{1}{R} \left[ \frac{d\mathbf{j}}{dt} \right] \times \mathbf{e}_R \right) \times \mathbf{e}_R \right\} dV \quad (1.175)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \left\{ \left( \frac{1}{Rc} \left[ \frac{d\mathbf{j}}{dt} \right] \times \mathbf{e}_R \right) \right\} dV \quad (1.176)$$

とかける。

局所的な波源 ここで等方的な空間に次のような電荷および電流密度がある場合を考える。

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}) e^{-i\omega t}$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{j}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t}$$

この時、ある時空間でのベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$  は式 1.152 から遅延ポテンシャルを用いて  $\delta$  関数の性質から  $t$  を消すと

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{J}(\mathbf{x}') \frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} d^3x' \quad (1.177)$$

とかけた。磁場については

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{A}$$

となったので波源の外の領域では電場は真空のインピーダンス  $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$  として

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \\ &= \\ &= \frac{iZ_0}{k} \nabla \times \mathbf{H} \end{aligned}$$

となる。

式 1.177 の解を考える時

損失性誘電体 はじめに電荷のない真空、 $\sigma = 0$ 、さらに  $\mu_0, \epsilon_0$  の場において次のような具体的な電場が  $y$  方向のみにある場合の磁場  $\mathbf{H}$  がどうなるか計算しよう。

$$\mathbf{E} = 20 \sin(10^8 t - \beta z) \mathbf{a}_y [\text{V/m}]$$

電荷がないので

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0$$

さらにファラデーの法則から

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

を積分形にして

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{\mu} \int (\nabla \times \mathbf{E}) dt$$

ところがこの時は

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial E_y}{\partial z} \mathbf{a}_x + \frac{\partial E_y}{\partial y} \mathbf{a}_z \\ &= 20\beta \cos(10^8 t - \beta z) \mathbf{a}_x + 0 \end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= -\frac{1}{\mu} \int (\nabla \times \mathbf{E}) dt \\ &= -\frac{20\beta}{\mu} \int dt \cos(10^8 t - \beta z) \mathbf{a}_x \\ &= -\frac{20\beta}{\mu 10^8} \sin(10^8 t - \beta z) \mathbf{a}_x \end{aligned}$$

次に電荷の供給がなく  $\rho_v = 0$  を満たし、 $\sigma, \epsilon, \mu \neq 0$  であるような場を考えよう。時間項は切り離せるととし、 $\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s$  が定常状態を満足するとして Maxwell 方程式から

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_s = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H}_s = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_s = -i\omega\mu\mathbf{H}_s$$

$$\nabla \times \mathbf{H}_s = (\sigma + i\omega\epsilon)\mathbf{E}_s$$

が得られる。3 式の両辺に  $\nabla$  の外積をとると

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_s = -i\omega\mu\nabla \times \mathbf{H}_s$$

さらにベクトルの恒等式から

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_s = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}_s) - \nabla^2 \mathbf{E}_s$$

だから

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}_s) - \nabla^2 \mathbf{E}_s = -i\omega\mu\nabla \times \mathbf{H}_s$$

さらに Maxwell 方程式を代入すると

$$-\nabla^2 \mathbf{E}_s = -i\omega\mu(\sigma + i\omega\epsilon)\mathbf{E}_s$$

が得られるので

$$\gamma^2 = i\omega\mu(\sigma + i\omega\epsilon) \quad (1.178)$$

とおけば次の方程式を得る。

$$\nabla^2 \mathbf{E}_s - \gamma^2 \mathbf{E}_s = 0 \quad (1.179)$$

磁場  $\mathbf{H}_s$  についても同じように

$$\nabla^2 \mathbf{H}_s - \gamma^2 \mathbf{H}_s = 0 \quad (1.180)$$

が成り立ち、この時、 $\mathbf{H}_s$  と  $\mathbf{E}_s$  は対称である。

この時の  $\gamma$  は単位時間あたりの伝播定数 (propagation constant) と呼ばれる複素定数である。 $\gamma = \alpha + i\beta$  として興味ある結果が得られる。

$$-Re[\gamma^2] = \beta^2 - \alpha^2 = \omega^2\mu\epsilon = \omega^2/K^2c^2$$

$$|\gamma^2| = \beta^2 + \alpha^2 = \omega\mu\sqrt{\sigma^2 + \omega^2\epsilon^2}$$

これから実部と虚部が次のように求まる。

$$\alpha = \omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}\left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} - 1\right)}$$

$$\beta = \omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}\left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} + 1\right)}$$

単一方向  $z$  の成分のみを考え、単位ベクトルを  $\mathbf{a}_x$  を持つとすると

$$\mathbf{E}_s = E_{xs}(z)\mathbf{a}_x$$

とかけるので、成分のみを取り出し、

$$(\nabla^2 - \gamma^2)E_{xs}(z)$$

であるが、これは次の式の第 1、第 2 項が落ちるから

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_{xs}(z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_{xs}(z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_{xs}(z)}{\partial z^2} - \gamma^2 E_{xs}(z) &= 0 \\ \frac{\partial^2 E_{xs}(z)}{\partial z^2} - \gamma^2 E_{xs}(z) &= 0 \end{aligned}$$

よって

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - \gamma^2\right) E_{xs}(z) = 0$$

と変数を減らすことができた。これは波動方程式でありその一般解は平面波の重ね合わせで

$$E_{xs}(z) = E_0 e^{-\gamma z} + E'_0 e^{\gamma z}$$

である。根拠がないが現実的な境界条件として無限遠では  $E_{xs}(\infty) = 0$  となるべきであるから

$$E'_0 = 0$$

とおける。よって時間項をもどして実空間の伝播していく電場が求まり、

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(z, t) &= \operatorname{Re}[E_{xs}(z)e^{i\omega t} \mathbf{a}_x] = \operatorname{Re}[E_0 e^{-\alpha z} e^{i(\omega t - \beta z)} \mathbf{a}_x] \\ &= E_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) \mathbf{a}_x \end{aligned}$$

これは次のように減衰しながら進行していく波である。

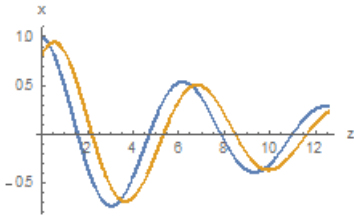


図 1.75: 微小時間後の  $z$  方向への進行波

式 1.180, 1.180 は磁場と電場に対し対称だから同じことが磁場にも当てはまる。しかし Maxwell の後半の式から

$$\mathbf{E}_s \cdot \mathbf{H}_s = 0$$

である必要があるから磁場はこの時の条件では  $y$  軸を振動する。

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(z, t) &= \operatorname{Re}[H_0 e^{-\alpha z} e^{i(\omega t - \beta z)} \mathbf{a}_y] \\ &= H_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) \mathbf{a}_y \end{aligned}$$

ここで  $H, E$  を関係つけているのは特性インピーダンスと呼ばれる  $\eta$  で定義される量である。

$$H_0 = \frac{E_0}{\eta}$$

とおくが、 $\eta$  も複素数であることに留意する。式 1.178 から

$$\eta = \sqrt{\frac{i\omega\mu}{\sigma + i\omega\epsilon}} = |\eta| e^{i\theta_\eta}$$

ただし、

$$|\eta| = \frac{\sqrt{\mu/\epsilon}}{\left(1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2\right)^{1/4}}$$

$$\tan 2\theta_\eta = \frac{\sigma}{\omega\epsilon}$$



## 1.7 電磁場の4元化

### 1.7.1 Maxwellの方程式の書き換え

Maxwellの方程式は次のようにあらわされた。

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (1.181)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \operatorname{rot} \vec{E} = 0 \quad (1.182)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad (1.183)$$

$$-\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} \quad (1.184)$$

ただし

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \quad (1.185)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad (1.186)$$

であり光速  $c$  は

$$\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2} \quad (1.187)$$

である。次の演算子を定義すると

$$\square \equiv \eta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} = - \left( \frac{\partial}{c \partial t} \right)^2 + \sum_{k=1}^3 \left( \frac{\partial}{\partial x^k} \right)^2 \quad (1.188)$$

これは座標系に依存しないスカラーであり、電磁波がどの慣性系からでも伝搬の速さが変化しないのはこの関係式による。

4元的に書き換えるにはベクトルポテンシャル  $(\phi, A)$  を導入し、

$$\begin{aligned} B^j &= \operatorname{rot} A = \partial_i A^j - \partial_j A^i \\ E^j &= -\frac{\partial A}{\partial t} - \operatorname{grad} \phi = \partial_0 A^j - \partial_i A^0 \end{aligned}$$

式 1.183 は次のようになる。

$$\operatorname{div} \epsilon_0 E = -\operatorname{div} \epsilon_0 \left( \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \operatorname{grad} \phi \right) = \rho \quad (1.189)$$

$$= -\epsilon_0 \left( \operatorname{div} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \phi \right) + \left\{ \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 - \sum_{k=1}^3 \left( \frac{\partial}{\partial x^k} \right)^2 \right\} \epsilon_0 \phi = \rho \quad (1.190)$$

よって括弧内第1項については

$$= -\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \phi \right) \quad (1.191)$$

となるが

$$\epsilon_0 A = j \frac{\epsilon_0}{c^2} \phi = \rho \quad (1.192)$$

とおけば電荷の保存則から

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} \rho = 0 \quad (1.193)$$

である。よって

$$\square \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.194)$$

が成り立つ。1.181 から

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{A}) = 0 \quad (1.195)$$

1.182 からは

$$\frac{\partial(\operatorname{rot} \vec{A})}{\partial t} - \operatorname{rot} \left( \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \operatorname{grad} \phi \right) = -\operatorname{rot}(\operatorname{grad} \phi) = 0 \quad (1.196)$$

である。

また式 1.184 は次のようになる。

$$-\epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \vec{B} = j \quad (1.197)$$

$$\left\{ -\frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 + \sum_{k=1}^3 \left( \frac{\partial}{\partial x^k} \right)^2 \right\} \vec{A} = -\mu_0 \vec{j} \quad (1.198)$$

左辺をまとめて、

$$\square \vec{A} = -\mu_0 \vec{j} \quad (1.199)$$

Maxwell の方程式から電磁場のテンソル  $F_{\mu\nu}$  は次のように定義できる。

$$\begin{aligned} F_{0i} &= -E_i \\ F_{i0} &= E_i \\ F_{ij} &= \epsilon_{ijk} B_k \end{aligned}$$

行列表示にまとめると

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (1.200)$$

よって Maxwell の方程式 1.199 は次のように表すことができる。

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) = \square A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = 0 \quad (1.201)$$

これから電磁場のラグランジアン密度は

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{\epsilon_0}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

となる。

では電磁場のテンソルから Maxwell の方程式を求めてみよう。4 元電流密度を

$$J^0 = \rho, \quad J^i = j^i$$

とするとアンペールの法則は

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -4\pi J^\nu \quad (1.202)$$

であり、また反対称の性質から次の有用な関係が得られる。

$$\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0 \quad (1.203)$$

これはビアンキ恒等式である。

そこでこれを

$$T_{\lambda\mu\nu} \equiv \partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu}$$

と定義すればこれは次のように反対称の性質を持つ。

$$T_{\lambda\mu\nu} = -T_{\mu\lambda\nu}, \quad T_{\lambda\mu\nu} = -T_{\lambda\nu\mu}$$

ガウスの法則は 1.202 の時間成分をとって

$$\partial_i F^{i0} = -\partial_i E_i = -4\pi\rho$$

つまり、

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho$$

これは Maxwell 方程式の 1 を表す。また 1.203 の 1 つを 1.202 で置き換えると

$$\partial_i F^{i0} + \partial_i F^{ij} = -4\pi\rho J^j$$

$$\partial_0 E_j + \epsilon_{ijk} \partial_i B_k = -4\pi J^j$$

となるので

$$-\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{B} = -4\pi \mathbf{J}$$

これは Maxwell 方程式の 2 を表す。また 1.203 の時間項を取り出すと

$$\partial_0 F_{ij} + \partial_i F_{j0} + \partial_j F_{0i} = 0$$

$$\epsilon_{ijk} \frac{\partial B_k}{\partial t} + \partial_i E_j - \partial_j E_i = 0$$

$$2 \frac{\partial B_k}{\partial t} + 2\epsilon_{ijk} \partial_i E_j = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

これは Maxwell 方程式の 3 を表す。また 1.203 の空間項を巡回で取り出すと

$$\partial_i F_{jk} + \partial_j F_{ki} + \partial_k F_{ij} = 0$$

$$3\epsilon_{ijk} \partial_i F_{jk} = 0$$

$$3\epsilon_{ijk}3\epsilon_{jkl}\partial_i B_l = 0$$

つまり、

$$\partial_i B_i = 0, \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

これは Maxwell 方程式の 4 を表す。つまり、全ての Maxwell 方程式を含んでいる。このようにテンソルの導入により、4 つの連立方程式は 4 つの添え字を持つ 1 つの式にまとめ上げることができる。しかし、重要なのはここに物理的な解釈が存在することだ。式 1.201 は対称的にまとめあげられた式になるがこれは時空間において時間と空間が直交していることが電磁場に非常にうまく関係している。しかし、完全に対照的ではない。磁場は発散をもたないがループで回転すると電場の時間変化を生む。これに対し、電場は湧き出しがあり、モノ電荷が存在する。

ローレンツ変換との関係をもう少し見てみる。 $J^\mu = (\rho, J^i)$  とするとこの成分の置き方には根拠があることを示そう。

式 1.202 は  $F$  の反対称性から

$$\partial_\mu J^\mu = 0$$

とかける。ちなみに 1.202 から  $\partial_\mu F^{\mu\nu} = -k J^\nu$  であり  $k$  は定数である。従って Maxwell 方程式とはいかないが、同じような微分方程式がこれから導ける。先と同様に空間と時間部分に分けると

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

これはよく知られた連続の式であり、電流密度の流れの保存を表す。さらにこれを全空間で積分し、ガウスの定理を用いると

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = - \int_V \nabla \cdot \mathbf{J} dV = - \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

である。ただし、電子そのものの運動を記述しているわけではない。電荷量  $Q$  が次の式によって空間に定義される。

$$dQ = \rho dx dy dz \quad (1.204)$$

空間的な体積  $V$  は変化し得るが次の 4 元体積はローレンツ不変である。

$$dv = dt dx dy dz \quad (1.205)$$

ヤコビアンを  $\mathcal{J}$  とするとこれはローレンツ変換の行列式に等しく

$$\mathcal{J} = \det \left( \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\nu}} \right) = \det (\Lambda_{\nu}^{\mu'})$$

また、ローレンツ変換については

$$\det \Lambda = \pm 1$$

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta \quad (1.206)$$

が成立した。

式 1.204, 1.205 はよく似た形であることがわかる。そこで  $dt$  も  $d\rho$  も同じ変換則に従うとすれば確かに  $J^0 = \rho$  である。従って  $J^\mu$  はローレンツ不変になることがわかる。しかし、相対論における  $t$  が他の  $x, y, z$  とは異なるものであることも示唆する。これは何も  $J^\mu$  に限らず、(scalar, vector) のと組み合わせを持つ量であれば同じような関係が成り立つと期待できる。特に次のようなベクトルポテンシャル

$$A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$$

$$A_\mu = (-\phi, \mathbf{A})$$

も、ここでの4元ベクトルとしての性質を満たし、

$$\partial_\mu A^\mu = 0$$

でローレンツ不変である。次のd'Alembertian演算子を定義すれば

$$\square \equiv \partial^\mu \partial_\mu = \partial_i \partial_i - \partial_0^2$$

として式1.202は次のようにかける。

$$\square A^\mu = -4\pi J^\mu$$

つまり $\nabla$ がベクトルであったが $\square$ はスカラー演算子である。ところが

$$\partial^\mu = \partial^i + i\partial^0$$

$$\partial_\mu = \partial_i + i\partial_0$$

とすると

$$\partial_i \partial^0 = 0$$

が成り立つような時空間である必要がある。この直交性から干渉性が消され、次のような時間と空間を分離した操作が可能になる。式1.203のビアンキ恒等式を満たす解として

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

は

$$F_{0i} = \partial_0 A_i - \partial_i A_0 = \frac{\partial A_i}{\partial t} + \partial_i \phi = -E_i$$

$$F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i = \epsilon_{ijk} (\nabla \times \mathbf{A}) = \epsilon_{ijk} B_k$$

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}, F^{0i} = -F_{0i}, F^{ij} = F_{ij}$$

を満たし、ローレンツ不変にできあがる。また、反対称テンソルであることから

$$\partial_\mu F_{\mu\nu} = 0$$

であり、これはベクトル公式の

$$\text{curl} \cdot \text{grad} = 0, \text{div} \cdot \text{curl} = 0$$

と対応している。さらに直交性が成り立つことで干渉性が消される一方では次のような位相変換

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \lambda$$

が成分では

$$A_i \rightarrow A_i + \partial_i \lambda$$

$$\phi \rightarrow \phi - \partial_0 \lambda$$

と変換されても  $F_{ij}$  の値に影響を与えないことがわかる。つまり

$$\partial_0 e^{i\partial_i \lambda} - \partial_i e^{i\partial_0 \lambda} \equiv 0$$

が常に成り立つ。位相変化が起きても物理の方程式には変化を与えない変換をゲージ変換という。これは物理では非常に重要で、後に詳しく触れる。

このようにセパレートされた双対な関係が連続していく場が電磁場である。電場と磁場の変換を次にみていく。

### 1.7.2 ローレンツ変換

ここで、電場、磁場がお互いの相対速度に依存するのでローレンツ変換により、どう変換するかを調べよう。磁場に対する電場の速度が  $v$  であれば電場に対する磁場の速度が  $-v$  となるので対称的な形で書き表されることが期待できる。

先に定義した電磁場のテンソル  $F^{\mu\nu}$  は反対称テンソルなのでローレンツ変換により次のように変換される。

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma F^{\rho\sigma}$$

ここでローレンツ変換とは式 1.206 を満たすテンソルであると考える。

次のように表された電場と磁場の変換を見ると

$$\begin{aligned} E_i &= F^{0i} \\ \epsilon_{ijk} B_k &= F^{ij} \end{aligned} \tag{1.207}$$

よってまず、電場についてみると次のように 0 成分に分解できる。

$$\begin{aligned} E'_i &= F'^{0i} = \Lambda^0_\rho \Lambda^i_\sigma F^{\rho\sigma} \\ &= \Lambda^0_0 \Lambda^i_k F^{0k} + \Lambda^0_k \Lambda^i_0 F^{k0} + \Lambda^0_k \Lambda^i_l F^{kl} \end{aligned}$$

$i, k, l$  は 1 ~ 3 をとる空間成分である。式 2.15 より

$$\begin{aligned} \Lambda^0_0 &= \gamma, \quad \Lambda^0_i = -\gamma v_i, \quad \Lambda^i_0 = -\gamma v_i \\ \Lambda^i_j &= \delta^i_j + \frac{\gamma - 1}{v^2} v_i v_j \end{aligned}$$

また、

$\gamma^2 = 1/(1 - v^2)$ 、 $v_i v_j v_k \epsilon_{ijm} \equiv 0$  から

$$\begin{aligned} E'_i &= \gamma \left( \delta_{ik} + \frac{\gamma - 1}{v^2} v_i v_k \right) E_k - \gamma^2 v_i v_k E_k - \gamma v_k \left( \delta_{il} + \frac{\gamma - 1}{v^2} v_i v_l \right) \epsilon_{klm} B_m \\ &= \gamma E_i + \frac{1}{v^2(1 - v^2)} v_i v_k E_k - \frac{v^2}{v^2(1 - v^2)} v_i v_k E_k - \frac{\gamma}{v^2} v_i v_k E_k \\ &\quad - \gamma v_k \epsilon_{klm} B_m - \frac{v_k}{v^2(1 - v^2)} v_i v_l \epsilon_{klm} B_m + \gamma \frac{v_k}{v^2} v_i v_l \epsilon_{klm} B_m \\ &= \gamma E_i + \gamma \epsilon_{ijk} v_j B_k - \frac{\gamma - 1}{v^2} v_i v_k E_k \end{aligned}$$

と空間表示できる。これは結局ローレンツ変換によって電場が次のように変化したことを示す。

$$\mathbf{E}' = \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \frac{\gamma - 1}{v^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{v} \tag{1.208}$$

次に磁場を動かすことを考える。これは磁場が電場に対して  $-\mathbf{v}$  で運動することになるから

$$\mathbf{B}' = \gamma(\mathbf{B} - \mathbf{v} \times \mathbf{E}) - \frac{\gamma - 1}{v^2}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B})\mathbf{v} \quad (1.209)$$

となることが期待できる。

1.207 から、磁場についてみると次のように 0 成分に分解できる。

$$\begin{aligned} (\epsilon_{ijk}B_k)' &= F^{ij'} = \Lambda_\rho^i \Lambda_\sigma^j F^{\rho\sigma} \\ &= \Lambda_0^j \Lambda_k^i F^{0k} + \Lambda_k^j \Lambda_0^i F^{k0} + \Lambda_k^j \Lambda_l^i F^{kl} \end{aligned}$$

$\epsilon_{ijm}$  を作用させると  $v_i v_j v_k \epsilon_{ijm} \equiv 0$  から

$$\begin{aligned} 2\delta_{km}B_k' &= \epsilon_{ijm} \left( \Lambda_0^j \Lambda_k^i - \Lambda_k^j \Lambda_0^i \right) F^{0k} + \epsilon_{ijm} \Lambda_k^j \Lambda_l^i F^{kl} \\ &= -2\gamma v_j \left( \delta_{km} + \frac{\gamma - 1}{v^2} v_i v_j \right) \epsilon_{ijm} E_k + \epsilon_{ijm} \epsilon_{klm} \left( \delta_{jk} - \frac{\gamma - 1}{v^2} v_j v_k \right) \left( \delta_{il} - \frac{\gamma - 1}{v^2} v_i v_l \right) B_n \\ &= -2\delta_{km} \gamma \epsilon_{ijk} v_j E_k - \epsilon_{ikm} \epsilon_{klm} \frac{\gamma - 1}{v^2} v_i v_l B_n - \epsilon_{ljm} \epsilon_{klm} \frac{\gamma - 1}{v^2} v_j v_k B_n + \epsilon_{ijm} \epsilon_{klm} \delta_{jk} \delta_{il} B_n \\ &\quad + \epsilon_{ijm} \epsilon_{klm} \frac{(\gamma - 1)^2}{v^4} v_i v_l v_j v_k B_n \\ &= -2\delta_{km} \gamma \epsilon_{ijk} v_j E_k + (\delta_{il} \delta_{mn} - \delta_{in} \delta_{lm}) \frac{\gamma - 1}{v^2} v_i v_l B_n + (\delta_{jk} \delta_{mn} - \delta_{jn} \delta_{km}) \frac{\gamma - 1}{v^2} v_j v_k B_n \\ &\quad + \epsilon_{ijm} \epsilon_{klm} \delta_{jk} \delta_{il} B_n \\ &= -2\delta_{km} \gamma \epsilon_{ijk} v_j E_k + 2\delta_{mn} (\gamma - 1) B_n - 2\delta_{lm} \frac{\gamma - 1}{v^2} v_i v_l B_i + 2\delta_{mn} B_n \\ &= 2\delta_{km} \left( \gamma B_i - \gamma \epsilon_{ijk} v_j E_k - \frac{\gamma - 1}{v^2} v_i v_k B_k \right) \end{aligned}$$

となる。よって

$$B_k' = \gamma B_i - \gamma \epsilon_{ijk} v_j E_k - \frac{\gamma - 1}{v^2} v_i v_k B_k$$

つまり、

$$\mathbf{B}' = \gamma(\mathbf{B} - \mathbf{v} \times \mathbf{E}) - \frac{\gamma - 1}{v^2}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B})\mathbf{v}$$

がいた。式 1.201 は決して  $E, B$  の入れ替えにはなっていないが電場と磁場がローレンツ変換の観測系の立場で入れ替わることがわかる。これが 3 階反対称テンソルの性質が使われていることが重要である。

ここでもとの静止系に電場はないとする。つまり  $\mathbf{E} = 0$  で電荷により湧き出しがない。

この場合では式 1.208, 1.209 は簡単に次のようになる。

$$\mathbf{E}' = \gamma(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

$$\mathbf{B}' = \gamma\mathbf{B} - \frac{\gamma - 1}{v^2}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B})\mathbf{v}$$

つまり、何もないところから電気は磁場と閉回路があれば発電できる。

さらに興味あることに相対速度が  $v(v, 0, 0)$  のように  $x$  成分のみ持つとする。この時式 1.208, 1.209 は同じ方向の成分は第 2 項が効いて  $v$  に無関係になり、異なる成分が  $v$  に影響を受ける。すなわち

$$E_x' = E_x, \quad E_y' = \gamma(E_y - vB_z), \quad E_z' = \gamma(E_z + vB_y)$$

$$B_x' = B_x, \quad B_y' = \gamma(B_y + vE_z), \quad B_z' = \gamma(B_z - vE_y)$$

のように対称性がきれいに成り立つ。  $x$  方向の運動が  $y, z$  方向にも  $t$  にも影響を与えるのは我々がミンコフスキー時空の性質である。

### 1.7.3 Lorentz force

高校で学んだようにローレンツ力は作用反作用といった古典的な関係が成り立たない。ここからは3次元の空間速度と、4元速度を次のように表す。

$$\begin{aligned} u^i &= \frac{dx^i}{dt} \\ U^\mu &= (\gamma, \gamma \mathbf{u}) \end{aligned}$$

同様に4元運動量が

$$p^\mu = mU^\mu = (m\gamma, m\gamma \mathbf{u}) \quad (1.210)$$

となる。この0成分は相対論的なエネルギーで

$$E = m\gamma = m \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$$

となる。次の値はミンコフスキー計量では共に不変である。

$$U^\mu U_\mu = -\gamma^2 + \gamma^2 \mathbf{u}^2 = -\gamma^2(1-u^2) = -1$$

$$p^\mu p_\mu = -m^2$$

共にスカラーであるが負の値をとることに留意する。

したがって固有時間  $\tau$  を用いて4元力は次のように定義できる。

$$f^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau}$$

よってある成分については

$$\frac{d\gamma}{d\tau} = \frac{du_x}{d\tau} \frac{d\gamma}{du_x} = \gamma \frac{du_x}{d\tau} (1-u^2)^{-3/2} = \gamma^3 \frac{du_x}{d\tau}$$

となるから、全空間成分では次のようになる。

$$\begin{aligned} f^\mu &= \frac{d}{d\tau} (m\gamma, m\gamma \mathbf{u}) \\ &= \left( m \frac{d}{d\tau} \gamma, m \frac{d}{d\tau} \gamma \mathbf{u} + m\gamma \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} \right) \\ f^\mu &= \left( m\gamma^3 \mathbf{u} \frac{d\mathbf{u}}{d\tau}, m\gamma^3 \mathbf{u} \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} \mathbf{u} + m\gamma \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} \right) \end{aligned}$$

したがって  $d\mathbf{u}/d\tau = 0$  となるようなフレームを選べば

$$f^\mu = (0, \mathbf{F})$$

とおけて、次のNewtonの運動方程式である。

$$\mathbf{F} = m\gamma \frac{d\mathbf{u}}{dt}$$

これは  $\mathbf{u}$  が0であれば  $\gamma = 1$  である。

さらに粒子が電荷  $e$  をもっていれば電磁場テンソル  $F^{\mu\nu}$  と4元速度  $U_\nu$  を用いて

$$f^\mu = eF^{\mu\nu} U_\nu$$



とかけた。これは Lorentz 力である。空間添え字  $i$  を用いて成分を取り出し、と時間の 0 と分離すると式 2.25 から

$$\begin{aligned} f^i &= eF^{i\nu}U_\nu = eF^{i0}U_0 + eF^{ij}U_j \\ &= e(-E_i)(-\gamma) + e\epsilon_{ijk}\gamma u_j \end{aligned}$$

だから空間ベクトルで

$$\mathbf{f} = e\gamma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})$$

となるが力学的には  $d\tau = dt/\gamma$  だから  $\gamma$  はうまく相殺され、

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})$$

というよく知られた形になる。

#### 1.7.4 静電場の方程式

磁場はなく、電場の成分を  $E(E, 0, 0)$  とし運動方程式は

$$\frac{dp_x}{dt} = eE, \quad \frac{dp_y}{dt} = 0, \quad \frac{dp_z}{dt} = 0$$

さらに条件として  $p_z = 0$  を加えるとこの微分方程式から

$$p_x = eEt, \quad p_y = \text{Const} = \bar{p}, \quad p_z = 0$$

を得る。次に  $t = 0$  で  $p_x = 0$  となるように座標系を決めると 4 元運動量を用いて

$$p^\mu = (m\gamma, \mathbf{p}) = (\mathcal{E}_{\text{mech}}, \mathbf{P}) \quad (1.211)$$

$$p^\mu p_\mu = m^2 U^\mu U_\mu = -m^2$$

とおけるで

$$\mathcal{E}_{\text{mech}} = \sqrt{m^2 + p_x^2 + p_y^2} = \sqrt{m^2 + \bar{p}^2 + (eEt)^2} = \sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (eEt)^2}$$

よって  $\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v} = \mathcal{E}_{\text{mech}}\mathbf{v}$  から x 方向について

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p_x}{\mathcal{E}_{\text{mech}}} = \frac{eEt}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (eEt)^2}}$$

となるから積分して

$$x = \frac{1}{eEt} \sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (eEt)^2} \quad (1.212)$$

同様に y 方向について

$$\frac{dy}{dt} = \frac{p_y}{\mathcal{E}_{\text{mech}}} = \frac{\bar{p}}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (eEt)^2}}$$

ここで  $t$  から  $u$  まで積分すると

$$eEt = \mathcal{E}_0 \sinh u$$

で置き換えて

$$y = \int_0^t \frac{\bar{p}}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 (1 + \sinh^2 u)}} dt = \frac{\bar{p}}{eE} \operatorname{arcsinh} \left( \frac{eEt}{\mathcal{E}_0} \right)$$

これから  $y$  を用いて  $t$  を消すと

$$x = \frac{\mathcal{E}_0}{eE} \cosh\left(\frac{eEy}{\bar{p}}\right)$$

となる。これはカタナリ曲線である。もし十分に  $v$  が小さければ Newton の経路になり  $\bar{p} = m\bar{v}$  として

$$x = Const + \frac{eE}{2m\bar{v}^2} y^2$$

と放物線になる。

### 1.7.5 磁場内の運動方程式

磁場の成分を  $E(0, 0, B)$  として運動方程式は

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

ここで  $\gamma$  を定数とすると式 1.211 から  $\mathcal{E} = m\gamma + e\phi = Const$  として

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{e}{m\gamma} \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \frac{e}{\mathcal{E}} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (1.213)$$

また、次を定義すると古典的な  $m\mathbf{r}\omega^2 = e\mathbf{v}B = e\mathbf{r}\omega B$  から

$$\omega \equiv \frac{eB}{\mathcal{E}} = \frac{eB}{m\gamma} \quad (1.214)$$

とにおいて各成分の運動方程式は式 1.213 から

$$\frac{dv_x}{dt} = \omega v_y, \quad \frac{dv_y}{dt} = -\omega v_x, \quad \frac{dv_z}{dt} = 0$$

となる。これらはまとめて次のようにかけることを利用し、

$$\frac{d(v_x + iv_y)}{dt} = -i\omega(v_x + iv_y) \quad (1.215)$$

一般解が次のように解ける。

$$v_x + iv_y = v_0 e^{-i(\omega t + \alpha)}$$

実数の定数  $v_0$  と  $\alpha$  が出てくる。これを積分し、位置成分を求める。

$$r_0 \equiv \frac{v_0}{\omega} = \frac{m\gamma v_0}{eB}$$

$$\bar{p} = m\gamma v_0$$

として

$$x = x_0 + r_0 \sin(\omega t + \alpha)$$

$$y = y_0 + r_0 \cos(\omega t + \alpha)$$

$$z = z_0 + \bar{v}_z t$$

と求まる。

### 1.7.6 電磁場内の運動方程式

次に次のように磁場も電場も与えられた場合を考えよう。

$$\mathbf{B} = (0, 0, B), \quad \mathbf{E} = (0, E_y, E_z)$$

運動方程式は

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

であるから

$$m\ddot{x} = eB\dot{y}$$

$$m\dot{y} = eE_y - eB\dot{x}$$

$$m\ddot{z} = eE_z$$

となるので  $z$  成分については

$$z = \frac{eE_z}{2m}t^2 + Const$$

ここで  $t = 0$  で  $z = 0$  として

$$Const = \bar{v}t$$

とおく。複素数を用いて  $x, y$  方向は一括し、式 1.215 から

$$\frac{d}{dt}(\dot{x} + i\dot{y}) + i\omega(\dot{x} + i\dot{y}) = \frac{ie}{m}E_y$$

式 1.214 からこの微分方程式は次のように解ける。

$$\dot{x} + i\dot{y} = ae^{-i\omega t} + \frac{e}{m\omega}E_y = ae^{-i\omega t} + \frac{E_y}{B}$$

よって成分を比較し、

$$\dot{x} = a \cos \omega t + \frac{E_y}{B}, \quad \dot{y} = -a \sin \omega t$$

となるので平均をとれば

$$\langle \dot{x} \rangle = \frac{E_y}{B}, \quad \langle \dot{y} \rangle = 0$$

とんることがわかる。

### 1.7.7 重力場内の Maxwell の方程式

任意の世界点に  $\Gamma$  が 0 になる測地系を設けて Maxwell の方程式を次のように一般座標変換する。

$$\eta_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}$$

$$\partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu$$

例えば 4 元電流密度を  $j^\mu$  とすると次のように書き換えられる

$$\nabla_\mu j^\mu = 0 \tag{1.216}$$

$$\nabla_\mu f^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu$$

$$\nabla_\lambda f_{\mu\nu} + \nabla_\mu f_{\nu\lambda} + \nabla_\nu f_{\lambda\mu} = 0$$

またテンソル密度に対しても式 1.216 に  $\sqrt{-g}$  をかける  $\mu, \nu$  について対称的であれば

$$\partial_\mu \sqrt{-g} j^\mu = \partial_\mu \mathbf{j}^\mu = 0$$

$$\partial_\mu \sqrt{-g} f^{\mu\nu} = \partial_\mu \mathbf{f}^{\mu\nu} = \mu_0 \mathbf{j}^\nu$$

$$\partial_\lambda f_{\mu\nu} + \partial_\mu f_{\nu\lambda} + \partial_\nu f_{\lambda\mu} = 0$$

となる。

### 1.7.8 再考 Maxwell 方程式

[23]

古くファインマンの「失敗」とした仕事をダイソンが再構成したものがあある。相対論と量子論の関係が不完全ながらもみられるのでここに紹介する。

まず次の3つの仮定を置く。ドットを固有時  $\tau$  に対する微分として次のように表す。

ユークリッド空間での場合は  $\{k, i, j = 1, 2, 3\}$  とする。

$$1. m \ddot{x}^\mu = f^\mu, \quad m \ddot{x}_j = f_j(x, \dot{x}, t)$$

$$2. [x^\mu, x^\nu] = 0, \quad [x_j, x_k] = 0$$

$$3. m [x^\mu, \dot{x}^\nu] = i g^{\mu\nu}, \quad m [x_j, \dot{x}_k] = i \hbar \delta_{jk} \quad (1.217)$$

仮定にある交換関係を微分すると次の保存則が得られる。

$$[x_j, f_k] + m [\dot{x}_j, \dot{x}_k] = 0 \quad (1.218)$$

ヤコビの公式

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0 \quad (1.219)$$

を用いると

$$[x_l, [\dot{x}_j, \dot{x}_k]] + [\dot{x}_j, [\dot{x}_k, x_l]] + [\dot{x}_k, [x_l, \dot{x}_j]] = 0$$

となるので式 1.218 から定数との交換は0だから

$$[x_l, [x_j, f_k]] = 0 \quad (1.220)$$

となる。これは添え字を入れ替え、辺々を加えると

$$[x_j, f_k] + [x_k, f_i] = 0$$

となるのでここで Maxwell の方程式をつかうことなく、やや天下りのだが外微分を用いて次のような  $\dot{x}$  に無関係の  $B_l$  と置くことができる。

$$[x_j, f_k] = -\frac{i\hbar}{m} \epsilon_{jkl} B_l \quad (1.221)$$

この  $B_l$  を用いて次のように  $E_j$  を定義する。

$$E_j = f_j - \epsilon_{jkl} \dot{x}_l B_l$$

これがファインマンの力  $f_i$  である。式 1.221、1.220 から

$$[x_l, B_m] = 0$$

となるので

$$[x_l, E_m] = 0$$

になり、この  $E_m$  も  $\dot{x}$  に無関係である。まさに磁場  $B$  と電場  $E$  に対応している。  
また、式 1.218 から

$$B_l = -\frac{im^2}{2\hbar} \epsilon_{jkl} [\dot{x}_j, \dot{x}_k] \quad (1.222)$$

とも表現できる。交換積にさらに循環子がかかっていることが重要になる。たとえば両辺に  $\epsilon_{jkm}$  をかけると

$$\epsilon_{jkm} \epsilon_{jkl} = 2\delta_{ml}$$

だから  $B$  の循環が

$$\epsilon_{jkl} B_l = -\frac{im^2}{\hbar} [\dot{x}_j, \dot{x}_k]$$

となる。ヤコビの公式から

$$\epsilon_{jkl} [\dot{x}_j, [\dot{x}_k, \dot{x}_l]] = 0 \quad (1.223)$$

よって仮定と式 1.222 から仮定  $[x_i, x_j] = 0$  から和をとることで

$$\sum [\dot{x}_l, B_l] = 0 \quad (1.224)$$

となるが

$$m\dot{x} = p - A$$

を量子力学の演算子を用いて

$$m\dot{x} = i\hbar\nabla - A$$

とすると

$$m[\dot{x}_l, B_l] = [i\hbar\nabla_l - A_l, B_l] = -i\hbar \text{div} B$$

となる。これから Maxwell 方程式の

$$\text{div} B = 0$$

が導ける。しかし、式 1.224 からの結論として  $\text{div} B = 0$  とする必要は無く、これは後の非可換なゲージ理論に発展できる。

もう一つの Maxwell 方程式も導こう。式 1.222 の両辺を微分すると

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} B_l &= \frac{\partial B_l}{\partial t} + \dot{x}_m \frac{\partial B_l}{\partial x_m} \\ &= -\frac{im^2}{\hbar} \epsilon_{jkl} [\ddot{x}_j, \dot{x}_k] \\ &= -\frac{im}{\hbar} \epsilon_{jkl} [E_j + \epsilon_{jmn} \dot{x}_m B_n, \dot{x}_k] \end{aligned}$$

完全反対称テンソルの性質から

$$\epsilon_{jkl}\epsilon_{jmn} = \delta_{km}\delta_{ln} - \delta_{kn}\delta_{lm}$$

を用いて

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}B_l &= -\frac{im}{\hbar}\epsilon_{jkl}[E_j + \epsilon_{jmn}\dot{x}_m B_n, \dot{x}_k] \\ &= -\frac{im}{\hbar}(\epsilon_{jkl}[E_j, \dot{x}_k] + [\dot{x}_m B_l, \dot{x}_k] - [\dot{x}_m B_l, \dot{x}_k]) \\ &= \epsilon_{jkl}\frac{\partial E_j}{\partial x_k} + \dot{x}_k\frac{\partial B_l}{\partial x_k} - \dot{x}_l\frac{\partial B_k}{\partial x_k} + \frac{im}{\hbar}B_k[\dot{x}_l, \dot{x}_k] \end{aligned}$$

ところが第3項は  $\text{div } B = 0$  から0になり、第4項は  $B_l = -\frac{im^2}{2\hbar}\epsilon_{jkl}[\dot{x}_j, \dot{x}_k]$  から0になるので結局

$$\frac{d}{dt}B_l - \dot{x}_k\frac{\partial B_l}{\partial x_k} = \frac{\partial B_l}{\partial t} = \epsilon_{jkl}\frac{\partial E_j}{\partial x_k}$$

であり、たとえば  $l = 3$  成分を選ぶと残りは  $j, k = \{1, 2\}$  だから

$$\frac{\partial B_3}{\partial t} = \frac{\partial E_1}{\partial x_2} - \frac{\partial E_2}{\partial x_1}$$

であり、これは Maxwell 方程式

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\text{rot} \mathbf{E}$$

である。これは簡単に4次元に拡張できる。次の規則をつかおうとミンコフスキー時空では

$$(x^\mu) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (+t, \mathbf{x})$$

$$(x_\mu) = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (-t, \mathbf{x})$$

また計量として

$$(g_{\mu\nu}) = (g^{\mu\nu}) = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$$

仮定3から位置と運動量の交換関係は計量に依存する。

この時、 $\mathbf{v} = d\mathbf{x}/dt$ , 4元速度  $u^\mu = \dot{x}^\mu$  として

$$(u^\mu) = \left( \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2}} \right)$$

$$u^\mu u_\mu = -1$$

ゲージポテンシャルを  $A^\mu(\mathbf{x}, t)$  として粒子の電荷  $e$  として

$$m\dot{x}^\mu = p^\mu - eA^\mu$$

となるから次の成分表示に注意すると

$$(p^\mu) = (+\epsilon, \mathbf{p})$$

$$(p_\mu) = (-\epsilon, \mathbf{p})$$

$$(A^\mu) = (+\phi, \mathbf{A})$$

$$(p^\mu) = (+\epsilon, \mathbf{p})$$

量子論的な書き換えでは

$$(A_\mu) = (-i\partial_\mu) = \left( i\frac{\partial}{\partial t}, -i\nabla \right)$$

$$[x^0, p^0] = \left[ t, i\frac{\partial}{\partial t} \right] = -i$$

$$[x^1, p^1] = \left[ x, -i\frac{\partial}{\partial x} \right] = i$$

であり、共変微分  $D_\mu$  は

$$D_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} - ieA_\mu(\mathbf{x}, t) \quad (1.225)$$

である。また、

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (1.226)$$

$$\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A} \quad (1.227)$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad}\phi \quad (1.228)$$

であり、ローレンツ力は

$$f^0 = \frac{e}{\sqrt{1-v^2}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{v}$$

$$\mathbf{f} = \frac{e}{\sqrt{1-v^2}} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

となる。さらに式 1.223 は 4 次元の完全反対称テンソルを用いて

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda} [\dot{x}_\nu, [\dot{x}_\rho, \dot{x}_\lambda]] = 0$$

であり  $m\dot{x}_\mu = -iD_\mu$  を用いると

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda} [D_\nu, [D_\rho, D_\lambda]] = 0$$

これは式 1.219 のビアンキ恒等式である。そこで式 1.225 から

$$[D_\mu, D_\nu] = -ieF_{\mu\nu}$$

であり  $F_{\mu\nu}$  の定義でもある。双対場  $\tilde{F}$  は

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda} F_{\rho\lambda}$$

としてビアンキの恒等式が

$$[D_\nu, \tilde{F}^{\mu\nu}] = 0 \quad (1.229)$$

と書ける。これが Maxwell 方程式の相対論版である。

$$\left(\tilde{F}^{\mu\nu}\right) = \begin{pmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & E_z & -E_y \\ -B_y & -E_z & 0 & B_x \\ -B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix} \quad (1.230)$$

となる。これから双対変換が

$$(\mathbf{E}, \mathbf{B}) \rightarrow (\mathbf{B}, -\mathbf{E})$$

と変換することがわかる。

よってヤコビ・ビアンキの恒等式が Maxwell の方程式を導くことが確かめられた。

この内容はさらに非可換のゲージ理論に拡張できる。

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{(-ie)}[D_\mu, D_\nu] = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - ie[A_\mu, A_\nu] \quad (1.231)$$

でありビアンキ恒等式 1.229 がゲージ場の方程式となる。

非可換な場合はベクトルポテンシャルが行列として振る舞うので

$$\partial_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} = ie[A_\nu, \tilde{F}^{\mu\nu}]$$

のように 0 にならない。よって

$$[D_\nu, \tilde{F}^{\mu\nu}] = j^\mu \quad (1.232)$$

とかける。これは式 1.224 から  $\text{div} B \neq 0$  のモノポール場を記述する。

## 2 Lorenz 変換

### 2.1 ミンコフスキー時空

この章からは 4 元座標を用いるので添え字  $i, j, k$  は 1, 2, 3 の空間ベクトルを表し、 $\mu, \nu, \gamma$  は 0, 1, 2, 3 を表すとする。

Lorenz 変換は光の速さがある慣性系でその系の相対的な速度関係に関係なく一定になることを示している。これはガリレイ変換では成り立たない。これに変わる変換則を導こう。

慣性系  $S, S'$  についてこの多様体上では次の関係が成り立つような時空が生成されているということになる。時空関係が成立したということは観測者との関係が成立したのでその意味でこの光円錐は量子論的ではない。

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0, \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 - c'^2 t'^2 = 0 \quad (2.1)$$

ここでは簡単のため  $x$  方向のみにある速さで運動している慣性系を考えて次のような一次変換を考える。Rupert Way は次のような微分

$$\begin{aligned} x' &= Ax + Bt \\ t' &= Cx + Dt \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}$$

$x' = 0$  ならば  $x = vt$  であるとして

$$x' = \gamma(x - \beta ct), \quad ct' = \gamma(1 - \beta)x$$



系を反対に見れば速度の向きが反対になるから

$$x = \gamma(x' + \beta ct'), \quad ct = \gamma(1 + \beta)ct'$$

ただし、 $\gamma, \beta$  は次のようになる。

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$\beta = v/c$$

光速不変であるから

$$x^2 - c^2t^2 = x'^2 - c^2t'^2$$

これから  $t'$  を求めると正の値を採用し、

$$ct' = \gamma(ct - \beta x)$$

となるのでローレンツ変換は

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

となり、回転行列であることがわかる。

例えば慣性系  $\mathbf{r}'$  系と  $\mathbf{r}$  系を考えると簡単のために  $c = 1$  として

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2 + z^2 \\ &= \gamma^2(x' + \beta t')^2 + y'^2 + z'^2 \end{aligned}$$

$$t' = \gamma(t - \mathbf{v} \cdot \mathbf{r})$$

であるので  $\mathbf{v}(v, 0, 0)$  とおけるのでローレンツ変換によって  $\mathbf{r}$  ベクトルは次のように変換される。

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \frac{\gamma - 1}{v^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{v} - \gamma \mathbf{v} t \quad (2.3)$$

$\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} = vx$  だから、この時  $vt = x$  とすると

$$\begin{aligned} r'^2 &= r^2 + (\gamma - 1)^2 x^2 + \gamma^2 v^2 t^2 + 2x^2(\gamma - 1) - 2\gamma vxt - 2\gamma(\gamma - 1)(vx)t \\ &= r^2 + (\gamma - 1)^2 x^2 + \gamma^2 x^2 + 2x^2(\gamma - 1) - 2\gamma^2 x^2 \\ &= r^2 + x^2((\gamma - 1)^2 - \gamma^2 + 2\gamma - 1) \\ &= r^2 \end{aligned}$$

となり不変であることがわかる。つまり、符号の問題を残すがローレンツ変換は長さを保つ。

これを時間を含めて4次元に時空で考えてみよう。

1つ次元を増やしたというだけであるがトポロジーのところで見たとように3次元と4次元ではかなり様相が異なる。

$c$  を光速として4次元座標を次のように表すことにする。

また4次元以上の成分を持つ記号はボールド体にしないが、3元空間成分をもつ記号は区別のためボールド体を用いることにする。

添え字については3次元は主に  $i, j, k$  とし、4次元では  $\mu, \nu, \lambda$  を用いることにする。

$$x^\mu = (x^0, \mathbf{x}) = (ct, \mathbf{x}) = (ct, x^1, x^2, x^3)$$

これは反変成分である。座標微分は基本単位系をはじめに用いて

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right) = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right)$$

$\nabla$  は空間ベクトルで

$$\nabla \equiv \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.4)$$

反変 (contravariant)、共変 (covariant) 成分は次のような計量テンソル (metric tensor)  $g_{\mu\nu}$  で入れ替わる。ユークリッド空間では

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

で与えられ

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$$

$$\sum_\rho g^{\mu\rho} g_{\rho\nu} = \delta_\nu^\mu$$

が成り立ちつ、通常アインシュタインの和規則を用いて  $\Sigma$  は省略する。

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, -x^1, -x^2, -x^3)$$

$$\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right) \quad (2.6)$$

となる。これから上付きの計量テンソル  $g^{\mu\nu}$  と下付  $g_{\mu\nu}$  は逆の関係になっている。

$$g^{\mu\nu} = (g_{\mu\nu})^{-1}$$

これからベクトル、テンソルの計算則が次のようになる。

$$x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu$$

$$T^{\mu\nu} = g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} T_{\rho\sigma}$$

またれから 4 元ベクトルの内積が次のように表される。

$$A \cdot B = A^0 B^0 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$$

これから

$$x^\mu \cdot x_\mu = (ct)^2 - r^2$$

という内積が座標空間に定義できる。このような内積をとれる空間をミンコフスキー空間 (Minkowski space) という。

今後はミンコフスキー時空を前提にするので次のように計量の符号を決める。

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ダランベルシアンとして次の記号もよく用いる

$$\begin{aligned} \square &\equiv \partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla \cdot \nabla \\ &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \end{aligned}$$

ここで  $\Delta = \nabla \cdot \nabla$  はラプラシアンという  
以後次のような記号をよく用いる。

- 4元運動量  $p^\mu = (\frac{E}{c}, \mathbf{P})$
- 4元ポテンシャル  $A^\mu = (\frac{\phi}{c}, \mathbf{A})$
- 4元カレント  $J^\mu = (c\rho, \mathbf{j})$
- 4元速度  $v^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} (c\gamma, \gamma v)$

ここで

$$\gamma = 1/\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (2.7)$$

であり

$$d\tau \equiv \frac{1}{c} \sqrt{dx^\mu dx_\mu} = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{dt}{\gamma} \quad (2.8)$$

は固有時という。この固有時は系の速度  $v$  に依存している。つまり、時間の進み方が相対的な速度に依存することをアインシュタインが特殊相対論の中で示した。異なる慣性系は次のローレンツ変換 (Lorentz transformation) に従う。ローレンツ変換を  $\Lambda_\nu^\mu$  のように上下に必ず添え字がつく形になり、次で定義する。

$$x'^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu \quad (2.9)$$

ローレンツ変換は線素

$$c^2 d\tau^2 = -ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (2.10)$$

を不変にする。つまり、次のように内積を一定に保つと考えてもよい。

$$\begin{aligned} ds^{2'} &= g_{\mu\nu} \Lambda_\alpha^\mu \Lambda_\beta^\nu dx^\alpha dx^\beta \\ &= g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \end{aligned} \quad (2.11)$$

と書き直せるのでローレンツ変換  $\Lambda_\nu^\mu$  について次が成り立つ。

$$g_{\mu\nu} \Lambda_\alpha^\mu \Lambda_\beta^\nu = g_{\alpha\beta} = (\Lambda^T)^\alpha_\rho g_{\rho\sigma} \Lambda_\beta^\sigma$$

と転置行列を用いても表すことができるので両辺の行列式をとると

$$\det\Lambda = \pm 1 \quad (2.12)$$

が得られる。これは行列式が 1 の時は固有ローレンツ変換 (**proper**) といい、時間成分で見ると行列式は

$$(\Lambda_0^0)^2 - (\Lambda_0^i)^2 = 1$$

となり、これから

$$\Lambda_0^0 = \pm\sqrt{1 + (\Lambda_0^i)^2}$$

このとき  $\Lambda_0^0$  は次の 2 つの場合がとれて  $(\Lambda_0^i)^2$  は正とすれば

$$\Lambda_0^0 \geq 1$$

の時は時間は向きを変えないことなく、これを**順時 (orthochronous)** という。

この場合は純粋に 4 次元の回転で表され、後の部で扱う無限小変換が存在する。

また

$$\Lambda_0^0 \leq -1$$

の時は時間の向きが反対になり**逆時 (anti-orthochronous)** という。

この時は無限小変換を考えることはできないが、回転により変換を表すことはできる。

一方で行列式が -1 の時は、**非固有ローレンツ変換 (improper)** といい、回転で変換することができなくなる。時間成分で見ると行列式は

$$(\Lambda_0^0)^2 - (\Lambda_0^i)^2 = -1$$

となり、これから

$$\Lambda_0^0 = \pm\sqrt{(\Lambda_0^i)^2 - 1}$$

このときも  $\Lambda_0^0$  は次の場合がありまず、符号に関係なく

$$-1 \leq \Lambda_0^i \leq 1$$

の時は  $\Lambda_0^0$  は虚数である。虚数を今は考えないとして、正の符号をとれば

$$\Lambda_0^i \geq 1, \quad -1 \geq \Lambda_0^i$$

時間は向きを変えないが、負の符号で向きは反対になる。

通常に観測される物理現象は

$$\det\Lambda = +1, \quad \Lambda_0^0 \geq 1$$

ととると恒等変換に連続的につながることができるので

固有順時ローレンツ変換 (`proper_orthochronous_Lorentz_transformatin`) という。

ローレンツ変換は  $\det\Lambda$  と  $\Lambda_0^0$  の符号で 4 つの連結成分に分けられる。これらは後の接続とファイバー束と関係してくる。

例えば、次の図のように固有ローレンツ変換は boost と呼ばれる並進運動と 3 次元回転から構成されている。たとえば 2 つの慣性系が x 軸方向に  $v = \beta c$  の並進運動をする場合は次のようにおける。

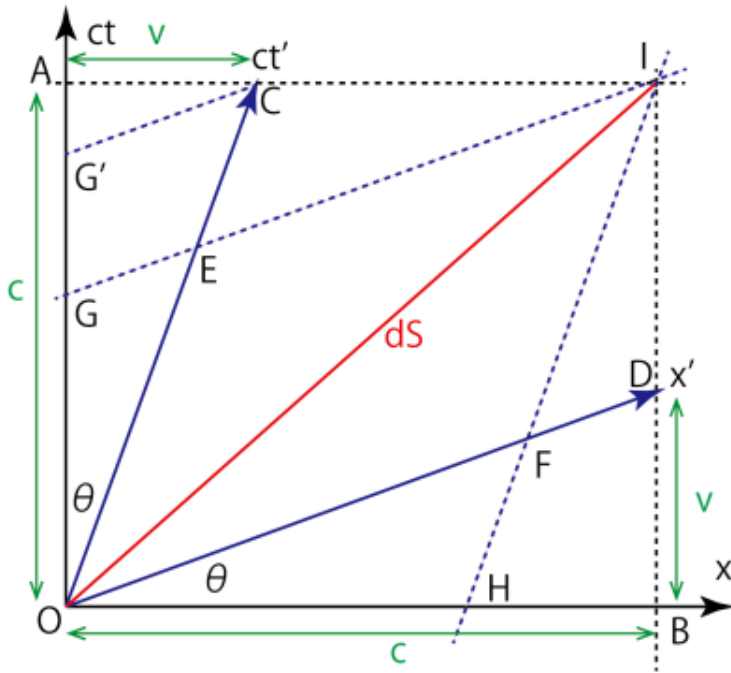


図 2.1: 静止系に対し、x 方向に速度  $v$  で運動する  $x'$  系を見た場合

$$\Lambda_{\nu}^{\mu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = v/c$$

ここからは、 $c = 1$  として  $\beta^2 = v^2$  とする。

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z)$$

ミンコフスキー時空の計量は単純に次のような対称的な対角行列である。

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

光速不変の要請は

$$x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = \eta_{\mu\nu} x^{\mu} x^{\nu} \quad (2.13)$$

が座標系に依存しないことである。

ローレンツ変換は

$$x'^{\mu} = \Lambda_{\nu}^{\mu} x^{\nu} \quad (2.14)$$

であり、時間成分 0 と空間成分  $i$  を区別して

$$\Lambda_0^0 = \gamma, \quad \Lambda_i^0 = -\gamma v_i, \quad \Lambda_0^i = -\gamma v_i$$

$$\Lambda_j^i = \delta_j^i + \frac{\gamma - 1}{v^2} v_i v_j \quad (2.15)$$

これから異なる系の間に

$$\eta_{\sigma\rho} x^\sigma x^\rho = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = \eta_{\mu\nu} \Lambda_\sigma^\mu \Lambda_\rho^\nu x^\sigma x^\rho$$

$$(\eta_{\sigma\rho} - \Lambda_\sigma^\mu \Lambda_\rho^\nu) x^\sigma x^\rho = 0$$

が成り立つことになる。従って光速不変の要請は

$$\eta_{\sigma\rho} = \eta_{\mu\nu} \Lambda_\sigma^\mu \Lambda_\rho^\nu \quad (2.16)$$

となるがローレンツ変換は逆が存在するから、 $\eta_{\mu\nu}$  の対称性から

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda^{\mu\sigma} = (\Lambda_\sigma^\mu \eta_{\mu\nu})^T = (\Lambda_\sigma^\mu)^T \eta_{\mu\nu}$$

よって右から  $\Lambda$  を作用させ、

$$\eta = \Lambda^T \eta \Lambda \quad (2.17)$$

が成り立つ。この関係を満たす群をローレンツ群という。 $\Lambda$  は  $4 \times 4$  の成分を持つがこの性質があるので  $4 \times 5/2 = 10$  の独立した関係式が成り立つ。よって独立成分は 6 個である。このような直交群を  $O(1,3)$  といふ。一般には

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{M} \end{pmatrix}$$

と書くことができ空間成分の行列  $\mathbf{M}$  は式 2.17 を満たす。

下図で確認できるように通常の質量を持つ物体の運動は光円錐の内部空間に限られる。(色付き部分)

これは時間的ベクトルと呼ばれ、 $cdt$  の方が常に大きいので

$$\eta_{\mu\nu} V^\mu V^\nu < 0 \quad (2.18)$$

を満たす。また、光を超える粒子があるとすれば

$$\eta_{\mu\nu} V^\mu V^\nu > 0$$

となり、これを空間的ベクトルという。

また、質量を持たない粒子は

$$\eta_{\mu\nu} V^\mu V^\nu = 0$$

を満たし、光円錐平面の母線方向(平行四辺形の対角線)を運動し、速度  $v$  を変化させる自由度を失う。

これを光的ベクトルという。

これからユークリッド空間と異なる、重要な相違がミンコフスキー空間には現れる。つまり、物理的な因果関係が生じ、

通常の物理は空間的ベクトルを考えることはない。しかし、仮に次のように静止系に対し、光速を超える速さの物体があり、静止系に対してある速さで運動する系から見ると、時間の逆転が起きる。

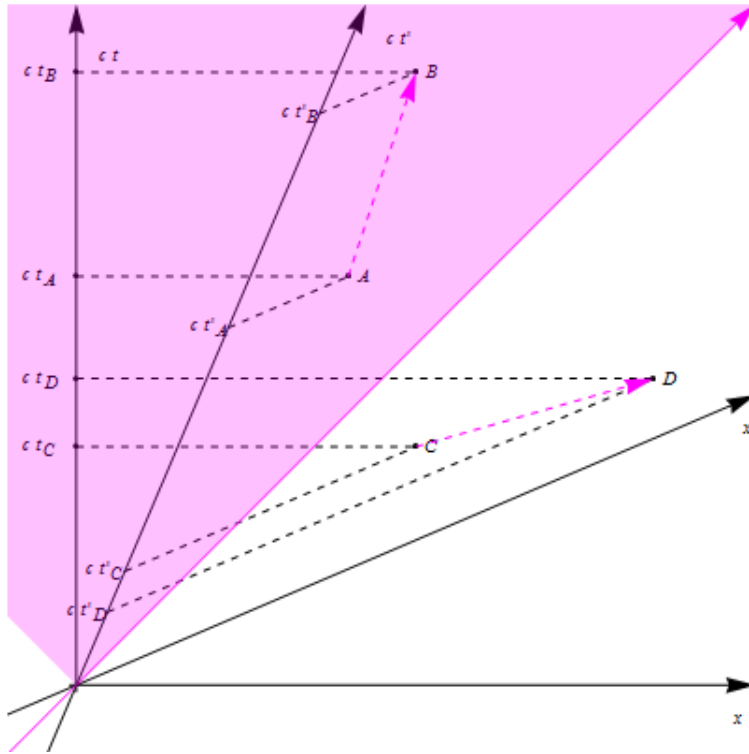


図 2.2: ベクトル CD は空間的ベクトルになる。静止系からは CD の順に時間が進むがダッシュ系では逆転している。

## 2.2 反変ベクトル

式 2.13 から時空間上の異なる 2 点の距離は

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.19)$$

であり、先にもたのようにローレンツ普遍である。これはミンコフスキー時空の計量を表している。一方で、3次元のユークリッド空間は

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \delta_{ij} dx^i dx^j$$

である。式 2.16 が成り立てば

$$\begin{aligned} ds'^2 &= \eta_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\sigma \Lambda^\nu_\rho dx^\sigma dx^\rho \\ &= \eta_{\sigma\rho} dx^\sigma dx^\rho = ds^2 \end{aligned}$$

となり不変である。これを Lorentz\_Scalar という。

$dx^\mu$  の変換則は式 2.14 から

$$dx'^\mu = \Lambda^\mu_\nu dx^\nu \quad (2.20)$$

となることに注意する。

このような変換則を満たす時  $dx^\mu$  は反変ベクトル (contravariant\_vector) という。

一般には添え字を上につける。

一般に 4 元ベクトル  $U$  については

$$U'^\mu = \Lambda^\mu_\nu U^\nu$$

$$U'_\mu = \Lambda_\mu^\nu U_\nu$$

であり、

$$U_\mu = \eta_{\mu\nu} U^\nu$$

で添え字の上げ下げができる。つまり

$$\Lambda_\nu^\mu \Lambda_\mu^\rho = \delta_\nu^\rho$$

が成り立つ。

## 2.3 共変ベクトル

4次元の接ベクトルを

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

で定義すると微分の変換則から

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu}$$

と書くことができるが式 2.14 から

$$\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} = \Lambda_\mu^\nu$$

とかけるので以後

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

とおくと

$$\partial'_\mu = \Lambda_\mu^\nu \partial_\nu$$

を満たすこれは式 2.20 と対称的であり、このような変換則を満たすベクトルを共変ベクトル (covariant\_vector) という。一般には添え字を下につける。

微分は次のように共変  $\partial_\mu$ 、反変  $\partial^\mu$  の表示ができるので特に空間成分の符号に注意する。

$$\partial_\mu = \left( \frac{\partial}{\partial x^0}, -\nabla \right)$$

$$\partial^\mu = \left( \frac{\partial}{\partial x^0}, \nabla \right)$$

これから

$$\partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 = \square$$

というスカラー演算子、ダランベリアンが定義できる。

## 2.4 テンソル

一般的なテンソルは前小節の共変、反変成分が混在したものである。よってローレンツテンソルと呼ばれる  $T'$  は  $(m, n)$  型の場合

$$T'^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_m}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_n} = \Lambda_{\rho_1}^{\mu_1} \dots \Lambda_{\rho_m}^{\mu_m} \Lambda_{\nu_1}^{\rho_1} \dots \Lambda_{\nu_n}^{\rho_n} T^{\rho_1 \dots \rho_m}_{\sigma_1 \dots \sigma_n} \quad (2.21)$$

で定義される。基本的には2つのベクトル  $U, V$  を仮定して

$$T^{\mu\nu} \equiv U^\mu V^\nu$$



から生成され、変換則は

$$T'^{\mu\nu} = \Lambda_\rho^\mu \Lambda_\sigma^\nu T^{\rho\sigma}$$

$$T'_\nu{}^\mu = \Lambda_\rho^\mu \Lambda_\nu^\sigma T_\sigma{}^\rho$$

であり、ベクトル場の接ベクトルは

$$S_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu U_\nu$$

であり、テンソル場である。さらに対角成分

$$\phi \equiv T_\mu{}^\mu$$

を定義するとローレンツ変換において

$$\begin{aligned} \phi' &= T'_\mu{}^\mu = \Lambda_\rho^\mu \Lambda_\mu^\sigma T_\sigma{}^\rho \\ &= \delta_\rho^\sigma T_\sigma{}^\rho = \phi \end{aligned}$$

であり、不変であることがわかる。つまりこれはスカラーであることを表している。

## 2.5 固有時間

ミンコフスキー時空では  $c$  を復活させると

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 \quad (2.22)$$

が成り立つがこれは負の値を持つ。そこで  $\tau$  を固有時間として

$$c^2 d\tau^2 = -ds^2$$

とするとこれは正の値を持つ。宇宙には絶対的な静止系を置くことはできない。しかし、ある速度を持つ系を基準にして静止系と呼ぶことはできる。この系の時間間隔が  $dt$  である。しかし、この静止系に対しある速さ  $U$  で運動する慣性系も存在する。この系の時間間隔が  $d\tau$  である。以後再び  $c = 1$  とすると

$$d\tau^2 = -\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

となることに注意する。左辺はスカラーだから  $d\tau$  はスカラーである。ここで 4 元速度  $U$  を

$$U^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

で定義するとこれ反変ベクトルとして振る舞うはずである。そこで物質の世界線を時空内で  $\tau$  をパラメタのように扱うことができる。空間内の 3 次元ベクトルは

$$u^i = \frac{dx^i}{dt}$$

であるから

$$\begin{aligned} d\tau^2 &= dt^2 (1 - (dx/dt)^2 - (dy/dt)^2 - (dz/dt)^2) \\ &= dt^2 (1 - u^2) \end{aligned}$$

となるので

$$\gamma = 1/\sqrt{1 - u^2} \quad (2.23)$$

とすると

$$d\tau = dt/\gamma \quad (2.24)$$

$\gamma$  は 1 より大きいので常に慣性系の固有時間は静止系の時間より短いことになる。  
また、4 元速度と 3 元速度の関係が

$$U^\mu = \frac{dt}{d\tau} \frac{dx^\mu}{dt} = \gamma u^i$$

であることがわかる。4 元速度の注意すべきはミンコフスキー時空では次のように内積をとると

$$U^\mu U_\mu = \eta_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = \frac{\eta_{\mu\nu} dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = \frac{-(d\tau)^2}{(d\tau)^2} = -1$$

となる。4 元速度の成分は

$$U^\mu = (\gamma, \gamma u^i) \quad (2.25)$$

と書くことができる。よって位置と同じようにローレンツ変換をして、

$$U'^\mu = \Lambda^\mu_\nu U^\nu$$

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$$

となる。系の速度が静止系に対して  $v$  であれば、

$$\gamma_v \equiv 1/\sqrt{1-v^2} \quad (2.26)$$

とすれば

$$U'^0 = \gamma_v(U^0 - vU^1)$$

$$U'^1 = \gamma_v(U^1 - vU^0)$$

$$U'^2 = U^2$$

$$U'^3 = U^3$$

この時  $\gamma$  に注目することで速度の和のルールが求まる。つまり、

$$\gamma' = \gamma_v(\gamma - v\gamma u_x) = \gamma\gamma_v(1 - vu_x)$$

$$\gamma' u'_x = \gamma\gamma_v(u_x - v)$$

となる。静止系に対し  $x$  方向に、 $u'$  の速度の系から見た速度が  $v$  である場合、静止系に対して古典的には  $u' + v$  の合成速度が得られたがこれは上式の  $\gamma \rightarrow 1$  とみなせるほど速さが遅い場合であることがわかる。これらの式から合成則が

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - vu_x}, \quad u'_y = \frac{u_y}{\gamma_v(1 - vu_x)}, \quad u'_z = \frac{u_z}{\gamma_v(1 - vu_x)}$$

となる。注意すべきは  $x$  方向の速度は  $y, z$  方向の速度にも影響を与えることである。つまり特殊相対性理論は直交関係が相対速度に依存していることを示す。これは時間が相対的であり、式 2.24 の時間変化はあらゆる空間に一様に起きることが前提となっている。

## 2.6 双対関係

座標変換に依存しないものとして次のようなスカラー密度  $\mathbf{S}(\mathbf{x})$  を定義する。 $\Omega$  は 4 次元の時空領域とする。

$$I \equiv \int_{\Omega} \mathbf{S}(\mathbf{x}) dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = \int_{\Omega} \mathbf{S}(\mathbf{x}) dx^4$$

スカラー密度  $\mathbf{S}(\mathbf{x})$  は次のように一般には座標変換する

$$\mathbf{S}'(\mathbf{x}') = \frac{\partial(x)}{\partial(x')} \mathbf{S}(\mathbf{x})$$

ただし次のように行列式として定義する。

$$\frac{\partial(x)}{\partial(x')} \equiv \frac{\partial(x^0, x^1 \dots)}{\partial(x'^0, x'^1 \dots)}$$

よって Lorentz 変換  $\Lambda_{\nu}^{\mu}$  の場合は

$$\frac{\partial(x)}{\partial(x')} \equiv 1 / \frac{\partial(x')}{\partial(x)} = (\det(\Lambda_{\nu}^{\mu}))^{-1} = \pm 1 \quad (2.27)$$

である。従って

$$\mathbf{S}'(\mathbf{x}') = \pm \mathbf{S}(\mathbf{x}) \quad (2.28)$$

となる。特に負の符号をとる場合は擬スカラー (pseudo\_scalar) と呼び、次のような鏡像変換に対応する。これは一般化するとミラー対称性ともいい後に重要になる。

$$t' = t \quad x' = -x$$

同様にテンソル密度に拡張すると、例えば次のように 3 階テンソル密度は Lorentz 変換される。

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{\mu\nu}^{\lambda'}(\mathbf{x}') &= \frac{\partial(x)\partial x^{\lambda'}\partial x^{\beta}\partial x^{\gamma}}{\partial(x')\partial x^{\alpha}\partial x^{\mu'}\partial x^{\nu'}} \mathbf{T}_{\beta\gamma}^{\alpha}(\mathbf{x}) \\ &= (\det(a_{\sigma}^{\rho}))^{-1} a_{\alpha}^{\lambda} a_{\mu}^{\beta} a_{\nu}^{\gamma} \mathbf{T}_{\beta\gamma}^{\alpha}(\mathbf{x}) \\ &= \pm a_{\alpha}^{\lambda} a_{\mu}^{\beta} a_{\nu}^{\gamma} \mathbf{T}_{\beta\gamma}^{\alpha}(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (2.29)$$

ここで 4 階の完全反対称の性質を持つ共変ベクトル  $T_{\lambda\mu\nu\rho}(x)$  があつたとすると添え字の並び換えに対して偶置換では値は変わらず、奇置換では負になるので例えば次のようにある値を決めると

$$T_{0123}(x) \equiv \mathbf{T}(\mathbf{x}) \quad (2.30)$$

$T$  の 0 でない成分は全て  $\pm \mathbf{T}(\mathbf{x})$  のどちらかになるので式 2.29 のように変換し、スカラー密度である。

また 4 階の完全反対称の性質を持つ反変ベクトル  $\epsilon^{\lambda\mu\nu\rho}(x)$  を次のように決める。

$$\epsilon^{\lambda\mu\nu\rho}(x) = \begin{cases} 1 & \lambda\mu\nu\rho \rightarrow 0123 \text{ (even permutation)} \\ -1 & \lambda\mu\nu\rho \rightarrow 0123 \text{ (odd permutation)} \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (2.31)$$

するとこれは次のようにテンソル変換則を満たす。

$$\epsilon^{\lambda\mu\nu\rho'}(x') = \frac{\partial(x)\partial x^{\lambda'}\partial x^{\mu'}\partial x^{\nu'}\partial x^{\rho'}}{\partial(x')\partial x^i\partial x^j\partial x^k\partial x^l} \epsilon^{ijkl}$$

しかし

$$\frac{\partial x^{\lambda'} \partial x^{\mu'} \partial x^{\nu'} \partial x^{\rho'}}{\partial x^i \partial x^j \partial x^k \partial x^l} = \frac{\partial(x')}{\partial(x)}$$

が成り立つので

$$\epsilon^{\lambda\mu\nu\rho'}(x) = \epsilon^{\lambda\mu\nu\rho}(x)$$

となり、これも座標系によらない。

さらにこの  $\epsilon$  を用いて次のように反対称 2 階共変テンソルをつくると

$$*\mathbf{f}^{\lambda\mu} = \frac{1}{2!} \epsilon^{\lambda\mu\nu\rho} f_{\nu\rho}$$

これは 2 階反変ベクトル密度とみなせる。具体的に成分を書き出すと

$$\begin{aligned} *f^{01} &= f_{23}, & *f^{02} &= f_{31}, & *f^{03} &= f_{12} \\ *f^{23} &= f_{01}, & *f^{31} &= f_{02}, & *f^{12} &= f_{03}, \end{aligned}$$

このような  $*f^{\lambda\mu}$  と  $f_{\nu\rho}$  は dual な関係という。このように  $\epsilon^{\lambda\mu\nu\rho}(x)$  から多様な関係をつくることのできる。

## 2.7 計量と自由ベクトル

4 個の成分を持つ  $v^\mu(x)$  を 1 次微分形式とする。

$$\partial_\nu v^\nu(x) = 0$$

次のような変換を **affine** 変換とする。これはローレンツ変換より一般的で

$$x^{\mu'} = a_\nu^\mu x^\nu + b^\mu \quad \det(a_\nu^\mu) \neq 0 \quad (2.32)$$

となる。もしローレンツ変換であれば次のようになる。

$$\delta_\rho^\mu = a_\nu^\mu a_\rho^\nu = a_\nu^\mu \eta_{\rho\lambda} a_\rho^\lambda \eta^{\sigma\nu}$$

ただし、記号  $\eta$  については添え字の上げ下げをして

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{cases} 1 & (\mu = \nu = 1, 2, 3) \end{cases}$$

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{cases} 0 & (\mu \neq \nu) \end{cases}$$

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{cases} -1 & (\mu = \nu = 0) \end{cases}$$

である。

ここで物質が空間に局在し、重力場を構成するような空間を考え、空間的な無限遠 ( $k = 1, 2, 3$ ) では次のような計量を持つとする。

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \quad (x^k \rightarrow \infty)$$

図のように  $x^0 = a, x^0 = b$  の曲面 ( $V_1, V_2$ ) とその側面 ( $V_3$ ) からなる領域  $\Omega$  を考える。次の  $V$  は 3 次元的な超曲面の体積になる。

$$V(V_1, V_2, V_3)$$

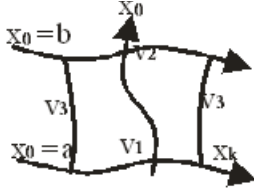


図 2.3: 超曲面の同一視

この体積に式 10.56 を用いると

$$\frac{1}{3!} \iiint_V \epsilon_{\rho\lambda\mu\nu} \mathbf{v}^\rho dv^{\lambda\mu\nu} = \int_\Omega \partial_\mu \mathbf{v}^\mu d^4x \quad (2.33)$$

ここで  $v^\mu$  は

$$v^\mu = 0 \quad (x^k \rightarrow \pm\infty)$$

が成り立つとすると  $V_3$  に沿っての積分は 0 になる。

$$dv^{123} = dx^1 dx^2 dx^3, \quad dv^{0ik} = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

よって式 10.56 から天井と底の部分が残るので

$$- \int_{V_1} v^0 dx^1 dx^2 dx^3 + \int_{V_2} v^0 dx^1 dx^2 dx^3 = 0$$

つまり次の量は  $x^0$  に無関係である。

$$J \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{v}^0 dx^1 dx^2 dx^3 \quad (2.34)$$

これが式 2.32 のアフィン変換や座標変換に対して不変であることをみてみよう。

図 2.7 において  $x^{0'} = b$  の超曲面  $V_2'$  を天井とする 4 次元の領域を  $\Omega'$  とし、 $x$  系を基準とすると式 2.33 から側面の積分は 0 として

$$\frac{1}{3!} \int_{V_2'} \epsilon_{\rho\lambda\mu\nu} \mathbf{v}^\rho dv^{\lambda\mu\nu} - \int_{V_1} \mathbf{v}^0 dx^1 dx^2 dx^3 = 0 \quad (2.35)$$

ここで  $V_2'$  上で

$$dx^{1'} \neq 0, dx^{0'} = 0, dx^{2'} = 0, dx^{3'} = 0,$$

とすると式 2.35 は

$$\int_{V_2'} \mathbf{v}^0 dx^{1'} dx^{2'} dx^{3'} - \int_{V_1} \mathbf{v}^0 dx^1 dx^2 dx^3 = 0 \quad (2.36)$$

となり、 $J$  はアフィンスカラーといえる。

Riemann 空間ではある点を指定しない限り、変換則は決まらない。そこで次のように任意の定数  $\alpha^\nu$  を成分にもち

$$\frac{\partial \mathbf{s}_\nu^\mu}{\partial x^\mu} = 0$$

$$\mathbf{v}^\mu = \mathbf{s}_\nu^\mu \alpha^\nu$$

を満たすアフィンベクトル  $\mathbf{v}$  を用いて次のように  $I$  を決めるとこれらは  $x^0$  には無関係である。

$$\begin{aligned} I &\equiv \int_{x^0=Const} \mathbf{v}^\mu dx^1 dx^2 dx^3 = \alpha^\nu I_\nu \\ I_\nu &\equiv \int_{x^0=Const} \mathbf{s}_\nu^0 dx^1 dx^2 dx^3 \end{aligned} \quad (2.37)$$

この時、 $\mathbf{s}_\nu^0$  が保存量になる。 $I_\nu$  の値は超曲面  $V$  での積分なので時空内の 1 点における量ではなく、一般座標変換に対してベクトルではなくなっている。しかし、しかし、 $x^0 = Const$  の曲線上でのアフィン変換ではベクトルとして振る舞う。これを自由ベクトル (freevector) という。

### 3 曲面の基本

電磁気学で既に Newton 物理から物質と空間を動的に関係つけていく必要が生じ、Maxwell 方程式のような共変性が重要になってくる。

これから物理現象を観測する場とその背景の存在が新しい概念形成に必要なようになってきた。

そこで第 2,3 部で学習した、多様体を応用することで相対論を含む物理学の現象を産む基礎の場を考察していこう。

第 2 部の曲面の力学において曲面を扱うための基本形式学んだ、さらにここで、様々な曲面に対応した座標軸を決める標構を学ぶ。

これによって切断と接続の関係を明らかにしていこう。

#### 3.1 正則表示 [103]

ベクトルのノルムを

$$\|\mathbf{x}\| := \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$$

として  $\mathbb{R}^n$  の 2 点間の距離  $d$  を次で定義する。

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

$\mathbb{R}^n$  内の連結な開集合を領域という。平面  $\mathbb{R}^2$  内の領域  $D \subset \mathbb{R}^2$  上で定義された  $C^r$  級ベクトル値関数  $\mathbf{x}$  として

$$\mathbf{x}(u^1, u^2) = \begin{pmatrix} x^1(u^1, u^2) \\ x^2(u^1, u^2) \\ x^3(u^1, u^2) \end{pmatrix}, \quad ((u^1, u^2) \in D) \quad (3.1)$$

これが曲面を構成する条件とは何だろうか。

そこで曲面の一部について正則表示を次のように定義しておく。

$C^r$  級ベクトル値関数  $\mathbf{x}$  が次の条件を満たす時、曲面の  $C^r$  級正則表示という。

$$\text{rank} \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \frac{\partial x^1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x^2}{\partial u^1} & \frac{\partial x^2}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x^3}{\partial u^1} & \frac{\partial x^3}{\partial u^2} \end{pmatrix} = 2 \quad ((u^1, u^2) \in D) \quad (3.2)$$

つまり、接ベクトルの成分を縦に並べた行列をつくり、その階数が 2 であれば接平面をなすので、この時の  $\mathbf{x}(u^1, u^2)$

は曲面を作る。この曲面を曲面片と呼ぶ。  
 次は曲面の接平面をつくる基底とみなせるので

$$\mathbf{x}_i := \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^i} \\ \frac{\partial x^2}{\partial u^i} \\ \frac{\partial x^3}{\partial u^i} \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

とし、曲面の単位法線ベクトルを

$$\mathbf{e}_n := \frac{\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2}{\|\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2\|}$$

で定義しておく。

例えば、 $D \subset \mathbb{R}^2$  で定義された  $C^r$  級関数を

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}$$

としてこの  $f$  のグラフを 3次元空間内  $D \rightarrow \mathbb{R}^3$  で表し、式 3.1 を

$$\mathbf{x}(u^1, u^2) = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ f(u^1, u^2) \end{pmatrix}, \quad ((u^1, u^2) \in D)$$

とすれば 3.3 より

$$\mathbf{x}_1 := \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 := \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

となるので行列  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  の階数は

$$\text{rank}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_1 & f_2 \end{pmatrix} = 2$$

となるのでこれは曲面片である。

もちろん曲面片の表し方は他にも多くある。 $pq$  平面の領域を  $\Omega$  とし、 $(u_0, v_0) \in D$  の近傍  $U$  間の座標変換  $(p, q) \rightarrow (u, v)$  を考えると

$$u = u(p, q), v = v(p, q), \frac{\partial(u, v)}{\partial(p, q)} \neq 0, \quad (\forall (p, q) \in \Omega)$$

この時、

$$\mathbf{y} : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3, \quad \mathbf{y}(p, q) := \mathbf{x}(u(p, q), v(p, q))$$

もまた、曲面片の一部分  $\mathbf{x}(U)$  の正則表示になる。

このように各局所座標がとれて、ヤコビアンが存在すれば曲面片を曲面全体に広げることができる。

### 3.2 正規直交標構 [11]

座標基底において  $T_p M$  は  $\{e_\mu\} = \{\partial/\partial x^\mu\}$  によって張られ、双対基底の  $T_p^* M$  は  $\{dx^\mu\}$  で張られる。しかし、 $M$  に計量が与えられると別の基底の選び方ができるようになる。例えば 1次結合

$$\hat{e}_\alpha = e_\alpha^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad \{e_\alpha^\mu\} \in GL(m, \mathbb{R}), \quad \det e_\alpha^\mu > 0 \quad (3.4)$$

を考えると  $\{\hat{e}_\alpha\}$  は向きを保つ  $GL(m, \mathbb{R})$  によって得られる基底ベクトルの標構 (frame) である。

さらに  $\{\hat{e}_a\}$  に次のように直交性を要請しよう。

$$g(\hat{e}_\alpha, \hat{e}_\beta) = \hat{e}_\alpha^\mu \hat{e}_\beta^\nu g_{\mu\nu} = \delta_{\alpha\beta} \quad (3.5)$$

Lorentz 多様体であれば

$$\delta_{\alpha\beta} \rightarrow \eta_{\alpha\beta}$$

で置き換えればよい。ここで

$$e_\alpha^\mu = (\epsilon_\mu^\alpha)^{-1}$$

$$e_\alpha^\mu e_\nu^\alpha = \delta_\nu^\mu$$

とすると式 3.5 から

$$g_{\mu\nu} = e_\mu^\alpha e_\nu^\beta \delta_{\alpha\beta} \quad (3.6)$$

$$g^{\mu\nu} = \delta^{\alpha\beta} e_\alpha^\mu e_\beta^\nu \quad (3.7)$$

が成り立つ。ベクトル  $V$  は基底の選び方に依存しないので

$$V = V^\mu e_\mu = V^\alpha \hat{e}_\alpha = V^\alpha e_\alpha^\mu e_\mu$$

であり、

$$V^\mu = V^\alpha e_\alpha^\mu \quad V^\alpha = e_\mu^\alpha V^\mu$$

が成り立つ。

さらに双対基底を  $\{\hat{l}^\mu\} = \{dx^\mu\}$  として

$$\langle \hat{l}^\alpha, \hat{e}_\beta \rangle = \delta_\beta^\alpha \quad (3.8)$$

で定義すると

$$\hat{l}^\alpha = e_\mu^\alpha dx^\mu \quad (3.9)$$

と書ける。これによって計量の変換が次のように表される。式 3.6 から

$$\begin{aligned} g &= g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu \\ &= g_{\mu\nu} e_\alpha^\mu e_\beta^\nu \hat{l}^\alpha \otimes \hat{l}^\beta \\ &= e_\mu^\alpha e_\nu^\beta \delta_{\alpha\beta} e_\alpha^\mu e_\beta^\nu \hat{l}^\alpha \otimes \hat{l}^\beta \\ &= \delta_{\alpha\beta} \hat{l}^\alpha \otimes \hat{l}^\beta \end{aligned} \quad (3.10)$$

この時の基底  $\{\hat{l}^\alpha\}, \{\hat{e}_\alpha\}$  は正規直交標構と呼ばれる。係数  $e_\mu^\alpha$  は 4 次元であれば 4 脚場という。点  $p$  における正規直交標構の Lie 括弧積をとってみる。式 3.4 から  $\delta_\nu^\mu = e_\gamma^\mu e_\nu^\gamma$  を用いて

$$\begin{aligned} [\hat{e}_\alpha, \hat{e}_\beta]_p &= \left[ e_\alpha^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}, e_\beta^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right]_p \\ &= e_\alpha^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( e_\beta^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) - e_\beta^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left( e_\alpha^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right) \\ &= e_\alpha^\mu \partial_\mu e_\beta^\nu \left( \delta_\nu^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right) - e_\beta^\nu (\delta_\nu^\mu \partial_\mu) e_\alpha^\mu \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)_p \\ &= [e_\alpha^\mu \partial_\mu e_\beta^\nu - e_\beta^\nu \partial_\mu e_\alpha^\mu] \left( e_\nu^\gamma e_\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)_p \\ &= e_\nu^\gamma [e_\alpha^\mu \partial_\mu e_\beta^\nu - e_\beta^\mu \partial_\mu e_\alpha^\nu]_p \hat{e}_\gamma|_p \\ &= e_{\alpha\beta}^\gamma(p) \hat{e}_\gamma|_p \end{aligned} \quad (3.11)$$



とおくことができる。これは0になるとは限らない。

例として Minkowski 時空における Dirac 行列  $\gamma^\alpha$  を考えよう。これは反対称交換

$$\{\gamma^\alpha, \gamma^\beta\} = 2\eta^{\alpha\beta} \quad (3.12)$$

を満たす。変換行列として

$$\gamma^\mu \equiv e_\alpha^\mu \gamma^\alpha$$

とすると

$$\gamma^\alpha e_\beta^\nu = e_\beta^\nu \delta^{\alpha\beta} \gamma^\alpha$$

$$e_\alpha^\mu e_\nu^\alpha = \delta_\nu^\mu$$

だから

$$\begin{aligned} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} &= \{e_\alpha^\mu \gamma^\alpha, e_\beta^\nu \gamma^\beta\} \\ &= e_\alpha^\mu \gamma^\alpha e_\beta^\nu \gamma^\beta + e_\beta^\nu \gamma^\beta e_\alpha^\mu \gamma^\alpha \\ &= e_\alpha^\mu e_\beta^\nu \delta^{\alpha\beta} \gamma^\alpha \gamma^\beta + e_\beta^\nu e_\alpha^\mu \delta^{\alpha\beta} \gamma^\beta \gamma^\alpha \\ &= e_\alpha^\mu e_\beta^\nu \delta^{\alpha\beta} \{\gamma^\alpha, \gamma^\beta\} \\ &= 2g^{\mu\nu} \end{aligned}$$

となる。

### 3.3 動標構 [11]

曲線  $C(s)$ ,  $s \in I$  が与えられた時に次のように定義されたベクトルの組を動標構 (moving frame) と呼ぶ。

$$\{e_1(s), e_2(s)\}_{s \in I}, \quad (I : [0, 1])$$

ただし次の図のように、 $e_1(s)$  は曲線の接ベクトルであり、 $e_2(s)$  は  $e_1(s)$  の右手系の直交単位ベクトルとする。従って 3次元空間の中では  $e_2(s)$  は  $2\pi$  の任意性がある。

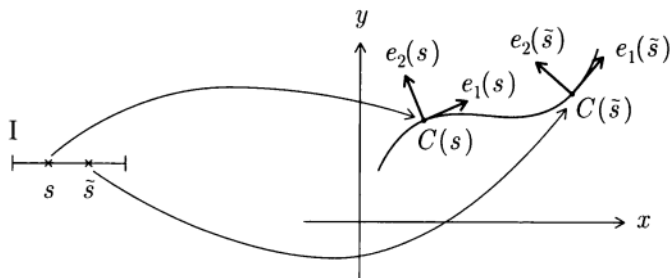


図 3.1: 2次元平面上での動標構

そこで次の図のようにまず、3次元  $\mathbb{R}^3$  で絶対的な直交座標を与え、その中の曲線  $C$  を考える。

$\mathbb{R}$  上の単位区間  $I: [0, 1]$  から  $C$  への写像を

$$\phi: I \rightarrow C$$

とする。ただし、留まることはないという条件

$$\frac{d}{dt}\phi(t) \neq 0 \tag{3.13}$$

をつける。この時  $\phi$  は弧長をパラメタに持つという。

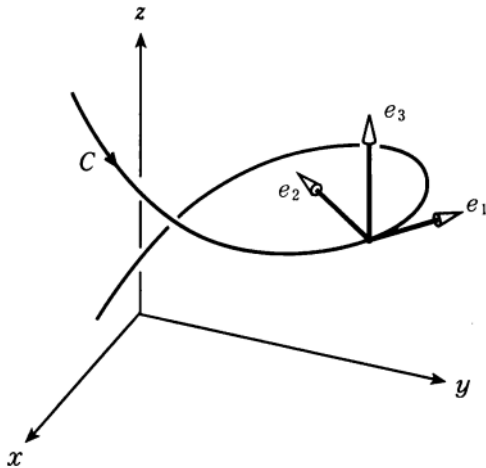


図 3.2: [11] より : 3次元空間上での動標構

これにより、曲線  $C(\phi(t))$  に沿った動標構をとれる。これを **Frenet 標構**ともいう。

$$\begin{aligned} e_1(t) &= \frac{d}{dt}\phi(t) \\ e_2(t) &= \frac{d^2}{dt^2}\phi(t) / \left\| \frac{d^2}{dt^2}\phi(t) \right\| = \frac{\dot{e}_1}{\kappa} \\ e_3(t) &= e_1(t) \times e_2(t) \end{aligned} \tag{3.14}$$

ただし、曲率  $\kappa$  と捩率  $\tau$  は

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= \kappa e_2 \\ \dot{e}_3 &= -\tau e_2 \end{aligned}$$

で定義する。各  $e$  は単位ベクトルだから

$$\kappa = \sqrt{\dot{e}_1 \dot{e}_1}$$

$$\tau = \sqrt{\dot{e}_3 \dot{e}_3}$$

も成り立つ。したがって式 3.13 に加えて、さらに

$$\frac{d^2}{dt^2}\phi(t) \neq 0$$

を課す必要がある。従ってこの標構では2次の関係まで見ていることになる。

このような定義はノルムの微分から次のように自動的に直交関係が示される。

$$\left\langle \frac{d}{dt}\phi(t), \frac{d}{dt}\phi(t) \right\rangle = 1$$

$$2 \left\langle \frac{d}{dt}\phi(t), \frac{d^2}{dt^2}\phi(t) \right\rangle = 0$$

これをねじれの関係になっていることから歪対称性原理という。  
従って動標構は正規直交基底の 1 部である。

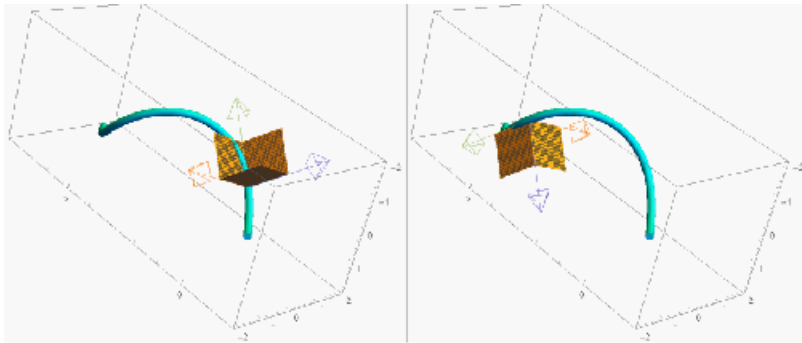


図 3.3: 曲線上の動標構

### 3.4 曲率と捩率 [11]

動標構を定義したので、その変化率を次で表す。

$$\frac{d}{dt}e_i(t) = \sum_{j=1}^3 a_{ij}(t)e_j(t)$$

変換行列  $a_{ij}$  の性質を見るために次を微分する。

$$\langle e_i(t), e_j(t) \rangle = \delta_{ij}$$

だから

$$0 = \left\langle \frac{d}{dt}e_i(t), e_j(t) \right\rangle + \left\langle e_i(t), \frac{d}{dt}e_j(t) \right\rangle$$

$$= a_{ij}(t) + a_{ji}(t)$$

さらに

$$a_{13} = \left\langle \frac{d}{dt}e_1, e_3 \right\rangle$$

$$= \left\langle \frac{d^2}{dt^2}\phi(t), e_3(t) \right\rangle$$

$$= \left\| \frac{d^2}{dt^2}\phi \right\| \langle e_2, e_3 \rangle$$

$$= 0$$

になることもわかる。従って 0 にならない値として

$$a_{12}(t) = \kappa(t)$$

$$a_{23}(t) = \tau(t)$$

と置けば、フルネ-セレの公式

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ e_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(t) & 0 \\ -\kappa(t) & 0 & \tau(t) \\ 0 & -\tau(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ e_3(t) \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

が成り立つ。この  $\kappa(t)$  を曲線  $C$  の曲率、 $\tau(t)$  を捩率という。

### 3.4.1 例 1: 螺旋

具体例として螺旋の捩率と曲率を求めよう。

$$\mathbf{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$$

の場合の曲率と捩率を求めると

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = (-a \sin t, a \cos t, b)$$

$$\left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| = \frac{ds}{dt} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

となるので線素は

$$ds = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| dt = \sqrt{a^2 + b^2} dt$$

よって曲線に沿って  $\mathbf{r}(s)$  を求めると

$$\mathbf{r}(s) = \left( a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, b \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

よって

$$e_1 = \frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} = \left( -\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

$$\frac{de_1}{ds} = \left( -\frac{a}{a^2 + b^2} \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, -\frac{a}{a^2 + b^2} \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, 0 \right)$$

となるので、まず曲率  $\kappa$  は

$$\kappa = \sqrt{\frac{de_1}{ds} \cdot \frac{de_1}{ds}} = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

となる。

$$e_2 = \frac{1}{\kappa} \frac{de_1}{ds}$$

を用いて

$$e_2 = \left( -\cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, -\sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, 0 \right)$$

$$\frac{de_2}{ds} = \left( \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, -\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, 0 \right)$$

さらに

$$e_3 = e_1 \times e_2 = \left( \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, -\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

$$\frac{de_3}{ds} = \left( \frac{b}{a^2 + b^2} \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{a^2 + b^2} \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, 0 \right)$$

となるので振率  $\tau$  は

$$\tau = \sqrt{\frac{de_3}{ds} \cdot \frac{de_3}{ds}} = \frac{b}{a^2 + b^2}$$

となる。

これは次の式 3.15 を満たしている。

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \begin{pmatrix} e_1(s) \\ e_2(s) \\ e_3(s) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\frac{a}{a^2+b^2} \cos \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} & -\frac{a}{a^2+b^2} \sin \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} & -\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} & 0 \\ \frac{b}{a^2+b^2} \cos \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{b}{a^2+b^2} \sin \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{a}{a^2+b^2} & 0 \\ -\frac{a}{a^2+b^2} & 0 & \frac{b}{a^2+b^2} \\ 0 & -\frac{b}{a^2+b^2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ -\cos \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} & -\sin \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} & 0 \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} & -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

### 3.5 ワインガルテン写像 [11]

曲面  $M$  の法線と接続の関係を簡単に見てみる。

$\mathbb{R}^3$  内の球面を

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

として、

$$\gamma : M \rightarrow S^2$$

の連続写像を点  $p$  で

$$\gamma(p) \perp T_p M$$

となれば、この写像  $\gamma$  はガウス写像という。

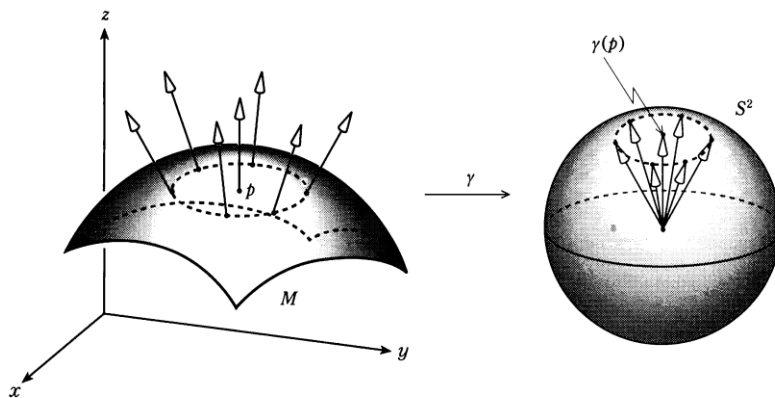


図 3.4: [11] より：ガウス写像で単位法線ベクトルを、球面上の点に対応させる。

ここで  $M$  の局所座標系  $\phi$  を

$$\phi : U \rightarrow M$$

が与えられたとする。これによって  $M$  上の点  $p$  が  $\phi(U)$  で表すことができ

$$p = \phi(u, v)$$

の2次元で表すことができる。この時、式 3.14 からガウス写像を次のように与えることができる。

$$p = \phi(u, v) \rightarrow \gamma(p) = \frac{\frac{\partial}{\partial u}\phi(u, v) \times \frac{\partial}{\partial v}\phi(u, v)}{\left\| \frac{\partial}{\partial u}\phi(u, v) \times \frac{\partial}{\partial v}\phi(u, v) \right\|} \quad (3.16)$$

そこで  $p$  点でのワインガルデン写像  $(d\gamma)_p$  を次で定義する。

$$(d\gamma)_p : T_p M \rightarrow T_{\gamma(p)} S^2 \quad (3.17)$$

として、接ベクトル  $X \in T_p M$  について

$$\begin{aligned} X &= ae_1 + be_2 \\ &= a \frac{\partial}{\partial u}\phi(u, v) + b \frac{\partial}{\partial v}\phi(u, v) \end{aligned}$$

に対し、ワインガルデン写像  $(d\gamma)_p$  はこの接平面  $X$  に作用して、 $\gamma$  の微分 1 形式をつくるように

$$\begin{aligned} (d\gamma)_p(X) &= \frac{d}{dt}\gamma(\phi(u+at, v+bt))|_{t=0} \\ &= a \frac{\partial}{\partial u}\gamma(\phi(u, v)) + b \frac{\partial}{\partial v}\gamma(\phi(u, v)) \end{aligned} \quad (3.18)$$

のように定義できた、曲面上の接平面からガウス写像上の接平面に変換する。これから次の関係が成り立つ。

$$(d\gamma)_p \left( \frac{\partial}{\partial u}\phi(u, v) \right) = \frac{\partial}{\partial u}\gamma(\phi(u, v)) \quad (3.19)$$

$$(d\gamma)_p \left( \frac{\partial}{\partial v}\phi(u, v) \right) = \frac{\partial}{\partial v}\gamma(\phi(u, v)) \quad (3.20)$$

つまり、ワインガルデン写像  $(d\gamma)_p$  は

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u}\gamma(\phi(u, v)) &= \frac{\partial \gamma}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial u} \\ \frac{\partial}{\partial v}\gamma(\phi(u, v)) &= \frac{\partial \gamma}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial v} \end{aligned}$$

と書けるので  $\phi_u, \phi_v$  の接平面をつくる単位ベクトルを  $\frac{\partial \gamma}{\partial \phi}$  で変換し、 $\gamma_u, \gamma_v$  の接ベクトルに変換する。したがって歪対称性原理から

$$\left\langle \gamma, \frac{\partial}{\partial u}\phi \right\rangle = \left\langle \gamma, \frac{\partial}{\partial v}\phi \right\rangle = 0$$

であり、 $u$  で微分して

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial u}\gamma(\phi(u, v)), \frac{\partial}{\partial u}\phi \right\rangle + \left\langle \gamma, \frac{\partial^2}{\partial u^2}\phi \right\rangle = 0$$

となるが式 3.19 があるので

$$\left\langle (d\gamma)_p \left( \frac{\partial}{\partial u}\phi(u, v) \right), \frac{\partial}{\partial u}\phi \right\rangle = - \left\langle \gamma, \frac{\partial^2}{\partial u^2}\phi \right\rangle \quad (3.21)$$

も成り立つ。

ワインガルデン写像  $(d\gamma)_p$  は  $\gamma(p)$  に直交するから

$$(d\gamma)_p : T_p M \rightarrow T_p M$$

と考えることもできる。例えば

$$X = \frac{\partial}{\partial u}\phi(u, v), Y = \frac{\partial}{\partial v}\phi(u, v)$$

とすると式 3.21 から

$$\begin{aligned} \langle (d\gamma)_p(X), Y \rangle &= \left\langle \frac{\partial}{\partial u} \gamma(\phi(u, v)), \frac{\partial}{\partial v} \phi(u, v) \right\rangle \\ &= - \left\langle \gamma(\phi(u, v)), \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \phi(u, v) \right\rangle \\ &= - \left\langle \gamma(\phi(u, v)), \frac{\partial^2}{\partial v \partial u} \phi(u, v) \right\rangle \\ &= \langle (d\gamma)_p(Y), X \rangle \end{aligned}$$

が成り立つ。

次のように鞍点をもつ曲面では曲面上で 1 周すると、ガウス曲面上で複数回周回する。

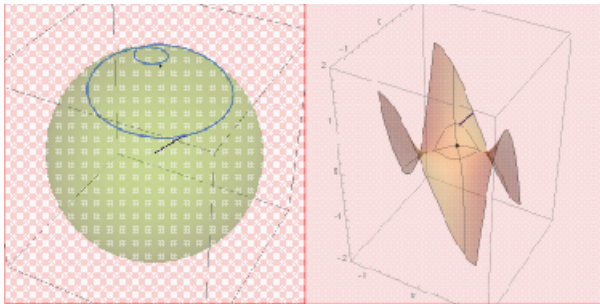


図 3.5:  $x^3 - 3xy$  の曲面での円周をガウス写像で写す

よって曲面の曲りが周回数と関連する。

### 3.6 ガウス曲率 [11]

前節の結果はワインガルデン写像  $(d\gamma)_p$  は  $(d\gamma)_p : T_p M \rightarrow T_p M$  において 2 つの固有を持つことが期待できる。

この固有値を  $k_1(p), k_2(p)$  とする。これを  $M$  の  $p$  における主曲率という。

この積をガウス曲率  $K(p)$  といい、平均を平均曲率  $H(p)$  という。

$$K(p) = k_1(p)k_2(p) \quad (3.22)$$

$$H(p) = \frac{k_1(p) + k_2(p)}{2} \quad (3.23)$$

また、ワインガルデン写像  $(d\gamma)_p$  を行列  $W$  で表すと

$$K(p) = \det [W]$$

$$H(p) = \frac{1}{2} \text{Tr} [W]$$

従って  $\gamma \rightarrow -\gamma$  のようにガウス写像の符号を変えた時、ガウス曲率の符号は変化しないが、主曲率、平均曲率の符号は変化する。

例えば球面  $M = S^2$  でのワインガルデン写像はどの点  $p$  でも恒等写像になる。

従って固有値は 1 で 2 つの主曲率は共に 1、平均曲率もガウス曲率も 1 である。

例えば次のような曲面  $M$  を考える。  $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  として

$$\phi(u, v) = \left( u, v, \frac{a}{2}u^2 + buv + \frac{c}{2}v^2 \right)$$

原点  $p = (0, 0)$  でのワインガルデン写像を考える。

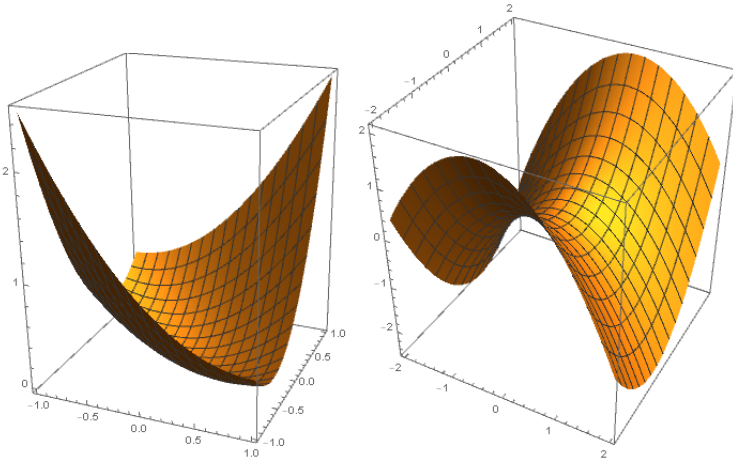


図 3.6:  $\frac{a}{2}u^2 + buv + \frac{c}{2}v^2$  のグラフ: 左  $a=b=1, c=2$ ; 右  $a=-1.2, b=0.2, c=1$  の場合

原点において次の関係になっている。

$$\frac{\partial \phi}{\partial u}(u, v) = (1, 0, au + bv) = X$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial v}(u, v) = (0, 1, bu + bc) = Y$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2}(u, v) = (0, 0, a), \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial u \partial v}(u, v) = (0, 0, b), \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2}(u, v) = (0, 0, c)$$

また、ガウス写像  $\gamma$  は原点での値が

$$\gamma(p) = (0, 0, 1) \tag{3.24}$$

となるようにし、原点での接平面は

$$(x, y) : \{(x, y, z) | z = 0\}$$

また、 $\{X, Y\}$  は  $T_p M$  の正規直交基底とする。原点でのワインガルデン写像  $(d\gamma)_p$  がこの基底で表されるとして

$$(d\gamma)_p(X) = \alpha_{11}X + \alpha_{12}Y \tag{3.25}$$

$$(d\gamma)_p(Y) = \alpha_{21}X + \alpha_{22}Y \tag{3.26}$$

この正値行列を  $A$  とする。各成分は次のように内積をとることで得られる。

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \langle (d\gamma)_p(X), X \rangle = \left\langle (d\gamma)_p \left( \frac{\partial \phi}{\partial u}(0, 0) \right), \frac{\partial \phi}{\partial u}(0, 0) \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial}{\partial u}(\gamma \circ \phi)(0, 0), \frac{\partial \phi}{\partial u}(0, 0) \right\rangle \end{aligned}$$

ここで 3.24, 3.21 より

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= - \left\langle \gamma(0, 0), \frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2}(0, 0) \right\rangle \\ &= \langle (0, 0, 1), (0, 0, a) \rangle \\ &= -a \end{aligned}$$



となる。以下同様にして次の  $2 \times 2$  の正方行列が決まる。

$$A = - \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

この固有値を  $\lambda$  とすると特性方程式

$$\det \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ b & c - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

から

$$\lambda^2 - (a + c)\lambda - b^2 + ac = 0$$

よって、この固有値  $\lambda$  が 2 つの主曲率  $k_1, k_2$  になったから

$$k_1(p), k_2(p) = \frac{-(a + c) \pm \sqrt{(a - c)^2 + 4b^2}}{2}$$

を得る。これからガウス曲率は解と係数の関係から

$$K(p) = ac - b^2$$

平均曲率も

$$H(p) = -\frac{a + c}{2}$$

となる。

### 3.7 基本量 [11]

第 4 部で多様体上での微分形式を学んだ、ここでそれを曲面で考えてみよう。

第 4 部で多様体のチャートを定義したが、これを利用して開集合  $U$  と写像の組から曲面  $M$  の局所座標系  $\{(\phi_i, U_i)\}_{i \in I}$  を固定し、

これに関数の集まり  $\{f_i\}_{i \in I}$  を貼り合わせ、曲面  $M$  上の関数をつくり、第 4 部でみたように微分形式が定義できた。

$$f_i = f \circ \phi_i$$

ただし、 $f_i$  は  $M$  上の可微分関数全体を  $C^\infty(M)$  として

$$f_i \in C^\infty(U_i)$$

またここでは共通部分  $W = \phi(U) \cap \psi(V)$  として  
変換関数を

$$\tau_{ij} = \psi_i^{-1} \circ \phi_j|_{\phi_j^{-1}(W)} \quad (3.28)$$

とし、これは

$$\phi^{-1}(W) \rightarrow \psi^{-1}(W)$$

間の微分同相写像である。

つまり、1 つの曲面にはいくつもの局所座標系がとれる。例えば

$$\{(\phi_i, U_i)\}_{i \in I}, \{(\psi_j, V_j)\}_{j \in I}$$

が  $M$  の 2 つの局所座標系であれば

$$\{(\phi_i, U_i)\}_{i \in I} \cup \{(\psi_j, V_j)\}_{j \in I}$$

も  $M$  上の 1 つの局所座標系である。

引き戻しの定義から

$$f_j = f_i \circ \tau_{ij} = \tau_{ij}^*(f_i)$$

とする。この引き戻しが存在すれば

$$f : M \rightarrow \mathbb{R}$$

がつけられるわけである。

そこで  $k$  次微分形式の集まり  $\{\omega_i \in \Omega^k(U_i) | i \in I\}$  で

$$\omega_j = \tau_{ij}^*(\omega_i), (i, j \in I)$$

を満たすものを  $M$  上の  $k$  次微分形式とよび  $\Omega^k$  で表す。

貼り合わせで  $M$  ができていれば、これが局所座標系の取り方に依存しない。

式 2.19 から計量テンソルの成分を表す内積を局所座標系を用いて次のように表す。

$$g_{ij}(u_1, u_2) = \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial u_i}(u_1, u_2), \frac{\partial \phi}{\partial u_j}(u_1, u_2) \right\rangle \quad (3.29)$$

ただし、ここでは  $(i, j) = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$  とする。

これをチャート  $(\phi, U)$  に関する第一基本量という。

たとえば

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2\}$$

の球面を考えるとチャート  $(\phi, U)$  は

$$\phi(u_1, u_2) = (\cos u_2 \cos u_1, \cos u_2 \sin u_1, \sin u_2)$$

とおくと第一基本量は

$$\begin{aligned} g_{ij}(p) &= \begin{pmatrix} (-\cos u_2 \sin u_1)^2 + (\cos u_1 \cos u_2)^2 & 0 \\ 0 & (-\sin u_2 \cos u_1)^2 + (-\sin u_2 \sin u_1)^2 + (\cos u_2)^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2 u_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。

### 3.8 面積要素

第一基本量の行列式はローレンツ変換と異なり正になるので次のように 2 次微分形式が定義できる。

これを曲面  $M$  の面積要素という。

$$\omega = \sqrt{\det(g_{ij}(p))} du_1 \wedge du_2 \quad (3.30)$$

これは局所座標に依存しているので別のチャートを用意し、 $(\psi, V)$  とすれば

$$\omega' = \sqrt{\det(g'_{ij}(p))} dv_1 \wedge dv_2$$

とすれば、変換則

$$\tau = \psi^{-1} \circ \phi \quad (3.31)$$

から

$$\omega'_j = \sum_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial u_j} = \tau_{ij} \omega_i \quad (3.32)$$

が成り立つ。そこで座標変換行列を

$$J(\tau) = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial u_1} & \frac{\partial v_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial v_2}{\partial u_1} & \frac{\partial v_2}{\partial u_2} \end{pmatrix}$$

とおくと式 3.31 から

$$\psi \circ \tau = \phi$$

となるので

$$\frac{\partial \phi}{\partial u_i} = \frac{\partial \psi}{\partial v_1} \frac{\partial v_1}{\partial u_i} + \frac{\partial \psi}{\partial v_2} \frac{\partial v_2}{\partial u_i} \quad (3.33)$$

次に留意して

$$\frac{\partial \phi}{\partial u_1} = \frac{\partial \psi}{\partial v_1} \frac{\partial v_1}{\partial u_1} + \frac{\partial \psi}{\partial v_2} \frac{\partial v_2}{\partial u_1}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial u_2} = \frac{\partial \psi}{\partial v_1} \frac{\partial v_1}{\partial u_2} + \frac{\partial \psi}{\partial v_2} \frac{\partial v_2}{\partial u_2}$$

式 3.29 より

$$g_{ij}(p) = J(\tau) g'_{ij}(p) J^T(\tau) \quad (3.34)$$

が成り立つことを確かめると

$$\begin{aligned} g_{ij}(p) &= \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial u_i}(p), \frac{\partial \phi}{\partial u_j}(p) \right\rangle = \begin{pmatrix} \left( \frac{\partial \phi}{\partial u_1} \frac{\partial \phi}{\partial u_1} \right) & \left( \frac{\partial \phi}{\partial u_1} \frac{\partial \phi}{\partial u_2} \right) \\ \left( \frac{\partial \phi}{\partial u_2} \frac{\partial \phi}{\partial u_1} \right) & \left( \frac{\partial \phi}{\partial u_2} \frac{\partial \phi}{\partial u_2} \right) \end{pmatrix} \\ &= J(\tau) g'_{ij}(p) J^T(\tau) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial u_1} & \frac{\partial v_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial v_2}{\partial u_1} & \frac{\partial v_2}{\partial u_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left( \frac{\partial \phi}{\partial v_1} \frac{\partial \phi}{\partial v_1} \right) & \left( \frac{\partial \phi}{\partial v_1} \frac{\partial \phi}{\partial v_2} \right) \\ \left( \frac{\partial \phi}{\partial v_2} \frac{\partial \phi}{\partial v_1} \right) & \left( \frac{\partial \phi}{\partial v_2} \frac{\partial \phi}{\partial v_2} \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial u_1} & \frac{\partial v_2}{\partial u_1} \\ \frac{\partial v_1}{\partial u_2} & \frac{\partial v_2}{\partial u_2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial u_1} \left( \frac{\partial \phi}{\partial v_1} \frac{\partial \phi}{\partial v_1} \right) + \frac{\partial v_1}{\partial u_2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial v_2} \frac{\partial \phi}{\partial v_1} \right) & \frac{\partial v_1}{\partial u_1} \left( \frac{\partial \phi}{\partial v_1} \frac{\partial \phi}{\partial v_2} \right) + \frac{\partial v_1}{\partial u_2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial v_2} \frac{\partial \phi}{\partial v_2} \right) \\ \frac{\partial v_2}{\partial u_1} \left( \frac{\partial \phi}{\partial v_1} \frac{\partial \phi}{\partial v_1} \right) + \frac{\partial v_2}{\partial u_2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial v_2} \frac{\partial \phi}{\partial v_1} \right) & \frac{\partial v_2}{\partial u_1} \left( \frac{\partial \phi}{\partial v_1} \frac{\partial \phi}{\partial v_2} \right) + \frac{\partial v_2}{\partial u_2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial v_2} \frac{\partial \phi}{\partial v_2} \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial u_1} & \frac{\partial v_2}{\partial u_1} \\ \frac{\partial v_1}{\partial u_2} & \frac{\partial v_2}{\partial u_2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \left( \frac{\partial v_1}{\partial u_1} \right)^2 \left( \frac{\partial \phi}{\partial v_1} \right)^2 + 2 \frac{\partial v_1}{\partial u_1} \frac{\partial v_2}{\partial u_2} \frac{\partial \phi}{\partial v_2} \frac{\partial \phi}{\partial v_1} + \left( \frac{\partial v_1}{\partial u_2} \right)^2 \left( \frac{\partial \phi}{\partial v_2} \right)^2 & A \\ A & \left( \frac{\partial v_1}{\partial u_2} \right)^2 \left( \frac{\partial \phi}{\partial v_1} \right)^2 + 2 \frac{\partial v_1}{\partial u_2} \frac{\partial v_2}{\partial u_2} \frac{\partial \phi}{\partial v_2} \frac{\partial \phi}{\partial v_1} + \left( \frac{\partial v_2}{\partial u_2} \right)^2 \left( \frac{\partial \phi}{\partial v_2} \right)^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \left( \frac{\partial \phi}{\partial u_1} \frac{\partial \phi}{\partial u_1} \right) & \left( \frac{\partial \phi}{\partial u_1} \frac{\partial \phi}{\partial u_2} \right) \\ \left( \frac{\partial \phi}{\partial u_2} \frac{\partial \phi}{\partial u_1} \right) & \left( \frac{\partial \phi}{\partial u_2} \frac{\partial \phi}{\partial u_2} \right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ただし

$$A = \left( \frac{\partial v_1}{\partial u_1} + \frac{\partial v_1}{\partial u_2} \right) \left( \frac{\partial \phi}{\partial v_1} \right)^2 + 2 \frac{\partial v_1}{\partial u_1} \frac{\partial v_2}{\partial u_2} \frac{\partial \psi}{\partial v_1} \frac{\partial \psi}{\partial v_2} + \left( \frac{\partial v_2}{\partial u_1} + \frac{\partial v_2}{\partial u_2} \right) \left( \frac{\partial \phi}{\partial v_2} \right)^2$$

である。従って式 3.33 の変換則のもとで 3.34 が確認できた。この関係はエルミート

$$J^T = J^{-1}$$

であれば

$$g_{ij}(p)^n = J(\tau) \left( g'_{ij}(p) \right)^n J^T(\tau)$$

となることに留意する。

また、転置行列は行列式が同じだから

$$\sqrt{\det(g_{ij}(p))} = \sqrt{\det(J) g'_{ij}(p) \det(J^{-1})} = \det(J(\tau)) \sqrt{\det(g'_{ij}(p))} \quad (3.35)$$

である。2形式  $dv_1 \wedge dv_2$  を  $\tau$  で引き戻すと

$$\tau^*(dv_1 \wedge dv_2) = \det(J(\tau)) du_1 \wedge du_2$$

となることがわかる。従って面積要素  $\omega$  は

$$\tau^*(\omega') = \omega \quad (3.36)$$

が成り立つことがわかった。

次に面積要素の変換を考える。

曲面  $M$  と単位球面  $S^2$  上の面積要素を  $\omega_M, \omega_{S^2}$  とする。  $\gamma: M \rightarrow S^2$  を  $M$  のガウス写像とすると

$$\gamma^*(\omega_{S^2}) = K\omega_M$$

となる。これは次のように示す。

接ベクトルのつくる面と  $\gamma(p)$  との内積が曲面  $M$  上の面積になるから  $\forall X, Y \in T_p M$  に対し、

$$\omega_M(X, Y) = \langle \gamma(p), X \times Y \rangle$$

となる。点  $p$  での主曲率  $k_1(p)$  と  $k_2(p)$  に対応する固有ベクトルで単位ベクトルになるものを  $X, Y$  とすると

$$\omega_{S^2}(X, Y) = 1$$

$$\omega_M(X, Y) = \langle \gamma(p), X \times Y \rangle = 1$$

また、3.17 から

$$(d\gamma)_p(X) = \alpha_{11}X + \alpha_{12}Y = k_1(p)\omega_{S^2}(X, Y)$$

$$(d\gamma)_p(Y) = \alpha_{21}X + \alpha_{22}Y = k_2(p)\omega_{S^2}(X, Y)$$

となるから

$$\begin{aligned} \gamma^*(\omega_{S^2})(X, Y) &= \omega_{S^2} \left( (d\gamma)_p X, (d\gamma)_p Y \right) \\ &= k_1(p)k_2(p)\omega_{S^2}(X, Y) \\ &= k_1(p)k_2(p) \\ &= K(p)\omega_M(X, Y) \end{aligned}$$

となる。

### 3.9 曲面上のベクトル場合成

$\mathbb{R}^n$  にある多様体  $M$  の接ベクトルは下図のように曲面からはみ出ることになる。  
 この接ベクトルがつくる空間をどう  $\mathbb{R}^n$  内の空間に入れるにはどうしたらよいだろうか。  
 そのために曲面を複数の曲面ではり合わせていくことを考えてみよう。  
 前節の微分形式での変換関数は式 3.32 から

$$\omega'_j = \tau_{ij}\omega_i$$

とおく。曲面  $M$  上にのベクトル場はチャート  $\{\phi_i, U_i\}_{i \in I}$  によって次のように変換される。

$$X_j = d\tau_{ji}(X_i) \tag{3.37}$$

これを以下で示す。

はじめに下図のように局所的なユークリッド平面を  $i \rightarrow j$  に写す変換関数  $\tau_{ij}$  がある。  
 これは領域を曲面 (多様体  $M$ ) に写す写像  $\phi_i, \phi_j$  を式 3.28 によって接続していく作用を持つ。

$$\tau_{ij} = \psi_i^{-1} \circ \phi_j|_{\phi_j^{-1}(W)}$$

しかし、ここで必要なのは  $\phi$  の微分でベクトル場としてみることである。  
 図の共通領域  $W$  において多くあるベクトル場の構成から

$$d\phi_k = d\tau_{ji}$$

を満たすもののみをとることで式 3.37 を満たすわけである。  
 これを決めるためには曲面の曲り方が関係する。  
 変換時に  $d\tau_{ji}$  は添え字の逆転に注意する。  
 局所座標系を  $\psi: V \rightarrow M$  とし、点  $p$  での接平面を下図のように

$$\mathbb{R}^2 \ni (s, t) \rightarrow \psi(u, v) + s \frac{\partial}{\partial u} \psi(u, v) + t \frac{\partial}{\partial v} \psi(u, v) \in \mathbb{R}^3$$

とする。パラメタの組が実平面と多様体上の 2 種類あることに留意する。  
 また、ワインガルテン写像のように常に原点に平行移動すると

$$\mathbb{R}^2 \ni (s, t) \rightarrow s \frac{\partial}{\partial u} \psi(u, v) + t \frac{\partial}{\partial v} \psi(u, v) \in \mathbb{R}^3$$

となる。

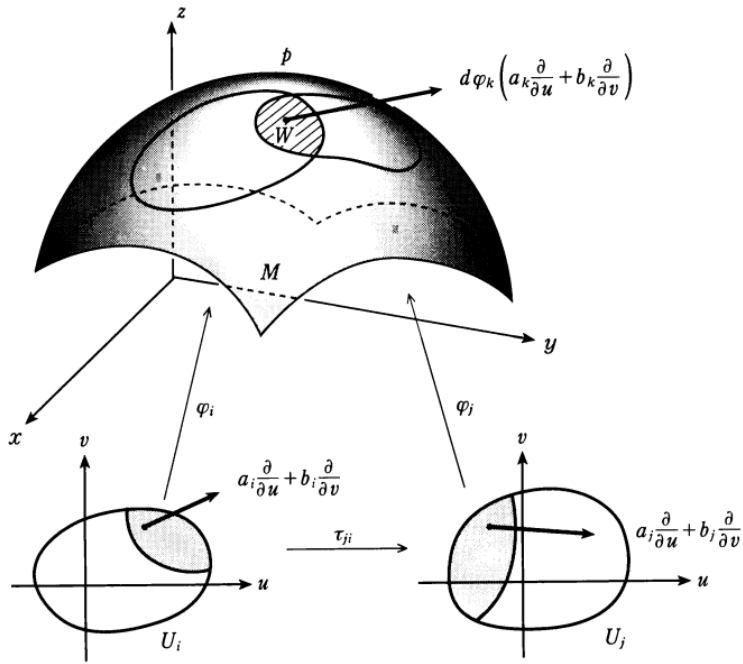


図 3.7: [11] より:2つの平面の貼り合わせで曲面を表現する。

やや複雑なので具体的にみておこう。

原点は常に点  $p$  である。多様体  $M$  の局所座標  $(\phi, U)$  が与えられた時、実平面の点  $p_0(u_0, v_0)$  での接ベクトルは

$$X = a \frac{\partial}{\partial u} + b \frac{\partial}{\partial v} \in T_{p_0} \mathbb{R}^2 \quad (3.38)$$

である。ここで写像  $\phi$  の微分

$$d\phi = d\phi_{p_0}$$

が存在すれば、この写像が実平面のベクトル場を多様体  $M$  に写す。

$$a \frac{\partial \phi}{\partial u}(u_0, v_0) + b \frac{\partial \phi}{\partial v}(u_0, v_0) \in T_p M$$

これが  $\phi$  ではなくて、 $d\phi$  との内積表記になっていることに留意すれば

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial u} du + \frac{\partial \phi}{\partial v} dv \quad (3.39)$$

だから、式 3.38 では接ベクトル  $\partial/\partial u, \partial/\partial v$  が基底であり、

式 3.39 では 1 形式ベクトル  $du, dv$  が基底であるので

$$a \frac{\partial \phi}{\partial u}(u_0, v_0) + b \frac{\partial \phi}{\partial v}(u_0, v_0) = d\phi \left( a \frac{\partial}{\partial u} + b \frac{\partial}{\partial v} \right)_p$$

よって、3.37 が成り立つことがわかる。

これをベクトル場で写像が  $\tau_{ij}$  で変換される立場からも考えてみよう。

平面  $\mathbb{R}^2$  の各点  $p(u_0, v_0) \in U$  での接ベクトルが

$$a \frac{\partial}{\partial u} + b \frac{\partial}{\partial v} \in T_{p_0} \mathbb{R}^2$$

写像  $\phi$  の微分 1 形式  $d\phi$  により次のように基底が変換され、 $M$  上の接ベクトル

$$a \frac{\partial \phi}{\partial u} \Big|_p + b \frac{\partial \phi}{\partial v} \Big|_p \in T_p M$$

に写ると考えることができる。

そこで  $\{\phi_i, U_i\}_{i \in I}$  を固定して得られたベクトル場を  $X = \{X_i\}$  とする。

$p$  は  $U, V$  の共通部分にあり、

$$p \in \phi_i(U_i) \cap \phi_j(U_j)$$

また、逆が存在して、 $k = i$  or  $j$  とし、

$$\phi_k^{-1}(p) = (u_k, v_k)$$

とおく。実平面上で点  $(u_k, v_k)$  に始点をもつベクトルを

$$X_k = a_k \frac{\partial}{\partial u} + b_k \frac{\partial}{\partial v} \in T_{(u_k, v_k)} \mathbb{R}^2$$

とすると  $X_k$  の  $\phi_k$  による  $M$  上の像が反変と共変ベクトルからスカラーが得られるように、次のように表現できる。

$$d\phi_k \cdot X_k = d\phi_k \left( a_k \frac{\partial}{\partial u} + b_k \frac{\partial}{\partial v} \right) = a_k \frac{\partial \phi_k(u_k, v_k)}{\partial u} + b_k \frac{\partial \phi_k(u_k, v_k)}{\partial v}$$

この表現は  $k = i, j$  だから行列になっていることに注意する。

これにより、 $M$  上に新しい接ベクトル  $\mathbf{X}(p)$  が得られたと見なすことができ

$$\mathbf{X}(p) \in T_p M$$

とする。

一方で  $\phi_i = \phi_j \circ \tau_{ji}$  だから変換関数の成分表示を  $((\tau_{ji})_u, (\tau_{ji})_v)$  と書くことにする。

これを微分すると

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial u} = \left( \frac{\partial \phi_j}{\partial u} \circ \tau_{ji} \right) \cdot \frac{\partial (\tau_{ji})_u}{\partial u} + \left( \frac{\partial \phi_j}{\partial v} \circ \tau_{ji} \right) \cdot \frac{\partial (\tau_{ji})_v}{\partial u}$$

同様に

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial v} = \left( \frac{\partial \phi_j}{\partial v} \circ \tau_{ji} \right) \cdot \frac{\partial (\tau_{ji})_v}{\partial v} + \left( \frac{\partial \phi_j}{\partial u} \circ \tau_{ji} \right) \cdot \frac{\partial (\tau_{ji})_u}{\partial v}$$

となるので

$$\begin{aligned} a_i \frac{\partial \phi_i(u_i, v_i)}{\partial u} + b_i \frac{\partial \phi_i(u_i, v_i)}{\partial v} &= \left( a_i \frac{\partial (\tau_{ji})_u}{\partial u}(u_i, v_i) + b_i \frac{\partial (\tau_{ji})_u}{\partial v}(u_i, v_i) \right) \frac{\partial \phi_j}{\partial u}(u_j, v_j) \\ &\quad + \left( a_i \frac{\partial (\tau_{ji})_v}{\partial u}(u_i, v_i) + b_i \frac{\partial (\tau_{ji})_v}{\partial v}(u_i, v_i) \right) \frac{\partial \phi_j}{\partial v}(u_j, v_j) \end{aligned}$$

となる。従って次のように係数の変換を次の行列で考えることができる。

$$\begin{pmatrix} a_j \\ b_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial (\tau_{ji})_u}{\partial u}(u_i, v_i) & \frac{\partial (\tau_{ji})_u}{\partial v}(u_i, v_i) \\ \frac{\partial (\tau_{ji})_v}{\partial u}(u_i, v_i) & \frac{\partial (\tau_{ji})_v}{\partial v}(u_i, v_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}$$

すなわち、

$$d\phi_i \left( a_i \frac{\partial}{\partial u} + b_i \frac{\partial}{\partial v} \right)$$

が  $M$  の接ベクトルとなるためには

$$a_j \frac{\partial}{\partial u} + b_j \frac{\partial}{\partial v} = d\tau_{ji} \left( a_i \frac{\partial}{\partial u} + b_i \frac{\partial}{\partial v} \right) \tag{3.40}$$

が成り立てばよい。

いいかえれば、この変換行列が、多様体上に連続曲面を貼り付ける指針になっている。

逆にこれは曲面の定義に使える。つまり  $\mathbb{R}^3$  の部分集合である  $M$  に対し、 $M$  を含む  $\mathbb{R}^3$  のある開集合  $V$  と  $V$  上で定義された可微分関数  $f$  があり、零値をとる条件

$$f^{-1}(0) = M$$

があって、 $M$  上の  $p$  点での  $f$  の全微分が 0 にならない条件があれば

$$df_p = \frac{\partial f}{\partial x}(p) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(p) dy + \frac{\partial f}{\partial z}(p) dz \neq 0 \quad (\forall p \in M)$$

この  $M$  は曲面になる。

例えば

$$f(x, y, z) = 1 - x^2 - y^2 - z^2$$

とすると

$$f(3^{-1/2}, 3^{-1/2}, 3^{-1/2}) = 0$$

であり、

$$df_p = -2(x + y + z) = -2\sqrt{3}$$

となり、単位球面  $S^2$  は曲面である。

さらにこの変換行列は北極側の  $\text{Map}\phi^+$  を用いて  $(\phi_2^+) \circ (\phi_1^+)$  は  $\{(u, v) \in U | u > 0\}$  からそれ、自身への写像で

$$(\phi_2^+) \circ (\phi_1^+)(u, v) = (\sqrt{1 - u^2 - v^2}, v)$$

明らかにこれは円を表している。

### 3.10 基本量と曲率

第 2 部で第 1、第 2 基本量について学んだ。ここではワインガルテン写像との関係のみよう。

$M$  の局所座標を  $\phi: U \rightarrow M$  に対して

$$X = \frac{\partial \phi}{\partial u}(u, v)$$

$$Y = \frac{\partial \phi}{\partial v}(u, v)$$

とする。次のように内積値と、ワインガルテン写像を定義する。第 1 基本量を

$$e = \langle X, X \rangle, f = \langle X, Y \rangle, g = \langle Y, Y \rangle \quad (3.41)$$

で定義する。次に前節のガウス写像を  $\gamma$  として

$$p = \phi(u, v) \rightarrow \gamma(p) = \frac{\frac{\partial}{\partial u} \phi(u, v) \times \frac{\partial}{\partial v} \phi(u, v)}{\left\| \frac{\partial}{\partial u} \phi(u, v) \times \frac{\partial}{\partial v} \phi(u, v) \right\|}$$

を用いて

第 2 基本量を

$$\ell = \left\langle (d\gamma)_p X, X \right\rangle = - \left\langle \gamma, \frac{\partial^2}{\partial u^2} \phi(u, v) \right\rangle \quad (3.42)$$

$$m = \left\langle (d\gamma)_p X, Y \right\rangle = - \left\langle \gamma, \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \phi(u, v) \right\rangle \quad (3.43)$$



$$n = \langle (d\gamma)_p Y, Y \rangle = - \left\langle \gamma, \frac{\partial^2}{\partial v^2} \phi(u, v) \right\rangle \quad (3.44)$$

で定義する。第1基本量について

$$\begin{vmatrix} e & f \\ f & g \end{vmatrix} > 0$$

であり、ワインガルテン写像を

$$(d\gamma)_p X = aX + bY$$

$$(d\gamma)_p Y = cX + dY$$

とおくと

$$\ell = \langle (d\gamma)_p X, X \rangle = \langle aX + bY, X \rangle = ae + bf$$

$$m = \langle (d\gamma)_p X, Y \rangle = \langle aX + bY, Y \rangle = af + bg = ce + df$$

$$n = \langle (d\gamma)_p Y, Y \rangle = \langle cX + dY, Y \rangle = cf + dg$$

よって

$$\begin{pmatrix} \ell & m \\ m & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$$

ガウス曲率は次のように行列式から

$$\begin{aligned} K(p) &= \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e & f \\ f & g \end{vmatrix}} = \frac{\ell n - m^2}{eg - f^2} \end{aligned} \quad (3.45)$$

平均曲率は対角和から

$$\begin{aligned} H(p) &= \frac{1}{2} \text{Tr} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left[ \begin{pmatrix} \ell & m \\ m & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}^{-1} \right] \\ &= \frac{\ell g - 2mf + ne}{2(eg - f^2)} \end{aligned} \quad (3.46)$$

よって、主曲率  $k_1(p), k_2(p)$  は次の特性方程式の解になる。

$$\det \left[ \begin{pmatrix} \ell & m \\ m & n \end{pmatrix} - k \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \right] = 0$$

特に

$$\ell : m : n = e : f : g$$

となる点を臍点と呼ぶ。

### 3.11 局所標機構 [12]

ベクトル束  $E$  は局所的には直積で表されたから 1 次独立な切断

$$\{e_1, e_2, e_3, \dots, e_r\}$$

が存在する。これを  $E$  の局所標機構 (local\_frame\_field) という。

$E$  の任意の切断は

$$\sigma = \sum \sigma^i e_i \quad (3.47)$$

で表すことができる。第 2 部でもこの切断について考察したが、切断というイメージが個人的にはどうもしっくりこなかった。

しかし、この式が表すように切断は基底ベクトルとの内積である。しかし、ベクトル束の基底でつくられているところが大局的である。

この切断面に沿って局所標機構を動かす次に示すように内積が保存される。これから接続が決まると考えていい。

$\nabla$  をベクトル束  $E$  の共変微分とすると

$$\nabla e_i \in \Gamma(T^*M \otimes E)$$

を 1 次結合としてかくと  $\omega_i^j$  を局所的な 1 次微分形式として

$$\nabla e_i = \sum \omega_i^j e_j \quad (3.48)$$

と書けるから式 3.47 を積として微分し、

$$\nabla \sigma = \sum \left( d\sigma^j + \sum \omega_\mu^i \sigma^\mu \right) e_i \quad (3.49)$$

となる。この  $\omega_i^j$  を  $\nabla$  の接続形式 (connection\_form) と呼ぶ。

次に局所標機構を  $\{e_1, e_2, e_3, \dots, e_r\}$  から  $\{e'_1, e'_2, e'_3, \dots, e'_r\}$  に変化した時の  $\omega$  の変化を見てみよう。

次の式のように線形変換で表されるとする。  $a_i^j \in GL(r, R)$  である。

$$e'_i = \sum a_i^j e_j \quad (3.50)$$

これから  $\nabla$  を作用させ、式 3.48 から

$$\nabla e'_i = \sum \omega_i^j e'_j \quad (3.51)$$

とおくと  $\nabla$  は微分演算子のように振る舞うから式 3.49 から

$$\begin{aligned} \nabla e'_i &= \nabla \left( \sum a_i^j e_j \right) \\ &= \sum \left\{ \nabla \left( a_i^j \right) e_j + a_i^j \nabla \left( e_j \right) \right\} \end{aligned}$$

よって

$$\nabla e'_i = \sum \omega_i^j e'_j \quad (3.52)$$

$$= \sum \left\{ \left( da_i^j + \sum \omega_\mu^i a_\mu^j \right) e_j + a_i^j \omega_j^k e_k \right\} \sum \left\{ \omega_\mu^i a_\mu^j \right\} e_j \quad (3.53)$$

$$= \sum \left\{ da_i^j + a_i^j \omega_j^k \right\} e_j \quad (3.54)$$

ベクトル表現では

$$\begin{aligned} a\omega' &= \omega a + da \\ \omega' &= a^{-1}\omega a + a^{-1}da \end{aligned} \quad (3.55)$$

となる。 $a$  は異なる局所標構を関連づける行列である。変換関数  $\psi_{\alpha\beta}$  に置き換えると  $U_\alpha \cap U_\beta$  上で

$$\omega_\beta = \psi_{\alpha\beta}^{-1}\omega_\alpha\psi_{\alpha\beta} + \psi_{\alpha\beta}^{-1}d\psi_{\alpha\beta} \quad (3.56)$$

となる。

逆に各  $U_\alpha$  上に 1 次微分形式 ( $r \times r$ ) の行列  $(\omega_\alpha)_j^i$  が与えられ、 $U_\alpha \cap U_\beta$  上で変換関数  $\psi_{\alpha\beta}$  が式 3.56 より関係付けされればベクトル束  $E$  に  $\{\omega_\alpha\}$  を接続形式とするような接続  $\nabla$  がただ一つだけ存在する。

そこで  $E_{U_\alpha}$  と  $E_{U_\beta}$  とで定義した接続と一致することをみてる。

簡単のために添え字は省略し、 $\alpha, \beta$  の違いをダッシュで表す。

式 3.55 から  $\omega' = 0$  とすると

$$\begin{aligned} \sigma' &= a^{-1}\sigma \\ da^{-1} &= -a^{-2}da \end{aligned}$$

が成り立つ。よって

$$\begin{aligned} \nabla(e' \cdot \sigma') &= \nabla e' \cdot \sigma' + e' \cdot d\sigma' \\ &= e' \cdot \omega' \cdot \sigma' + e' \cdot d\sigma' \\ &= ea \cdot (a^{-1}\omega a + a^{-1}da) a^{-1}\sigma + ea \cdot d(a^{-1}\sigma) \\ &= e \cdot \omega \cdot \sigma + e \cdot (da) a^{-1}\sigma + ea (da^{-1}) \sigma + e \cdot d\sigma \\ &= e \cdot \omega \cdot \sigma + e \cdot (da) a^{-1} \cdot \sigma - e \cdot a^{-1} \cdot da \cdot \sigma + e \cdot d\sigma \\ &= e \cdot \omega \cdot \sigma + e \cdot d\sigma \\ &= \nabla(e \cdot \sigma) \end{aligned} \quad (3.57)$$

となり一致する。つまり、局所標構と切断との内積は接続によって保存されるし、内積を保存するような接続が唯一決まることになる。

また、多様体  $M$  上に 2 つのベクトル束  $E, E'$  があり、接続  $\nabla, \nabla'$  が与えられると  $E \oplus E'$  に  $\nabla \oplus \nabla'$  を次のように定義することができる。

$$(\nabla \oplus \nabla')(\sigma \oplus \sigma') = \nabla(\sigma) \oplus \nabla'(\sigma') \quad (3.58)$$

つまり

$$\omega, \{e_1 \cdots e_r\} \quad (3.59)$$

の組み合わせに対し、

$$\omega', \{e'_1 \cdots e'_s\} \quad (3.60)$$

とすると次のような  $r + s$  次の行列が  $\nabla \oplus \nabla'$  に対応する。

$$\nabla \oplus \nabla', \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega' \end{pmatrix} \quad (3.61)$$

また、テンソル積  $E \otimes E'$  に対しては  $\nabla \otimes I_E + I_{E'} \otimes \nabla'$  が次のように定義できる。  $\sigma \in \Gamma(E), \sigma' \in \Gamma(E')$  として

$$(\nabla \otimes I_E + I_{E'} \otimes \nabla')(\sigma \otimes \sigma') = \nabla \sigma \otimes \sigma' + \sigma \otimes \nabla \sigma' \quad (3.62)$$

これに対応する接続形式は  $rs$  次の行列になり、

$$\omega \otimes I_s + I_{r'} \otimes \omega' \quad (3.63)$$

で与えられる。

### 3.12 役に立つ公式

#### 3.12.1 ベクトル空間

$\mathbb{R}^3$  空間の標準基底を  $e_1, e_2, e_3$  とすると

$$(e_1 \times e_2) \times e_2 = e_3 \times e_2 = -e_1$$

となるが

$$e_1 \times (e_2 \times e_2) = 0$$

また、体積要素が  $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$  として、

$$\langle v_1 \times v_2, v_3 \rangle = \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$$

となる。ガウス写像  $\gamma: M \rightarrow S^2$  として面積要素が

$$\omega_p(X, Y) = \langle \gamma(p), X \times Y \rangle$$

となる。

また、ヤコビ恒等式が

$$(v_1 \times v_2) \times v_3 + (v_2 \times v_3) \times v_1 + (v_3 \times v_1) \times v_2 = 0$$

成り立ち、ラグランジュの公式は

$$(v_1 \times v_2) \times v_3 = \langle v_1, v_3 \rangle v_2 - \langle v_2, v_3 \rangle v_1$$

である。

#### 3.12.2 共変微分

写像  $\nabla: \Gamma(M, E) \rightarrow \Gamma(M, E) \otimes \Omega^1(M)$  を

$$\nabla s(X) \equiv \nabla_X s, \quad X \in V(M), s \in \Gamma(M, E)$$

$$a_i \in \mathbb{R}, s, s' \in \Gamma(M, E), f \in \mathcal{F}(M)$$

とすると次の有用な式が成り立つ。

$$\nabla_X(a_1 s_1 + a_2 s_2) = a_1 \nabla_X s_1 + a_2 \nabla_X s_2$$

$$\nabla(a_1 s_1 + a_2 s_2) = a_1 \nabla s_1 + a_2 \nabla s_2$$

$$\nabla_{(a_1 X_1 + a_2 X_2)} s = a_1 \nabla_X s_1 + a_2 \nabla_X s_2$$

$$\nabla_X (fs) = X[f]s + f \nabla_X s$$

$$\nabla(fs) = (df)s + f \nabla s \quad (3.64)$$

$$\nabla_{fX}s = f \nabla_X s$$

## 4 ガウス-ボネの定理 [103]

### 4.1 法曲率と曲線

$\mathbf{x}: D \rightarrow \mathbb{R}^3$  を曲面  $S$  の正則表示とし、 $D$  内の曲線  $t \rightarrow (u^1(t), u^2(t))$  の  $\mathbf{x}$  による像を次のように表す。

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(u^1(t), u^2(t))$$

また、

$$\mathbf{x}_i := \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i} \quad \mathbf{x}_{ij} := \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u_i \partial u_j}$$

さらに、曲面  $(u^1, u^2)$  の単位法線ベクトルを  $\mathbf{e}_n$  で表し、

$$\mathbf{e}_n = \frac{\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2}{\|\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2\|}$$

のように定義しておく。

この時の速度ベクトルを時間微分で

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^2 \mathbf{x}_i \frac{du^i}{dt} = \sum_{i=1}^2 \dot{u}^i \mathbf{x}_i$$

と表す。そこで  $\mathbf{x}_i, \mathbf{e}$  は  $\mathbb{R}^3$  空間の基底なので  $\mathbf{x}_{ij}$  はこれらの 1 次結合でかかるとは必ずである。

$$\mathbf{x}_{ij} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \mathbf{x}_k + h_{ij} \mathbf{e}_n$$

$$\mathbf{x}' = \sum \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i} \frac{\partial u_i}{dt} \frac{dt}{ds} = \sum \mathbf{x}_i \dot{u}^i \frac{dt}{ds}$$

となるので

$$\begin{aligned} \mathbf{x}''(t(s)) &= \frac{d}{ds} \left( \sum \mathbf{x}_i \dot{u}^i \frac{dt}{ds} \right) \\ &= \sum_i \left( \sum_j \mathbf{x}_{ij} \dot{u}^j \dot{u}^i \left( \frac{dt}{ds} \right)^2 + \mathbf{x}_i \left( \frac{dt}{ds} \right)^2 \ddot{u}^i + \left( \frac{dt}{ds} \right)^2 \dot{u}^i \right) \mathbf{x}_i \\ &= \sum_i \left( \sum_{jk} \Gamma_{jk}^i \dot{u}^j \dot{u}^k \left( \frac{dt}{ds} \right)^2 + \left( \frac{dt}{ds} \right)^2 \ddot{u}^i + \left( \frac{dt}{ds} \right)^2 \dot{u}^i \right) \mathbf{x}_i + \sum_{jk} h_{jk} \dot{u}^j \dot{u}^k \left( \frac{dt}{ds} \right)^2 \mathbf{e}_n \end{aligned} \quad (4.1)$$

のようになる。ここで弧長パラメタ  $s$  を用いて

$$\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}(t(s))$$

で表すと  $\partial u$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}''(s) &= \frac{d}{ds} \left( \sum \frac{du^i}{ds} \mathbf{x}_i \right) \\ &= \sum_i \left( \frac{d^2 u^i}{ds^2} + \sum_{jk} \Gamma_{jk}^i \frac{du^j}{ds} \frac{du^k}{ds} \right) \mathbf{x}_i + \sum_{jk} h_{jk} \frac{du^j}{ds} \frac{du^k}{ds} \mathbf{e}_n \end{aligned}$$

となる。第一項が 0 となる曲線が測地線になる。

$$\frac{d^2 u^i}{ds^2} + \sum_{jk} \Gamma_{jk}^i \frac{du^j}{ds} \frac{du^k}{ds} = 0$$

よって曲面上の曲線  $\mathbf{x}(s)$  の曲率ベクトルを次のように分解する。

$$\mathbf{x}''(s) := \mathbf{k}_g + \mathbf{k}_n, \quad (\mathbf{k}_g \in \mathbf{T}_{\mathbf{x}(s)}, \mathbf{k}_n \perp T_{\mathbf{x}(s)}) \quad (4.2)$$

この時の曲率の大きさをとり、接平面と垂直な次を法曲率という。  
式 4.1 より

$$\begin{aligned} \kappa_n &:= \|\mathbf{k}_n\| \\ &= \sum_{jk} h_{jk} \dot{u}^j \dot{u}^k \left( \frac{dt}{ds} \right)^2 \end{aligned}$$

また、 $\kappa_g := \|\mathbf{k}_g\|$  を測地曲率という。  
弧長  $s$  の変分の 2 乗は

$$ds^2 = \sum g_{jk} \dot{u}^j \dot{u}^k dt^2$$

から

$$\kappa_n = \sum h_{jk} \dot{u}^j \dot{u}^k \left( \frac{dt}{ds} \right)^2 = \frac{\sum h_{jk} \dot{u}^j \dot{u}^k}{\sum g_{jk} \dot{u}^j \dot{u}^k} \quad (4.3)$$

と表すことができる。すなわち、 $\kappa_n$  は点  $\mathbf{x}(s)$  における単位円周上の 2 次同次関数となる。  
これは法曲率が曲線の速度ベクトルの方向のみで決まることを示す。

## 4.2 第 1 基本形式

物体の運動、あるいは拡張して、観測可能な物理量の変化を我々は複数の立場で観測することを考える。この時、今のところ時間をパラメタにとり、この変化は共通していると仮定する。この時間変化に対してどの観測者も同じ観測量を得るものは何だろうか。

このコンセプトが第 1 基本形式になる。では前節の準備を終え、考えていこう。

$\mathbf{x} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  を曲面  $S$  の正則表示とし、 $D$  内の曲面を  $(u(t), v(t))$  ( $a \leq t \leq b$ ) として

$$c : [a, b] \rightarrow S$$

を

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$$

で表す。第2部の曲面の力学でみたように、この曲線の速度ベクトルは

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{x}_1 \frac{du}{dt} + \mathbf{x}_2 \frac{dv}{dt} \quad (4.4)$$

と書ける。ここで

$$u^1 := u, u^2 := v, \mathbf{x}_i := \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i}$$

さらに式 3.41 から改めて、

$$E := \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1 \rangle, F := \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle, G := \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2 \rangle$$

で定義すると、 $\mathbf{x}(a)$  から  $\mathbf{x}(b)$  までの弧長  $s(t)$  は式 4.4 より

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_a^t \|\dot{\mathbf{x}}(u)\| du \\ &= \int_a^t \sqrt{E \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + G \left(\frac{dv}{dt}\right)^2} dt \end{aligned}$$

とおける。そこで

$$I := ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

を曲面の第1基本形式という。

曲線の長さは

$$L(c) = \int_a^b \|\dot{\mathbf{x}}(t)\| dt$$

となり、曲面  $u$  の正則表現に依存しない。

これは例えば領域

$$D = \{(v^1, v^2) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$E = \{(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2\}$$

として、 $\mathbf{x}(D) \cap \mathbf{x}(E)$  では  $\mathbf{x}(u^1, u^2) = \mathbf{y}(v^1, v^2)$  が存在するのでヤコビアンを

$$A_i^p := \frac{\partial v^p}{\partial u_i}, B_q^j := \frac{\partial u^j}{\partial v^q}$$

と置けば次のように変換される。

$$\mathbf{x}_i = \sum_p \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial v^p} \frac{\partial v^p}{\partial u^i} = \sum_p A_i^p \mathbf{y}_p$$

$$\mathbf{y}_p = \sum_j \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial u^j} \frac{\partial u^j}{\partial v^p} = \sum_j B_p^j \mathbf{x}_j$$

変換された  $\tilde{g}_{pq} := \langle \mathbf{y}_p, \mathbf{y}_q \rangle$  とすると

$$g_{ij} = \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle = \left\langle \sum_p A_i^p \mathbf{y}_p, \sum_q A_j^q \mathbf{y}_q \right\rangle = \sum_{pq} A_i^p A_j^q \tilde{g}_{pq}$$

$$du^i = \sum_p B_p^i dv^p$$

となるので次のように第1基本形式は不変になる。

$$\begin{aligned} \sum_{ij} g_{ij} du^i dv^j &= \sum_{ij} \sum_{pqrs} A_i^p A_j^q \tilde{g}_{pq} (B_r^i dv^r) (B_s^j dv^s) \\ &= \sum_{pqrs} \tilde{g}_{pq} \delta_r^p \delta_s^q dv^r dv^s \\ &= \sum_{pq} \tilde{g}_{pq} dv^p dv^q \end{aligned}$$

従って曲線の長さは

$$L(c) = \int_a^b \sqrt{\sum_{ij} g_{ij} du^i dv^j} dt = \int_a^b \sqrt{\sum_{pq} \tilde{g}_{pq} dv^p dv^q} dt$$

と、どちらの基底と計量を用いても同じになる。これは物体の運動を異なる系にいる観測者が見ても、その運動の距離は同じものとして

観測できることを示す重要な関係式である。

従って、第1基本形式を  $\mathbf{I}$  として

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^2 g_{ij} du^i dv^j, \quad g_{ij} = \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle$$

とすれば、相対論の不変長に相当し、座標変換に関係なく不変になる。

### 4.3 第2基本形式

$\mathbb{R}^3$  内の  $(u, v) \in S^2$  の曲面のある点  $\mathbf{x}(u, v)$  で接平面をつくることができた。

しかし、曲面であれば他の位置では接平面から離れることになる。

そこで接平面と曲面がどれくらい離れているかを計測する方法を考えたい。これが第2基本形式のコンセプトになる。

では第1基本形式をふまえ、考えていこう。

点  $\mathbf{x}(u, v)$  から微小距離離れた  $\mathbf{x}' = \mathbf{x}(u + \Delta u, v + \Delta v)$  から接平面に下ろした垂線の長さを  $a$  とする。

この  $a$  を求めるためには  $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x}' - \mathbf{x}$  と曲面と垂線の交点での単位法線ベクトル  $\mathbf{e}_n$  との内積をとればよい。

$$\mathbf{e}_n = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|} \quad (4.5)$$

これを次のように  $\Delta$  の2次までとる。

$$\begin{aligned} a &= \langle \mathbf{x}(u + \Delta u, v + \Delta v) - \mathbf{x}(u, v), \mathbf{e}_n(u, v) \rangle \\ &= \langle (\Delta u \mathbf{x}_u + \Delta v \mathbf{x}_v), \mathbf{e}_n \rangle + \left\langle \frac{1}{2} \left( (\Delta u)^2 \mathbf{x}_{uu} + 2\Delta u \Delta v \mathbf{x}_{uv} + (\Delta v)^2 \mathbf{x}_{vv} \right), \mathbf{e}_n \right\rangle + \mathcal{O}(\Delta^3 + \dots) \end{aligned}$$

この第1項は  $(\Delta u \mathbf{x}_u + \Delta v \mathbf{x}_v)$  は接平面上にあるベクトルなので、法線ベクトル  $\mathbf{e}_n$  と直交し、内積は0になる。

3次移項は無視するので、有効なのは第2項のみになる。そこで

$$h_{11} = L = \langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{e}_n \rangle$$

$$h_{12} = M = \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{e}_n \rangle$$

$$h_{22} = N = \langle \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{e}_n \rangle$$



と置けば

$$a = \frac{1}{2} \left( (\Delta u)^2 L + 2\Delta u \Delta v M + (\Delta v)^2 N \right)$$

と近似できる。しかし、 $L = M = N$  となる場合があったとしても、実際には3次以降の成分は生きるので

$$a = \frac{1}{6} \left( (\Delta u)^3 A + (\Delta u)^2 \Delta v B + \Delta u (\Delta v)^2 C + (\Delta v)^3 D \right)$$

とすることができて、実際に3次方程式

$$Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3 = 0$$

が実根を持てば接平面  $T_{\mathbf{x}(u,v)}$  は曲面と次の図のように3本の曲線で交わるので曲面を6つに分割する。

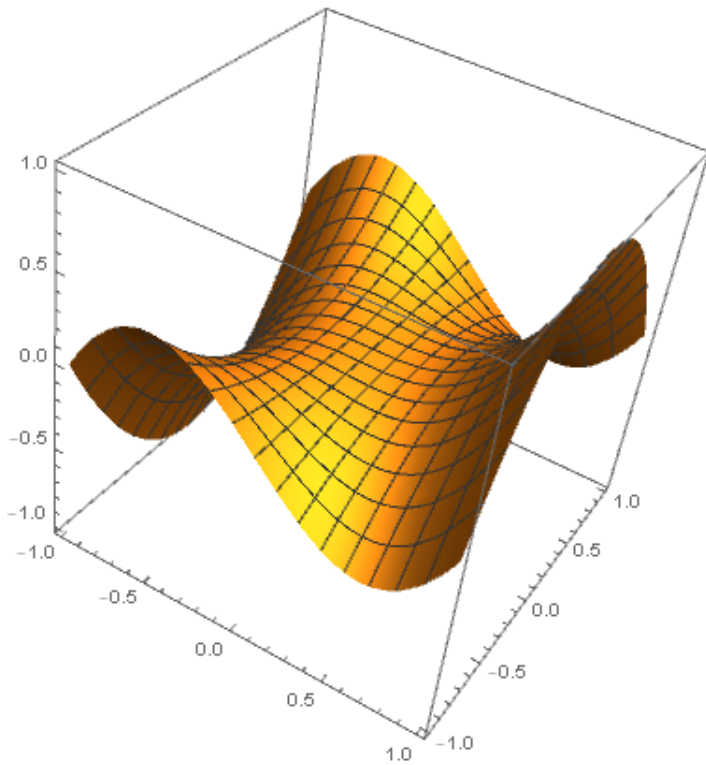


図 4.1: monkey saddle;  $u^3 - uv^2$  のグラフ

さらに、これは式 3.42, 3.43, 3.44 と同等で式 4.5 より、

$$L = \frac{|\mathbf{x}_{uu} \mathbf{x}_u \mathbf{x}_v|}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|}$$

$$M = \frac{|\mathbf{x}_{uv} \mathbf{x}_u \mathbf{x}_v|}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|}$$

$$N = \frac{|\mathbf{x}_{vv} \mathbf{x}_u \mathbf{x}_v|}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|}$$

となる。そこで第2基本形式を  $\mathbf{II}$  として

$$\mathbf{II} := \sum_{i,j=1}^2 h_{ij} du^i du^j = L du^2 + 2M du dv + N dv^2 \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned}
h_{ij} &:= \sum_{i,j=1}^2 \langle \mathbf{x}_{ij}, \mathbf{e}_n \rangle = \frac{|\mathbf{x}_{ij} \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2|}{\|\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2\|} \\
&= -\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{e}_j \rangle \quad (i, j = 1, 2)
\end{aligned}$$

と表す。この第2基本形式もまた、座標系の選び方に依存しない。これは先と同様に領域

$$D = \{(v^1, v^2) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$E = \{(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2\}$$

として、 $\mathbf{x}(D) \cap \mathbf{x}(E)$  では  $\mathbf{x}(u^1, u^2) = \mathbf{y}(v^1, v^2)$  が存在するのでヤコビアンを

$$A_i^p := \frac{\partial v^p}{\partial u^i}, \quad B_q^j := \frac{\partial u^j}{\partial v^q}$$

と置けば次のように変換された。以下では添え字の和をアインシュタイン既約で省略する。

$$\mathbf{x}_i = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial v^p} \frac{\partial v^p}{\partial u^i} = A_i^p \mathbf{y}_p$$

$$\mathbf{y}_p = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial u^j} \frac{\partial u^j}{\partial v^p} = B_p^j \mathbf{x}_j$$

$$du^i = B_p^j dv^p$$

$$dv^p = A_i^p du^i$$

また、

$$\mathbf{e}_i = \frac{\partial \mathbf{e}_n}{\partial u^i} = \frac{\partial \mathbf{e}_n}{\partial v^p} \frac{\partial v^p}{\partial u^i} = A_i^p \mathbf{e}_p$$

$$\mathbf{e}_p := \frac{\partial \mathbf{e}_n}{\partial v^p}$$

として

$$h_{ij} = \langle \mathbf{x}_{ij}, \mathbf{e}_n \rangle = -\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{e}_j \rangle \quad (4.7)$$

$$h_{pq}^* = \langle \mathbf{y}_{pq}, \mathbf{e}_n \rangle = -\langle \mathbf{y}_p, \mathbf{e}_q \rangle \quad (4.8)$$

となるので

$$h_{ij} du^i du^j = h_{pq}^* (A_i^p du^i) (A_j^q du^j) = h_{pq}^* dv^p dv^q$$

となり、不変になる。

#### 4.4 幾何的な意味

最初の問題にもどり、この第2基本形式の幾何的な意味を考えておこう。そのために  $C^r$  級の関数上の点

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathbf{u} := (u_1, u_2, 0) \in D$$

を考える。ただし、 $D \subset \mathbb{R}^2$  は前節の  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  の張る領域である。

$$\mathbf{h} := (h_1, h_2, 0)$$

は十分に小さいベクトルとすると  $f_i := \partial f / \partial u_i$  として、Taylor 展開すると

$$f(u_1 + h_1, u_2 + h_2) = f(u_1, u_2) + h_1 f_1 + h_2 f_2 + \frac{1}{2} (h_1^2 f_{uu} + 2h_1 h_2 f_{uv} + h_2^2 f_{vv}) + \mathcal{O}(3) \quad (4.9)$$

となる。領域内のベクトル  $\mathbf{x}(\mathbf{u})$  は前節は第 1 成分にとったが、第 3 成分をここでは  $f(u_1, u_2) = f(\mathbf{u})$  として

$$\mathbf{x}(\mathbf{u}) := \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ f(\mathbf{u}) \end{pmatrix} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + f(u_1, u_2) \mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{x}(\mathbf{u} + \mathbf{h}) := \begin{pmatrix} u_1 + h_1 \\ u_2 + h_2 \\ f(\mathbf{u} + \mathbf{h}) \end{pmatrix} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + f(u_1 + h_1, u_2 + h_2) \mathbf{e}_3$$

とおく。つまり  $z$  成分 (図では高さ) は  $x, y$  成分の関数で表されるような曲面を考えるのである。これにより曲面上の 2 点を

$$P := \mathbf{x}(\mathbf{u}), \quad Q := \mathbf{x}(\mathbf{u} + \mathbf{h})$$

として、下図に示す。これで端点が固定できた。

この差は、 $f$  の引数  $(u_1, u_2) = \mathbf{u}$  と表記して、式 4.9 より、3 次以上を無視して、

$$\begin{aligned} Q - P &= \mathbf{x}(\mathbf{u} + \mathbf{h}) - \mathbf{x}(\mathbf{u}) \\ &= \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ f(\mathbf{u} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{u}) \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{h} + h_1 f_1 + h_2 f_2 + \frac{1}{2} (h_1^2 f_{uu} + 2h_1 h_2 f_{uv} + h_2^2 f_{vv}) \mathbf{e}_3 + \mathcal{O}(3) \end{aligned} \quad (4.10)$$

ただし、

$$f_i := \frac{\partial f_i}{\partial u_i}$$

$$\mathbf{x}_{ij} := \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u_i \partial u_j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f(\mathbf{u}) \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

とする。次に端点  $PQ$  を結ぶ曲線を  $t$  の関数で表すことを考える。

つまり、点  $\mathbf{x}(\mathbf{u})$  を通り  $\mathbf{h}, \mathbf{e}_3$  で張られる平面を  $\Pi_P(\mathbf{h}, \mathbf{e}_3)$  とすると、切り口の曲線を

$$t \rightarrow \mathbf{x}(t) := \mathbf{x}(\mathbf{u} + t\mathbf{h}) \quad (4.12)$$

とおく。下図では黄色網掛けの長方形の部分である。

これは曲面の切り口なので第 3 項が  $z$  方向の高さになる。ただし、図のように  $z\mathbf{h}$  平面で切っているので

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} u_1 + th_1 \\ u_2 + th_2 \\ f(\mathbf{u} + t\mathbf{h}) \end{pmatrix} = \mathbf{u} + t\mathbf{h} + f(\mathbf{u} + t\mathbf{h}) \mathbf{e}_3 \quad (4.13)$$

となる。ベクトル  $\mathbf{h}$  を決めてから  $t$  で  $\mathbf{x}(t)$  を変化させていることに注意する。

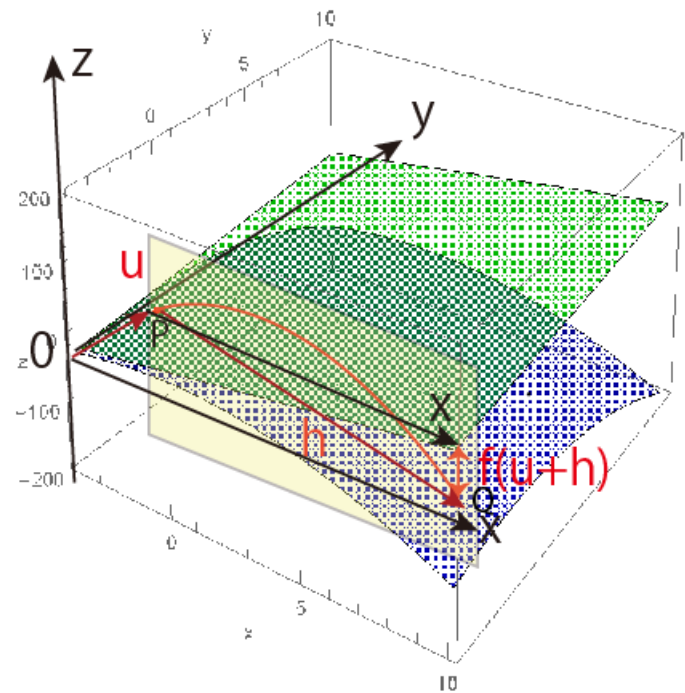


図 4.2: 曲面の接平面と垂直面での切り口

上図では、接点  $\mathbf{x}(\mathbf{u})$  からはじまる切り口の曲線、式 4.13 が赤曲線で描いてある。 $(0 \leq t \leq 1)$  このパラメタにより端点  $P, Q$  点が  $\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(1)$  で次のように表すことができる。

$$P : \mathbf{x}(0) = \mathbf{u} + f(\mathbf{u})\mathbf{e}_3$$

$$Q : \mathbf{x}(1) = \mathbf{u} + \mathbf{h} + f(\mathbf{u} + \mathbf{h})\mathbf{e}_3$$

端点の間は任意に  $\mathbf{x}(t)$  で表すことができる。

この切り口の曲線の  $t=0$  での接線の傾きは、ベクトル  $\mathbf{h}$  に沿って切り取っているので、この単位ベクトルと  $f$  の勾配との内積を考えればよい。

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{u} + t\mathbf{h}) - f(\mathbf{u})}{\|t\mathbf{h}\|} = \left\langle \nabla f(\mathbf{u}), \frac{\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|} \right\rangle = \frac{h_1 f_1 + h_2 f_2}{\|\mathbf{h}\|} \quad (4.14)$$

となる。これは曲面の接平面  $T_{\mathbf{x}(\mathbf{u})}$  と  $\Pi_P(\mathbf{h}, \mathbf{e}_3)$  の傾きに等しく、式 4.9 の  $f(\mathbf{u} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{u})$  の 1 次近似に等しい。

次に式 4.10, 4.6 から

$$\mathbf{x}(\mathbf{u} + \mathbf{h}) - \mathbf{x}(\mathbf{u}) - \langle \nabla f(\mathbf{u}), \mathbf{h} \rangle \mathbf{e}_3 = \frac{1}{2} II(h_1, h_2) \mathbf{e}_3 + \mathcal{O}(3) \quad (4.15)$$

を考える。4.13 から

$$\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ f(\mathbf{u}) \end{pmatrix}$$

となるので、 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  が作る平面の単位法線ベクトル  $\mathbf{e}_n$  は  $\left\langle \nabla f(\mathbf{u}), \frac{\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|} \right\rangle$  に垂直にならないといけない。従って式 4.14 との内積が 0 になるので

$$\mathbf{e}_n = \frac{\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2}{\|\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2\|} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} -f_1 \\ -f_2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta := \sqrt{1 + f_1^2 + f_2^2} = \|\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2\|$$

と表すことができる。従って 4.11 から

$$\begin{aligned} h_{ij} &= \langle \mathbf{x}_{ij}, \mathbf{e}_n \rangle = \frac{1}{\Delta} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f(\mathbf{u}) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -f_1 \\ -f_2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \frac{1}{\Delta} (0, 0, f_{ij}) \begin{pmatrix} -f_1 \\ -f_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} f_{ij} \end{aligned} \tag{4.16}$$

となる。また、 $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$  とおけるので

$$\langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_n \rangle = \frac{1}{\Delta} (0, 0, 1) \begin{pmatrix} -f_1 \\ -f_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}$$

となり、このベクトルのなす角  $\alpha$  は

$$\alpha = \cos^{-1} \frac{1}{\Delta}$$

である。ここで微小変位の 1 形式を

$$du^i = h_i, \quad du_j = h_j$$

とおくと、4.6 から 4.16 を用いて第 2 基本形式は  $h_i, h_j$  を用いて次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} \mathbf{II}(h_1, h_2) &= \sum_{i,j=1}^2 h_{ij} du^i du^j = \sum_{i,j=1}^2 h_{ij} h_i h_j = Ldu^2 + 2Mdu^1 du^2 + Ndv^2 \\ &= \frac{1}{\Delta} \left( \sum_{i,j} f_{ij} h_i h_j \right) \end{aligned}$$

つまり、第 2 基本形式  $\mathbf{II}(h_1, h_2)$  の幾何的な意味は曲面  $\mathbf{x}(\mathbf{u} + \mathbf{h}) - \mathbf{x}(\mathbf{u}) - \langle \nabla f(\mathbf{u}), \mathbf{h} \rangle \mathbf{e}_3$  の単位法線  $\mathbf{e}_n(\mathbf{u})$  への射影である。曲面の単位法線への射影が意味を持つ。

この  $h_{ij}$  行列は曲面の形を決める。

$$\text{rank}(h_{ij}) = 0$$

であればユークリッド平面のように対角成分しかもたないので、平坦になる。さらに

$$h_{ij} = \kappa \delta_{ij}$$

であれば臍点である。

## 4.5 Meusnier の定理

曲面上の点  $p = \mathbf{x}(0)$  における曲面の法線ベクトルと接ベクトル  $\mathbf{x}'(0)$  とで張られる平面を  $\mathbf{\Pi}$  とする。この曲面と  $\mathbf{\Pi}$  との交線を

$$\bar{\mathbf{x}}(s), \quad (-\epsilon < s < \epsilon)$$

$$\bar{\mathbf{x}}(0) = p, \bar{\mathbf{x}}'(0) = \mathbf{x}'(0)$$

とする。閉曲線  $\bar{\mathbf{x}}(s)$  の曲率ベクトルを  $\bar{\mathbf{R}}(s)$ , 曲率を  $\bar{\kappa}(s)$ ,  $p$  における曲面の単位法線ベクトルを  $\mathbf{e}_n(0)$  とし、

$$\bar{\mathbf{R}}(0) = \bar{\kappa}(0) \cdot \mathbf{e}_n(0), \bar{\kappa}(0) > 0$$

となるように定める。

前節の図ではみにくかった  $\mathbf{x}''$  と曲面の法曲率のなす角を  $\alpha$  とおく。4.2 より

$$\mathbf{x}'' = \mathbf{R}_n + \mathbf{R}_g$$

のように法曲率と測地曲率の和に書けた。点  $p = \mathbf{x}(0)$  における法曲率は

$$\mathbf{R}_n(0) = \langle \mathbf{x}''(0), \mathbf{e}_n(0) \rangle \mathbf{e}_n(0)$$

とかけるので

$$\kappa_n(\mathbf{x}'(0)) = \langle \mathbf{x}''(0), \mathbf{e}_n(0) \rangle = \kappa \cos \alpha$$

を満たす。よって

$$\mathbf{x}(u^1(s), u^2(s)), \mathbf{x}(0) = p$$

の曲率  $\kappa(0) \neq 0$  とする。この時  $\mathbf{x}'(0)$  の定める法曲率は

$$\kappa_n(\mathbf{x}'(0)) = \kappa(0) \cdot \cos \alpha$$

を満たす。これを **Meusnier** の定理という。

これを半径  $r$  の球面  $S^2(r) \in \mathbb{R}^3$  で考えてみよう。

図のように球面上の 1 点  $p$  を通る小円  $\mathbf{x}(s)$  が平面  $\Pi$  に含まれているとする。

小円の半径は  $1/\cos \theta$  だから

$$\kappa(0) = \frac{1}{r \cos \theta}$$

となる。 $p$  における内向きの法線を  $\mathbf{e}_n(p)$  と  $\mathbf{x}''(s)$  とのなす角は  $\theta$  だから Meusnier の定理より

$$\kappa_n = \langle \mathbf{x}'' , \mathbf{e}_n \rangle = \frac{1}{r \cos \theta} \cdot \cos \theta = \frac{1}{r}$$

となることがわかる。

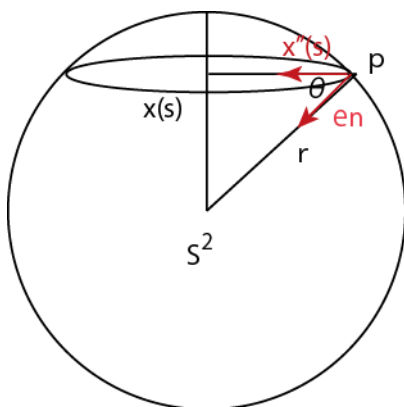


図 4.3:  $\mathbf{x}''(s)$  と  $\mathbf{e}_n$  とのなす角が  $\theta$  になる

## 4.6 主曲率

曲面上の1点  $p = \mathbf{x}(t)$  を固定して、接ベクトルを変化させる。この時の法曲率の最大、最小を探したい。そこで  $\xi = \sum \xi^i \mathbf{x}_i \neq 0$  とすると式 4.3 より

$$\kappa_n(\xi) = \frac{\sum h_{jk} \xi^j \xi^k}{\sum g_{jk} \xi^j \xi^k} \quad (4.17)$$

と書き換えることができる。この分母を払い、 $\xi$  で微分すると

$$\sum_j (h_{ij} \xi^j) = \kappa_n \sum g_{jk} \xi^j + \sum_{j,k} \frac{\partial \kappa_n}{\partial \xi^i} g_{jk} \xi^j \xi^k$$

となる。 $\kappa_n(\xi)$  が極値をとれば

$$\sum_j (h_{ij} - \kappa_n g_{jk}) \xi^j = 0, \quad (i = 1, 2) \quad (4.18)$$

となるので行列表示で

$$\begin{pmatrix} k_{11} - \kappa_n g_{11} & k_{12} - \kappa_n g_{12} \\ k_{21} - \kappa_n g_{21} & k_{11} - \kappa_n g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} = 0$$

となる。 $\xi \neq 0$  だからこの行列式が

$$\det \begin{pmatrix} k_{11} - \kappa_n g_{11} & k_{12} - \kappa_n g_{12} \\ k_{21} - \kappa_n g_{21} & k_{11} - \kappa_n g_{22} \end{pmatrix} = 0$$

とすると次の  $\kappa_n(\xi)$  についての2次方程式が得られる。

$$\det(g_{ij}) \kappa_n^2 - (g_{11} h_{22} + g_{22} h_{11} - 2g_{12} h_{21}) \kappa_n + \det(h_{ij}) = 0$$

この解を  $\kappa_1, \kappa_2$  とおけば解と係数の関係から  $g^{ij} = g_{ij}^{-1}$  だから

$$2H := \kappa_1 + \kappa_2 = \frac{g_{11} h_{22} + g_{22} h_{11} - 2g_{12} h_{21}}{\det(g_{ij})} = \sum_{ij} g^{ij} h_{ij}$$

$$K := \kappa_1 \kappa_2 = \frac{\det(h_{ij})}{\det(g_{ij})}$$

が得られ、これは式 3.22, 3.23 の平均曲率  $H$  とガウス曲率  $G$  である。

法曲率の極値  $\kappa_1, \kappa_2$  を主曲率という。次のように主曲率は2次方程式の解と係数の関係を満たすので

$$K = \kappa_1 \kappa_2, \quad H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}$$

次の特性方程式の解になる。

$$\kappa^2 - 2H\kappa + K = 0$$

従って、今後この  $\kappa$  を主曲率と呼ぶこともある。

また、主曲率を与える方向を主曲率方向という。

図のようにある点のあらゆる方向に主曲率を与えるような点は臍点(せいてん)になる。

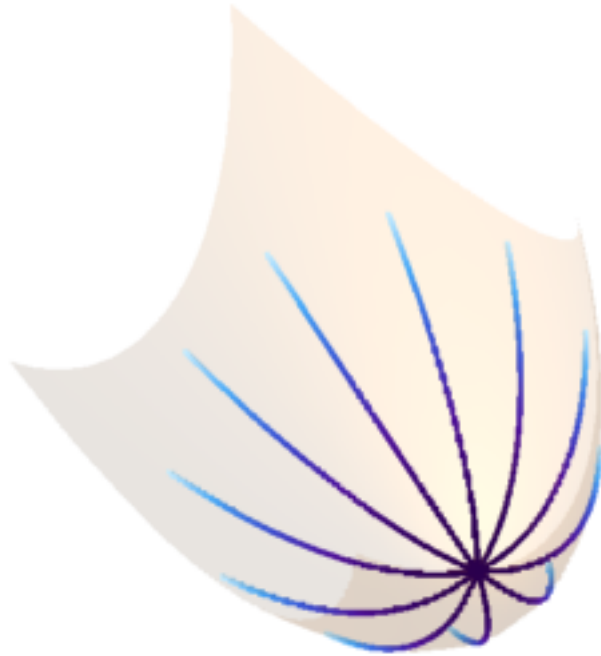


図 4.4: 球のようにどこでも臍点がとれるわけではない。曲面の形状と臍点の数はどういう関係があるだろうか。

速度ベクトルがつねに主曲率方向に接する曲線を主曲率線という。

前節ではワインガルデン写像を用いて

$$K(p) = \det [W], H(p) = \frac{1}{2} \text{Tr} [W]$$

としたことに対応している。

#### 4.7 漸近方向

曲面において法曲率が0となる方向を漸近方向といい、速度ベクトルが常に漸近方向に接する曲線を漸近線とする。

これらは曲面に固有の量で曲面の正則表示に依存しない特徴を持つ。



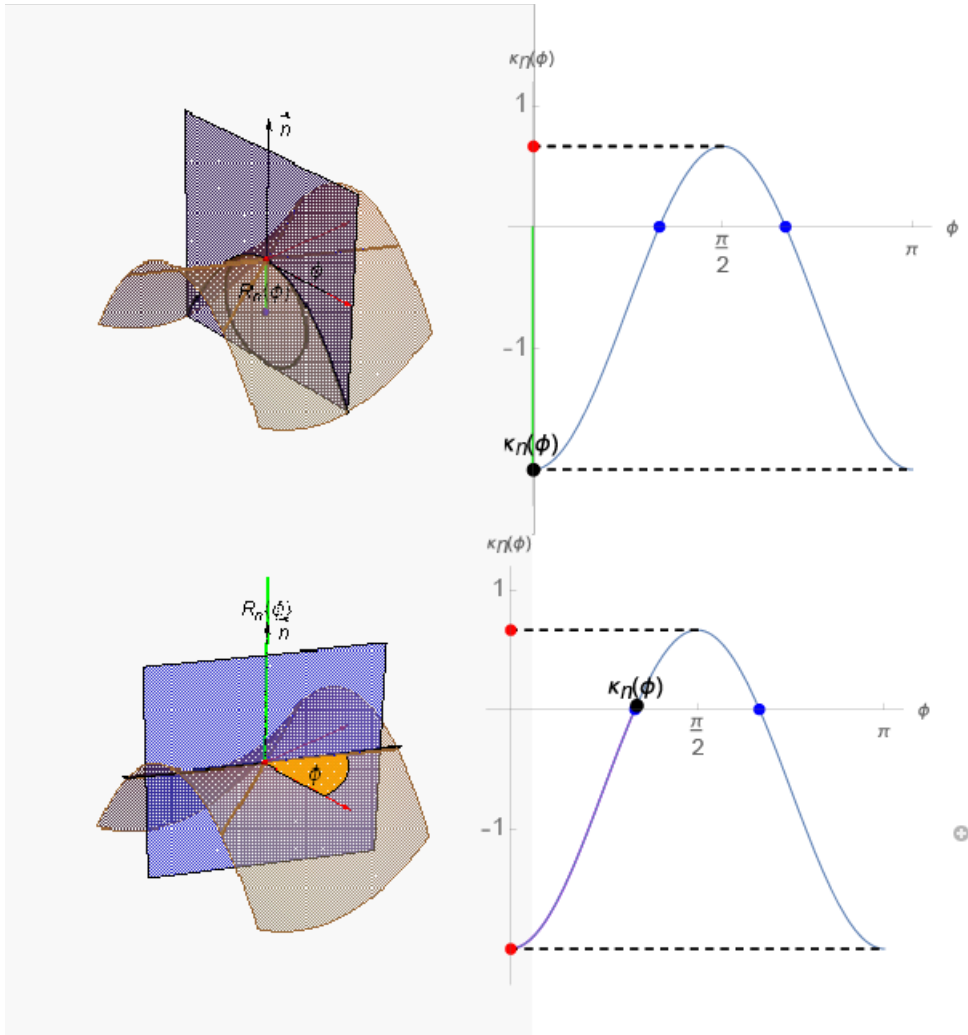


図 4.5: 鞍型の曲面と法ベクトルを軸に回転した平面との交線  
 右には法曲率のグラフが描いてある。  
 下の図では法曲率が0の漸近線が交線になっている。

図のような幾何的な関係は代数的な関係と対応する。例えば固有値との関係を見ると  $A$  を実対称行列 ( $n \times n$ ) とする。次のような関数を定義する。

$$f: S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(X) := X^t A X = \langle A X, X \rangle, \quad (X \in S^{n-1}) \quad (4.19)$$

この時、 $X$  が  $A$  の固有ベクトルとなるための必要十分条件は  $X$  が  $f$  臨界点であることである。  
 これを示すと球面上の点  $X \in S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$  における任意の接ベクトルを  $Y \in T_X S^{n-1}$  とし、 $Y$  に接する球面上の曲線を  $c(t)$  とする。

$$c(0) = X, \dot{c}(0) = Y$$

である。この時、 $f(t) := f(c(t))$  とおくと定義式 4.19 から  $X = c(t), (t \in (-\epsilon, \epsilon))$  とすれば

$$f(t) = \langle A c(t), c(t) \rangle$$

となる。よって微分して  $t = 0$  とすると  $Y = \dot{c}(0)$  だから

$$f'(0) = 2c(0)\dot{c}(0) = 2 \langle A X, Y \rangle$$

となる。よって  $X$  が  $A$  の固有ベクトルであれば

$$AX \perp Y$$

となるので

$$f'(0) = 0$$

となる。

固有値が物理的な観測量と対応したように、この漸近方向は第 8 部で扱うスケーリング則や共形場理論と関係する。

この考察は第 8 部でおこなう。

#### 4.7.1 Rodrifues の公式

曲面を扱うのに有用な公式を示す。**Rodrifues** の公式の内容は次のようになる。主曲線方向に沿って、単位法線ベクトル場を微分すると主曲率ベクトルに従属する。逆も成り立つ。曲線上の点  $\mathbf{x}(t)$  における接ベクトル

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum \frac{du^i}{dt} \mathbf{x}_i$$

が主曲率ベクトルになれば式 4.18 より次が成り立つ。

$$\sum_i \left( h_{ij} \frac{du^i}{dt} - \kappa g_{ij} \frac{du^i}{dt} \right) = 0, \quad (\forall j = 1, 2)$$

よって

$$\begin{aligned} h_{ij} &= \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{x}_j \rangle \\ g_{ij} &= \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle \end{aligned}$$

だったから

$$\sum (\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{x}_j \rangle + \kappa \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle) \frac{du^i}{dt} = 0, \quad (\forall j = 1, 2)$$

が成り立つ。一方で

$$\frac{d}{dt} \mathbf{e}_n(\mathbf{x}(t)) := \sum_i \mathbf{e}_i \frac{du^i}{dt}, \quad \frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \sum_i \mathbf{x}_i \frac{du^i}{dt}$$

となるので次のように置き換えることができる。

$$-\sum (\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{x}_j \rangle + \kappa \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle) \frac{du^i}{dt} = \left\langle \mathbf{x}_j, \left( \frac{d}{dt} \mathbf{e}_n(\mathbf{x}(t)) + \kappa \frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) \right) \right\rangle = 0, \quad (\forall j = 1, 2)$$

これから次の **Rodrifues** の公式が得られる。

$$\frac{d}{dt} \mathbf{e}_n(\mathbf{x}(t)) + \kappa \frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0} \tag{4.20}$$

ここで主曲率ベクトルを次で定義すると

$$\vec{\kappa} := \kappa \frac{d}{dt} \mathbf{x}(t)$$

なので、主曲線方向に沿って、単位法線ベクトル場を微分すると主曲率ベクトルに従属することを示す。

例えば座標曲線が主曲線のときは Rodrigues の公式から

$$\mathbf{e}_1 + \kappa_1 \mathbf{x}_1 = 0$$

となり、

$$h_{12} = -\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{x}_2 \rangle = 0$$

であり、逆に

$$g_{12} = h_{12} = 0 \tag{4.21}$$

を満たす  $(u^1, u^2) \in D$  の座標曲線は曲率線になる。

実際に接ベクトル  $\xi = \sum \xi^i \mathbf{x}_i$  に対する法曲率  $\lambda(\xi)$  は式 4.3 より

$$\lambda(\xi) = \frac{h_{11}(\xi^1)^2 + h_{22}(\xi^2)^2}{g_{11}(\xi^1)^2 + g_{22}(\xi^2)^2}$$

となる。また、全ての方向で主曲率が等しくなるような臍点を除いて曲面上の点の近傍で 2 つの主曲率方向は必ず直交する。

つまり、曲率線が座標曲線になるような正則表示がとれる。この証明は次のように積分曲線を用いて説明できる。

ある開領域  $U$  の近傍で滑らかなベクトル場  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$  とし、 $p \in U$  を通る積分曲線を

$$\frac{d\mathbf{c}_i(t)}{dt} = \mathbf{X}_i \circ \mathbf{c}_i(t), \quad \mathbf{c}_i(0) = p, \quad (i = 1, 2)$$

とする。 $\epsilon > 0$  を十分小さい数として  $\mathbf{c}_1(t)$  を通る積分曲線  $\mathbf{X}_2$  は  $t$  が  $(-\epsilon, \epsilon)$  の範囲を動く時、次の図のように  $p$  の近傍  $U_1(p)$  を

単純に覆う。同様に  $\mathbf{c}_2(t)$  を通る積分曲線  $\mathbf{X}_1$  は  $t$  が  $(-\epsilon, \epsilon)$  の範囲を動く時、次の図のように  $p$  の近傍  $U_2(p)$  を単純に覆う。

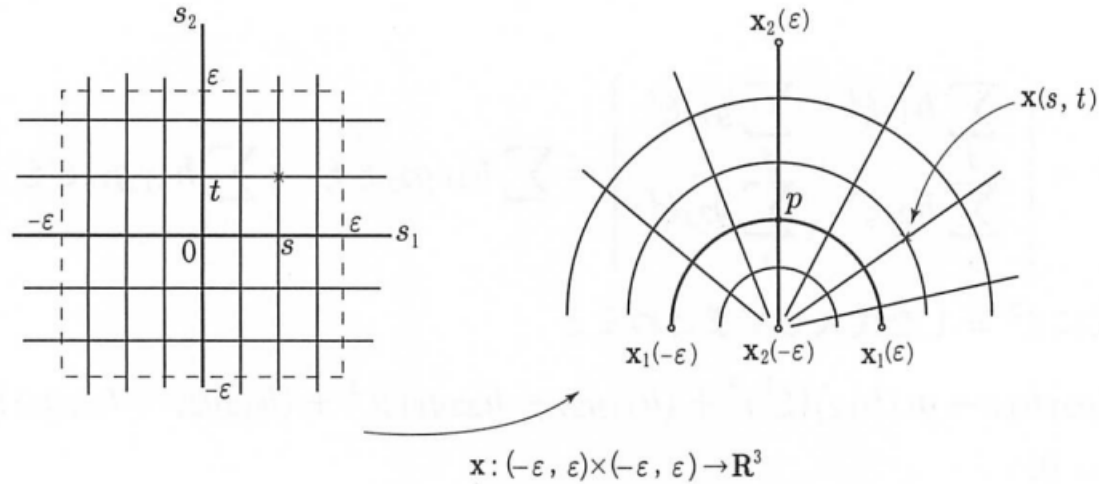


図 4.6: [103] より :  $(-\epsilon, \epsilon) \times (-\epsilon, \epsilon)$  の左図の点線内の領域が右図の  $\mathbf{x}(s, t)$  の領域に写る。この時、左図の格子上の点は右図の点に写る。デカルト座標を極座標に写すのと同じである。 $\mathbf{c}_i(0) = p$  と決める。

$\mathbf{x}_1$  が動径方向、 $\mathbf{x}_2$  が角度方向になる。これにより、積分曲線は円周に写る。

そこで  $U_1(p) \cap U_2(p)$  の連結成分で  $p$  を含むものを  $U_p$  とおく。任意の点  $q \in U_p$  に対して  $q$  を通る  $X_1, X_2$  の積分曲線が  $\mathbf{c}_2(-\epsilon, \epsilon), \mathbf{c}_1(-\epsilon, \epsilon)$  とそれぞれ一意に決まる点  $\mathbf{c}_2(s_2), \mathbf{c}_1(s_1)$  で交わる。

$$\phi(q) := (s_1, s_2), \quad \mathbf{x}_s(s, t) := \phi^{-1}(s, t)$$

と決めると、

$$\mathbf{x} : (-\epsilon, \epsilon) \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

は滑らかかつ1:1な写像になる。よってベクトル場

$$\mathbf{x}_s = \mathbf{X}_1, \mathbf{x}_t = \mathbf{X}_2$$

は1次独立になり、 $\mathbf{x}$ は $\text{rank}(\mathbf{x}) = 2$ の正則表示といえる。

具体的に回転面の場合、正值関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ を母線とする回転面 $\mathbf{x}: \mathbb{R} \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$ を

$$\mathbf{x}(u^1, u^2) := \begin{pmatrix} u_1 \\ f(u^1) \cos u^2 \\ f(u^1) \sin u^2 \end{pmatrix}$$

例えば $f(u) = \sqrt{u}$ の時は次の図のようになる。

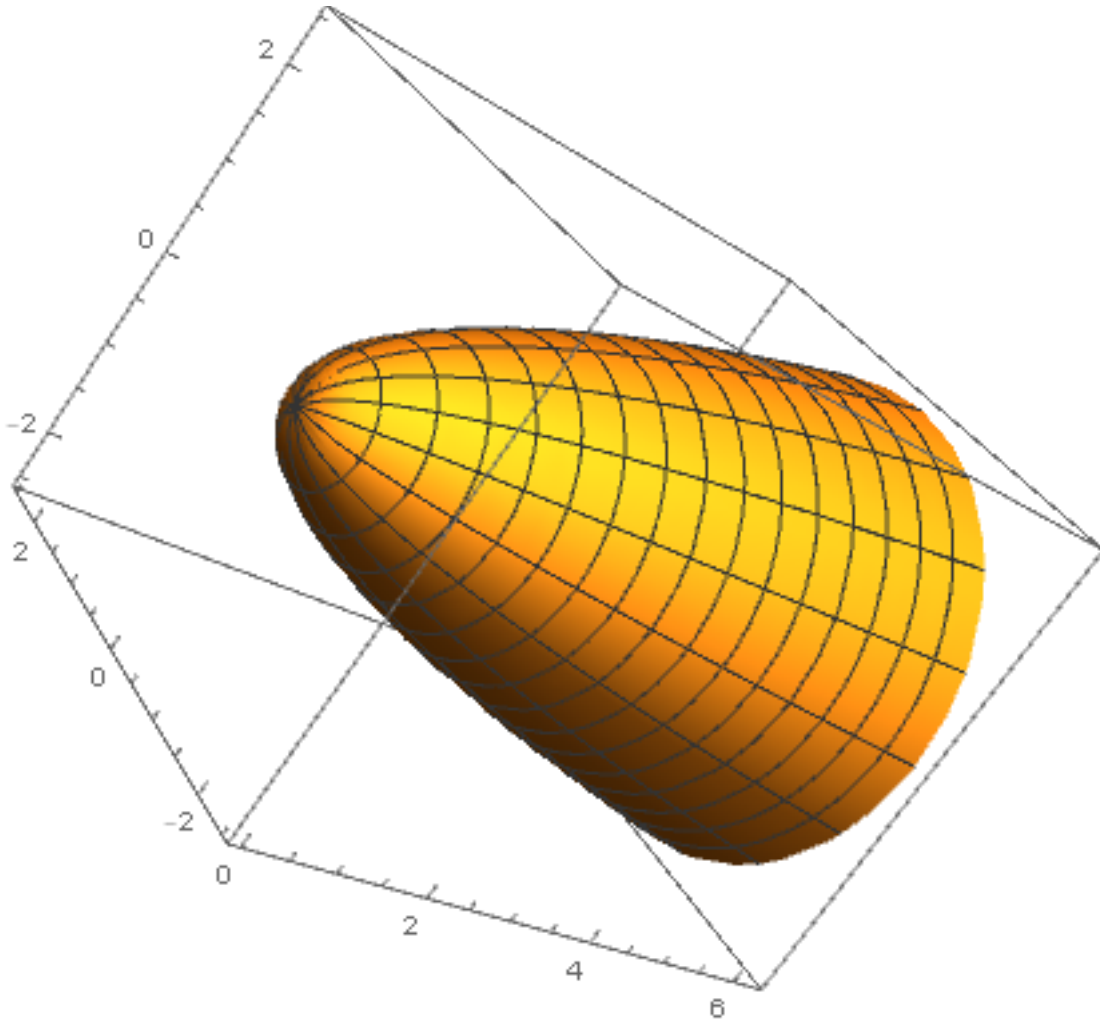


図 4.7:  $g_{\mathbf{x}}(u1\_ , u2\_ ) := \{u1, \sqrt{u1} \cos(u2), \sqrt{u1} \sin(u2)\}$

この時の接ベクトル場と単位法線ベクトル場 $\mathbf{e}_n$ は

$$\Delta := \|\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2\| = \sqrt{1 + (f')^2}$$

として

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ f(u^1)' \cos u^2 \\ f(u^1)' \sin u^2 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ f(u^1)' \cos u^2 \\ f(u^1)' \sin u^2 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_n = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} f' \\ -\cos u^2 \\ -\sin u^2 \end{pmatrix}$$

となるので第1基本形式は  $\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle$  から

$$\begin{aligned} ds^2 &= \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1 \rangle (du^1)^2 + \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2 \rangle (du^2)^2 \\ &= \left(1 + (f')^2\right) (du^1)^2 + f^2 (du^2)^2 \\ &= \Delta^2 (du^1)^2 + f^2 (du^2)^2 \end{aligned}$$

また、第2基本形式は  $h_{ij} := \langle \mathbf{x}_{ij}, \mathbf{e}_n \rangle$  から

$$h_{11} = \frac{-f''}{\Delta}, \quad h_{12} = 0, \quad h_{22} = \frac{f}{\Delta}$$

となる。ここに **Rodrigues** の公式を用いると、式 4.21 の条件

$$g_{12} = h_{12} = 0$$

を満たしたので  $u^1, u^2$  の座標曲線は共に曲率線となる。この時の主曲率は

$$\kappa_1 = \frac{h_{11}}{g_{11}} = \frac{-f''}{\Delta^3}, \quad \kappa_2 = \frac{h_{22}}{g_{22}} = \frac{1}{f\Delta}$$

となる。

#### 4.7.2 例：双曲放物線

双曲放物線の正則表示は次のようになる。

$$\mathbf{x}(u, v) := \begin{pmatrix} u \\ v \\ auv \end{pmatrix}, \quad ((u, v) \in \mathbb{R}^2)$$

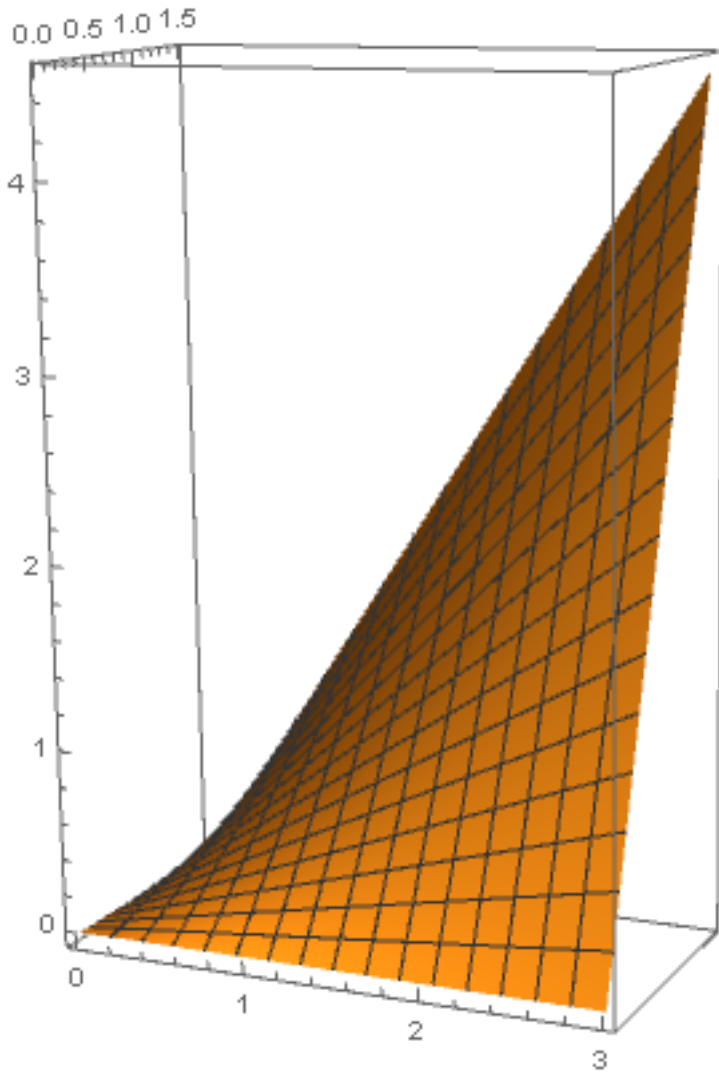


図 4.8:  $S = \{u, v, uv\}$  の曲面

前と同様に

$$\mathbf{x}_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ av \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ au \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_n = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} -au \\ -av \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{uu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_{vv} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_{uv} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix},$$

$$\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i \rangle = 2 + a^2v^2 + a^2u^2$$

$$\|\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2\| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ av \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ au \end{pmatrix} \right| = \Delta = \sqrt{1 + a^2(u^2 + v^2)}$$

さらに第1形式、第2形式から

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 + a^2v^2 & a^2uv \\ a^2uv & 1 + a^2u^2 \end{pmatrix}, \quad h_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{a}{\Delta} \\ \frac{a}{\Delta} & 0 \end{pmatrix}$$

となる。漸近方向ベクトルを  $\xi = \sum \xi^i \mathbf{x}_i$  とすると

$$\sum_{i,j=1}^2 h_{ij} \xi^i \xi^j = 2 \frac{a}{\Delta} \xi^1 \xi^2 = 0$$

となるので式 4.21 の条件

$$g_{12} = h_{12} \neq 0$$

は満たさないが  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  が法曲率が 0 となる漸近方向ベクトルである。

この双曲放物線面上に固定点を取り、 $\mathbf{x}(u_0, v_0)$  とする。この点を通る 2 つの漸近線を  $\ell_i(t)$ , ( $i = 1, 2$ ) として求めたい。

$\mathbf{x}(u_0, v_0)$  を始点とし、方向ベクトルを  $\mathbf{x}_i(u_0, v_0)$  とするので

$$\begin{aligned} \ell_1(t) &= \mathbf{x}(u_0, v_0) + t \mathbf{x}_1(u_0, v_0) \\ &= \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ au_0v_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ av_0 \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{x}(u_0 + t, v_0) \end{aligned}$$

同様に

$$\ell_2(t) = \mathbf{x}(u_0, v_0 + t)$$

となる。

これは漸近線  $\ell_i(\mathbb{R})$  は曲面に含まれることを表す。その速度ベクトルが  $\mathbf{x}_i$  となっているので、これは漸近線である。

次に点  $\mathbf{x}(u_0, v_0)$  における主曲率方向ベクトルを  $\eta_1, \eta_2$  として、これを求める。漸近方向が主曲率ベクトルで 2 分されたから

$$\begin{aligned} \eta_1 &:= \frac{\mathbf{x}_u}{\|\mathbf{x}_u\|} + \frac{\mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_v\|} \\ \eta_2 &:= \frac{\mathbf{x}_u}{\|\mathbf{x}_u\|} - \frac{\mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_v\|} \end{aligned}$$

とおく。これは

$$\langle \eta_1, \eta_2 \rangle = 0$$

を満たし、直交ベクトルである。

$$E := g_{11}, F := g_{12}, G := g_{22}$$

とすると

$$\eta := \eta^1 \frac{\mathbf{x}_1}{\sqrt{E}} + \eta^2 \frac{\mathbf{x}_2}{\sqrt{G}}$$

とかける。よって式 4.3 から

$$\begin{aligned} \kappa_n(\eta) &= \frac{\sum h_{jk} \eta^j \eta^k}{\sum g_{jk} \eta^j \eta^k} \\ &= \frac{2 \frac{a}{\Delta} \eta^1 \eta^2}{\sqrt{EG} (\eta^1)^2 + 2F \eta^1 \eta^2 + \sqrt{EG} (\eta^2)^2} \end{aligned} \quad (4.22)$$

となる。そこで

$$\eta^1 := t \eta^2$$

として、代入し、 $\kappa_n(t)$  とみなすと

$$\kappa_n(t) \simeq \frac{t}{1+t+t^2}$$

として  $\kappa_n - t$  は次のようなグラフになる。

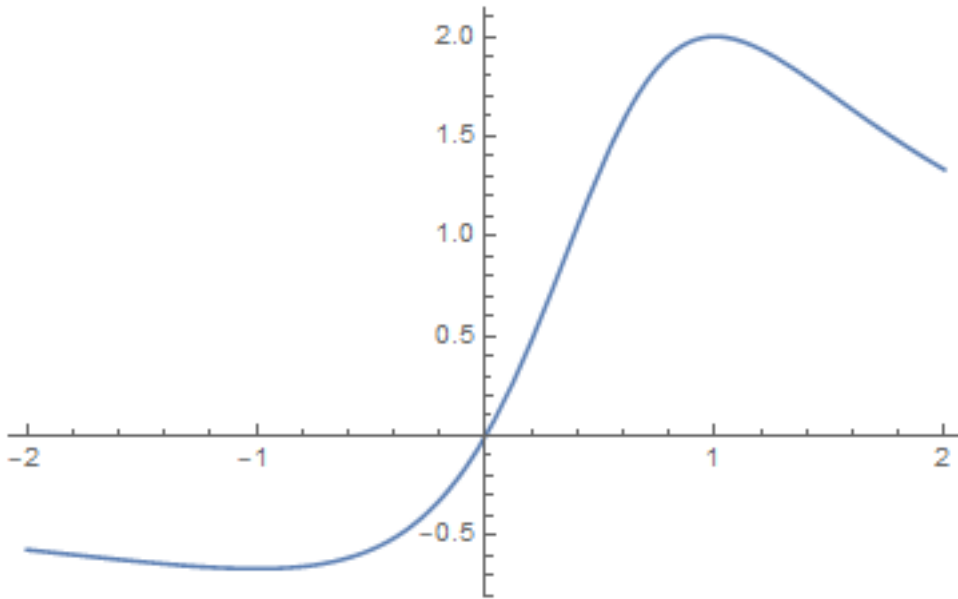


図 4.9:  $\kappa_n(t)$  のグラフ

従って、 $t = 1$  で最大値をとり、これが  $\eta_1$  になり、 $t = -1$  で最小値をとり、これが  $\eta_2$  となる。

#### 4.7.3 Beltrami-Enneper の定理

### 4.8 第 2 基本形式

$(u_1, u_2) \in U$  に対し

$$\mathbf{x}(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v))$$

$$\mathbf{e}_n = \frac{\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2}{\|\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2\|}$$

と書くと、 $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{e}_n\}$  は空間の基底とみなせる。

$$d\mathbf{x} = (dx_1(u, v), dx_2(u, v), dx_3(u, v)) = \mathbf{x}_u du + \mathbf{x}_v dv \quad (4.23)$$

となる。接平面内のベクトル  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  とし、正規直交標構を  $\mathbf{e} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  とする。この時、

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{x}_u}{\|\mathbf{x}_u\|}, \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{x}_v - \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1}{\|\mathbf{x}_v - \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1\|}$$

とおける。また、

$$\mathbf{x}_u = a_1 \mathbf{e}_1 + b_1 \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{x}_v = a_2 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2$$

とおけば、式 4.23 は接平面の基底で表すことができ

$$d\mathbf{x} = (a_1 du + a_2 dv) \mathbf{e}_1 + (b_1 du + b_2 dv) \mathbf{e}_2$$



この表現では接ベクトルを基底にしていることに留意する。そこで微分 1 形式となる成分を

$$\theta_1 = a_1 du + a_2 dv, \theta_2 = b_1 du + b_2 dv$$

と置けば

$$d\mathbf{x} = \theta_1 \mathbf{e}_1 + \theta_2 \mathbf{e}_2$$

であり、第 1 基本形式を  $ds^2$  として

$$ds^2 = \langle d\mathbf{x}, d\mathbf{x} \rangle = \langle \theta_1 \mathbf{e}_1 + \theta_2 \mathbf{e}_2, \theta_1 \mathbf{e}_1 + \theta_2 \mathbf{e}_2 \rangle = \theta_1^2 + \theta_2^2$$

となる。

## 4.9 Stokes の公式

前節でストークスの定理は式 1.4 から

$$\oint_C d\mathbf{r}\phi = \int_S d\mathbf{S} \times \nabla\phi$$

とベクトル的に表すことができた。

さらに前節でストークスの定理を微分形式からホモロジーを用いて  $k$  次元キューブ  $I^k$  上で定義された  $(k-1)$  次微分形式  $\omega \in \Omega^k(I^k)$  を考えると

$$\int_{I^k} d\omega = \int_{\partial I^k} \omega \quad (4.24)$$

となることを見た。

ここでは曲率や曲面の基本量を定義したので、これらを用いて、一般的に証明しよう。

$D$  を  $uv$  平面内の領域とし、1 形式

$$\phi = f du + g dv \in D \quad (4.25)$$

を定義しておく。 $D$  内の曲線  $C: u(t), v(t); (a \leq t \leq b)$  に沿う線積分を

$$\int_C \phi = \int_a^b \left( f \frac{du}{dt} + g \frac{dv}{dt} \right) dt$$

と定義する。次に領域  $D$  内で定義された 2 次微分形式を

$$\psi = f du \wedge dv$$

を作り、その積分を、区分的になめらかな領域を  $A \in D$  として

$$\int_A \psi = \int \int_A f dudv$$

で定義する。

この時、ストークスの公式は

$$\int_A d\phi = \int_{\partial A} \phi$$

で表される。証明は以下のようになる。4.25 より、2 形式をつくると

$$d\phi = \left( \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial g}{\partial v} \right) du \wedge dv$$

ここで  $uv$  平面の領域  $A$  と、 $xy$  平面の長方形領域  $B$  が微分同相である場合を考える。この写像  $F: A \rightarrow B$  を

$$u(x, y), v(x, y)$$

で与え、ヤコビアンは

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} > 0$$

としておく。この時

$$\iint_A f(u, v) du dv = \iint_B f(u(x, y), v(x, y)) \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} dx dy$$

が成り立つ。そこで次の領域  $A$  の 1 次微分形式を

$$\phi = f(u, v) du + g(u, v) dv \quad (4.26)$$

を領域  $B$  上に微分同相写像  $F$  で写すと  $B$  上の 1 次微分形式は  $\phi \circ F = F^* \phi$  として

$$F^* \phi = \left( f \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx + \left( f \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy \quad (4.27)$$

これから 2 形式を作ると

$$d(F^* \phi) = \left\{ \frac{\partial \left( f \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial v}{\partial y} \right)}{\partial x} - \frac{\partial \left( f \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial v}{\partial x} \right)}{\partial y} \right\} dx \wedge dy \quad (4.28)$$

となるが

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}$$

となり、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left( f \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial v}{\partial y} \right)}{\partial x} - \frac{\partial \left( f \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial v}{\partial x} \right)}{\partial y} &= \left( \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial y} + \left( \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial v}{\partial y} \\ &\quad - \left( \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{\partial u}{\partial x} - \left( \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{\partial v}{\partial x} \\ &= \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \\ &= \left( \frac{\partial g}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

となるので式 4.28 は

$$d(F^* \phi) = \left( \frac{\partial g}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx \wedge dy$$

となる。一方で  $\phi$  を外微分すると式 4.26 より

$$d\phi = \left( \frac{\partial g}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v} \right) du \wedge dv$$

$F$  が微分同相であるから  $B$  上の 2 次微分形式は  $F^* d\phi$  と書くことができた。上式を式 4.27 に代入し  $du \wedge dv$  を書き換えると

$$\begin{aligned} F^* d\phi &= \left( \frac{\partial g}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx \wedge dy \\ &= d(F^* \phi) \end{aligned}$$

となることがわかる。ここで前部の1次微分形式の引き戻しからも

$$d(F^* \phi) = d(\phi \circ F) = F^* d\phi$$

となるので

$$\int_A d\phi = \int_B F^* d\phi = \int_B d(F^* \phi) = \int_{\partial B} F^* \phi = \int_{\partial A} \phi \quad (4.29)$$

とすることができる。

これは4.24のと同じである。

#### 4.10 Gauss-Bonnet の定理

はじめに簡単な場合として  $\mathbf{x} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  を曲面  $S$  の正則表示とし、 $A \subset D$  が滑らかな閉曲線  $C$  で囲まれる単連結な領域であるとする。

この時 Gauss-Bonnet の定理は次のようになる。Gauss 曲率を  $K$ 、測地曲率を  $\kappa_g$  として

$$\iint_{\mathbf{x}(A)} K dS = 2\pi - \int_{\mathbf{x}(C)} \kappa_g ds$$

ただし、 $s$  は  $D$  の向きに同調するように向き付けられた曲線  $\mathbf{x}(C)$  の弧長パラメタとする。

証明は以下のようなになる。

曲面  $S$  の正規直交基底を  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  とすると  $\mathbf{x}$  の外微分が  $\theta$  を1次微分形式とすると

$$d\mathbf{x} = \theta_1 \mathbf{e}_1 + \theta_2 \mathbf{e}_2$$

となる。弧長パラメタ  $s$  による曲線は

$$\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}(u(s), v(s))$$

とすると  $s$  による微分は

$$\mathbf{x}' = \xi(s)\mathbf{e}_1 + \eta(s)\mathbf{e}_2$$

とおくと  $\omega$  を単位歪対称行列 ( $\omega_{ii} = 0, \omega_{ij} = -\omega_{ji}$ ) として

$$\begin{aligned} d\mathbf{x}'(s) &= d\xi(s)\mathbf{e}_1 + d\eta(s)\mathbf{e}_2 + \xi(s)d\mathbf{e}_1 + \eta(s)d\mathbf{e}_2 \\ &= d\xi(s)\mathbf{e}_1 + d\eta(s)\mathbf{e}_2 + \xi(s) \sum_{j=1}^3 \omega_{1j} \mathbf{e}_j + \eta(s) \sum_{j=1}^3 \omega_{2j} \mathbf{e}_j \\ &= (d\xi(s) + \eta(s)\omega_{21}) \mathbf{e}_1 + (d\eta(s) + \xi(s)\omega_{12}) \mathbf{e}_2 + (d\xi(s)\omega_{13} + \eta(s)\omega_{23}) \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (4.30)$$

とかける。さらにもう一度微分すれば

$$\mathbf{x}''(s) ds = d\mathbf{x}'(s)$$

となるはずだから  $\mathbf{x}''(s)$  を測地的ベクトル  $\mathbf{k}_g$  と法曲率的ベクトル  $\mathbf{k}_n$  に分けて

$$\mathbf{x}''(s) = \mathbf{k}_g + \mathbf{k}_n$$

とすると次の関係が導ける。

$$\mathbf{k}_g ds = (d\xi(s) + \eta(s)\omega_{21}) \mathbf{e}_1 + (d\eta(s) + \xi(s)\omega_{12}) \mathbf{e}_2 \quad (4.31)$$

$$\mathbf{k}_n ds = (d\xi(s)\omega_{13} + \eta(s)\omega_{23}) \mathbf{e}_3$$

ここで  $\phi(s)$  を  $\mathbf{e}_1$  と  $\mathbf{x}'(s)$  のなす角ととれば

$$\xi(s) = \cos \phi(s), \eta(s) = \sin \phi(s)$$

と置けるので

$$\mathbf{x}'(s) = \cos \phi(s) \mathbf{e}_1 + \sin \phi(s) \mathbf{e}_2$$

となる。そこで、これと直交するベクトルを

$$\mathbf{a}(s) = -\sin \phi(s) \mathbf{e}_1 + \cos \phi(s) \mathbf{e}_2$$

とおけば式 4.31 より

$$\mathbf{k}_g ds = (-\sin \phi(s) d\phi + \sin \phi(s) \omega_{21}) \mathbf{e}_1 + (\cos \phi(s) d\phi + \cos \phi(s) \omega_{12}) \mathbf{e}_2$$

従って  $\omega_{12} = -\omega_{21}$  だから

$$\mathbf{k}_g ds = (d\phi - \omega_{21}) \mathbf{a}(s)$$

が成り立つ。この大きさをとると測地曲率  $\kappa_g = \|\mathbf{k}_g\|$  だから

$$\kappa_g ds = d\phi - \omega_{21}$$

となる。これを積分すると

$$\int_{\mathbf{x}(C)} \kappa_g ds = \int_{\mathbf{x}(C)} d\phi - \int_{\mathbf{x}(C)} \omega_{21}$$

## 5 Lie 微分

### 5.1 定義

第4部でベクトル場について学んだ、ここでは曲がった空間を一般的に取り扱うのに有用な **Lie 微分** を紹介する。

関数  $\phi$  と座標  $x$  の2つの変化があることがポイントである。

まず、座標変化については4次元時空間において無限小変化を

$$x'_\mu \rightarrow x_\mu + \delta x_\mu$$

とおくと場の量  $\phi$  とその正準運動量は  $\pi$  は次のような変換を受ける。

$$\phi'_r(x') = \phi_r(x) + \delta \phi_r(x)$$

$$\pi'_r(x') = \pi_r(x) + \delta \pi_r(x)$$

この時、同じ座標で関数の変化を比較するよう Lie 微分  $\mathcal{L}$  が次のように定義できる。

$$\mathcal{L}\phi(x) \equiv \phi'(x) - \phi(x) \tag{5.1}$$

つまり Lie 微分は同じ座標で箱の変化の差をとったものである。通常の微分と関数の変分が

$$\partial_\mu \phi(x) \equiv \frac{\phi(x') - \phi(x)}{\delta x^\mu}$$

$$\delta\phi(x) \equiv \phi'(x') - \phi(x)$$

となったことに留意すると Lie 微分は次のように書き直すことができる。

$$\phi'(x') - \phi(x) - (\phi'(x') - \phi'(x)) = \delta\phi(x) - \delta x^\mu \partial_\mu \phi(x) \tag{5.2}$$

この Lie 微分について詳しく見ていこう。前節でとりあげた流れ  $\sigma(t, x)$  と  $\tau(t, x)$  をそれぞれベクトル場  $X, Y$  が生成するとして

$$\frac{d\sigma^\mu(s, x)}{ds} = X^\mu(\sigma(s, x))$$

$$\frac{d\tau^\mu(s, x)}{ds} = Y^\mu(\tau(s, x))$$

が成り立つとする。ここで流れ  $\sigma(s, x)$  に沿ったベクトルの変化について考える。

そのために図のようにベクトル  $Y$  の近傍の点を比較しないといけない。しかし、 $Y_x$  と  $Y_{\sigma_x}$  とは異なる接空間  $T_x M$  と  $T_{\sigma_x} M$  に属するために次の写像が必要になる。

$$(\sigma_{-\varepsilon})_* : T_{\sigma_x} M \rightarrow T_x M$$

比較するために微分写像  $(\sigma_{-\varepsilon})_*$  で  $x$  へ移動する。

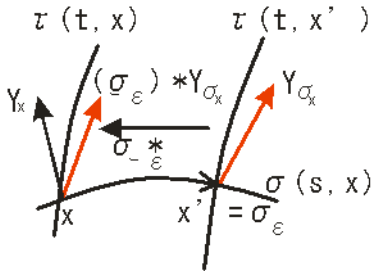


図 5.1:  $Y_x$  と  $Y_{\sigma_x}$  と比較するために微分写像  $(\sigma_{-\varepsilon})_*$  で  $x$  へ移動する。

このような考えのもとでベクトルを比較することから次の Lie 微分が定義される。

$$\mathcal{L}_X Y = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} [(\sigma_{-\varepsilon})_* Y|_{\sigma_\varepsilon} - Y|_x] \tag{5.3}$$

これは次のように表記しても同等である。

$$\mathcal{L}_X Y = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} [Y|_x - (\sigma_\varepsilon)_* Y|_{\sigma_{-\varepsilon}}] \tag{5.4}$$

つまり流れがあるおかげで可逆的に前後移動ができることがわかる。

まず、ベクトル場のリー微分を考える。第 2 部でみた、引き戻しを利用することができる。

接ベクトル  $X^\mu$  で作られるベクトル場に沿って 1 変数のパラメタで記述される曲線を  $\phi_t$  とすると点  $P$  はこの曲線で  $\phi_t(P)$  の点に移動する。

$$P \rightarrow \phi_t(P)$$

従ってこの点でのベクトルは  $V_{\phi_t(P)}$  と表すことができる。よってこれを  $P$  点に引き戻すと

$$V_{\phi_t(P)} \xrightarrow{\text{pullback}} (\phi_t^* V)_P$$

となる。この時リー微分は一般に

$$(\mathcal{L}_X V)_P = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\phi_t^* V)_P - V_P}{t} \quad (5.5)$$

となる。

## 5.2 Lie 括弧積

さらにこれを平面に拡大して考える。

第 2 部で振率テンソルが曲面上での無限小移動を考えたときの平行四辺形からのずれになることを見た。

ここでは流れの考え方でこのずれを見る。

図のように点  $x$  から出発し、1 つは流れ  $\sigma$  に沿って  $\varepsilon$  だけ移動した  $\sigma(\varepsilon, x)$  から次に流れ  $\tau$  に沿って  $\delta$  だけ移動した  $\tau(\delta, \sigma(\varepsilon, x))$  に行く経路である。これを接ベクトル  $X, Y$  を用いて表すと

$$\tau^\mu(\delta, \sigma(\varepsilon, x)) \cong \tau^\mu(\delta, x^\nu + \varepsilon X^\nu(x))$$

$$\cong x^\mu + \varepsilon X^\mu(x) + \delta Y^\mu(x^\nu + \varepsilon X^\nu(x))$$

$$\cong x^\mu + \varepsilon X^\mu(x) + \delta Y^\mu(x) + \varepsilon \delta X^\nu \partial_\nu Y^\mu(x)$$

となる。もう 1 つは流れ  $\tau$  に沿って  $\delta$  だけ移動した  $\tau(\delta, x)$  から次に流れ  $\sigma$  に沿って  $\varepsilon$  だけ移動した  $\sigma(\varepsilon, \tau(\delta, x))$  に行く経路である。これを接ベクトル  $X, Y$  を用いて表すと

$$\sigma(\varepsilon, \tau(\delta, x)) \cong \sigma^\mu(\varepsilon, x^\nu + \delta X^\nu(x))$$

$$\cong x^\mu + \delta Y^\mu(x) + \varepsilon X^\mu(x^\nu + \delta X^\nu(x))$$

$$\cong x^\mu + \varepsilon X^\mu(x) + \delta Y^\mu(x) + \varepsilon \delta Y^\mu \partial_\nu X^\nu(x)$$

となる。よってこの差をとり、次のように Lie 微分が定義できる。

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} (\tau^\mu(\delta, \sigma(\varepsilon, x)) - \sigma(\varepsilon, \tau(\delta, x))) &= \delta X^\nu \partial_\nu Y^\mu(x) - \delta Y^\mu \partial_\nu X^\nu(x) \\ &= [X, Y] \end{aligned} \quad (5.6)$$

一般に 1 形式  $\omega$  の  $X$  に沿った Lie 微分を

$$\omega|_x \in T_x^* M, \quad \omega = \omega_\mu dx^\mu$$

とし、 $\sigma_\varepsilon$  による引き戻し、

$$\begin{aligned}
(\sigma_\epsilon)^*\omega|_{\sigma_\epsilon(x)} &= \omega_\mu(x)dx^\mu + \epsilon\partial_\mu(X^\nu\omega_\nu)dx^\mu \\
&= \omega_\mu(x)dx^\mu + \epsilon[X^\nu(x)\partial_\nu\omega_\mu(x) + \partial_\mu X^\nu(x)\omega_\nu(x)]dx^\mu
\end{aligned}$$

として

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_X\omega &\equiv \lim_{\epsilon\rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} ((\sigma_\epsilon)^*\omega|_{\sigma_\epsilon(x)} - \omega|_x) \\
&= (X^\nu\partial_\nu\omega_\mu + \partial_\mu X^\nu\omega_\nu) dx^\mu \\
&= [X, \omega]
\end{aligned} \tag{5.7}$$

である。

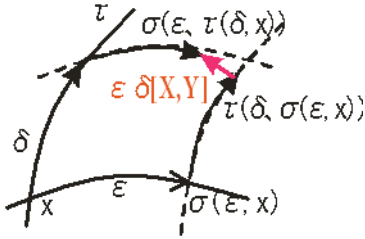


図 5.2: 異なる曲線に沿った経路の差

さらに関数  $f$  の Lie 微分は次のように定義できる。

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_X f &\equiv \lim_{\epsilon\rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} (f(\sigma_\epsilon(x)) - f(x)) \\
&= \lim_{\epsilon\rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} (f(x^\mu + \epsilon X^\mu(x)) - f(x)) \\
&= X^\mu(x) \frac{f(x)}{\partial x^\mu} \\
&= X[f]
\end{aligned}$$

一般にテンソル場  $t$  に対して

$$\mathcal{L}_{[X, Y]}t = \mathcal{L}_X\mathcal{L}_Yt - \mathcal{L}_Y\mathcal{L}_Xt \tag{5.8}$$

が成り立つ。

従って Lie 微分は時空の同じ点でテンソルの差をとることになるので共変的である。

### 5.3 内部積

外積を一般化したので内積も一般化しておこう。  $X$  をベクトル場として  $k$  次微分形式から  $k-1$  次微分形式つくる操作として内部積  $i_X$  を次で定義する。

$$\begin{aligned}
i_X\omega(X_1, X_2 \cdots X_{k-1}) &= \omega(X, X_1 \cdots X_{k-1}) \\
i_X: \Omega^k(U) &\rightarrow \Omega^{k-1}(U)
\end{aligned}$$

つまり内部積ではベクトル場  $X$  を固定する。外部積との関係として  $\omega \in \Omega^k(U), \eta \in \Omega^l(U)$  の時、

$$i_X(\omega \wedge \eta) = (i_X\omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge (i_X\eta) \quad (5.9)$$

となる。関数  $f$  に対しては

$$i_X f = 0 \quad (5.10)$$

である。

例えば、 $X = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$  と  $k$  形式  $\omega = \frac{1}{k!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_k} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_k}$  に対して

$$\begin{aligned} i_X \omega &= \frac{1}{(k-1)!} X^\nu \omega_{\nu \mu_2 \dots \mu_k} dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_k} \\ &= \frac{1}{r!} \sum_{s=1}^k X^{\mu_s} \omega_{\mu_1 \dots \mu_s \dots \mu_k} (-1)^{s-1} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge \hat{dx}^{\mu_s} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_k} \end{aligned}$$

となる。例えば  $k=3$  で  $\omega$  が 2 形式であれば

$$i_{X^3} \omega = i_{e_x}(dx \wedge dy) = dy$$

$$i_{X^1} \omega = i_{e_x}(dy \wedge dz) = 0$$

$$i_{X^2} \omega = i_{e_x}(dz \wedge dx) = -dz$$

のように内積は 1 形式をつくる。符号の変化に注意する。

微分形式の Lie 微分はこの内部積を用いて簡明になる。1 形式を  $\omega = \omega_\mu dx^\mu$  とすると

$$\begin{aligned} (di_X + i_X d)\omega &= d(X^\mu \omega_\mu) + i_X \left[ \frac{1}{2} (\partial_\mu \omega_\nu - \partial_\nu \omega_\mu) dx^\mu \wedge dx^\nu \right] \\ &= (\omega_\mu \partial_\nu X^\mu + X^\mu \partial_\mu \omega_\nu) dx^\nu + X^\mu (\partial_\mu \omega_\nu - \partial_\nu \omega_\mu) dx^\nu \\ &= (\omega_\mu \partial_\nu X^\mu + X^\mu \partial_\mu \omega_\nu) dx^\nu \end{aligned}$$

とかけると式 5.7 より

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X \omega &\equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} ((\sigma_\epsilon)^* \omega|_{\sigma_\epsilon(x)} - \omega|_x) \\ &= (X^\mu \partial_\mu \omega_\nu + \partial_\nu X^\mu \omega_\mu) dx^\nu \\ &= (di_X + i_X d)\omega \end{aligned} \quad (5.11)$$

が成り立つ。

## 5.4 テンソル

テンソル場は局所的には関数とベクトル場と 1 次微分形式からテンソル積や和が生成される。しかし、もともと接ベクトル場  $X$  を積分して 1 パラメタ群  $\{\phi_t\}$  を作成し、 $\tilde{\phi}_t^{-1} S$  を微分したわけだから  $\phi_t$  に無関係に接ベクトル場  $X$  から次リー微分を作れるはずである。

そこでまず関数  $f$  のリー微分を考える。式 11.43 から接ベクトル場を

$$X = \sum \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (5.12)$$

とおくと



$$\mathcal{L}_X f = Xf = \sum \frac{\partial f}{\partial x^i} \xi^i \quad (5.13)$$

である。この時の  $\phi_t^i$  は初期条件として  $t=0$  で

$$\phi^i(t, x) = x^i \quad (5.14)$$

とすると

$$\phi_t = \phi(t, x) = x^i + \xi^i(x)t + O(t^2) \quad (5.15)$$

である。

次にベクトル場

$$Y = \sum \eta^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (5.16)$$

のリー微分  $L_X Y$  がどうなるかみて見る。式 11.43 から

$$\phi_t^{-1} = \phi_{-t} \quad (5.17)$$

と考えて式 5.15 から

$$\phi_{-t} = \phi(-t, x) = x^i - \xi^i(x)t + O(t^2)$$

となることから  $t$  の高次の項は無視できるとして

$$\frac{\partial \phi^i(-t, x)}{\partial x^j} = \delta_j^i - \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} t$$

ここで式同型関係が成り立つとして式 11.40 から

$$\left( \tilde{\phi}_t^{-1} Y \right)_x = \left( \tilde{\phi}_t^{-1} \right)_x Y_{\phi(t, x)}$$

が成り立つから式 5.16、式 5.15 から

$$\begin{aligned} \eta^j(\phi(t, x)) &= \eta^j(x^i + \xi^i(x)t) \\ &= \eta^j(x^i) + \sum_k \frac{\partial \eta^j}{\partial x^k} \xi^k(x)t \end{aligned}$$

となることを利用して

$$\begin{aligned} \left( \tilde{\phi}_t^{-1} Y \right)_x &= \frac{\partial \phi^i(-t, x)}{\partial x^j} Y_{\phi(t, x)} \\ &= \sum \left( \delta_j^i - \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} t \right) \eta^j(\phi(t, x)) \frac{\partial}{\partial x^i} \\ &= \sum \left( \delta_j^i - \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} t \right) \left( \eta^j + \sum \frac{\partial \eta^j}{\partial x^k} \xi^k t \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \end{aligned}$$

ここで  $t=0$  は全空間で共有しているので  $\eta^j, \xi^i, \frac{\partial \eta^j}{\partial x^k}, \frac{\partial \xi^i}{\partial x^k}$  の量は  $x = \phi(0, x)$  での値である。従って式 11.43 は  $t$  の 2 次以上を無視して次のように添え字をまとめることができる。

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left[ \left( \tilde{\phi}_t^{-1} Y \right)_x - Y_x \right] &= \left[ \frac{1}{t} \left( \sum \left( \delta_j^i - \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} t \right) \left( \eta^j + \sum \frac{\partial \eta^j}{\partial x^k} \xi^k t \right) \frac{\partial}{\partial x^i} - \sum \eta^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \right]_{t=0} \\ &= \sum \left( \frac{\partial \eta^j}{\partial x^k} \xi^k - \frac{\partial \xi^j}{\partial x^k} \eta^k \right) \frac{\partial}{\partial x^j} \quad (5.18) \end{aligned}$$

従って括弧の中は接ベクトル場を表していることがわかるから次のような単純な関係が求まる。

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y] \quad (5.19)$$

$X$  ベクトル場方向への  $Y$  ベクトル場の微分は交換積である。つまり、 $X$  に沿った  $Y$  の微分が Lie 微分になる。

## 5.5 積分曲線 [11]

$\mathbb{R}^n$  上の開集合  $U(a, b)$  を考え、そのベクトル場を  $X$  とする。 $U$  の曲線

$$c = (c_1, c_2, \dots, c_n) : (a, b) \rightarrow U(a, b)$$

が次を満たせば  $c$  を  $p = c(0)$  を初期値とする  $X$  の積分曲線という。

$$\begin{aligned} \dot{c}(t) &\equiv \left( \frac{dc_1}{dt}(t), \dots, \frac{dc_n}{dt}(t) \right) \\ &= X(c(t)) \in T_{c(t)}\mathbb{R}^n \end{aligned}$$

これを未知数が  $c_1, \dots, c_n$  だけある連立常微分方程式とすると解の存在定理から  $p$  を初期値とする積分曲線が存在する。

この積分曲線は一意でなくてはいけないので点  $p$  からいくつもの分岐が考えられる。例えば  $p$  を初期値として積分曲線が 2 つあれば

$$c_i : (a_i, b_i) \rightarrow U (i = 1, 2)$$

とすると各

$$t \in (a_1, b_1) \cap (a_2, b_2) \rightarrow c_1(t) = c_2(t)$$

とすることができる。ベクトル場  $X$  の積分曲線を全部集めると、次の写像  $\Phi$  が得られる。 $V \subset U$  として

$$\Phi : V \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$$

において

$$\Phi(p, 0) = p, \quad (\forall p \in V)$$

この時、 $p$  を固定した時の曲線

$$t \rightarrow \Phi(p, t)$$

が  $p$  を初期値とした  $X$  の積分曲線である。

従って、 $\{\Phi_t\}$  を局所 1 パラメータ変換群、または単に流れという。

この時のパラメタは 0 の近傍  $(-\epsilon, \epsilon)$  であることに注意がいる。

例えば簡単に  $X = \partial/\partial x$  とした時、

$$\Phi(x, t) = x + t$$

とすると  $x$  は開区間  $(0, 1)$  で定義するので  $\Phi$  の定義域には注意が必要で

$$-x < t < 1 - x$$

の範囲にないといけない。 $V = (a, b) \subset U$  として、

$$\epsilon = \min \{a, 1 - b\}$$

とすると、下図のように1パラメタ変換群の定義域は

$$\Phi : V \times (-\epsilon, \epsilon)$$

となり、より小さく制限される。

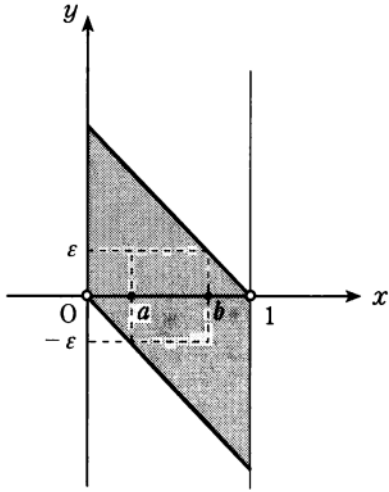


図 5.3: [11] よりより:  $\Phi$  の定義域

この積分曲線が第4部で定義したベクトル場の押し出し的な表現になる。例えば4部で扱った

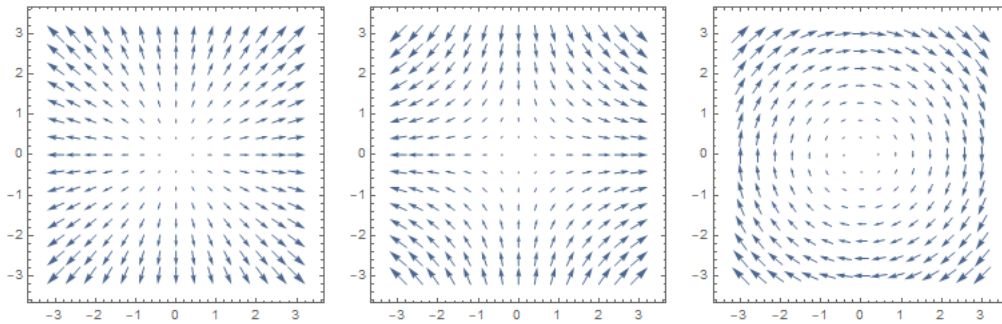


図 5.4: 左から  $x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$ ,  $x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y}$ ,  $y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}$

のベクトル場を考えると3番目の例として

$$\Phi(a, b, t) = (-a \cos t + b \sin t, -a \sin t - b \cos t)$$

とすれば次のような曲線が得られる。

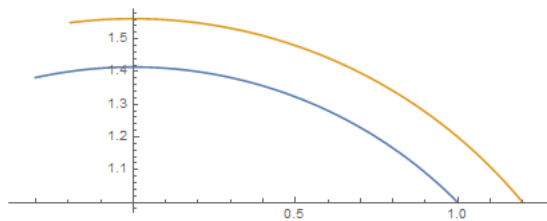


図 5.5:  $t(0, 1)$  として  $b$  の値をわずかに変化させた場合

この押し出し写像  $\Phi$  は次のような性質を持っている。  
 まず接ベクトルを用いて次のような近似がとれる。

$$\Phi(x, t) = x + tX(t) + \mathcal{O}(t^2) \quad (5.20)$$

次のように合成できる。ここでは添え字  $s, t$  はパラメタを示し、微分ではないので注意する。

$$\Phi_s \circ \Phi_t = \Phi_{s+t} \quad (5.21)$$

さらに逆写像がパラメタの戻しになる。

$$(\Phi_t)^{-1} = \Phi_{-t} \quad (5.22)$$

## 5.6 Lie 微分の例 [11]

いくつかの Lie 微分の例をまとめておく。

### 5.6.1 関数の Lie 微分

関数  $f \in C^\infty(U)$  とすると、 $\Phi$  による引き戻しは

$$(\Phi_t)^* f \in C^\infty(V)$$

となるので点  $x \in V$  での値は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} ((\Phi_t)^* f)(x)|_{t=0} &= \frac{d}{dt} (f \circ \Phi_t)(x)|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(x + tX + \mathcal{O}(t^2)) \\ &= X(f)(x) \end{aligned}$$

となり、

$$\mathcal{L}_X f = X(f)$$

となる。

前節の内部積を用いて関数に対しては式 5.10 から  $i_X f = 0$  だから

$$\mathcal{L}_X f = X(f) = df(X) = i_X(df) = i_X(df) + d(i_X f)$$

が成り立つ。

### 5.6.2 ベクトル場の Lie 微分

接ベクトル場  $Y = \sum Y_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  とする。押し出しのベクトル場  $(d\Phi_{-t}(Y))(x)$  の値は、式 5.22 の関係からベクトル場  $Y$  の  $\Phi_t(x)$  における  $Y$  方向  $Y(\Phi_t(x))$  への写像  $\Phi_{-t}$  の微分になった。そこで  $Y$  方向成分  $Y(\Phi_t(x))$  を  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$  として展開すると式 5.20 から

$$y_i(x) = Y_i(x) + t \sum_j X_j(x) \frac{\partial Y_i}{\partial x_j}(x) + \mathcal{O}(t^2)$$

また、 $\Phi_{-t}$  を成分  $(\phi_1, \dots, \phi_n)$  とすると式 5.20 から逆関数なので符号が変化し、

$$\phi_i(x) = x_i - tX_i(x) + \mathcal{O}(t^2)$$

となるので

$$\begin{aligned}
 d\phi_i(Y(\Phi_t(x))) &= \sum_j y_j \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} \\
 &= \sum_j \left( Y + t \sum_k X_k \frac{\partial Y_j}{\partial x_k} \right) \left( \delta_{ij} - t \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right) + \mathcal{O}(t^2) \\
 &= Y_i + t \left\{ \sum_k X_k \frac{\partial Y_j}{\partial x_k} - \sum_j Y_j \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right\} + \mathcal{O}(t^2)
 \end{aligned}$$

つまり、これは  $t$  の 1 次の項を見れば

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_X Y &= \frac{d}{dt} (d\Phi_{-t}(Y))|_{t=0} \\
 &= \sum_i \left( \sum_j \left( X_j \frac{\partial Y_i}{\partial x_j} - Y_j \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right) \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \\
 &= [X, Y]
 \end{aligned}$$

となり、これは前節の Lie 括弧積である。

### 5.6.3 微分形式の Lie 微分

微分形式を  $\omega$  とする。Lie 微分は定義から

$$\mathcal{L}_X \omega = \frac{d}{dt} (\Phi_t)^* (\omega) |_{t=0} \quad (5.23)$$

一方で前節の内部積を用いると式 5.11 から

$$\mathcal{L}_X \omega = (di_X + i_X d)\omega \quad (5.24)$$

これらは共に

$$d(\mathcal{L}\omega) = \mathcal{L}(d\omega) \quad (5.25)$$

$$\mathcal{L}(\omega \wedge \eta) = \mathcal{L}(\omega) \wedge \eta + \omega \wedge \mathcal{L}(\eta) \quad (5.26)$$

を共に満たす。これらを簡単に示すことは教育的である。第一式の場合は

$$d\phi^* = \phi^* d$$

となることから定義より

$$\frac{d}{dt} (\Phi_t)^* \omega |_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\Phi_t)^* \omega - \omega}{t}$$

は

$$\begin{aligned}
 d(\mathcal{L}_X \omega) &= d \left( \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\Phi_t)^* \omega - \omega}{t} \right) \\
 &= \left( \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\Phi_t)^* d\omega - d\omega}{t} \right) \\
 &= \mathcal{L}_X (d\omega)
 \end{aligned}$$

となる。

第二式の場合は

$$\phi^*(\omega \wedge \eta) = \phi^*\omega \wedge \phi^*\eta$$

となるので

$$\begin{aligned} (\Phi_t)^*(\omega \wedge \eta) - \omega \wedge \eta &= (\Phi_t)^*\omega \wedge (\Phi_t)^*\eta - \omega \wedge \eta \\ &= (\Phi_t)^*\omega \wedge ((\Phi_t)^*\eta - \eta) + ((\Phi_t)^*\omega - \omega) \wedge \eta \end{aligned}$$

を得る。よって

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X(\omega \wedge \eta) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\Phi_t)^*(\omega \wedge \eta) - \omega \wedge \eta}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{((\Phi_t)^*\omega - \omega) \wedge \eta}{t} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\Phi_t)^*\omega \wedge ((\Phi_t)^*\eta - \eta)}{t} \\ &= \mathcal{L}_X(\omega) \wedge \eta + \omega \wedge \mathcal{L}_X(\eta) \end{aligned}$$

となる。また、 $d^2 = 0$  を用いると

$$d(di_X + i_X d)\omega = di_X d\omega = (di_X + i_X d)d\omega$$

であり内部積表現でも

$$d(\mathcal{L}\omega) = \mathcal{L}(d\omega)$$

が成り立つ。

#### 5.6.4 流れを用いたの Lie 微分

前節で流れを定義したので、これを用いて Lie 微分を表すことを考える。  
ベクトル場  $X, Y$ 、微分形式  $A, \omega$  として前節の定義から

$$\mathcal{L}_X A = \frac{d}{dt} (\Phi_t)^* A|_{t=0}$$

となった。これを押し出しを用いれば

$$\mathcal{L}_X Y = \frac{d}{dt} (d\Phi_{-t}(Y))|_{t=0}$$

である。先の例で実際に求めてみよう。流れを

$$\Phi(a, b, t) = (a \cos t - b \sin t, a \sin t + b \cos t)$$

とする。関数は  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  を  $\rho$  を 1 変数、可微分関数とし、

$$f(x, y) = \rho(x^2 + y^2)$$

とおく。引き戻しの定義から

$$\begin{aligned} \Phi_t^*(f)(a, b) &= f \circ \Phi_t(a, b) \\ &= \rho\left((a \cos t - b \sin t)^2 + (a \sin t + b \cos t)^2\right) \\ &= \rho(a^2 + b^2) \end{aligned}$$

となり、これは  $t$  に依存しない。従って

$$\frac{d}{dt} \Phi_t^*(f)(a, b) = 0$$

となることがわかる。よってこの流れの積分曲線は原点中心の円である。  
微分形式とした  $A = dx$  で置き換えると  $t$  を固定して、

$$\Phi_t^*(dx) = d(a \cos t - b \sin t) = da \cos t - db \sin t$$

となるので点  $p$  では

$$\frac{d}{dt} \Phi_t^*(dx)|_{t=0} = -db$$

同様に  $A = dy$  で置き換えると  $t$  を固定して、

$$\Phi_t^*(dy) = d(a \sin t + b \cos t) = da \sin t + db \cos t$$

となるので点  $p$  では

$$\frac{d}{dt} \Phi_t^*(dy)|_{t=0} = da$$

となることがわかる。よって  $a, b$  が  $\mathbb{R}^2$  の座標関数とみれば  $\Phi(a, b, t) \rightarrow \Phi(x, y, t)$  に置き換えて

$$da = dx, db = dy$$

となる。よって定義から

$$\mathcal{L}_X(dx) = -db = -dy$$

$$\mathcal{L}_X(dy) = da = dx$$

となる。さらに  $A$  を 2 形式として

$$A = dx \wedge dy$$

とすると

$$\begin{aligned} \Phi_t^*(dx \wedge dy) &= \Phi_t^*(dx) \wedge \Phi_t^*(dy) \\ &= dx \wedge dy = -dy \wedge dx \end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X(dx \wedge dy) &= \frac{d}{dt} \Phi_t^*(dx \wedge dy)|_{t=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる。

また、 $k$  次の外積と内部積は共に次の関係を満たす。

$$d(\omega \wedge \eta) = (d\omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge (d\eta)$$

$$i_X(\omega \wedge \eta) = (i_X\omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge (i_X\eta)$$

## 6 共変微分

アインシュタインが採用した物理的な空間は“曲がる”ことが可能なリーマン空間である。そこで 4 次元のリーマン空間をここでは考える。

ローレンツ変換の節で不変距離

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

が座標変換に対して一定であることをみた。空間が曲がっているとは、ある線分を延長したときに向きが変化することである。

しかし、平行移動は向きが一定な移動であるから曲がった空間での平行移動を考えておく必要がある。

## 6.1 平行移動

平行移動を考えるには1次元の高い空間に出て眺めてみるのが簡単である。そこで  $N$  次元空間を考え、直線座標

$$z^n (n = 1, 2, 3 \dots N)$$

を考える。4次元より大きい、 $n$ 次元空間の添え字を以後  $m, n$  で表し、4次元の場合の  $\mu, \nu$  と区別する。 $N$ 次元空間での不変距離を

$$ds^2 = h_{nm} dz^n dz^m$$

とおく。ただし、ここでの計量テンソルは平行移動が直線であるべきなので定数になる。

$N$ 次元空間内の点を  $y^n(x)$  とすると  $y^n$  は  $x^\mu$  の関数になるから次のような微分が定義できる。

$$\frac{\partial y^n(x)}{\partial x^\mu} = y_{,\mu}^n$$

従って式 8.6 から微小変位は次のような微小変位の和

$$\delta y^n = y_{,\mu}^n \delta x^\mu$$

とかけるので

$$\delta s^2 = h_{nm} \delta y^n \delta y^m = h_{nm} y_{,\mu}^n y_{,\nu}^m \delta x^\mu \delta x^\nu \quad (6.1)$$

ここでは微分に対し、 $h_{nm}$  が定数であるから

$$\delta s^2 = y_{,\mu}^n (h_{nm} y_{,\nu}^m) \delta x^\mu \delta x^\nu = y_{,\mu}^n y_{n,\nu} \delta x^\mu \delta x^\nu$$

となるので式 6.1 と比較すれば

$$g_{\mu\nu} = y_{,\mu}^n y_{n,\nu} \quad (6.2)$$

と表すことになる。

第2部で Hopf 写像を考えて、4次元空間の3次元への射影を考えた。

ここでは例えば4次元の空間で微小ベクトル  $A^\mu$  を考える。

4次元からみればこの空間内にこのベクトルがあるわけであるが式 6.2 は、このベクトルを  $N$ 次元から見れば

$$A^n = y_{,\mu}^n A^\mu \quad (6.3)$$

というベクトルに微分が作用したように見える。

従って平行移動しても  $N$ 次元空間内のベクトル  $A^n$  に変化はない。

空間が曲がれば一般のベクトルは空間をはみ出す。

従ってベクトルはその空間に射影されるわけである。そこで次に射影について考えよう。

## 6.2 射影

平行移動後の  $x + dx$  でのベクトル  $A^n$  を次のよう接線成分と法線成分に分けておく

$$A^n = A_P^n + A_N^n$$

この  $A_P^n$  に対応する4次元曲面空間内のベクトルを  $K^\mu$  とすると式 6.3 から

$$A_P^n = y_{,\mu}^n(x + dx) K^\mu$$

となり、この  $K^\mu$  が  $A_P^n$  の平行移動の結果になる。法線  $A_N^n$  も  $(x + dx)$  にあるとすると、 $A_P^n$  との内積が0になるから



$$\begin{aligned}
h_{nm}A_N^n A_P^m &= h_{nm}A_N^n y_{,\mu}^m(x+dx)K^\mu = 0 \\
&= A_N^n h_{nm} y_{,\mu}^m(x+dx)K^\mu = 0 \\
&= A_N^n y_{m,\mu}(x+dx)K^\mu
\end{aligned}$$

を得る。これが任意の  $K^\mu$  に成り立てば

$$A_N^n y_{m,\mu}(x+dx) = 0 \quad (6.4)$$

が成り立つ。

### 6.3 共変微分

次に曲がった空間での微分を考えるために共変微分を紹介する。

Riemann 空間において任意のベクトル  $V^\mu$  の微分  $\partial_\nu V^\mu$  はテンソルとならなかった。それは次の定義式

$$\frac{\partial V^\mu}{\partial x^\nu} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \{V^\mu(x^\nu + \epsilon) - V^\mu(x^\nu)\} \quad (6.5)$$

これが異なる世界点の差をとっているためそのために Riemann 空間における平行移動の定義が必要となった。

曲面上で連続的な曲線を仮定し局所的なベクトルの平行移動は、その曲面をユークリッド空間の平面に写した時、その曲面の曲率と関係した連続的な回転を受けると考えるのである。そこで一般的な平行移動の定義は次のように表される。

$$V^\mu(x + \Delta x)_{//} - V^\mu(x) = \Delta x^\nu X_{\nu\lambda}^\mu V^\lambda \quad (6.6)$$

$X_{\nu\lambda}^\mu$  はユークリッド空間であれば 0 である座標に依存した係数となる。

時空間が平坦でなければ 0 になる保証はない。

これから次のように共変微分 (covariant derivative) を定義できる。

$$\begin{aligned}
\nabla_\nu V^\mu &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \{V^\mu(x + \Delta x) - V^\mu(x)\} - X_{\nu\lambda}^\mu V^\lambda \\
&= \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\nu} - X_{\nu\lambda}^\mu V^\lambda
\end{aligned} \quad (6.7)$$

この共変微分が一般座標変換に対して混合テンソルとしてふるまうためには

$$X_{\nu'\rho'}^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'} \partial x^\beta \partial x^\gamma}{\partial x^\alpha \partial x^{\nu'} \partial x^{\rho'}} X_{\beta\gamma}^\alpha + \frac{\partial^2 x^{\mu'}}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} \frac{\partial x^\beta \partial x^\gamma}{\partial x^{\nu'} \partial x^{\rho'}} \quad (6.8)$$

が成り立たなければならない。しかし第 2 項があるために一般座標変換ではテンソルになれない。でもアフィン変換ではこの項が 0 になるためテンソルになる。このようなテンソルをアフィンテンソルという。

単独ではテンソルでなくても、もう一つ別の係数  $Y_{\nu\lambda}^\mu$  をもってきてその差を次のようにとる

$$Z = X_{\nu\lambda}^\mu - Y_{\nu\lambda}^\mu = \frac{\partial x^{\mu'} \partial x^\beta \partial x^\gamma}{\partial x^\alpha \partial x^{\nu'} \partial x^{\rho'}} Z_{\beta\gamma}^\alpha$$

このように差をとればテンソルになる。

このように Lie 微分は曲面上の平行移動の要請からつくることができたが、共変微分は物理量の共変性の要請から得られる。

これは例えば次のようなスカラー量の通常微分を考えると

$$\partial_\mu \phi(x)$$

この座標変換は

$$\frac{\partial_\mu \phi(x')}{\partial x'} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial \phi}{\partial x^\nu}$$

と変換されるのでこれは、ダッシュ系が分母にくる共変変換になる。

次に共変ベクトルの微分を考えると

$$\begin{aligned} \partial'_\mu V'_\nu &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \partial_\alpha \left( \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} V_\beta \right) \\ &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \partial_\alpha V_\beta + \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} V_\alpha \end{aligned}$$

となる。明らかに第2項がなければ2階の共変テンソルになる。

つまり通常微分では共変ベクトルの微分をテンソルに導けない。

微分値が共変性を保つために新しい微分操作を必要とし、それが共変微分になるわけである。

共変微分について次のようにまとめることができる。

1. スカラー  $S$  については通常微分と同じ

$$\nabla_\mu S = \partial_\mu S$$

2. テンソルの積に対してはライプニッツ則が成り立つ

$$\nabla_\mu (AB) = \nabla_\mu A \cdot B + A \nabla_\mu B$$

3. 共変、反変テンソルに対して次のように変換する。

$$\nabla_\nu V_\mu = \frac{\partial V_\mu}{\partial x^\nu} + X_{\nu\mu}^\lambda V_\lambda \quad (6.9)$$

$$\nabla_\nu V^\mu = \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\nu} - X_{\nu\lambda}^\mu V^\lambda \quad (6.10)$$

となる。両者の係数の違いは符号だけでなく、添え字の順序も影響する。

式6.7と同じであるがクリストッフェル記号  $\Gamma$  を用いて

$$V_\mu(x + \Delta x)_{//} = V_\mu(x) - \Gamma_{\mu\rho}^\nu \Delta x^\rho V_\nu \quad (6.11)$$

から共変微分を

$$\begin{aligned} \nabla_\mu V_\nu &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x^\mu} \{ V_\nu(x + \Delta x) - V_\nu(x + \Delta x)_{//} \} \\ &= \partial_\mu V_\nu + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha V_\alpha \end{aligned} \quad (6.12)$$

でも定義できる。

式6.2から計量  $g_{\mu\nu}$  があるとベクトルは  $g_{\mu\nu} V^\mu(x)$  で変換をうけた。

ここでRiemann幾何学ではベクトルの大きさが平行移動で変化しないという次の要請をする。

$$g_{\mu\nu} V^\mu(x + \Delta x)_{//} V^\nu(x + \Delta x)_{//} = g_{\mu\nu} V^\mu(x) V^\nu(x)$$

$V$  は任意であるので式6.6から次の関係が求まる。

$$\partial_\lambda g_{\mu\nu} = -(X_{\mu,\lambda\nu} + X_{\nu,\lambda\mu}) \quad (6.13)$$

ただし、

$$X_{\lambda,\nu\mu} \equiv g_{\lambda\rho} X_{\nu\mu}^{\rho} \quad (6.14)$$

とする。つまり計量の変化量は係数  $X$  が計量に作用し次々に決まっていくのである。  
6.9 から *Christoffel* の指標記号  $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$  を次のように定義する。

$$\Gamma_{\lambda,\mu\nu} \equiv -X_{\lambda,\nu\mu} = \frac{1}{2}(-\partial_{\lambda}g_{\mu\nu} + \partial_{\mu}g_{\nu\lambda} + \partial_{\nu}g_{\lambda\mu}) \quad (6.15)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \equiv -X_{\nu\mu}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}(-\partial_{\rho}g_{\mu\nu} + \partial_{\mu}g_{\nu\rho} + \partial_{\nu}g_{\rho\mu}) \quad (6.16)$$

また、式 6.13 から計量の共変微分は

$$\nabla_{\lambda}g_{\mu\nu} \equiv \partial_{\lambda}g_{\mu\nu} - \Gamma_{\lambda\nu}^{\tau}g_{\tau\mu} - \Gamma_{\lambda\mu}^{\tau}g_{\tau\nu} = 0 \quad (6.17)$$

となり共変微分に対して、 $g_{\mu\nu}$  は定数のようにふるまう。次のような対称性がある。

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} \quad (6.18)$$

これから次のようなテンソルの微分は共変微分も通常微分も変わらなくなる。

$$f_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu} = \nabla_{\mu}A_{\nu} - \nabla_{\nu}A_{\mu} \quad (6.19)$$

さらに次のような公式が成立する。

$$\Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{\nu\rho}\partial_{\mu}g_{\nu\rho} \quad (6.20)$$

行列式  $g$  について

$$\frac{\partial g}{\partial x^{\mu}} = gg^{\rho\nu}\partial_{\mu}g_{\rho\nu} \quad (6.21)$$

従って

$$\Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda} = -\frac{1}{2}\partial_{\mu}g/g = \partial_{\mu}\log\sqrt{-g} \quad (6.22)$$

テンソル密度についても

$$\begin{aligned} \nabla_{\lambda}(\sqrt{-g}T^{\mu\nu}) &\equiv \sqrt{-g}\nabla_{\lambda}T^{\mu\nu} \\ &= \partial_{\lambda}\mathbf{T}^{\mu\nu} + \Gamma_{\lambda\rho}^{\mu}\mathbf{T}^{\rho\nu} + \Gamma_{\lambda\rho}^{\nu}\mathbf{T}^{\mu\rho} - \Gamma_{\lambda\rho}^{\rho}\mathbf{T}^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (6.23)$$

また計量の変分についても次のようにまとめることができる。

$$\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\delta g_{\alpha\beta}$$

$$\delta g = gg^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = -gg_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$$

ある世界点のたるところで *Christoffel* の指標が 0 で選べれば 6.9 の定義から共変微分は通常の微分と変わらない。

これを測地系という。

## 6.4 双対性 [36]

第2, 4部で双対空間について触れたが、ここでは次節で共変微分をイメージするために改めて双対性を考える。

これは本稿の主題の1つの観測の問題でも重要な概念である。いうならば観測者と被観測者が出会い、現実をつくる。

この時、観測、被観測は相対的である。

数学的には2つの作用から数、1形式をつくる。

1形式とは  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V, \lambda \in \mathbb{R}$  とする。ただし、ベクトル空間  $V$  は有限次元にしないといけない。

線形性：写像  $f: V \rightarrow \mathbb{R}$  において

$$f(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = f(\mathbf{v}) + f(\mathbf{w}), \quad f(\lambda\mathbf{v}) = \lambda f(\mathbf{v})$$

を満たすものを1形式 (**one-form**) という。  $V$  上の1形式全体の集合

$$V^* = \{f: V \rightarrow \mathbb{R}, \text{linear}\}$$

これを  $V$  の双対空間 (**dual-space**) という。

$V$  の基底  $\mathbf{v}(x, y, z)$  を列ベクトル、1形式  $f(a, b, c)$  は行ベクトルで表し、次のように関数が内積で定義される。

$$f(\mathbf{v}) = (a, b, c) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = ax + by + cz$$

これは  $f$  という観測器で  $\mathbf{v}$  を測定して得た測定値と考えることができる。そうすると、関数  $f$  とベクトル  $\mathbf{v}$  は相対的に見えてくる。

実際この関数表現は

$$\langle f, \mathbf{v} \rangle$$

のように内積でかける。量子論的にはブラケット

$$\langle f | \mathbf{v} \rangle$$

であり、微分形式と関係してくる。双対をつくる操作を  $*$  で表したが、当然

$$V^{**} = V$$

が成り立つ。

これは鏡にうつして自分を見るようなイメージだが、重要な点として、この  $**$  は行き先があり、写像として定義できる。

しかし、単に双対をとる  $*$  は行き先を決めていないので補集合をとると同様に写像にならない。

つまりある  $\mathbf{v} \in V$  を決めるとき、これに対応する  $f \in V^*$  を一意に決めているわけではない。

## 6.5 共変微分と接続 [101]

共変微分は多様体上に連続した曲線が存在していくことと関係している。そこで接続の関係を見る。

$M$  を Euclid 空間  $\mathbb{R}^N$  の  $n$  次元部分多様体とする。  $M$  の接ベクトル空間  $T_x M$  は第4部でみたように  $\mathbb{R}^N$  に埋め込まれる。

接ベクトル  $\mathbf{V}$  はこの  $M$  からはみ出すので  $T_x M$  上への射影作用素を次のように決める。

$$P_x: \mathbb{R}^N \rightarrow T_x M$$

また、図のように  $M$  上の曲線

$$c: \mathbb{R} \rightarrow M$$

と  $M$  上のベクトル場  $V$  が与えられたとき、 $c$  に沿う共変微分が次のように定義できる。

$$\nabla_{\dot{c}(t)} \mathbf{V} := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} (P_{c(t)} \mathbf{V}(c(t+\epsilon)) - \mathbf{V}(c(t))) \quad (6.24)$$

これから  $\nabla_{\dot{c}(t)} \mathbf{V} = 0$  の時が  $c$  に沿った平行移動だとすることもできる。

これを詳しく見るために、接空間  $T_x M$  の基底を

$$\{\mathbf{e}_1(x), \dots, \mathbf{e}_n(x)\}$$

とし、その双対基底を

$$\{\mathbf{f}^1(x), \dots, \mathbf{f}^n(x)\}$$

とすれば前節から

$$\langle \mathbf{f}^\mu, \mathbf{e}_\nu \rangle = \delta_\nu^\mu \quad (6.25)$$

が成り立つ。

接ベクトル場を

$$\mathbf{V}(x) = \sum V^\mu(x) \mathbf{e}_\mu(x)$$

で展開しておく。以下  $\sum$  は省略する。

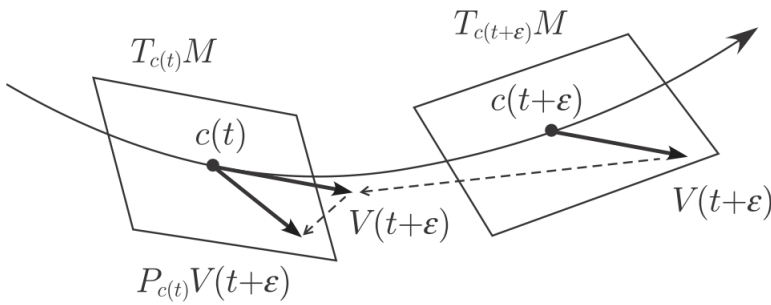


図 6.1: [101] より：共変微分と引き戻し

図のように点  $c(t+\epsilon)$  にあるベクトル  $\mathbf{V}(c(t+\epsilon))$  を原点  $c(t)$  に写し接空間  $T_{c(t)}M$  に射影すると、定義式 6.25 より

$$\begin{aligned} P_{c(t)} \mathbf{V}(c(t+\epsilon)) &= \mathbf{e}_\mu(c(t)) \langle \mathbf{f}^\mu(c(t)), \mathbf{V}(c(t+\epsilon)) \rangle \\ &= \mathbf{e}_\mu(c(t)) \langle \mathbf{f}^\mu(c(t)), \mathbf{e}_\nu(c(t+\epsilon)) \rangle V^\nu(c(t+\epsilon)) \end{aligned}$$

これは  $\mathbf{V}(c(t+\epsilon))$  と  $T_{c(t)}M$  とのなす角を  $\theta$  とすると  $\mathbf{f}, \mathbf{e}$  は単位ベクトルだから

$$\cos \theta^\mu = \langle \mathbf{f}^\mu(c(t)), \mathbf{e}_\mu(c(t+\epsilon)) \rangle$$

が成り立つことになる。これは  $\epsilon$  の時間経過を超えて成立することに留意する。  
よって

式 6.24 に代入し、 $\epsilon \rightarrow 0$  とすると

$$\begin{aligned}
\nabla_{\dot{c}(t)} V &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} (P_{c(t)} \mathbf{V}(c(t+\epsilon)) - \mathbf{V}(c(t))) \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} (\mathbf{e}_\mu(c(t)) \langle \mathbf{f}^\mu(c(t)), \mathbf{e}_\nu(c(t+\epsilon)) \rangle V^\nu(c(t+\epsilon)) - \mathbf{e}_\mu(c(t)) V^\nu(c(t))) \\
&= \mathbf{e}_\mu(c(t)) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \{ \langle \mathbf{f}^\mu(c(t)), \mathbf{e}_\nu(c(t+\epsilon)) \rangle V^\nu(c(t+\epsilon)) - V^\nu(c(t)) \} \\
&= \mathbf{e}_\mu(c(t)) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} (\langle \mathbf{f}^\mu(c(t)), \mathbf{e}_\nu(c(t+\epsilon)) - \mathbf{e}_\nu(c(t)) \rangle V^\nu(c(t+\epsilon)) + \langle \mathbf{f}^\mu(c(t)), \mathbf{e}_\nu(c(t)) \rangle V^\nu(c(t+\epsilon)) - V^\nu(c(t))) \\
&= \mathbf{e}_\mu(c(t)) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} (\langle \mathbf{f}^\mu(c(t)), \mathbf{e}_\nu(c(t+\epsilon)) - \mathbf{e}_\nu(c(t)) \rangle V^\nu(c(t+\epsilon)) + V^\nu(c(t+\epsilon)) - V^\nu(c(t))) \\
&= \mathbf{e}_\mu(c(t)) \left( \left\langle \mathbf{f}^\mu(c(t)), \frac{\partial \mathbf{e}_\nu(c(t))}{\partial x^\rho} \right\rangle \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} V^\nu(c(t+\epsilon)) + \frac{\partial V^\nu(c(t))}{\partial x^\rho} \right) \frac{dx^\rho}{dt} \\
&= \mathbf{e}_\mu(c(t)) \left( \left\langle \mathbf{f}^\mu(c(t)), \frac{\partial \mathbf{e}_\nu(c(t))}{\partial x^\rho} \right\rangle V^\nu(c(t)) + \frac{\partial V^\nu(c(t))}{\partial x^\rho} \right) \frac{dx^\rho}{dt} \\
&= \mathbf{e}_\mu(c(t)) \left( \Gamma_{\nu\rho}^\mu V^\nu + \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\rho} \right) \frac{dx^\rho}{dt}
\end{aligned}$$

となる。ただし、接続係数としてクリストッフエル記号  $\Gamma$  を

$$\Gamma_{\nu\rho}^\mu \equiv \left\langle \mathbf{f}^\mu(x), \frac{\partial \mathbf{e}_\nu(x)}{\partial x^\rho} \right\rangle$$

で定義した。これから  $t$  方向には等質であるとすれば

$$\nabla_\mu V_\nu = \Gamma_{\mu\nu}^\alpha V_\alpha + \partial_\mu V_\nu$$

となる。これは 6.12 に等しい。従って  $c(t) = (x^\rho(t))$  に沿って平行移動の条件は

$$\left( \Gamma_{\nu\rho}^\mu V^\nu + \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\rho} \right) \frac{dx^\rho}{dt} = 0$$

となるが、これが、あらゆる方向に平行移動する条件としては

$$dV^\mu = -\Gamma_{\nu\rho}^\mu V^\nu dx^\rho$$

とかける。これを拘束条件とみなし、可積分であるための必要十分条件は第 2 部から

$$\frac{\partial}{\partial x^\lambda} \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\rho} - \frac{\partial}{\partial x^\rho} \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\lambda} = 0$$

であればよい。これに平行移動の条件

$$\frac{\partial V^\mu}{\partial x^\rho} = -\Gamma_{\nu\rho}^\mu V^\nu$$

を代入すると

$$\left( \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \Gamma_{\nu\rho}^\mu - \frac{\partial}{\partial x^\rho} \Gamma_{\nu\lambda}^\mu + \Gamma_{\sigma\lambda}^\mu \Gamma_{\nu\rho}^\sigma - \Gamma_{\sigma\rho}^\mu \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma \right) V^\nu \equiv R_{\nu\lambda\rho}^\mu V^\nu \quad (6.26)$$

となり、() 内の  $R_{\nu\lambda\rho}^\mu$  は後に式で定義する曲率テンソルそのものである。

後の式 10.19 を用いれば共変微分の共変括弧積演算子を用いて

$$R_{\nu\lambda\rho}^\mu = [\nabla_\mu, \nabla_\nu]$$

のように表すことができる。この値が 0 であるようなところベクトルを平行移動しても差が生じない。

しかし、球面で 1 周したときには元のベクトルと相違が出ることになる。この曲面の面積と周長は重要な役割を果たす。

後に考察する。

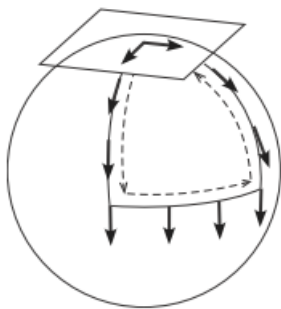


図 6.2: [101] より：球面上のベクトルの平行移動

## 6.6 計量と切断

曲面の振る舞いを学んだので、第 4 部で学んだ Riemann 多様体上に拡張してみよう。

$M$  は  $n$  次元多様体  $E$  はベクトル束とする。

第 4 部でみたように接ベクトル束  $TM$  の場合の切断は接ベクトル場  $V$  であり、共変ベクトル束  $T^*M$  の切断は 1 次微分形式  $\omega$  であった。

式 6.25 においては

$$f \in \omega, e \in V$$

である。

また、各ファイバー  $E_x$  から 1 つの元を選び出すことを切断といった。

つまり写像  $\sigma : M \rightarrow E$  の中で射影  $\pi$  により

$$\pi \circ \sigma(x) = x, x \in M \tag{6.27}$$

となる  $x$  が切断である。よって  $x \in M$  に対し  $E_x = \pi^{-1}(x)$  は  $x$  上のファイバーである。

写像  $\sigma$  が

$$\sigma : M \rightarrow E \tag{6.28}$$

のうち

$$\pi(\sigma(x)) = x \tag{6.29}$$

を満たす微分可能な  $E$  の切断の全体を  $\Gamma(E)$  とする。

するとこの  $\Gamma(E)$  は無限次元のベクトル空間とみなすことができる。

第 4 部でみたように  $M$  上の微分可能な関数の全体を  $A^0(M)$  とかけばこれは可換環になった。

関数と切断の積も切断になる。また、関数  $f \in A^0(M)$  が定義されると微分 1 形式  $df \in A^1(M)$  が定義できた。

$M$  の接ベクトル  $X$  に対し、 $X$  方向の微分を次で表す。

$$Xf = df(X)$$

このような微分作用素を切断  $\Gamma(E)$  に対して定義することはできるだろうか。

ファイバー  $E$  を

$$E : M \times \mathbb{R}^r \tag{6.30}$$

としたとき切断  $\sigma = \{\sigma^1, \dots, \sigma^r\}$  に対して微分  $\{d\sigma^1, \dots, d\sigma^r\}$  を微分と考える。

$M$  を座標近傍系の開被覆  $\{U_\alpha\}$  と別の開被覆  $\{U_\beta\}$  として  $U_\alpha \cap U_\beta$  上で  $U_\alpha$  と  $U_\beta$  は一致しても  $U_\alpha \times \mathbb{R}^r$  と  $U_\beta \times \mathbb{R}^r$  は一致するとは限らない。

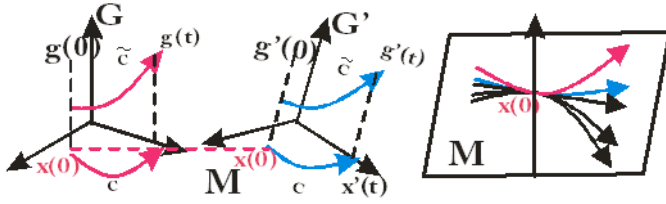


図 6.3: 異なる開被覆では多くの切断がある。

そこで  $X$  方向の微分  $Xf = df(X) \in A^1(M)$  が 1 次微分形式であるとする。  
共変ベクトル束  $T^*M$  の切断の全体が

$$\Gamma(T^*M) \in A^1(M) \quad (6.31)$$

とおけることを利用する。共変微分  $\nabla$  を前節でまとめたように次で定義すと線形写像を満たす。

$$\nabla : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(T^*M \otimes E) \quad (6.32)$$

さらに次のライプニッツ則を満足する。微分可能な関数の全体を  $A^0(M)$  としたから

$$\nabla(f\sigma) = df \otimes \sigma + f \cdot \nabla\sigma, \quad f \in A^0(M), \sigma \in \Gamma(E) \quad (6.33)$$

これから

$$\nabla\sigma = \frac{1}{f} (\nabla(f\sigma) - df \otimes \sigma)$$

とかけると、これは前節の平行移動から  $f \in A^0(M)$  が決められるので

$$f \rightarrow \Delta x$$

$$\nabla(f\sigma) \rightarrow V^\mu(x + \Delta x) - V^\mu(x)$$

$$df \otimes \sigma \rightarrow X_{\nu\lambda}^\mu V^\lambda$$

とすると式 6.7 の共変微分の定義と同等である。

$$\nabla_\nu V^\mu = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \{V^\mu(x + \Delta x) - V^\mu(x)\} - X_{\nu\lambda}^\mu V^\lambda \quad (6.34)$$

つまり、 $\nabla\sigma$  を  $\sigma$  の共変微分 (covariant derivative) ということができる。

では、双対空間でみるとどうなるか興味が出る。そこで反変ベクトルに対応した  $X = T_x M$  に対して

$$\nabla_X : \Gamma(E) \rightarrow E_x \quad (6.35)$$

は同様に線形写像になり

$$\nabla_X(f\sigma) = Xf \cdot \sigma + f \cdot \nabla_X\sigma, \quad f \in A^0(M), \sigma \in \Gamma(E) \quad (6.36)$$

を満たし、 $\nabla_X$  は  $X$  に対しても線形である。ただし、 $X = \{\partial/\partial x\}$  とみなせるから

$$\nabla_X\sigma = \frac{1}{f} \left( \nabla_X(f\sigma) - \frac{\partial f}{\partial x} \sigma \right)$$

となり 1 次微分形式になる。これを接続 (connection) ということができる。

次にこの接続について考察していこう。



## 7 接続

曲がった空間ではある点で接ベクトルを作っても同じ面に留め置くことができないので、接ベクトルをつなげるルールがいる。

それが接続になる。

### 7.1 定義

第2部では多様体について触れた。そこで多様体上で相対論を展開していくと接続が重要になる。 $M$  を多様体とし、 $E$  を  $M$  上のベクトル束、 $X, Y \in TM$  とする。次の対応があるとき

$$\nabla : C^\infty(TM) \times C^\infty(E) \rightarrow C^\infty; (X, \phi) \rightarrow \nabla_X \phi$$

次の条件を満たせば  $\nabla$  を  $E$  上の接続という。

- $\nabla_{X+Y} \phi = \nabla_X \phi + \nabla_Y \phi$
- $\nabla_X (\phi + \psi) = \nabla_X \phi + \nabla_X \psi$
- $\nabla_{fX} \phi = f \nabla_X \phi$
- $\nabla_X (f\phi) = f \nabla_X \phi + (Xf)\phi$

特にリーマン多様体上で

- $X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$
- $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$

が成り立てば **Levi-Civita** 接続という。

いくつかを証明してみる。

$X$  を  $M$  上の接ベクトル場とする。これは  $TM$  の切断とみなせるから

$$TM \subset TR^N|_M = M \times R^N$$

とかけるので  $X$  は  $R^N$  値で  $M$  上の関数とみなせる。すなわち

$$X : M \rightarrow R^N$$

これから  $dX$  は  $R^N$  値の1次微分形式である。よって接ベクトルと余接ベクトル  $A_X$  に分解して

$$dX = \nabla X + A_X \tag{7.1}$$

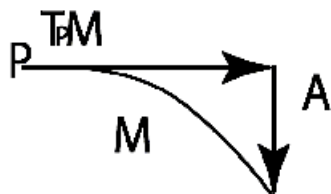


図 7.1: 接ベクトルと余接ベクトル

と書き、 $\nabla X$  は  $TM$  値、 $A_X$  は  $T^\perp M$  値での 1 次微分形式である。そこで  $TM$  と  $A_X$  は  $T^\perp M$  の成分を比べて

$$\begin{aligned} d(fX) &= df \cdot X + f \cdot dX \\ &= df \cdot X + f \cdot \nabla X + f \cdot A_X \\ &= \nabla(fX) + A_{fx} \end{aligned}$$

とすると

$$\begin{aligned} \nabla(fX) &= df \cdot X + f \cdot \nabla X \\ A_{fx} &= f \cdot A_X \end{aligned} \tag{7.2}$$

とみなせることがわかる。

第 1 の式は  $TM$  の接続でアフィン接続であることを示す。この接続を **Levi-Civita 接続** という。

第 2 の式は各点  $x \in M$  において  $A_X$  は  $T_x M \rightarrow T^\perp M$  において接ベクトル  $X_x$  にのみ依存することを示す。従って  $X, Y \in T_x M$  として次の双線形写像が定義できる。

$$A : TM \times TM \rightarrow T^\perp M, (X, Y) \rightarrow A(X, Y) = A_X(Y)$$

この  $A$  を部分多様体  $M \subset R^N$  の第 2 基本形式 (**second fundamental form**) という。法ベクトルについても同様なことが成り立つ。 $T^\perp M$  上の切断を  $\xi$  とすれ

$$\xi : M \rightarrow R^N$$

として 1 形式を 7.2 に対応して

$$d\xi = \nabla^\perp \xi + B_\xi \tag{7.3}$$

と表現すると  $B_\xi$  は  $TM$  値、 $\nabla^\perp \xi$  は  $T^\perp M$  の 1 次微分形式である。 $M$  上の関数  $f$  に対して式 7.2 と同様にして

$$\begin{aligned} \nabla^\perp(f\xi) &= df \cdot \xi + f \cdot \nabla^\perp \xi \\ B_{f\xi} &= f \cdot B_\xi \end{aligned} \tag{7.4}$$

となる。よって  $\nabla^\perp$  は法ベクトル束  $T^\perp M$  に接続を定義することができ、これを `uan_der_Waerden_Bortolochi` 接続と呼ばれる。これから双線形写像

$$B : T^\perp M \times TM \rightarrow TM$$

$$(\xi, X) \rightarrow B(\xi, X) = B_\xi(X)$$

が定義され、接続  $\nabla^\perp, \nabla$  は  $T^\perp M, TM$  の内積を保つことが次のようにわかる。

今、 $M$  の接ベクトル場  $X, Y$  の内積  $g(X, Y) = X \cdot Y$  は  $M$  上の関数である。

$A_X \perp Y, A_Y \perp X$  だったから次の項だけが残る。

$$d(X \cdot Y) = dX \cdot Y + X \cdot dY = \nabla X \cdot Y + X \cdot \nabla Y$$

また、 $M$  の法ベクトル場  $\xi, \eta$  に対しても

$$d(\xi \cdot \eta) = \nabla^\perp \xi \cdot \eta + \xi \cdot \nabla^\perp \eta$$

となり、

$$\nabla^\perp \xi = \nabla^\perp \eta = 0$$

であれば内積の変化が0であることがわかる。

次に直交補空間である  $A, B$  の関係について見てみる。

$$X \cdot \eta = 0$$

であるから

$$d(X \cdot \eta) = 0 = (\nabla X + A_X) \cdot \eta + X \cdot (\nabla \eta + B\eta)$$

だから

$$A_X \cdot \eta + X \cdot B\eta = 0, \quad X \in \Gamma(TM), \quad \eta \in \Gamma(T^\perp M)$$

となる。接ベクトル場  $X, Y$  を写像  $M \rightarrow R^N$  とみなした時、接ベクトル  $[X, Y]$  に対応する写像は

$$M \rightarrow R^N$$

で表され、

$$X = \sum a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \rightarrow (X^1 \dots X^N), \quad X^n = \sum \frac{\partial y^n}{\partial x^i} a^i$$

$$Y = \sum b^i \frac{\partial}{\partial x^i} \rightarrow (Y^1 \dots Y^N), \quad Y^n = \sum \frac{\partial y^n}{\partial x^i} b^i$$

だから次のように交換積を定義すると

$$Z = [X, Y] = \sum \left( a^i \frac{\partial b^i}{\partial x^j} - b^j \frac{\partial a^i}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \rightarrow (Z^1, \dots, Z^N)$$

ただし、

$$Z^n = \sum \frac{\partial y^n}{\partial x^i} \left( a^i \frac{\partial b^i}{\partial x^j} - b^j \frac{\partial a^i}{\partial x^j} \right)$$

である。よって

$$\begin{aligned} Z^n &= \sum \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \left( \frac{\partial y^n}{\partial x^i} b^i \right) a^j - \frac{\partial}{\partial x^j} \left( \frac{\partial y^n}{\partial x^i} a^i \right) b^j \right) \\ &= \sum \left( \frac{\partial Y^n}{\partial x^j} a^j - \frac{\partial X^n}{\partial x^j} b^j \right) \\ &= dY^n(X) - dX^n(Y) \end{aligned}$$

よって対応する元を比較すると

$$[X, Y] = dY(X) - dX(Y)$$

とかける。一方で

$$dX(Y) = \nabla_Y X + A(X, Y)$$

$$dY(X) = \nabla_X Y + A(Y, X)$$

と表すことができるから

$$[X, Y] = \nabla_X Y + A(Y, X) - \nabla_Y X - A(X, Y) \tag{7.5}$$

よって両辺の接成分と法成分を比較し、

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X \quad (7.6)$$

$$A(X, Y) = A(Y, X)$$

が成り立つ。これはアフィン接続の捩れ率が0であることを表す。

## 7.2 接続の曲率

次に  $TM, T^\perp M$  の接続の曲率を考える。3次元の接ベクトル場  $X, Y, Z$  のうち、 $Z$  を  $M$  上の  $R^N$  値の関数と考え、 $Y(Z)$  は  $Z$  の  $Y$  方向の微分として

$$Y(Z) = i_y dZ = dZ(Y)$$

とすると  $XY(Z)$  はさらに  $X$  方向に微分する演算を表す。

よって法ベクトル場  $\xi$  についても

$$Y(\xi) = i_y d\xi = d\xi(Y)$$

であり、

$$Y(Z) = dZ(Y) = \nabla_Y Z + A(Z, Y)$$

と書くと、 $\nabla_Y Z$  は接ベクトル場、 $A(Z, Y)$  は法ベクトル場だから、さらに接ベクトルを作用し、

$$\begin{aligned} XY(Z) &= X dZ(Y) = X(\nabla_Y Z) + X(A(Z, Y)) \\ &= \nabla_X \nabla_Y Z + A(\nabla_Y Z, X) + \nabla_X^\perp(A(Z, Y)) + B(A(Z, Y), X) \end{aligned}$$

さらに  $X, Y$  を入れ替えると

$$\begin{aligned} YX(Z) &= Y dZ(X) = Y(\nabla_X Z) + Y(A(Z, X)) \\ &= \nabla_Y \nabla_X Z + A(\nabla_X Z, Y) + \nabla_Y^\perp(A(Z, X)) + B(A(Z, X), Y) \end{aligned}$$

辺々引き算して交換積をつくると

$$\begin{aligned} [X, Y](Z) &= (\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X) Z + B(A(Z, Y), X) - B(A(Z, X), Y) \\ &\quad + A(\nabla_Y Z, X) - A(\nabla_X Z, Y) + \nabla_X^\perp(A(Z, Y)) - \nabla_Y^\perp(A(Z, X)) \end{aligned}$$

これは式 7.5 から

$$[X, Y](Z) = \nabla_{[X, Y]} Z + A(Z, [X, Y])$$

のように書くことができる。法成分と接成分を比べることから

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z &= (\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]}) Z \\ &= B(A(Z, Y), Y) - B(A(Z, Y), X) \end{aligned} \quad (7.7)$$

$$\begin{aligned}\nabla_X^\perp(A(Z, X)) - A(\nabla_X Z, X) &= \nabla_Y^\perp(A(Z, X)) - A(\nabla_Y Z, X) \\ &+ A(Z, [X, Y])\end{aligned}\tag{7.8}$$

となる。また、ベクトル場  $W$  と、式 7.7 との内積  $g$  をとると

$$g(R(X, Y)Z, W) = -A(Z, X) \cdot A(W, Y) + A(Z, Y) \cdot A(W, X)$$

となる。これは曲率を第二基本形式で表していることになる。これをガウスの方程式という。式 7.1 から  $A$  は余接ベクトル空間を張る前部の局所標構で登場した。第 2 基本形式である。これは次の切断になった。

$$T^*M \otimes T^*M \otimes T^\perp M$$

このベクトル束の接続  $\nabla^*$  は  $TM$  の接続  $\nabla$  と  $T^\perp M$  の接続  $\nabla^\perp$  から次のようにかける

$$\nabla_X^\perp(A(Z, Y)) = (\nabla_X^* A)(Z, Y) + A(\nabla_X Z, Y) + A(Z, \nabla_X Y)$$

$$\nabla_Y^\perp(A(Z, X)) = (\nabla_Y^* A)(Z, X) + A(\nabla_Y Z, X) + A(Z, \nabla_Y X)$$

となる。これを式 7.8 に代入すると式 7.6 から

$$\begin{aligned}& (\nabla_X^* A)(Z, Y) + A(\nabla_X Z, Y) + A(Z, \nabla_X Y) - A(\nabla_X Z, X) \\ &= (\nabla_Y^* A)(Z, X) + A(\nabla_Y Z, X) + A(Z, \nabla_Y X) - A(\nabla_Y Z, X) \\ &+ A(Z, (\nabla_X Y - \nabla_Y X))\end{aligned}$$

となるので結局

$$(\nabla_X^* A)(Z, Y) = (\nabla_Y^* A)(Z, X)$$

を得る、これを **Codazzi** の方程式という。  $A(Z, Y)$  は  $Z, Y$  に関して対称であるが、これからは

$$\nabla^* A : TM \times TM \times TM \rightarrow T^\perp M$$

$$\nabla^* A(X, Y, Z) = (\nabla_Y^* A)(Y, A)$$

が対称になることである。

法ベクトル場を  $\xi$  とすると  $[X, Y](\xi)$  は

$$\begin{aligned}R^\perp(X, Y)\xi &= (\nabla_X^\perp \nabla_Y^\perp - \nabla_Y^\perp \nabla_X^\perp)\xi \\ &= A(B(\xi, X), Y) - A(B(\xi, Y), X)\end{aligned}$$

法ベクトル  $\eta$  との内積は

$$g(R^\perp(X, Y)\xi, \eta) = g(B(\xi, Y), B(\eta, X)) - g(B(\xi, X), B(\eta, Y))$$

が成り立つこれが **Ricci** 方程式である。

### 7.3 誘導計量

シンプレクティック構造を見たので前節でも触れたリーマン計量に次の3番目を追加する。 $M$ が微分多様体であり  $p \in M$  で次の条件をみたす時、**Riemann 計量**  $g$  とした。

1.  $g_p(U, V) = g_p(V, U)$
2.  $g_p(U, U) \geq 0$  等号は  $U = 0$  の時のみ
3.  $U \in T_p M$  に対して  $g_p(U, V) = 0$  ならば  $V = 0$  をさらに満たせば擬 **Riemann 計量** という。

ここで  $g_p$  は正定値な対称双1次形式であり2つのベクトル  $U, V \in T_p M$  の内積である。 $g_p(U, V)$  は

$$g_p(U, V); T_p M \otimes T_p M \rightarrow \mathcal{R} \quad (7.9)$$

であることから

$$g_p(U, \cdot); T_p M \rightarrow \mathcal{R} \quad (7.10)$$

を

$$V \rightarrow g_p(U, V) \quad (7.11)$$

によって定義できるので  $g_p(U, \cdot)$  は1形式

$$\omega_U \in T_p^* M \quad (7.12)$$

と同一視できる。同様に  $T_p M$  と  $T_p^* M$  は同型写像を引き起こす。よって

$$\omega_V \in T_p M \quad (7.13)$$

が誘導される。よって座標表示では

$$g_p = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu}(p) dx^\mu \otimes dx^\nu \quad (7.14)$$

で展開できる。また、 $g_p(U, V)$  から

$$g_p \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) = g_{\mu\nu}(p) = g_{\nu\mu}(p) \quad (7.15)$$

を満たす。ここで

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} g^{\nu\lambda} &= \delta_\mu^\lambda \\ \det (g_{\mu\nu}) &= g \\ \det (g^{\mu\nu}) &= g^{-1} \end{aligned} \quad (7.16)$$

であり

$$\begin{aligned} \omega_\mu &= g_{\mu\nu} U^\nu \\ U^\mu &= g^{\mu\nu} \omega_\nu \end{aligned}$$

と1形式を使って書ける。これから  $p$  点での無限小距離の定義式

$$\begin{aligned}
ds^2 &= g_p \left( dx^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}, dx^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) \\
&= dx^\mu dx^\nu g_p \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) \\
&= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu
\end{aligned} \tag{7.17}$$

が自然に導かれる。また計量テンソル  $g^{\mu\nu}$  は対称行列なのでその固有値は実数になる。 $g$  が **Riemann 計量** であれば全ての固有値は正だが擬 Riemann 計量の場合は負の値をとることもあり正の値が  $i$  個、負の値が  $j$  個ある時  $(i, j)$  の組を計量の指数という。 $j = 1$  なら Lorentz 計量という。例えば Minkowski 空間が Lorentz 計量である。

$(M, g)$  が Lorentz 計量の多様体であればその接空間  $T_p M$  は次の 3 つのクラスに分かれる。

1.  $g(U, U) > 0 \rightarrow U$  は空間的
2.  $g(U, U) = 0 \rightarrow U$  は光錐的
3.  $g(U, U) < 0 \rightarrow U$  は時間的

$M$  が計量  $g_N$  を持つ  $n$  次元多様体  $N$  の  $m$  次元部分多様体であるとする、 $f : M \rightarrow N$  が  $M$  の部分多様体としての構造を誘導する埋め込みであれば、引き戻し写像  $f^*$  は自然な計量  $g_M$  を  $M$  上に誘導し、 $f^\alpha$  で  $f(x)$  の座標を表すと次の誘導計量  $g_M$  が定義できる。

$$g_{M\mu\nu} = g_{N\alpha\beta} f^\alpha \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^\nu} \tag{7.18}$$

例えば  $(\mathbb{R}^3, \delta)$  における単位球面の計量を極座標  $(\theta, \phi)$  で表すと

$$f : (\theta, \phi) \rightarrow (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta) \tag{7.19}$$

とすれば誘導計量は

$$\begin{aligned}
g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu &= \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu \\
&= (\cos\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi, -\sin\theta) \cdot (\cos\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi, -\sin\theta) d\theta \otimes d\theta \\
&+ (-\sin\theta\sin\phi, \sin\theta\cos\phi, 0) \cdot (-\sin\theta\sin\phi, \sin\theta\cos\phi, 0) d\phi \otimes d\phi \\
&= (\cos^2\theta(\cos^2\phi + \sin^2\phi) + \sin^2\theta) d\theta \otimes d\theta \\
&+ \sin^2\theta(\cos^2\phi + \sin^2\phi) d\phi \otimes d\phi \\
&= d\theta \otimes d\theta + \sin^2\theta d\phi \otimes d\phi
\end{aligned}$$

となる。

例えばトーラス  $T^2$  から  $\mathbb{R}^3$  を

$$f : (\theta, \phi) = ((R + r \cos \theta) \cos \phi, (R + r \cos \theta) \sin \phi, \sin \theta)$$

で表すと、これはトーラス  $T^2$  の  $(\mathbb{R}^3, \delta)$  への埋めこみである。この場合は

$$g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu = \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$$

から、

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & (R + r \cos(\theta))^2 \end{pmatrix}$$

となる。

## 7.4 アファイン接続 [12]

アファイン接続  $\nabla$  とはベクトル空間  $V(M) \times V(M) \rightarrow V(M)$ ,  $(X, Y) \rightarrow \nabla_X Y$  で  $f \in \mathcal{F}(M)$  として

1.  $\nabla_X(Y + X) = \nabla_X Y + \nabla_X X$
2.  $\nabla_{(X+Y)}Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$
3.  $\nabla_{(fX)}Y = f\nabla_X Y$
4.  $\nabla_X(fY) = X[f]Y + f\nabla_X Y$

を満たすものをいう。特に 4 番目は  $f$  が関数なので

$$\nabla_X f \rightarrow X[f]$$

となることに注意する。

接続係数は基底ベクトルが点から他の点にいかに変化するかを表すものなので  $m$  次元多様体  $M$  上で座標  $x = \phi(p)$  を持つチャートの組  $(U, \phi)$  を選び  $m^3$  個の接続係数を上の条件を満たすように次で定義する。

$$\nabla_\nu e_\mu \equiv \nabla_{e_\nu} e_\mu = e_\lambda \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \quad (7.20)$$

ただし、 $\{e_\mu\} = \{\partial/\partial x^\mu\}$  は  $T_p M$  の座標基底である。そこで 2 つのベクトル

$$V = V^\mu e_\mu, \quad W = W^\nu e_\nu \quad (7.21)$$

を用意するとアファイン接続  $\nabla$  の作用は

$$\begin{aligned} \nabla_V W &= V^\mu \nabla_{e_\mu} (W^\nu e_\nu) = V^\mu (e_\mu[W^\nu]e_\nu + W^\nu \nabla_{e_\mu} e_\nu) \\ &= V^\mu \left( \frac{\partial W^\lambda}{\partial x^\mu} + W^\nu \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \right) e_\lambda \end{aligned} \quad (7.22)$$

となりこれは後の 6.7 の共変微分の定義に一致する。つまり 2 つのベクトル  $V, W$  から新しいベクトルに移っていてその  $\lambda$  番目の成分が  $V^\mu \nabla_\mu W^\lambda$  である。ただし

$$\nabla_\mu W^\lambda \equiv \frac{\partial W^\lambda}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda W^\nu \quad (7.23)$$

であり、これは  $\nabla_\mu W^\lambda e_\lambda$  の  $\lambda$  番目の成分である。(共変微分ではない)

## 7.5 測地線

多様体  $M$  上に曲線が与えられるとこの曲線に沿った平行移動が定義できる。

$$c: (a, b) \rightarrow M$$

を  $M$  内の曲線とし、 $X$  を  $c(t)$  に沿って定義できるベクトル場とすると

$$X|_{c(t)} = X^\mu(c(t))e_\mu|_{c(t)} \quad (7.24)$$

と表すことができる。 $X$  が任意の  $t \in (a, b)$  に対して

$$\nabla_V X = 0 \quad (7.25)$$



が満たされれば  $X$  は  $c(t)$  によって平行移動されたという。ただし

$$V = \frac{d}{dt} = \left( \frac{dx^\mu(c(t))}{dt} \right) e_\mu|_{c(t)} \quad (7.26)$$

は  $c(t)$  における接ベクトルである。式 7.25 を成分で表示すると

$$\frac{dX^\mu}{dt} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\nu(c(t))}{dt} X^\lambda = 0 \quad (7.27)$$

である。さらに  $V(t)$  自身が  $c(t)$  に沿って平行移動される時、

$$\nabla_V V = 0 \quad (7.28)$$

が満たされる。この時、曲線  $c(t)$  を測地線という。

$\{x^\mu\}$  を  $c(t)$  の座標とすると式 7.56 も成分で書け

$$\frac{d^2 x^\mu}{dt^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\nu(c(t))}{dt} \frac{dx^\lambda(c(t))}{dt} = 0 \quad (7.29)$$

が得られる。これを測地線方程式という。しかし式 7.56 に対し  $f \in \mathcal{F}(M)$  として

$$\nabla_V V = fV \quad (7.30)$$

という条件にゆるめると直線であること条件は  $V$  の変化も  $V$  に平行になるとするとこの条件は満たされる。

しかし、 $t$  がパラメタであるので  $t \rightarrow t'$  の下での接ベクトルの成分は

$$\frac{dx^\mu}{dt} \rightarrow \frac{dt}{dt'} \frac{dx^\mu}{dt}$$

と変化し、 $t'$  が

$$\frac{d^2 t'}{dt'^2} = f \frac{dt'}{dt}$$

を満たすなら式 7.30 は式 7.56 に帰着することになる。従って測地線方程式が式 7.30 を満たすように曲線のパラメタを変換することはいつでも可能になる。共変微分はライプニッツ則を満たすので

$$\nabla_X(fY) = (\nabla_X f)Y + f(\nabla_X Y)$$

これが任意のテンソル場に成り立つとして

$$\nabla_X(T_1 \otimes T_2) = (\nabla_X T_1) \otimes T_2 + T_1 \otimes (\nabla_X T_2)$$

これらから多様体上の 1 形式  $\omega \in \Omega^1(M)$  の共変微分を求める。

次のように内積を取り成分を求めると

$$X[\langle \omega, Y \rangle] = \nabla_X[\langle \omega, Y \rangle] = \langle \nabla_X \omega, Y \rangle + \langle \omega, \nabla_X Y \rangle$$

となるが  $\nabla_X Y = 0$  が成り立てば式 7.22 から成分は

$$\omega_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \omega_\lambda e_\lambda^{-1} \nabla_{e_\nu} e_\mu = -\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \omega_\lambda$$

$$\begin{aligned} (\nabla_X \omega)_\nu &= (X^\mu \partial_\mu \omega_\nu + X^\mu \omega_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda)_\lambda e_\nu^\lambda \\ &= (X^\mu \partial_\mu \omega_\nu - X^\mu \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \omega_\lambda)_\nu \end{aligned}$$

となる。特に  $X = e_\mu$  の時は

$$(\nabla_\mu \omega)_\nu = \partial_\mu \omega_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \omega_\lambda$$

であり、さらに  $\omega = dx^\nu$  とすると

$$\nabla_\mu dx^\nu = -\Gamma_{\mu\lambda}^\nu dx^\lambda$$

となり  $\lambda$  の数だけ和をとることになる。よって一般化するとテンソル場に対し、 $(p, q)$  型のテンソル  $T$  は

$$\begin{aligned} \nabla_\nu T_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_q}^{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_p} &= \partial_\nu T_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_q}^{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_p} + \Gamma_{\nu\kappa}^{\lambda_1} T_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_q}^{\kappa \lambda_2 \dots \lambda_p} + \dots + \Gamma_{\nu\kappa}^{\lambda_p} T_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_q}^{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{p-1} \kappa} \\ &- \Gamma_{\nu\mu_1}^\kappa T_{\kappa \mu_2 \dots \mu_q}^{\lambda_1 \dots \lambda_p} - \dots - \Gamma_{\nu\mu_q}^\kappa T_{\mu_1 \dots \mu_{q-1} \kappa}^{\lambda_1 \dots \lambda_p} \end{aligned} \quad (7.31)$$

と通常の微分以外に  $p$  個の和と  $q$  個の差が出てくる。特に、 $g_{\mu\nu}$  が計量テンソルであれば式

$$g_p \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) = g_{\mu\nu}(p)$$

であったから  $(0, 2)$  が成り立つ。式 10.24 より

$$(\nabla_\nu g)_{\lambda\mu} = \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \Gamma_{\nu\lambda}^\kappa g_{\kappa\mu} - \Gamma_{\nu\mu}^\kappa g_{\lambda\kappa} \quad (7.32)$$

となりこれは前節の式 6.17 である。

局所座標系で固有時  $\tau$  としてラグランジアン  $L$  を

$$L = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}$$

とかくと世界線の長さ  $I$  は

$$I = \int ds = \int \sqrt{2L} d\tau$$

となるのでこの極値をとる条件が式 7.29 になる。

例えば静止粒子の場合

$$L = mc^2$$

とすると

$$S = \int L d\tau = mc^2 \int d\tau$$

となるが式 2.10 から

$$S = mc \int \sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}}$$

となるが

また 4 元速度ベクトル  $V^\mu = dx^\mu/d\tau$  に対して 7.27 から

$$V^\nu \left( \frac{\partial}{\partial x^\nu} V^\mu + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu V^\lambda \right) \equiv V^\nu \nabla_\nu V^\mu = \nabla_V V^\mu = 0 \quad (7.33)$$

とかけるのでこれを共変微分の定義にすることもできる。この式に従う曲線が測地線である。

## 7.6 Christoffel 記号

前節で天下りの的に導入した *Christoffel* の指標記号  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  だが、ここで簡単な要請から導いておこう。まず、振率テンソルが 0 になる場合の接続  $\nabla$  は Levi-Civita 接続とよばれ

$$\Gamma_{\mu\nu}^\kappa = \Gamma_{\nu\mu}^\kappa \quad (7.34)$$

が成り立つ。ここでの接続は振れを考えないのでこれを採用する。また、平行移動の時に大きさは不変であるべきだから

平行移動には  $\tilde{\sim}$  記号をつけることにして

$$g^{\mu\nu}(x + \Delta x) \tilde{V}_\mu(x + \Delta x) \tilde{V}_\nu(x + \Delta x) = g^{\mu\nu}(x) V_\mu(x) V_\nu(x)$$

と書ける。これを 1 次まで拾うと

$$\left( g^{\mu\nu}(x) + \frac{\partial g^{\mu\nu}(x)}{\partial x^\alpha} \Delta x \right) \left( \tilde{V}_\mu(x + \Delta x) \tilde{V}_\nu(x) + \tilde{V}_\mu(x) \tilde{V}_\nu(x + \Delta x) \right) + g^{\mu\nu}(\Delta x) \left( \tilde{V}_\mu(x) \tilde{V}_\nu(x) \right) = 0$$

$$g^{\mu\nu}(x) \left( \frac{\partial \tilde{V}_\mu(x)}{\partial x^\alpha} \Delta x \tilde{V}_\nu(x) + \frac{\partial \tilde{V}_\nu(x)}{\partial x^\beta} \Delta x \tilde{V}_\mu(x) \right) + \frac{\partial g^{\mu\nu}(x)}{\partial x^\alpha} \Delta x \left( \tilde{V}_\mu(x) \tilde{V}_\nu(x) + \tilde{V}_\nu(x) \tilde{V}_\mu(x) \right) = 0$$

となるが共変微分の定義から内積が保存されるから

$$\tilde{V}^\mu(x + \Delta x) \tilde{V}_\nu(x + \Delta x) = V^\mu(x) V_\nu(x)$$

共変微分の定義から

$$\partial_\mu V_\nu = \nabla_\mu V_\nu + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha V_\alpha$$

$$V^\nu \nabla_\mu V^\mu = 0$$

を用いれば

$$\frac{\partial g^{\mu\nu}(x)}{\partial x^\alpha} + g^{\beta\nu} \Gamma_{\beta\alpha}^\mu + g^{\beta\mu} \Gamma_{\beta\alpha}^\nu = 0$$

が得られる。これから式 6.15 で仮定した、*Christoffel* の指標記号を導くことができる。

上の式を変形して  $g_{\mu\beta} \Gamma_{\nu\alpha}^\beta \equiv \Gamma_{\mu,\nu\alpha}$  と定義すると、添え字巡回し、

$$\partial_\alpha g_{\mu\nu} = \Gamma_{\nu,\mu\alpha} + \Gamma_{\mu,\nu\alpha}$$

$$\partial_\mu g_{\nu\alpha} = \Gamma_{\alpha,\nu\mu} + \Gamma_{\nu,\alpha\mu}$$

$$\partial_\nu g_{\alpha\mu} = \Gamma_{\mu,\alpha\nu} + \Gamma_{\alpha,\mu\nu}$$

が得られるから、2,3, 式を足し、1 式を引くと

$$\begin{aligned} \partial_\mu g_{\nu\alpha} + \partial_\nu g_{\alpha\mu} - \partial_\alpha g_{\mu\nu} &= \Gamma_{\alpha,\mu\nu} + \Gamma_{\nu,\alpha\mu} + \Gamma_{\mu,\nu\alpha} + \Gamma_{\alpha,\mu\nu} - \Gamma_{\nu,\mu\alpha} - \Gamma_{\mu,\nu\alpha} \\ &= 2\Gamma_{\alpha,\mu\nu} \end{aligned}$$

となるので

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\partial_\mu g_{\beta\nu} + \partial_\nu g_{\beta\mu} - \partial_\beta g_{\mu\nu}) \quad (7.35)$$

が得られた。テンソルにならない *Christoffel* の指標であるが、計量を共変微分すると次の関係が導ける。

$$\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = \partial_\alpha g_{\mu\nu} - \Gamma_{\alpha\mu}^\beta g_{\beta\nu} - \Gamma_{\alpha\nu}^\beta g_{\mu\beta} \quad (7.36)$$

これから重要な関係を1つ導こう。に式 7.35 を代入すると

$$\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0$$

となる。つまり、共変微分は計量に作用し、零値を与える。この共変微分がすり抜ける作用をメトリシティと呼ぶ。

### 7.6.1 計量接続

多様体に計量が与えられると接続の可能な形に制限を加えることができる。そこで計量  $g_{\mu\nu}$  が共変的に一定、つまり任意のベクトルの任意の曲線に沿った平行移動に対し、内積が不変であることを要請する。この時平行移動では  $\nabla_\kappa X = \nabla_\kappa Y = 0$  とすると

$$\begin{aligned} \nabla_V [g(X, Y)] &= V^\kappa [(\nabla_\kappa g)(X, Y) + g(\nabla_\kappa X, Y) + g(X, \nabla_\kappa Y)] \\ &= V^\kappa X^\mu Y^\nu (\nabla_\kappa g)_{\mu\nu} + g(0, Y) + g(X, 0) \\ &= V^\kappa X^\mu Y^\nu (\nabla_\kappa g)_{\mu\nu} \\ &= 0 \end{aligned}$$

赤線が断面

$$(\nabla_\kappa g)_{\mu\nu} = 0 \quad (7.37)$$

を得る。この時、式 7.32 から添え字をずらして

$$\partial_\lambda g_{\mu\nu} - \Gamma_{\lambda\mu}^\kappa g_{\kappa\nu} - \Gamma_{\lambda\nu}^\kappa g_{\kappa\mu} = 0 \quad (7.38)$$

$$\partial_\mu g_{\nu\lambda} - \Gamma_{\mu\nu}^\kappa g_{\kappa\lambda} - \Gamma_{\mu\lambda}^\kappa g_{\kappa\nu} = 0$$

$$\partial_\nu g_{\lambda\mu} - \Gamma_{\nu\lambda}^\kappa g_{\kappa\mu} - \Gamma_{\nu\mu}^\kappa g_{\kappa\lambda} = 0$$

この式の第 2,3 番目から第 1 番目を引くと

$$-\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} + \Gamma_{[\lambda\mu]}^\kappa g_{\kappa\nu} + \Gamma_{[\lambda\nu]}^\kappa g_{\kappa\mu} - \Gamma_{\{\mu\nu\}}^\kappa g_{\kappa\lambda} = 0 \quad (7.39)$$

が得られる。ただし、

$$\Gamma_{[\lambda\mu]}^\kappa = \Gamma_{\lambda\mu}^\kappa - \Gamma_{\mu\lambda}^\kappa \quad (7.40)$$

$$\Gamma_{\{\lambda\mu\}}^\kappa = \Gamma_{\lambda\mu}^\kappa + \Gamma_{\mu\lambda}^\kappa \quad (7.41)$$

とする。第 1 式は振率テンソル  $T_{\lambda\mu}^\kappa$  であり次を満たす。

$$T_{\lambda\mu}^\kappa \equiv \Gamma_{[\lambda\mu]}^\kappa = -\Gamma_{[\mu\lambda]}^\kappa \quad (7.42)$$

よって振率テンソル  $T_{\lambda\mu}^\kappa$  は反対称の性質を持つ。式 7.39 は次のように書き換えられる。

$$\Gamma_{\{\mu\nu\}}^\kappa = g^{\kappa\lambda} (-\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\lambda\mu}) + \Gamma_{[\lambda\mu]}^\kappa \delta_\nu^\lambda + \Gamma_{[\lambda\nu]}^\kappa \delta_\mu^\lambda$$

これは式 6.16 から Christoffel の記号を

$$\left\{ \begin{array}{c} \kappa \\ \mu\nu \end{array} \right\} \quad (7.43)$$

で表すと、

$$\Gamma_{\{\mu\nu\}}^\kappa = 2 \left\{ \begin{array}{c} \kappa \\ \mu\nu \end{array} \right\} + \Gamma_{[\lambda\mu]}^\kappa \delta_\nu^\lambda + \Gamma_{[\lambda\nu]}^\kappa \delta_\mu^\lambda \quad (7.44)$$

となるので Christoffel の記号と接続との関係は

$$\Gamma_{\mu\nu}^\kappa = \frac{1}{2} \left( \Gamma_{[\mu\nu]}^\kappa + \Gamma_{\{\mu\nu\}}^\kappa \right) \quad (7.45)$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} \kappa \\ \mu\nu \end{array} \right\} + \frac{1}{2} \left( \Gamma_{[\mu\nu]}^\kappa + \Gamma_{[\lambda\mu]}^\kappa \delta_\nu^\lambda + \Gamma_{[\lambda\nu]}^\kappa \delta_\mu^\lambda \right) \quad (7.46)$$

上式第 2 項は歪率  $K_{\mu\nu}^\kappa$  と呼ばれる。

$$K_{\mu\nu}^\kappa = \frac{1}{2} \left( \Gamma_{[\mu\nu]}^\kappa + \Gamma_{[\lambda\mu]}^\kappa \delta_\nu^\lambda + \Gamma_{[\lambda\nu]}^\kappa \delta_\mu^\lambda \right) \quad (7.47)$$

## 7.7 Levi-Civita 接続

振率テンソルが 0 になる場合の接続  $\nabla$  は Levi-Civita 接続と呼ばれる。

$$\Gamma_{\mu\nu}^\kappa = \Gamma_{\nu\mu}^\kappa \quad (7.48)$$

となり対称接続になる。この時

$$\Gamma_{\mu\nu}^\kappa = \nabla = \left\{ \begin{array}{c} \kappa \\ \mu\nu \end{array} \right\} = \frac{1}{2} g^{\kappa\lambda} (-\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\lambda\mu})$$

Levi-Civita 接続は次の性質を持つ。

$f \in F(M)$  として関数に対しては交換する。

$$\nabla_\mu \nabla_\nu f = \nabla_\nu \nabla_\mu f$$

$\omega \in \Omega(M)$  とすると 2 形式の係数をつくる。

$$d\omega = (\nabla_\mu \omega)_\nu dx^\mu \wedge dx^\nu \quad (7.49)$$

$\omega \in \Omega(M)$  とし、 $U \in V(M)$  として接ベクトルとの作る計量は

$$g(\nabla_X U, V) = \langle \nabla_X \omega, V \rangle \quad (7.50)$$

のようになる。

また、次の図のように Levi-Civita 接続は可能な限り、まっすぐな曲線として定義できる。

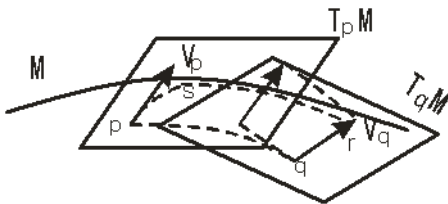


図 7.2: 同じ多様体上での異なる接平面

図のように多様体の曲面に沿ってベクトル  $V_p$  がベクトル  $V_q$  に移動したとすると  $V_q$  の  $T_pM$  平面への射影が  $V_p$  と平行ならベクトル  $V_p$  とベクトル  $V_q$  は平行であるという。

従って Levi-Civita 接続は捩率が 0 になり、接平面  $T_qM$  の  $T_pM$  との垂直方向の変化は無視されることになる。

これは後節のゲージ変換と関係している。Levi-Civita 接続は 2 点における曲線の長さの極値を与える。従って式 7.27 の測地線の方程式において  $\Gamma$  が消え、単純に解が

$$x^\mu = A^\mu t + B^\mu$$

とまとまる。

## 7.8 接続幾何

ここで、単純に 2 次元の場合で接続を考えてみよう。

図のように  $xy$  平面においてベクトル  $V$  の平行移動先を  $\hat{V}$  とする。この時図のように動径が  $\Delta\phi$  だけ回転する場合を考える。

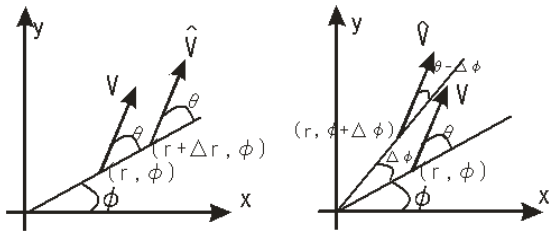


図 7.3: ベクトルの変化と計量

このときの座標の対応が

$$(r, \phi) \rightarrow (r \cos \phi, r \sin \phi)$$

となるので誘導計量は

$$\begin{aligned} g &= (\cos \phi, \sin \phi) \cdot (\cos \phi, \sin \phi) dr \otimes dr + (-r \sin \phi, r \cos \phi) \cdot (-r \sin \phi, r \cos \phi) d\phi \otimes d\phi \\ &= dr \otimes dr + r^2 d\phi \otimes d\phi \end{aligned} \quad (7.51)$$

となり  $(r, \phi)$  でのベクトル場を

$$V = V^r \frac{\partial}{\partial r} + V^\phi \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (7.52)$$

とする。ただし、 $V = \sqrt{g(\mathbf{V}, \mathbf{V})}$  とおけるので上図から次のように与えられる。

$$\begin{aligned} V^r &= V \cos \theta \\ V^\phi &= V \frac{\sin \theta}{r} \end{aligned} \quad (7.53)$$

とよってベクトル  $V$  は  $(r, \phi) \rightarrow (r + \Delta r, \phi)$  への平行移動では上図左のように

$$\begin{aligned} \hat{V}^r &= V^r \\ \hat{V}^\phi &= \frac{r}{r + \Delta r} V^\phi \simeq V^\phi - \frac{\Delta r}{r} V^\phi \end{aligned} \quad (7.54)$$

となる。一般にベクトル  $V$  を  $x + \Delta x$  に平行移動したものは  $\hat{V}^\mu(x + \Delta x)$  として

$$\hat{V}^\mu(x + \Delta x) - V^\mu(x) \propto \Delta x \quad (7.55)$$

とすると。平行移動によりノルムが不変であることから式 6.6 は

$$\hat{V}^\mu(x + \Delta x) = V^\mu(x) - V^\lambda(x) \Gamma_{\mu\lambda}^\mu(x) \Delta x^\mu \quad (7.56)$$

おける。ただし、座標依存した係数を  $\Gamma_{\mu\lambda}^\mu(x)$  とする。

式 7.54 からこの式と比較することで

$$\Gamma_{rr}^r = 0, \Gamma_{r\phi}^r = 0, \Gamma_{rr}^\phi = 0, \Gamma_{r\phi}^\phi = \frac{1}{r} \quad (7.57)$$

を得る。次にベクトル  $V$  は  $(r, \phi) \rightarrow (r, \phi + \Delta\phi)$  への平行移動では上図右のように

$$\hat{V} = \hat{V}^r \frac{\partial}{\partial r} \Big|_{(r, \phi + \Delta\phi)} + \hat{V}^\phi \frac{\partial}{\partial \phi} \Big|_{(r, \phi + \Delta\phi)} \quad (7.58)$$

となるので図と式 7.53 から

$$\begin{aligned} \hat{V}^r &= V \cos(\theta - \Delta\phi) \simeq V \cos\theta + V \sin\theta \Delta\phi = V^r + V^\phi r \Delta\phi \\ \hat{V}^\phi &= V \frac{\sin(\theta - \Delta\phi)}{r} \simeq V \frac{\sin\theta}{r} - V \cos\theta \frac{\Delta\phi}{r} = V^\phi - V^r \frac{\Delta\phi}{r} \end{aligned} \quad (7.59)$$

となる。よって同様に式 7.54 からこの式と比較することで

$$\Gamma_{\phi r}^r = 0, \Gamma_{\phi\phi}^r = -r, \Gamma_{\phi r}^\phi = \frac{1}{r}, \Gamma_{\phi\phi}^\phi = 0 \quad (7.60)$$

曲面での平行移動によるずれが曲率と面積の積で表されることを見た。そこで次に振率との幾何的な関係を見る。

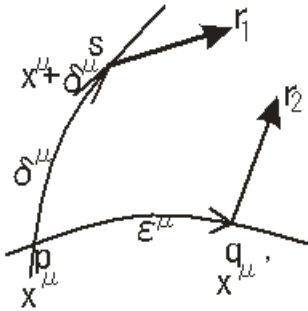


図 7.4: 振率は座標軸上の無限小ベクトルを平行移動したときのベクトルのずれ

多様体  $M$  上の点  $p$  の座標を  $\{x^\mu\}$  とする。次のように無限小ベクトル  $X, Y \in T_p M$  をつくる

$$X = \epsilon^\mu e_\mu \quad (7.61)$$

$$Y = \delta^\mu e_\mu \quad (7.62)$$

このベクトルを微小な移動だと考えると  $p$  点の近くに次の  $q, s$  点をつくる。

$$q\{x^\mu + \epsilon^\mu\} \quad (7.63)$$

$$s\{x^\mu + \delta^\mu\} \quad (7.64)$$

ベクトル  $X$  を直線  $ps$  に沿って平行移動すると式 7.56 から成分が次で与えられるベクトル  $sr_1$  を得る。

$$sr_1 = \epsilon^\mu - \epsilon^\lambda \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \delta^\nu \quad (7.65)$$

つまり曲面上の平行移動では直交座標と異なり、他方のベクトルの成分が移動に関係してくる。同様にベクトル  $Y$  を直線  $pq$  に沿って平行移動すると成分が次で与えられるベクトル  $qr_2$  を得る。

$$qr_2 = \delta^\mu - \epsilon^\lambda \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \delta^\nu \quad (7.66)$$

$p$  と  $r_1$  を結ぶ位置ベクトルは

$$pr_1 = ps + sr_1 = \epsilon^\mu - \epsilon^\lambda \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \delta^\nu + \delta^\mu \quad (7.67)$$

同様に  $p$  と  $r_2$  を結ぶ位置ベクトルは

$$pr_2 = pq + qr_2 = \delta^\mu - \epsilon^\lambda \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \delta^\nu + \epsilon^\mu \quad (7.68)$$

を得る。よってこの差は

$$r_2r_1 = pr_2 - pr_1 = (\Gamma_{\nu\lambda}^\mu - \Gamma_{\lambda\nu}^\mu) \epsilon^\lambda \delta^\nu = T_{\nu\lambda}^\mu \epsilon^\lambda \delta^\nu \quad (7.69)$$

となり、振率テンソルが現れる。従って振率テンソルは無限小ベクトルの平行移動によりできる図形が閉じた平行四辺形からどれだけずれるかを表す。接続  $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu$  が対称であれば振率は 0 である。

そこで下図のように点  $p$  にあるベクトルを  $q$  を経由し、 $r$  に行く場合と、 $s$  を経由し  $r$  に行く場合に角度  $\alpha$  を一定保った移動を考える。

図左においてどちらの経路においても  $r$  点では同一のベクトルになるので曲率テンソルは 0 になる。

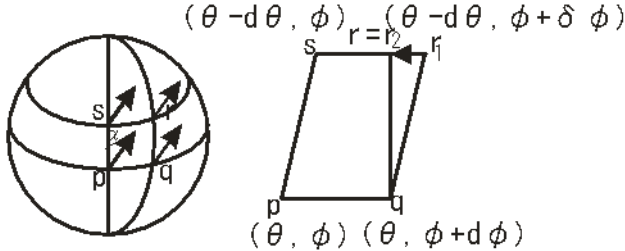


図 7.5: 曲面上の平行移動

次に振率を求めるために図右のように  $pq$  を  $ps$  に沿って移動させるとベクトル  $sr_1$  が得られる。この長さは極座標を用いて

$$sr_1 = R \sin \theta d\phi \quad (7.70)$$

である。次にベクトル  $ps$  を  $pq$  に沿って平行移動させるとベクトル  $qr_2 = qr$  に移動し  $sr$  の長さは

$$sr = R \sin(\theta - d\theta) d\phi = R \sin \theta d\phi - R \cos \theta d\theta d\phi \quad (7.71)$$

となるので

$$r_1r_2 = sr_1 - sr_2 = R \cos \theta d\theta d\phi$$

となるので  $r_1r_2$  は成分  $(\theta, \phi)$  として、上図右から成分表示すると  $\theta$  成分は 0 になるから  $R = 1$  の時は



$$r_1 r_2 = sr_1 - sr_2 = (0, \delta\phi) = (0, -\cos\theta d\theta d\phi)$$

となる。

従って Leui-Ciuita 接続であればこの  $r_1 r_2$  は 0 になるが、この場合は  $-\partial/\partial\phi$  に平行な成分があるのでこの接続は振率を持つ。

式 7.51 から

$$g_{\phi\phi} = R^2 \sin^2 \theta \quad (7.72)$$

よって式 10.24 から

$$\begin{aligned} T_{\theta\phi}^{\phi} &= \Gamma_{\theta\phi}^{\phi} - \Gamma_{\phi\theta}^{\phi} \\ &= \frac{1}{2} g^{\phi\phi} \left( -\frac{\partial}{\partial\theta} g_{\phi\phi} \right) \\ &= -\frac{1}{2R^2 \sin^2\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} (R^2 \sin^2\theta) \\ &= -\cot\theta \end{aligned}$$

が得られる。この時、基底  $\{\partial/\partial\theta, \partial/\partial\phi\}$  は球面上の極では定義されない。球面  $S^2$  は至るところで 1 次独立なベクトル場をつくることはできない。もし、 $m$  次元多様体  $M$  が至るところで 1 次独立な  $m$  個のベクトル場を作成できれば  $M$  は平行化可能であるという。

## 7.9 平行化と 4 元数

平行化可能な多様体では  $m$  個のベクトル場を使って  $M$  上の各点で接空間を定義できる。ベクトル  $V_p \in T_p M$  は  $T_p M$  における  $V_p$  の全ての成分が  $T_q M$  における  $V_q$  の成分に等しい時、 $V_q \in T_q M$  に平行であるといえる。ベクトル場は  $M$  全体で定義できるのでこの平行性は  $p, q$  の選び方には依存しない。従って Riemann 曲率テンソルが 0 になるが振率テンソルが一般に 0 になるとは限らない。球面が平行化可能になり得るのは  $n = 1, 3, 7$  の場合に限ることが知られている。これらは 4 元数、8 元数との関係も深い。そこで  $(\mathcal{R}^4, \delta)$  に埋め込まれた 3 次元球面

$$S^3 = \left\{ (x^1, x^2, x^3, x^4) \mid \sum_{i=1}^4 (x^i)^2 = 1 \right\} \quad (7.73)$$

を考える。次の 3 つの直交するベクトルは  $x(x^1, x^2, x^3, x^4)$  に垂直で  $S^3$  上で至るところで 1 次独立である。

$$\begin{aligned} e_1(x) &= (-x^2, x^1, -x^4, x^3) \\ e_2(x) &= (-x^3, x^4, x^1, -x^2) \\ e_3(x) &= (-x^4, -x^3, x^2, x^1) \end{aligned} \quad (7.74)$$

よって

$$e_i \cdot e_j = \delta_{ij} \quad (7.75)$$

従って接空間  $T_x S^3$  を定義できる。2 つのベクトル  $V_1(x)$  と  $V_2(y)$  は

$$V_1(x) = \sum_{i=1}^3 c^i e_i(x) \quad (7.76)$$

$$V_2(y) = \sum_{i=1}^3 c^i e_i(y) \quad (7.77)$$

であれば1次独立にとることができ、平行である。無限小移動  $\epsilon e_1(x)$  を考えると  $x = (x^1, x^2, x^3, x^4)$  は

$$x' = x + \epsilon e_1(x) \quad (7.78)$$

$$= \{x^1 - \epsilon x^2, x^2 + \epsilon x^1, x^3 - \epsilon x^4, x^4 + \epsilon x^3\} \quad (7.79)$$

に移る。よって  $x$  と  $x'$  における基底ベクトルの差は式 7.74 から例えば  $e_2$  について

$$\begin{aligned} e_2(x') - e_2(x) &= (-x^3 + \epsilon x^4, x^4 + \epsilon x^3, x^1 - \epsilon x^2, -x^2 - \epsilon x^1) - (-x^3, x^4, x^1, -x^2) \\ &= -\epsilon (-x^4, -x^3, x^2, x^1) \\ &= -\epsilon e_3 \\ &= \epsilon \Gamma_{12}^\mu e_\mu(x) \end{aligned}$$

となり、基底ベクトルの変化量は他の基底ベクトルで表現でき、

$$\Gamma_{12}^3 = -1, \quad \Gamma_{12}^1 = 0, \quad \Gamma_{12}^2 = 0 \quad (7.80)$$

である。同様な方法で

$$\Gamma_{21}^3 = 1 \quad (7.81)$$

を得る。従って

$$T_{12}^3 = \Gamma_{12}^3 - \Gamma_{21}^3 = -2 \quad (7.82)$$

が得られる。これにはさらに一般性があり  $\{\lambda, \mu, \nu\}$  が奇置換であれば +2、偶置換であれば -2 それ以外は 0 になる。

$$T_{\mu\nu}^\lambda = 2\epsilon_{\lambda\mu\nu} \quad (7.83)$$

以下では  $S^3$  上の平行化がいかに 4 元数とかわりがあるかを示す。4 元数の 4 次元座標の内積は

$$\begin{aligned} x \cdot y &= (x^1, x^2, x^3, x^4) \cdot (y^1, y^2, y^3, y^4) \\ &= x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3 - x^4 y^4, x^1 y^2 + x^2 y^1 + x^3 y^4 \\ &\quad - x^4 y^3, x^1 y^3 + x^3 y^1 - x^2 y^4 + x^4 y^2, x^1 y^4 + x^4 y^1 + x^2 y^3 - x^3 y^2 \end{aligned}$$

そこで  $S^3$  を長さ 1 の 4 元数の集合として次のように定義する。

$$S^3 = \{(x^1, x^2, x^3, x^4) | x \cdot \bar{x} = 1\} \quad (7.84)$$

$$\bar{x} = (x^1, -x^2, -x^3, -x^4) \quad (7.85)$$

$x_0 = (1, 0, 0, 0)$  としてここでの接空間は式 7.74 か

$$\begin{aligned} e_1 &= (0, 1, 0, 0) \\ e_2 &= (0, 0, 1, 0) \\ e_3 &= (0, 0, 0, 1) \end{aligned} \tag{7.86}$$

によって構成され、接空間の基底ベクトルは

$$\begin{aligned} e_1(x) &= e_1 \cdot x \\ e_2(x) &= e_2 \cdot x \\ e_3(x) &= e_3 \cdot x \end{aligned} \tag{7.87}$$

と決める。これにより  $S^3$  上の任意の点における接ベクトルを定義できるようになる。

## 7.10 曲率の測定

前節でみてきたように曲率が 0 であればあるベクトルの閉曲線  $C$  に沿った周積分

$$\oint_C dA^\mu = 0$$

になる。これは測地線の節で学んだ内容から閉曲線がパラメタ  $s$  で表される時

$$\frac{dA^\mu}{ds} = 0$$

が成り立つことになる。逆に局所座標を用いて

$$\frac{dA^\mu}{ds} = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} \frac{dx^\nu}{ds} = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} u^\nu$$

とおくと、このパラメタ  $s$  に対する速度

$$u^\nu \equiv \frac{dx^\nu}{ds}$$

が定義できる。ここで平行移動の要請は共変微分が 0

$$\frac{DA^\mu}{Ds} = 0$$

となるから

$$\frac{dA^\mu}{ds} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu u^\nu A^\rho = 0$$

従って

$$\frac{dA^\mu}{ds} = -\Gamma_{\nu\rho}^\mu u^\nu A^\rho$$

であり、閉曲線  $C$  に沿った周積分は

$$\oint_C dA^\mu = - \oint_C \Gamma_{\nu\rho}^\mu u^\nu A^\rho ds$$

となり、移項し、まとめると

$$\oint_C \left( \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} \frac{dx^\nu}{ds} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu u^\nu A^\rho \right) ds = \oint_C u^\nu \left( \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu A^\rho \right) ds = 0$$

よって

$$u^\nu \left( \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu A^\rho \right) = 0$$

となる。

## 7.11 計量例

具体的に計量を求める練習をいくつかしてみよう。

$\mathcal{R}^2$  上の極座標による計量は

$$g = dr \otimes dr + r^2 d\phi \otimes d\phi$$

なので Levi-Civita 接続の 0 でない成分を探すと

$$\begin{aligned} \nabla &= \Gamma_{r\phi}^\phi = \frac{1}{2} g^{\phi\lambda} (-\partial_\lambda g_{r\phi} + \partial_r g_{\phi\lambda} + \partial_\phi g_{\lambda r}) \\ &= \frac{1}{2} \{g^{\phi\phi} (\partial_r g_{\phi\phi})\} \\ &= \frac{1}{2} \frac{2r}{r^2} = \frac{1}{r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla &= \Gamma_{\phi\phi}^r = \frac{1}{2} g^{r\lambda} (-\partial_\lambda g_{\phi\phi} + \partial_\phi g_{\phi\lambda} + \partial_\phi g_{\lambda\phi}) \\ &= \frac{1}{2} \{g^{rr} (\partial_r g_{\phi\phi})\} \\ &= \frac{1}{2} \frac{2r}{1} = r \end{aligned}$$

$S^2$  上の極座標による計量は

$$g = d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\phi \otimes d\phi$$

なので Levi-Civita 接続の 0 でない成分を探すと

$$\begin{aligned} \nabla &= \Gamma_{\phi\phi}^\theta = \frac{1}{2} g^{\theta\lambda} (-\partial_\lambda g_{\phi\phi} + \partial_\phi g_{\phi\lambda} + \partial_\phi g_{\lambda\phi}) \\ &= \frac{1}{2} \{g^{\theta\theta} (-\partial_\theta g_{\phi\phi})\} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{1} = -\sin \theta \cos \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla &= \Gamma_{\theta\phi}^\phi = \frac{1}{2} g^{\phi\lambda} (-\partial_\lambda g_{\theta\phi} + \partial_\theta g_{\phi\lambda} + \partial_\phi g_{\lambda\theta}) \\ &= \frac{1}{2} \{g^{\phi\phi} (\partial_\theta g_{\phi\phi})\} \\ &= \frac{1}{2} \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{\sin^2 \theta} = \cot \theta \end{aligned}$$

また円柱は  $S^1 \times \mathcal{R}$  上の計量を持ち、円周をつくる角度を  $\phi$  とし、高さを  $z$  として

$$g = d\phi \otimes d\phi + dz \otimes dz$$

であるからこのままでは接続のどの成分を 0 なので

$$\begin{aligned} x &= r \cos \phi \\ y &= r \sin \phi \end{aligned}$$

とすると

$$\begin{aligned} dx &= -r \sin \phi d\phi \\ dy &= r \cos \phi d\phi \end{aligned}$$

とすると

$$g = \frac{1}{\sin^2 \phi} dx \otimes dx + \frac{1}{\cos^2 \phi} dy \otimes dy + dz \otimes dz$$

$$\begin{aligned} \nabla &= \Gamma_{xx}^z = \frac{1}{2} g^{z\lambda} (-\partial_\lambda g_{xx} + \partial_x g_{x\lambda} + \partial_x g_{\lambda x}) \\ &= \frac{1}{2} \{g^{\phi\phi} (\partial_r g_{\phi\phi})\} \\ &= \frac{1}{2} \frac{2r}{r^2} = \frac{1}{r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla &= \Gamma_{yy}^x = \frac{1}{2} g^{x\lambda} (-\partial_\lambda g_{yy} + \partial_y g_{y\lambda} + \partial_y g_{\lambda y}) \\ &= \frac{1}{2} \{g^{xx} (\partial_x g_{yy})\} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sin^2 \theta}{1} = r \end{aligned}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \phi} = r \cos \theta \quad (7.88)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \phi} = -r \sin \theta \quad (7.89)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} (r \sin \phi, r \cos \phi, z) = (0, 0, 1) \quad (7.90)$$

だから

$$\begin{aligned} g_{\phi\phi} &= r^2 (\cos \phi \cos \phi + \sin \phi \sin \phi) \\ \partial_\phi g_{\phi\phi} &= r^2 (\cos \phi \cos \phi + \sin \phi \sin \phi) \end{aligned}$$

### 7.11.1 Poincare 計量

$U$  を上半平面  $U \equiv \{(x, y) | y > 0\}$  として前節でのポアンカレの計量を次のようにおく

$$g = \frac{dx \otimes dx + dy \otimes dy}{y^2} \quad (7.91)$$

h

この時、Leui-Ciuita 接続の 0 でない成分を探すと

$$\begin{aligned} \nabla &= \Gamma_{xy}^x = \frac{1}{2} g^{x\lambda} (\partial_x g_{y\lambda} + \partial_y g_{\lambda x}) \\ &= \frac{1}{2} \{g^{xx} (\partial_y g_{xx})\} \\ &= \frac{1}{2} y^2 \left\{ (1/y^2)' \right\} \\ &= -\frac{1}{y} = \Gamma_{yx}^x \end{aligned} \quad (7.92)$$

$$\begin{aligned}
\nabla &= \Gamma_{yy}^y = \frac{1}{2} g^{y\lambda} (-\partial_y g_{yy} + \partial_y g_{y\lambda} + \partial_y g_{\lambda y}) \\
&= \frac{1}{2} \{g^{yy} (\partial_y g_{yy})\} \\
&= \frac{1}{2} y^2 \left\{ (1/y^2)' \right\} \\
&= -\frac{1}{y} = -\Gamma_{xx}^y
\end{aligned} \tag{7.93}$$

への右作用が式 7.29 より測地線の方程式は式 7.92 からは  $\mu = x$  として和をとると

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\lambda}{ds} = x'' - \frac{2}{y} x' y' = 0 \tag{7.94}$$

を得る。また同様に式 7.93 からは  $\mu = y$  として和をとると

$$y'' - \frac{1}{y} y'^2 + \frac{1}{y} x'^2 = 0$$

を得る。7.94 からは両辺を  $x'$  で割り

$$\frac{x''}{x'} = 2 \frac{y'}{y}$$

と分離できるので積分すると

$$\log x' = 2 \log y + C$$

よって

$$\frac{x'}{y^2} = \frac{1}{R} \tag{7.95}$$

ここでパラメタ  $s$  がベクトル  $(x', y')$  が長さ 1 を満たすようにとると

$$\frac{x'^2 + y'^2}{y^2} = 1$$

となるから、前の式から

$$\frac{y^2}{R^2} + \frac{y'^2}{y^2} = 1$$

$$y'^2 = y^2 \left( 1 - \frac{y^2}{R^2} \right)$$

だから  $y' = dy/ds$  よりポアンカレ平面では  $y = R \sin t$  として

$$ds = \frac{dy}{y \sqrt{1 - \frac{y^2}{R^2}}} = \frac{dt}{\sin t}$$

この置き換えで式 7.95 は

$$x' = \frac{y^2}{R} = R \sin^2 t \tag{7.96}$$

となる。よって積分ができて

$$\begin{aligned}
x &= \int x' ds = \int \frac{dx}{ds} \frac{ds}{dt} dt \\
&= \int R \sin t \frac{1}{\sin t} dt = R \cos t + x_0
\end{aligned}$$

同様にして

$$y = R \sin t \quad y > 0 \tag{7.97}$$

を得るがこれは  $(x_0, 0)$  を中心とする半径  $R$  の上半円である。最大に伸びた測地線は  $0 < t < \pi$  であり曲線の長さは

$$\begin{aligned}
\int ds &= \int_{0+\epsilon}^{\pi-\epsilon} \frac{ds}{dt} dt = \int_{0+\epsilon}^{\pi-\epsilon} \frac{dt}{\sin t} = -\frac{1}{2} \log \frac{1+\cos t}{1-\cos t} \Big|_{0+\epsilon}^{\pi-\epsilon} \\
&= \infty
\end{aligned}$$

である。この結果は前節式からも求められる。

## 8 テンソル場

### 8.1 テンソル算 [75]

ここで改めて、今後テンソルの計算が頻繁に現れるのでその基礎代数をまとめておく。

#### 8.1.1 添え字定義

ここでは座標は上付き添え字で、基本的に 4 次元の場合  $0, 1, 2, 3$  を用いて

$$x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$$

とし、 $x^\mu$  は  $[4, 1]$  型の縦ベクトルである。

変換座標にはダッシュをつけて同じ添え字が出てきた場合はその和記号を省略

$$x^{\mu'} = a_{\nu}^{\mu} x^{\nu} + b^{\mu} \tag{8.1}$$

である。 $a_{\nu}^{\mu}$  は上、下付きにしないといけない。これは  $[4, 4]$  型の定数行列であることを表す。

今度、古典的な 3 次元では  $k, lm$  の添え字、4 次元では  $\mu, \nu, \rho, \sigma$  の添え字を用いる。

型のみ見ると

$$[4, 1] = [4, 4][4, 1] + [4, 1]$$

で型の積前後で同じ数字になっていないといけない。同じ数字であれば演算可能で前後縮約できる。

光速不変の原理を用いると

$$-(x^0)^2 + \sum_{k=1}^3 (x^k)^2 = Const.$$

である。虚数単位を用いて  $x^0 = ict$  とすれば

$$\sum_{\mu=0}^4 (x^\mu)^2 = Const.$$

とかける。これを見ても、相対論による時間と空間の対等化には実数から複素数への拡大が必要になることが示唆される。

変換がローレンツ変換のようになるためには次の  $\eta_{\mu\nu}$  を用いて

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8.2)$$

と定義して、光速度不変の原理は

$$\eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = \eta_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu$$

とかくことができ式 8.1 を代入すると

$$\eta_{\mu\nu} = \eta_{\rho\sigma} a_\mu^\rho a_\nu^\sigma \quad (8.3)$$

である必要がある。

### 8.1.2 添え字の上げ下げ

一般に  $4 \times 4$  の行列  $A$  の成分を

$$(A)_{\mu\nu} \equiv a_\nu^\mu$$

先の  $\eta$  は行列  $Y$  の成分

$$(Y)_{\mu\nu} \equiv \eta_{\mu\nu}$$

とすると式 8.2 から逆行列は添え字を上下させて、

$$Y^{-1} \equiv \eta^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

で表す。式 8.3 から転置行列  $A^T$  を用いて

$$\begin{aligned} \eta_{\mu\nu} &= (a_\nu^\mu)^T \eta_{\mu\nu} a_\nu^\mu \\ &= a_\mu^\nu \eta_{\mu\nu} a_\nu^\mu \end{aligned}$$

行列表現で

$$Y = A^T Y A$$

とかけるので両辺に  $Y^{-1}$  をかけると単位行列を  $I$  として

$$I = Y^{-1} A^T Y A$$

これを成分でかくと添え字のつながりは

$$\delta_\nu^\mu = \eta^{\mu\lambda} a_\lambda^\rho \eta_{\rho\sigma} a_\nu^\sigma \quad (8.4)$$

となる。ここで添え字を注視すると

$$\eta^{\mu\lambda} a_\lambda^\rho = a^{\mu\rho}$$

$$\eta_{\rho\sigma} a_\nu^\sigma = a_{\rho\nu}$$



と決めれば式 8.4 は

$$\delta_{\nu}^{\mu} = a^{\mu\rho} a_{\rho\nu} = a_{\nu}^{\mu} \quad (8.5)$$

となっていないといけないことがわかる。つまり、 $a_{\nu}^{\mu}$  は対角単位行列である。

式をよく見ると  $\eta^{\mu\lambda}$  は下付きの  $\lambda$  を消し、 $\eta_{\mu\lambda}$  は上付きの  $\lambda$  を消してつなげればよいことがわかる。

ここで注意が必要で上式の両辺に  $\eta^{\tau\nu}$  自身は  $\delta_{\nu}^{\mu}$  により

$$\begin{aligned} \eta^{\tau\nu} \delta_{\nu}^{\mu} &= \eta^{\tau\mu} = \eta^{\tau\nu} a_{\nu}^{\mu} \\ &= a^{\tau\mu} \end{aligned}$$

となる。これは  $\tau = \mu = 0$  で  $a^{00} = -1 \neq a_0^0$  である。また、

$$\eta^{\tau\nu} \delta_{\nu}^{\mu} = \delta^{\tau\mu} = a^{\tau\mu}$$

ともできるので、 $\tau = \mu = 0$  とすると

$$a^{00} = \eta^{0\nu} \delta_{\nu}^0 = \eta^{00} \delta_0^0 = -1$$

となる。実際に  $a^{00}$  を  $a_0^0$  から求めると

$$\eta^{00} = -1, a_0^0 = 1$$

だから

$$a^{00} = \eta^{00} a_0^0 = -1$$

となる。このように 0 成分を持つ時は符号が負にする約束がある。これが時空の計量の必要性になる。

さらに、ここでの  $a^{00}$  は実際には使えない。つまり座標は  $[1, 0]$  型であるから

$$a^{\mu\rho} x^{\rho}$$

は座標にならない。つまり、上付き、下付で反変、共変のテンソル型も表現している。実際には

$$a_{\rho}^{\mu} x^{\rho}$$

が座標になる。

さらに

$$a^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1/a_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/a_{33} \end{pmatrix}$$

$$a_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1/a_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/a_{33} \end{pmatrix}$$

とおくと式 8.5 の  $\mu = \nu = 0$  の成分をみると

$$a^{00} a_{00} = 1 = \delta_0^0$$

となるが、もし、対角化されていないと係数  $C$  が必要で

$$a_{\mu\nu} = \sqrt{C} \begin{pmatrix} a_{00} & a_{10} & a_{20} & a_{30} \\ a_{01} & & & \\ a_{02} & & & \\ a_{03} & & & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$a^{\mu\nu} = \sqrt{C} \begin{pmatrix} 1/a_{00} & 1/a_{10} & 1/a_{20} & 1/a_{30} \\ 1/a_{01} & & & \\ 1/a_{02} & & & \\ 1/a_{03} & & & 1/a_{33} \end{pmatrix}$$

とすると式 8.5 の  $\mu = \nu = 0$  の成分をみると係数  $C = 1/4$  とすれば

$$a^{00}a_{00} + a^{01}a_{01} + a^{02}a_{02} + a^{03}a_{03} = C \cdot 4 = 1 = \delta_0^0$$

と次元の数だけの和ができる。対角化されていればこの次元を見ずにすむわけである。再び式 8.7 を見ると、このルールで

$$\eta_{\mu\nu} = \eta_{\rho\sigma} a_{\mu}^{\rho} a_{\nu}^{\sigma}$$

からは 0 成分を分けて足し合わせれば

$$-1 = -(a_0^0)^2 + \sum_{k=1}^3 (a_0^k)^2$$

を意味し、書き換えると

$$a_0^0 = \pm \sqrt{1 + \sum_{k=1}^3 (a_0^k)^2}$$

であり、これはユークリッド空間とは異なったもので第 7 章であつかったミンコフスキー空間になる。

### 8.1.3 計量テンソル

計量テンソル  $g_{\mu\nu}$  は対称なので次の性質が成り立つ。

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$$

よって 4 次元の場合は 16 個の成分のうち、独立になるのは 10 個しかない。次のように行列式の基本は下付で定義する。

$$g = \text{Det } g_{ij}$$

$$1/g = \text{Det } g^{ij}$$

計量の逆行列の定義から

$$g_{\mu\nu} \frac{\partial g^{\mu\sigma}}{\partial x^{\rho}} = -g^{\mu\sigma} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}}$$

が成り立つ。

## 8.2 アインシュタインの規約

アインシュタインの規約ルールは既に何度も利用してきた、同じ添え字が現れれば足し合わせるというものだが

同じものがダミーを除いて2つ以上あってはならないというルールもある。従って次のような表記は間違いになる。

$$A_\mu = g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} A_\mu$$

正しくは次のような計量テンソルを定義しておく

$$g_\mu^\rho = g_{\mu\nu} g^{\rho\nu} = \delta_\mu^\rho$$

従って、

$$g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = g_0^0 + g_1^1 + g_2^2 + g_3^3 = 4$$

であるが

$$g_{00} = -1, g^{00} = -1$$

$$g_{00} g^{\rho 0} = g_0^\rho$$

2つの添え字を一斉に上げ、下げしても符号は変わらない。

## 8.3 偏微分と変換性

省略形として次のように、 $\partial$ で偏微分を表す。

$$\frac{\partial Q}{\partial x^\mu} = Q_{,\mu}$$

よって微小変位  $\delta Q$  は

$$\begin{aligned} \delta Q &= \frac{\partial Q}{\partial x^\mu} \delta x^\mu \\ &= Q_{,\mu} \delta x^\mu \end{aligned}$$

と表す。

## 8.4 ベクトルの変換

座標変換  $x^\mu \rightarrow x^{\mu'}$  としたとき、この時の  $x^\mu$  の微小変位  $\delta x^\mu$  は

$$\delta x^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} \delta x^\mu = x^{\mu',\mu} \delta x^\mu \quad (8.6)$$

と変換されるので、これと同様に任意の反変ベクトル  $A^\mu$  は

$$A^{\mu'} = x^{\mu',\mu} A^\mu \quad (8.7)$$

であり、逆変換  $x^{\mu'} \rightarrow x^\mu$  としたとき

$$A^\mu = x^{\mu,\mu'} A^{\mu'} \quad (8.8)$$

共変ベクトル  $B_\mu$  の場合はスカラー積は

$$A^{\mu'} B_{\mu'} = A^\mu B_\mu$$

が成り立つので 8.7 より

$$A^{\mu'} B_{\mu'} = x^{\mu, \mu'} A^{\mu'} B_{\mu}$$

これが任意の  $A^{\mu'}$  に対し、恒等的に成り立つためには

$$B_{\mu'} = x^{\mu, \mu'} B_{\mu}$$

だから、ダッシュを入れ替えれば

$$B_{\mu} = x^{\mu', \mu} B_{\mu'}$$

と変換する。

## 8.5 テンソルの変換

以上から前部でもみたようにテンソルの変換則は反変、共変の混在であり次に従う。

$$T_{\nu'}^{\lambda' \mu'} = x^{\lambda', \lambda} x^{\mu', \mu} x^{\nu, \nu'} T_{\nu}^{\lambda \mu}$$

例えば計量テンソルは

$$\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} = g_{\nu}^{\lambda}$$

で定義されると考えてよい。左辺は

$$\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\nu}}$$

と展開できるので

$$g_{\nu}^{\lambda} = x^{\lambda, \mu'} x^{\mu', \nu}$$

とかける。これは次のようにテンソルの変換則を満たしている。

$$g_{\nu}^{\lambda} = x^{\lambda, \lambda'} x^{\nu', \nu} g_{\nu'}^{\lambda'}$$

また、任意の反変ベクトルに対して

$$g_{\mu' \nu'} A^{\mu'} B^{\nu'} = g_{\mu \nu} A^{\mu} B^{\nu} = g_{\mu \nu} x^{\mu, \mu'} x^{\nu, \nu'} A^{\mu'} B^{\nu'}$$

が成り立ち

$$g_{\mu' \nu'} = g_{\mu \nu} x^{\mu, \mu'} x^{\nu, \nu'}$$

$g_{\mu \nu}$  もまた、テンソルのようにふるまう。また、 $S$  をスカラーとすると

$$\frac{\partial S}{\partial x^{\mu'}} = \frac{\partial S}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}$$

従って

$$S_{, \mu'} = S_{, \mu} x^{\mu, \mu'}$$

となりスカラーの微分は共変ベクトルをなす。

しかし、クリストッフェルの記号のようにベクトル' やテンソルの微分はテンソルになるとは限らない。添え字の上げ、下げだけではテンソルになるかどうかはきまらない。しかし、積がテンソルで、積の片方がテンソルであればもう一つもテンソルになる。例えば

$$A^{\lambda'} = x^{\lambda', \lambda} A^{\lambda}$$

$$T_{\mu'\nu'} = x_{,\mu'}^\mu x_{,\nu'}^\nu T_{\mu\nu}$$

はテンソルとしてある量  $R_{\lambda\mu\nu}$  について

$$A^{\lambda'} R_{\lambda'\mu'\nu'} = T_{\mu'\nu'}$$

が成り立てば

$$x_{,\lambda'}^{\lambda'} A^{\lambda'} R_{\lambda'\mu'\nu'} = x_{,\mu'}^\mu x_{,\nu'}^\nu T_{\mu\nu}$$

が成り立つことになる。これが任意の  $A^\lambda$  に成り立つことから

$$A^\lambda R_{\lambda\mu\nu} = T_{\mu\nu}$$

と比較し、

$$x_{,\lambda'}^{\lambda'} R_{\lambda'\mu'\nu'} = x_{,\mu'}^\mu x_{,\nu'}^\nu R_{\lambda\mu\nu}$$

となることがわかる

$$\left(x_{,\lambda'}^{\lambda'}\right)^{-1} = x_{,\lambda'}^\lambda$$

の関係を用いて

$$R_{\lambda'\mu'\nu'} = x_{,\lambda'}^\lambda x_{,\mu'}^\mu x_{,\nu'}^\nu R_{\lambda\mu\nu}$$

となり、テンソルになる。これを商の定理という。

## 8.6 無限小変換 [84]

テンソル場は同一点  $x, x'$  を異なる座標系で表した時、

$$T'_\mu(x') \equiv \frac{\partial T}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial T}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}$$

として  $N$  階に拡張すると

$$T'_{\mu_1 \dots \mu_N}(x') = T_{\nu_1 \dots \nu_N}(x) \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x'^{\mu_1}} \dots \frac{\partial x^{\nu_N}}{\partial x'^{\mu_N}}$$

のようにダッシュが下にくる座標変換であった。

この時、

$$T \equiv T_{\nu_1 \dots \nu_N}(x) dx^{\nu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\nu_N}$$

が座標系によらず不変になるのが特徴であった。

$N$  階のテンソル場  $T$  を微分同相写像 (1 対 1 で逆も滑らか)  $\phi$  で変換する  $\phi^*T$  を考える。

$$(\phi^*T)_{\mu_1 \dots \mu_N}(x) \equiv T_{\nu_1 \dots \nu_N}(\phi(x)) \frac{\partial \phi(x)^{\nu_1}}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial \phi(x)^{\nu_N}}{\partial x^{\mu_N}}$$

を定義すると、この座標変換も

$$T_{\mu_1 \dots \mu_N}(\phi(x')) \frac{\partial \phi(x')^{\mu_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \dots \frac{\partial \phi(x')^{\mu_N}}{\partial x'^{\nu_N}} = T_{\nu_1 \dots \nu_N}(\phi(x)) \frac{\partial \phi(x)^{\nu_1}}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial \phi(x)^{\nu_N}}{\partial x^{\mu_N}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x'^{\mu_1}} \dots \frac{\partial x^{\nu_N}}{\partial x'^{\mu_N}}$$

を見たし、テンソル則を満足する。

そこで  $v^\mu(x)$  をベクトル場として

$$\phi(x)^\mu = x^\mu + \epsilon v^\mu(x)$$

の無限小変換を考え、

$$\phi^*T(x) = T(x) + \epsilon \delta_v T(x) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{8.9}$$

と近似する。例えば2階のテンソルであれば

$$\begin{aligned} (\phi^*T)_{\mu\nu}(x) - T_{\mu\nu}(x) &= T_{\alpha\beta}(x + \epsilon v) \left( \delta_\mu^\alpha + \epsilon \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\mu}(x) \right) \left( \delta_\nu^\beta + \epsilon \frac{\partial v^\beta}{\partial x^\nu}(x) \right) - T_{\mu\nu}(x) \\ &= \epsilon \left[ v^\rho(x) \frac{\partial}{\partial x^\rho} T_{\mu\nu}(x) + T_{\alpha\nu}(x) \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\mu}(x) + T_{\mu\beta}(x) \frac{\partial v^\beta}{\partial x^\nu}(x) \right] + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{aligned}$$

となるから式8.9から

$$\delta_v T_{\mu\nu} = v^\rho(x) \frac{\partial}{\partial x^\rho} T_{\mu\nu}(x) + T_{\alpha\nu}(x) \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\mu}(x) + T_{\mu\beta}(x) \frac{\partial v^\beta}{\partial x^\nu}(x)$$

であり、これを  $N$  階に拡張すると

$$\delta_v T_{\mu_1 \dots \mu_N} = v^\nu(x) \frac{\partial}{\partial x^\nu} T_{\mu_1 \dots \mu_N}(x) + \sum_{j=1}^N T_{\mu_1 \dots \mu_{j-1}, \nu_j, \mu_{j+1} \dots \mu_N}(x) \frac{\partial v^{\nu_j}}{\partial x^{\mu_j}}(x)$$

となる。

## 8.7 平行移動

リーマン空間において  $x^\mu$  とその近傍  $x^\mu + dx^\mu$  との間の距離は

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

とかけ、これは座標変換に対して不変である。

空間が曲がっていることも考えるので平行移動をより高次の次元からながめる必要がある。そこでここではローマ字  $(m, n)$  等では4次元の  $(\mu, \nu)$  と区別し、 $N$ 次元空間とする。

## 8.8 テンソル密度

一般相対性理論では重力場は計量テンソルにより記述される。計量テンソルがあると時空の各点で内積が定義できる。

$n$ 次元多様体  $M$  上の2階対称共変テンソル場

$$g \in T_2^0(M)$$

この全ての点で正則な行列となるものを多様体上の計量テンソル場といい、この計量の組  $(M, g)$  を擬 **Riemann** 多様体という。

$$g = ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

を計量  $g$  といい、 $g$  の成分を表す行列は基底により変化するが負の固有値  $r$  と正の固有値  $n$  の差  $n - r$  は Sylvester の慣性律から基底に依存しない。

$r = 0$  なら Riemann 多様体、 $r = 1$  ならローレンツ多様体という。

局所的に

$$g(e_a, e_b) = \eta_{ab}$$

となる基底  $\{e_a\}$  が存在すればこれを正規直交基底といい

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} l^\alpha l^\beta$$

とおけて自然に  $n$  形式が

$$\Omega = l^0 \wedge \dots \wedge l^{n-1} \quad (8.10)$$

となり変換行列  $\psi_b^a$  を用いて

$$l'^a = \psi_b^a l^b$$

となり、これは直交行列だから行列式は  $\pm 1$  となる。よって

$$\Omega' = \det \psi \Omega = \pm \Omega \quad (8.11)$$

基底の向きのみ依存する。これにより  $M$  が向き付け可能であれば基底が局所的にしか存在しなくても  $\Omega$  は  $M$  全体で定義できる。この  $\Omega$  を体積要素という。ここで  $g_{\mu\nu} = \eta_{abl}^a l_\mu^b$  だから両辺の行列式をとれば

$$|l| = \det l_b^a = \pm \sqrt{|\det g_{ab}|} = \pm \sqrt{|g|}$$

である。これから式 8.10 から

$$\Omega = \pm \frac{1}{n!} \varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_n} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_n}$$

$$\varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_n} = \sqrt{|g|} \varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_n}^0$$

と表すことができる。ただし  $\varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_n}^0$  は完全反対称なテンソルである。よって  $\varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_n}$  は符号を除いてテンソルとして振る舞う擬テンソルになる。これを **Levi-Civita 擬テンソル** と呼ぶ。また、これをテンソル密度ともいう。

## 8.9 レビ・チビタテンソル

前節の  $\varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho}(x)$  はレビ・チビタテンソルと呼ばれる重要なテンソルになる。これを導いておこう。一般的な次を満たす仮の完全反対称テンソルを

$$\eta_{0123} = 1$$

とすると変換則は次のようになる。

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\rho} \frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\sigma} \eta_{\alpha\beta\gamma\delta} = \left( \det \left( \frac{\partial x}{\partial x'} \right) \right) \eta_{\mu\nu\rho\sigma}$$

$$\eta_{\mu\nu\rho\sigma} = \left( \det \left( \frac{\partial x'}{\partial x} \right) \right) \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\rho} \frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\sigma} \eta_{\alpha\beta\gamma\delta}$$

これがテンソルとして振る舞うためには  $\det \left( \frac{\partial x'}{\partial x} \right)$  は一般に 1 ではないので計量の変換でこれを打ち消す必要がある。

そこで

$$g(x) \equiv \det(g_{\mu\nu})$$

と定義すると、これは空間ベクトルでは常に負になることに留意する。ダッシュ系への座標変換では  $g$  と  $x$  の変換が式 9.7 から共变的に 2 回変換し、

$$g'(x') = \det \left( \frac{\partial x}{\partial x'} \right) \det \left( \frac{\partial x}{\partial x'} \right) g(x)$$

となる。よって  $g(x) < 0$  であることを考慮して、次のように定義すればテンソルになる。

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \sqrt{-g}\eta_{\mu\nu\rho\sigma}$$

これをレビ・チビタテンソルという。

一般に 3 個の添え字を持った物理量  $A^{\lambda\mu\nu}$  を考える。この  $A^{\lambda\mu\nu}$  に 3 個の任意の共変ベクトル  $\xi_\lambda, \eta_\mu, \zeta_\nu$  を  $A$  にかけて次のような  $S$  が作られる。

$$S \equiv A^{\lambda\mu\nu}\xi_\lambda\eta_\mu\zeta_\nu$$

この時、次節でみるように、 $S$  がスカラーならば  $A^{\lambda\mu\nu}$  は完全反対称テンソルである。

Levi-Civita 疑テンソルが 3 階であれば次の値をとることになる。

$$\epsilon_{ijk} \begin{cases} 1 & (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2) \\ -1 & (1, 3, 2), (3, 2, 1), (2, 1, 3) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

さらに次のように添え字が同じになるとクロネッカー  $\delta$  ができる。

$$\sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} \quad (8.12)$$

$$\sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk}\epsilon_{ljk} = 2\delta_{il} \quad (8.13)$$

$$\sum_{i,j,k=1}^3 \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6 \quad (8.14)$$

## 9 計量テンソル

### 9.1 テンソル形式

$n$  次元多様体  $M$  上に  $x^1, x^2, \dots, x^n$  を座標系をとる。また、 $X(M)$  はベクトル場とする。次のように双線形関数  $f$  を定義しておく。

$A$  が  $(r, s)$  型のテンソルであれば

$$A : \underbrace{X^* \times \dots \times X^*}_r \times \underbrace{X \times \dots \times X}_s \rightarrow f$$

である。普通関数  $f(x)$  は  $(0,0)$  型のテンソルということもできる。

また、共変ベクトルは  $(0, s)$  型のテンソルで反変ベクトルは  $(r, 0)$  型のテンソルになる。

1 形式を  $\theta^r$  で表す。テンソルはこの、1 形式とベクトル場  $X_s$  から  $(r, s)$  型が作られる。

双線形関数  $f$  は次のように、どのスロットに作用しても外に出すことができる。

$$A(\theta^1, \dots, f\theta^i, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s) = fA(\theta^1, \dots, \theta^i, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s)$$

$(r, s)$  型のテンソルを  $T_s^r$  として例えば

$$T_1^0 = X^*, T_0^1 = X$$

であり、次は  $(1, 2)$  型のテンソルである。

$$A(\theta, X, Y) = \theta(A(X, Y))$$



しかし、括弧積は

$$\begin{aligned} [fX, Y] &= fX \cdot Y - Y \cdot fX \\ &= fXY - fYX - YfX \\ &= f[X, Y] - YfX \end{aligned}$$

となるので括弧積がテンソルはテンソルではないことがわかる。  
( $U \subset M$ ) として、この時  $U$  上のテンソル成分は実で

$$T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = T(dx^{i_1}, \dots, dx^{i_r}, \partial_{j_1}, \dots, \partial_{j_s})$$

で表す。添え字は 1 形式から  $n$  形式までを表し反変、共変成分が上下につく。  
例えば基底を用いて 1 形式は

$$\theta = \sum \theta_i dx^i$$

ベクトル場は

$$X = \sum X^j \partial_j$$

と表す。すると (1,1) 型のテンソ  $T$  は

$$T(\theta, X) = \sum_{ij} \theta_i X^j T(dx^i, \partial_j) = \sum_{ij} T_j^i \theta_i X^j$$

と両方の基底をまとめて表すことができる。

よって、(1,1) 型の  $A$  と (1,2) 型のテンソル  $B$  の積は (2,3) 型のテンソルになる。

$$A(\theta, X) B(\omega, Y, Z) = (A \otimes B)(\theta, \omega, X, Y, Z)$$

成分表示で

$$(A \otimes B)_{klm}^{ij} = A_k^i B_{lm}^j$$

である。

## 9.2 フレーム場

座標系をセットとしてまとめて扱えるようにすると便利である。

そこで、多様体上の点  $p$  で接ベクトル  $\{\partial_1, \partial_2 \dots \partial_n\}$  を考え、接空間  $T_p(M)$  フレーム場として

$$\{E_1, E_2 \dots E_n\}$$

を定義する。ここで  $E_i$  はベクトル場である。

微分 1 形式

$$dx^1, dx^2, \dots, dx^n$$

に対して双対な 1 形式  $\omega$  を

$$\omega^i(E_j) = \delta_j^i$$

で定義すると

$$\{\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^n\}$$

は双対フレーム場である。これからどんなベクトル場  $X$  も

$$X = \sum \omega^i(X) E_i$$

で表すことができる。フレーム場を定義しておくこととテンソルの成分表現を明確にしやすい。  
 例えば (1,2) 型のテンソル  $A$  が  $M$  上の双線形関数  $f(M)$

$$X^*(M) \times X(M) \times X(M) \rightarrow X(M)$$

また、 $A$  の成分は座標基底表示で

$$A_{jk}^i = A(dx^i, \partial_j, \partial_k)$$

フレーム表示で

$$A_{jk}^i = A(\omega^i, E_j, E_k)$$

である。ここで、座標変換をするようにフレーム変換の規則を定義しよう。 $U$  上で  $n \times n$  の行列  $a, b$  を用いてフレーム場  $\{E_j\} \rightarrow \{F_j\}$  を

$$F_j = \sum a_j^m E_m$$

$$\theta^i = \sum b_q^i \omega^q$$

が成り立つ。双対性から次は正方単位行列である。

$$\sum b_m^i a_j^m = \delta_j^i$$

よって  $a, b$  は座標変換で用いてヤコビアンとその逆行列である。

$$a = \frac{(\partial y^i)}{(\partial x^j)}$$

$$b = \frac{(\partial x^i)}{(\partial y^j)}$$

従って、次の関係がある。

$$A(\theta^i, F_j) = A\left(\sum b_q^i \omega^q, \sum a_j^m E_m\right) = \sum b_q^i a_j^m A_m^q$$

ただし、 $A_m^q$  は

$$A(\theta, V) = \sum A_m^q \theta_q V^m$$

である。よってこれらの変換がフレームに依存しないことがわかる。

### 9.3 計量テンソル

次に時空間に距離を定義することを考える。この節では簡単に単位系  $c = 1, G = 1$  を選ぶことにする。  
 $(x^0 = t, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z)$  と単純における。

第2部で見たように  $M$  が微分多様体であり  $p \in M$  で次の条件をみたす時、**Riemann 計量**  $g$  という。

1.  $g_p(U, V) = g_p(V, U)$
2.  $g_p(U, V) \geq 0$  等号は  $U = 0$  の時のみ
3.  $U \in T_p M$  に対して  $g_p(U, V) = 0$  ならば  $V = 0$  をさらに満たせば擬 Riemann 計量という。

ここで  $g_p$  は正定値な対称双 1 次形式であり 2 つのベクトル  $U, V \in T_p M$  の内積で定義された。  $g_p(U, V)$  は

$$g_p(U, V); T_p M \otimes T_p M \rightarrow \mathcal{R} \tag{9.1}$$

であることから

$$g_p(U, \cdot); T_p M \rightarrow \mathcal{R} \quad (9.2)$$

を

$$V \rightarrow g_p(U, V) \quad (9.3)$$

によって定義できるので  $g_p(U, \cdot)$  は 1 形式

$$\omega_U \in T_p^* M \quad (9.4)$$

と同一視できる。同様に  $T_p M$  と  $T_p^* M$  は同型写像を引き起こす。よって

$$\omega_V \in T_p M \quad (9.5)$$

が誘導される。よって座標表示では

$$g_p = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu}(p) dx^\mu \otimes dx^\nu \quad (9.6)$$

で展開できる。また、 $g_p(U, V)$  から

$$g_p \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) = g_{\mu\nu}(p) = g_{\nu\mu}(p) \quad (9.7)$$

を満たす。ここで次のように行列式を  $g$  で定義する。

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} g^{\nu\lambda} &= \delta_\mu^\lambda \\ \det (g_{\mu\nu}) &= g \\ \det (g^{\mu\nu}) &= g^{-1} \end{aligned} \quad (9.8)$$

であり、対称性から

$$\begin{aligned} \omega_\mu &= g_{\mu\nu} U^\nu \\ U^\mu &= g^{\mu\nu} \omega_\nu \end{aligned}$$

と 1 形式を使って書ける。これから  $p$  点での無限小距離の定義式

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_p \left( dx^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}, dx^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) \\ &= dx^\mu dx^\nu g_p \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) \\ &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \end{aligned} \quad (9.9)$$

が自然に導け、 $g^{\mu\nu}$  は対称行列なのでその固有値は実数になる。この  $g^{\mu\nu}$  を計量テンソルという。

$g$  が Riemann 計量であれば全ての固有値は正だが擬 Riemann 計量の場合は負の値をとることもあり正の値が  $i$  個、負の値が  $j$  個ある時  $(i, j)$  の組を計量の指数という。  $j = 1$  なら Lorentz 計量という。例えば Minkowski 空間が Lorentz 計量である。

$(M, g)$  が Lorentz 計量の多様体であればその接空間  $T_p M$  は式 2.18 に対応して、次の 3 つのクラスに分かれた。

1.  $g(U, U) > 0 \rightarrow U$  は空間的

2.  $g(U, U) = 0 \rightarrow U$  は光錐的
3.  $g(U, U) < 0 \rightarrow U$  は時間的

4 次元的に不変な時空距離を

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

とおく前節でみたように Minkowski 時空では

$$\eta_{ab} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$$

の計量を持つ。4次元の時空の多様体の単位接ベクトルを  $\mathbf{e}$  用いると、計量は一般に次のようにおける。

$$g_{ab} = \mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_b$$

座標軸を表す、単位ベクトルのこの表記は内積ではないので注意する。これはテンソル積になる。例えば 2次元のユークリッド空間であれば

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2$$

となり、 $\mathbf{e}_a = (1, 0)$ ,  $\mathbf{e}_b = (0, 1)$  だから

$$g_{ab} = \mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_b = (1, 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。

3次元の球座標ではやや複雑である。 $(r, \theta, \phi)$  として

$$x = r \sin \theta \cos \phi$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi$$

$$z = r \cos \theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\theta = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\phi = \text{sgn}(y) \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

よって微分は

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \sin \theta \cos \phi, \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin \theta \sin \phi, \quad \frac{\partial z}{\partial r} = \cos \theta$$

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = r \cos \theta \cos \phi, \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r \cos \theta \sin \phi, \quad \frac{\partial z}{\partial \theta} = -r \sin \theta$$

$$\frac{\partial x}{\partial \phi} = -r \sin \theta \sin \phi, \quad \frac{\partial y}{\partial \phi} = r \sin \theta \cos \phi, \quad \frac{\partial z}{\partial \phi} = 0$$

1形式は

$$dx = \sin \theta \cos \phi dr + r \cos \theta \cos \phi d\theta - r \sin \theta \sin \phi d\phi$$

$$dy = \sin \theta \sin \phi dr + r \cos \theta \sin \phi d\theta + r \sin \theta \cos \phi d\phi$$

$$dz = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta$$

となる。これからヤコビアン  $J$  が次のように求まる。

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & r \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix}$$

また、行列式は

$$\det J = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} \right| = r^2 \sin \theta$$

接方向の単位ベクトルはデカルト座標と、球座標で  $\mathbf{s}(x, y, z), \mathbf{s}(r, \theta, \phi)$ 、ヤコビアン  $J$  の縦成分を  $(J_1, J_2, J_3)$  と書くと、

$$\begin{aligned} ds &= \mathbf{e}_x dx + \mathbf{e}_y dy + \mathbf{e}_z dz = \mathbf{e}_r dr + \mathbf{e}_\theta d\theta + \mathbf{e}_\phi d\phi \\ &= J_1 dr + J_2 d\theta + J_3 d\phi \end{aligned}$$

と表されるから  $J$  を見ることで、ただちに

$$\mathbf{e}_x = (1, 0, 0)$$

$$\mathbf{e}_y = (0, 1, 0)$$

$$\mathbf{e}_z = (0, 0, 1)$$

$$\mathbf{e}_r = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r}$$

$$\mathbf{e}_\theta = (r \cos \theta \cos \phi, r \cos \theta \sin \phi, -r \sin \theta) = \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta}$$

$$\mathbf{e}_\phi = (-r \sin \theta \sin \phi, r \sin \theta \cos \phi, 0) = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \phi} \quad (9.10)$$

となる。  $ds = (dx, dy, dz)$  が

$$\begin{aligned} ds &= \mathbf{e}_x dx + \mathbf{e}_y dy + \mathbf{e}_z dz \\ &= (\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z) \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \\ &= (\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z) \cdot J \cdot \begin{pmatrix} dr \\ d\theta \\ d\phi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と変換されることもわかる。よって計量テンソルは式 9.10 から、

$$g_{ab} = \mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_b = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_r^2 & \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_r & \mathbf{e}_\phi \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_r \mathbf{e}_\theta & \mathbf{e}_\theta^2 & \mathbf{e}_\phi \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{e}_r \mathbf{e}_\phi & \mathbf{e}_r \mathbf{e}_\phi & \mathbf{e}_\phi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

を得る。よって

$$ds^2 = (dr)^2 + r^2 (d\theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta (d\phi)^2$$

となる。ヤコビアンが簡単に求まる場合であれば計量も簡単に計算ができる。

ユークリッド空間でもミンコフスキー計量を使うと  $(t, x, y, z)$  として、

$$g_{11} = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = 1$$

であることに注意する。前節の式からこの時の計量テンソルは特に次のように表された。

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (9.11)$$

よって

$$ds^2 = -(dt)^2 + (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$$

のようにねじれが1回入る。よく4元ベクトルの置き換えで

$$x^0 = ict$$

を使うが、ここではあくまで光速は  $c = 1$  として

$$x^0 = t$$

であり、座標に虚数はなく、空間と特別視はしない。接続に通常の貼り付けをしない方法をとる。

これは図のように多様体上につくる接平面はユークリッド的であるが、連続して貼り付ける時に別のルールを持ってくることになる。

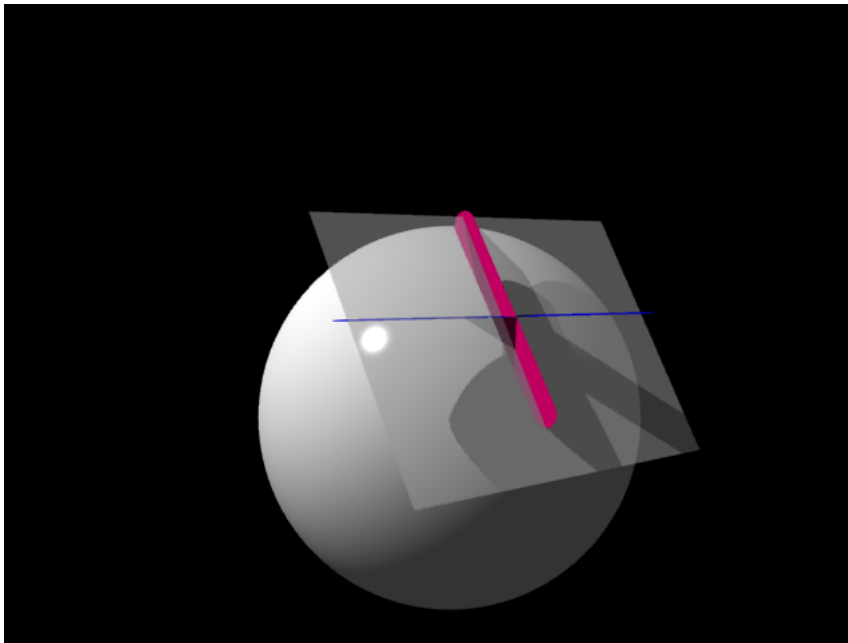


図 9.1: 接空間におけるずれ

しかし、空間は静止する位置を選べるが、時間を止めることができない。この事情を相対論には取り込めていない。

さらによく見る上の図では球面と平面は接点から離れれば間隔が大きくなるが実際には  $\mathbb{R}^3$  では **3次元空間**が4次元多様体に接することになる。従って上図のようなイメージにはならない。第2部で見たように  $\mathbb{R}^4 \rightarrow S^2$  の Hopf 写像は下図のようなイメージになった。

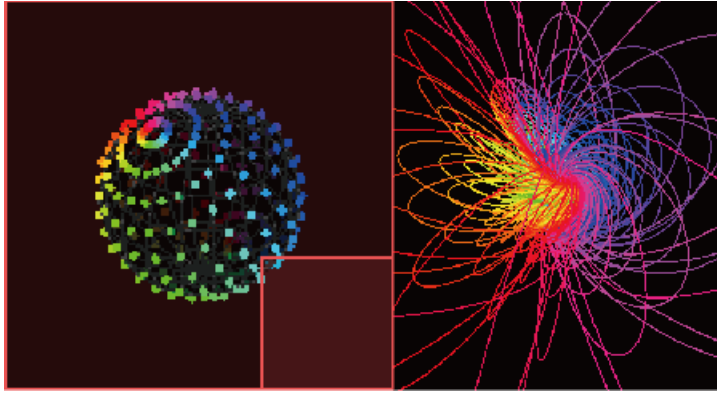


図 9.2: 第 2 部での Hopf 写像

## 9.4 共変性

$d$  次元多様体を考えて実可微分多様体を  $M$  とする。物体の運動を実現する場としてこの多様体  $M$  から実数空間  $\mathbb{R}^d$  への写像を考える必要がある。また、異なる座標系  $x, x'$  を考えその間の写像

$$x \circ x'^{-1}, x^{-1} \circ x'$$

が共に存在し、微分可能であるとする。多様体  $M$  の点  $p$  で接空間  $T_p(M)$  は  $d$  次元の基底ベクトル

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

で構成され、ベクトル  $V \in T_p(M)$  は

$$V = V^\mu \partial_\mu$$

のように表す。今後はテンソルの階数を  $[r, s]$  ( $r, s = 0, 1, 2, \dots$ ) で書くことにする。

普通は基底を表示しないので、1つ1つの  $V^\mu$  は単なる成分である。

ただし、この成分が次のように横に並び、(列ベクトル)をつくる時、 $V^\mu$  は  $[1, 0]$  型のテンソルとみなす。

$$V = V^\mu = (V^1, V^2 \dots V^\mu)$$

これは接ベクトルである。

また、余接空間  $T_p^*(M)$  上に双対ベクトルの基底として  $dx^\nu$  をとることができて、

$$dx^\nu(\partial_\mu) = \delta_\mu^\nu$$

を満たすようにする。従って双対ベクトルを  $W$  とすると

$$W = W_\nu dx^\nu$$

と表すことができる。これも普通は基底を表示しないので、1つ1つの  $W_\nu$  は単なる成分である。

ただし、この成分が次のように縦に並び、行ベクトル

をつくる時、 $W_\nu$  は  $[0, 1]$  型のテンソルとみなす。

$$W = W_\nu = \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \vdots \\ W_\nu \end{pmatrix}$$

これは余接ベクトルである。  
 これから反変、共変の変換則が決まる。  
 つまり、スカラーは  $[0, 0]$  型のテンソルで

$$W_\mu V^\mu = [0, 1][1, 0] = [0, 0]$$

となるが逆にかけると  $[1, 1]$  型のテンソルで

$$V^\mu W_\mu = [1, 0][0, 1] = [1, 1]$$

となる。順番は前の後ろと後ろの前の階数が一致している必要があり、同じであれば縮約できる。  
 座標系 (ダッシュ系) を変えた時の変換則も重要になる。この時の変換行列、ダッシュ系とダッシュ無し系との間は

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}, \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}$$

は共に  $[1, 1]$  型なので先の積ルールを使うと  $[1, 0]$  型の基底  $dx^\mu$  には前に、 $[0, 1]$  型の基底  $\partial_\mu$  には後ろにかかる。

例えば座標に代表される共変則 (下付)

$$\partial'_\mu = \partial_\nu \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}$$

により接ベクトルは成分が

$$\partial'_\mu V'^\mu = \partial_\nu \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} V'^\mu = \partial_\nu V^\nu$$

となり  $x \rightarrow x'$  で不変になる。

また、変位に代表されるように反変則 (上付)

$$dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu$$

により、余接ベクトルは成分が

$$W_\nu = W'_\mu \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}$$

のように変換される。よって

$$W'_\mu dx'^\mu = W'_\mu \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu = W_\nu dx^\nu$$

となり  $x \rightarrow x'$  で不変になる。

さらに重要なのは 2 つの変換行列の積には

$$\frac{\partial x^\rho}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\rho} = \delta_\nu^\rho$$

が成り立つので基底も含めて  $dx^\nu \partial_\nu = [1, 0][0, 1] = [1, 1]$ ,  $W_\mu = [0, 1]$ ,  $V^\mu = [1, 0]$  だったから

$$\begin{aligned} \mathbf{W} \cdot \mathbf{V} &= W'_\mu dx'^\mu \partial'_\mu V'^\mu = W'_\mu \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu \partial_\nu \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} V'^\mu \\ &= [0, 0] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{V} \cdot \mathbf{W} &= \partial'_\mu V'^\mu W'_\mu dx'^\mu = \partial_\nu \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} V'^\mu W'_\mu \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu \\ &= [0, 0] \end{aligned}$$



となり、内積は順番に関係なくスカラーをつくる。  
 これから接空間と余接空間を持つ場としテンソルを考え、次のように定義した。

$$T^{(r,s)} : (T_p^*(M) \times \cdots \times T_p^*(M))_r \times (T_p(M) \cdots \times T_p(M))_s \rightarrow \mathbb{R} \quad (9.12)$$

特に注意すべきは  $T^{(1,0)}$  とは

$$T_p^* \rightarrow \mathbb{R}$$

への線形写像であり、 $T_p(M)$  の要素そのものである。逆に  $T^{(0,1)}$  とは  $T_p^*(M)$  の要素になる。  
 よって次のようにかけた。

$$T^{(r,s)} = T_{\nu_1 \cdots \nu_s}^{\mu_1 \cdots \mu_r} \partial_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes \partial_{\mu_r} \otimes dx^{\nu_1} \otimes \cdots \otimes dx^{\nu_s} \quad (9.13)$$

この変換則は例えばローレンツ変換であれば式 2.21 に従う。  
 従って光速度一定の原理の元で微小変位はスカラーとして観測される必要があり、  
 式 9.12 から 2 階のテンソルを用いて

$$ds^2 \equiv g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

とすれば、これが不変量になる。この時  $g_{\mu\nu}$  の符号によって  
 正の時をリーマン多様体、負の時をローレンツ多様体と呼ぶ。  
 また、この式は微小区間  $dx$  を結ぶベクトルの振る舞いを記述しているので  $g_{\mu\nu}$  の中身が時空の器となる構造を決めている。

特に著名なものは球対称のブラックホールが中心にある場合を表すシュバルツシルド時空などがある。  
 ニュートン引力定数を  $G$  として先の球座標表示でニュートンの重力ポテンシャルが  $-GM/r$  であることを  
 考え、

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - 2GM/r} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

となる。  
 また、ド・ジッター時空は空間部分に曲率を与えた

$$ds^2 = -dt^2 + e^{2Ht} (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)$$

になる。特に直交座標の場合は

$$e_a^\mu e_\nu^a = \delta_\nu^\mu$$

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} e_\mu^a e_\nu^b$$

ベクトルの変換則は

$$V^a = e_\mu^a V^\mu$$

$$V_a = e_a^\mu V_\mu$$

であり、テンソルの場合は

$$T_\nu^a = e_\mu^a T_\nu^\mu$$

となる。また、原則的に添え字が  $\mu, \nu$  の場合は 4 次元の曲がった空間をあつかう。  
 単位ベクトルが変換を受ける場合は例えばローレンツ変換であれば式 2.2 で具体的にみたように

$$e'_a(x) = \Lambda_a^b(x) e_b(x)$$

となり、次の性質を満たす条件がつく。添字順に注意

$$\Lambda_a^c(x) \Lambda_b^d(x) \eta^{ab} = \eta^{cd}$$

$$\Lambda_c^a(x)\Lambda_d^b(x)\eta_{ab} = \eta_{cd}$$

テンソルの座標変換をローレンツ変換がある時

$$T_\nu'^a = \Lambda_b^a(x) \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} T_\rho^b(x) \quad (9.14)$$

のようにヤコビ行列が入る。

テンソルの階数を  $[r, s]$  ( $r, s = 0, 1, 2, \dots$ ) で書くことにすると共変ベクトル  $\partial_\mu$  は  $[1, 0]$ 、反変ベクトル  $dx^\mu = \partial^\mu$  は  $[0, 1]$  型になり、

かける順番は前の後ろと後ろの前の階数が一致している必要があり、

$$\partial^\mu \partial_\mu = [0, 1][1, 0] = [0, 0]$$

からスカラーができる。また、

$$\partial_\mu \partial^\mu = [1, 0][0, 1] = [1, 1]$$

となり、これは正方行列である。このようにベクトルもスカラーもテンソルの一部たど拡大して考えると、少々問題なことが起きる。

つまり、これまでの微分形式のルールも、この型が一致するようにしておく必要がある。

例えば微分 1 形式として

$$W = W_\nu dx^\nu$$

とすると  $W_\nu$  が成分だから、これは  $[0, 1]$  型であるが

$$\partial_\mu W_\nu$$

の変換を考えるとこれは  $[0, 1]$  型を微分しているので  $[0, 2]$  型のテンソルになるべきである。

しかし、具体的にみると式 9.14 から次のように座標変換されるので

$$\begin{aligned} \partial'_\mu W'_\nu &= \frac{\partial}{\partial x'^\mu} W'_\nu = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\rho} \left( \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} W_\sigma \right) \\ &= \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \left( \frac{\partial}{\partial x^\rho} W_\sigma \right) + W_\sigma \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x^\rho \partial x'^\nu} \end{aligned} \quad (9.15)$$

第 2 項のせいで  $[0, 2]$  型にならないし、テンソルでは無くなってしまふ。

これは局所ゲージ変換の時にも見られたように大局的な系から局所的な系への変換には微分項が余分にかかったように

ここでも微分の効果が基底ベクトルそのものにもかかることから余分に出てくる。これは第 2 部で共変微分を定義するときに

$$V^\mu(x + \Delta x)_{//} - V^\mu(x) = \Delta x^\nu X_{\nu\lambda}^\mu V^\lambda$$

のように平行移動からのずれを考慮したように、ここでもテンソルの整合性を保つには通常の微分でなく次の共変微分  $\nabla_\mu$  を定義しておく必要がある。

$$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu V^\lambda$$

$$\nabla_\mu W_\nu = \partial_\mu W_\nu - \Gamma_{\mu\lambda}^\nu W_\lambda$$

として、これらをテンソルとして成立させるためには式 9.15 の第 2 項を消すように次の座標変換が成立するように定義すればよい。

$$\Gamma_{\nu\rho}^\mu = \frac{\partial x^{\mu'} \partial x^\beta \partial x^\gamma}{\partial x^\alpha \partial x^{\nu'} \partial x^{\rho'}} \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha + \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^{\nu'} \partial x^{\rho'}} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\alpha} \quad (9.16)$$

第2項の共変微分でみたようにこの  $\Gamma_{\rho\nu}^{\mu}$  は *Christoffel* の指標、といい上式を逆に解き、次のように定義された。

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}(-\partial_{\rho}g_{\mu\nu} + \partial_{\mu}g_{\nu\rho} + \partial_{\nu}g_{\rho\mu})$$

$$\Gamma_{\lambda,\mu\nu} = \frac{1}{2}(-\partial_{\lambda}g_{\mu\nu} + \partial_{\mu}g_{\nu\lambda} + \partial_{\nu}g_{\lambda\mu})$$

ただし、 $V^{\mu}W_{\mu}$  はスカラーのように振る舞ったので通常微分も共変微分も同じになる。

$$\nabla_{\nu}(V^{\mu}W_{\mu}) = \partial_{\nu}(V^{\mu}W_{\mu})$$

また、共変微分は  $[r, s]$  型のテンソルを  $[r, s + 1]$  型に変換している。

## 9.5 有用公式

### 9.5.1 計量テンソルの変分

ここで次の準備のために各種変分の公式を導いておく。

変分  $g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$  のもとで次の条件が成り立つ

1.  $\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\kappa}g^{\lambda\nu}\delta g_{\kappa\lambda}$
2.  $\delta g = gg^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}, \delta\sqrt{|g|} = \frac{1}{2}\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}\delta g^{\lambda\nu}$
3.  $\delta Ric_{\mu\nu} = \nabla_{\kappa}\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\kappa} - \nabla_{\nu}\delta\Gamma_{\kappa\mu}^{\kappa}$

1. については

$$g_{\kappa\lambda}g^{\lambda\nu} = \delta_{\kappa}^{\nu}$$

だから

$$0 = \delta(g_{\kappa\lambda}g^{\lambda\nu}) = \delta g_{\kappa\lambda}g^{\lambda\nu} + g_{\kappa\lambda}\delta g^{\lambda\nu}$$

左から  $g^{\mu\kappa}$  をかけると

$$g^{\mu\kappa}\delta g_{\kappa\lambda}g^{\lambda\nu} + g^{\mu\kappa}g_{\kappa\lambda}\delta g^{\lambda\nu} = 0$$

$$g^{\mu\kappa}\delta g_{\kappa\lambda}g^{\lambda\nu} + \delta_{\lambda}^{\mu}\delta g^{\lambda\nu} = 0$$

$$\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\kappa}g^{\lambda\nu}\delta g_{\kappa\lambda} \tag{9.17}$$

を得る。

2. については次の恒等式を利用する。

$$\ln(\det g_{\mu\nu}) = \text{tr}(\log g_{\mu\nu})$$

よって両辺の変分をとれば左辺は

$$\delta(\ln(\det g_{\mu\nu})) = \delta g g^{-1}$$

右辺は

$$\delta(\text{tr}(\log g_{\mu\nu})) = \delta g_{\mu\nu} g^{\mu\nu}$$

となるので

$$\delta g g^{-1} = \delta g_{\mu\nu} g^{\mu\nu}$$

$$\delta g = g \delta g_{\mu\nu} g^{\mu\nu}$$

を得る。また、

$$\begin{aligned} \delta(\sqrt{|g|}) &= \frac{\delta g}{2\sqrt{|g|}} \\ &= \frac{\sqrt{|g|}}{2} \delta g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (9.18)$$

3. については  $\Gamma$  はテンソルではないがその変分は (1,2) 型のテンソルなので

$$\delta\Gamma \equiv \tilde{\Gamma} - \Gamma \quad (9.19)$$

と定義して  $\tilde{\Gamma}$  は  $g + \delta g$  に  $\Gamma$  は  $g$  により定義される接続であるとして  $\Gamma = 0$  となる座標系を選ぶ。すると定義から

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (-\partial_{\rho} g_{\mu\nu} + \partial_{\mu} g_{\nu\rho} + \partial_{\nu} g_{\rho\mu}) = 0$$

となるので

$$\partial_{\rho} g_{\mu\nu} = \partial_{\mu} g_{\nu\rho} + \partial_{\nu} g_{\rho\mu}$$

から

$$\partial_{\mu} \rightarrow \nabla_{\mu} \quad (9.20)$$

のように置き換えられるから Ricci テンソルの  $\delta$  変分は式 19.12 より

$$\begin{aligned} \delta Ric_{\mu\nu} &= \partial_{\kappa} \delta\Gamma_{\nu\mu}^{\kappa} - \partial_{\nu} \delta\Gamma_{\kappa\mu}^{\kappa} \\ &= \nabla_{\kappa} \delta\Gamma_{\nu\mu}^{\kappa} - \nabla_{\nu} \delta\Gamma_{\kappa\mu}^{\kappa} \end{aligned} \quad (9.21)$$

## 10 リーマン多様体 [74]

一般相対性理論の背景には前部に学んだ多様体を背景とする。

多様体の中で最も多く登場するのがリーマン計量を持ったリーマン多様体である。

この多様体は位相空間としての性質とリーマン計量によって定義された、距離空間が加わる。

これによって内積と微分形式が備わり、テンソル場としての物理現象の舞台が作られるわけだ。

4 部で見た Hausdorff 空間が基本になる。一般相対性理論の背景の場をまず数的に定義していくことを考えよう。

## 10.1 位相多様体

### 10.1.1 Hausdorff 空間

はじめに第 4 部のハウスドルフ空間の復習をする。

$X$  を位相空間とする。  $X$  上の任意の相異なる 2 点  $x, y$  に対して、

$$U \cap V = \phi (\text{空集合})$$

であるような  $x$  の開近傍  $U$  および  $y$  の開近傍  $V$  が必ず存在するとき、  $X$  はハウスドルフ空間 (Hausdorff\_space) であるといわれる。 以下のような条件がある。

- $X$  における任意のフィルター (または有向点族) の収束先が高々一つである。
- $X$  の任意の一点からなる単集合はその近傍たちの共通分になっている。
- 直積集合  $X \times X$  の対角部分集合  $\Delta = \{(x, x) | x \in X\}$  が直積位相に関して閉集合になっている。

実数の集合は、その上に通常定義される位相構造によってハウスドルフ空間になっている。

幾何学などで扱われる位相多様体や距離空間、あるいは解析学などで扱われるノルム空間やその上で弱位相を考えた空間など様々な空間がハウスドルフ空間になる。

ユークリッド空間やトーラスの表面、球面もハウスドルフ空間になる。

一方で、ハウスドルフ空間にならないのは

- 代数学におけるザリスキ位相を考えた代数多様体や、可換環のスペクトルなどの位相空間はしばしばハウスドルフ空間にならない。
- ハウスドルフ空間の部分空間や直積空間は、ハウスドルフ空間になる。
- しかし、ハウスドルフ空間上で同値関係を考えたときに得られる商空間はハウスドルフになるとは限らない。 実際のところ、任意の位相空間はハウスドルフ空間の商として実現できる。

ハウスドルフ空間の性質：

ハウスドルフ空間は T1 空間であり、その中で一点集合は閉集合になっている。さらに、ハウスドルフ空間のコンパクト部分集合は閉集合である。ハウスドルフ空間における 2 つの交わらないコンパクト部分集合はそれらの近傍によって分離できる。ハウスドルフ空間上で定義された、あるいハウスドルフ空間を値域とするような連続写像に関して以下のような性質が知られている。

$$f : X \rightarrow Y \tag{10.1}$$

をハウスドルフ空間への連続写像とするとき、そのグラフ  $\{(x, f(x)) | x \in X\}$  は直積空間  $X \times Y$  式 10.1 を写像、  $X \times X$  の部分集合

$$\ker(f) = \{(x, x') | f(x) = f(x')\} \tag{10.2}$$

をその核とするとき、次の性質がある。

- $f$  が連続で  $Y$  がハウスドルフならば  $\ker(f)$  は閉集合
- $f$  が全射開写像で  $\ker(f)$  が閉集合ならば  $Y$  はハウスドルフ
- $f$  が全射連続開写像のとき、  $Y$  がハウスドルフであることと  $\ker(f)$  が閉であることは同値になる

- $f, g, X \rightarrow Y$  が連続写像で  $Y$  がハウスドルフ空間のとき、それらの等化域

$$eq(f, g) = \{x | f(x) = g(x)\} \quad (10.3)$$

$X$  の中で閉じている。とくに、 $f$  と  $g$  が稠密な集合上一致していたらそれらは全空間上で一致していることになる。

式 10.1 が全射閉写像でかつ任意の  $y \in Y$  について  $f^{-1}(y)$  がコンパクトであるとする。このとき  $X$  が閉集合ならば  $Y$  はハウスドルフ空間になる。

式 10.1 が全射開連続写像で  $X$  がコンパクトハウスドルフ空間のとき、以下は同値である。

- $Y$  がハウスドルフである
- $f$  が閉である
- $ker(f)$  が閉である

これまでの内容から改めて物理学の現象の場を基本から組み立ててみよう。一般相対性理論を考察するには避けられない視点である。

ここでは主に 4 次元の時空多様体を考えていくが、数学的には第 4 部でみた位相空間として定義される。第 4 部で見たようにハウスドルフ空間を定義したことによって、異なった 2 点の所属する開集合に重ならない領域を持つことができる。

これによってある物質の独立性を担保できる。さらに、連続性を次のように定義できる。

位相空間  $X$  から位相空間  $Y$  への写像  $F$  は  $Y$  の任意の開集合  $U$  に対して

$$F^{-1}(U)$$

が常に  $X$  の開集合になれば連続である。ある観測者の近くでおきる現象は経験的に 4 つの実数で表現できる。従ってもっとも単純に時空全体が 4 次元の数空間  $\mathbf{R}^4$  の開集合で貼り合わされている。

このような位相空間は位相多様体と呼ばれる。

そこで、 $n$  次元数空間  $\mathbf{R}^n$  の開集合と 1 対 1 の連続写像 (同相写像)  $\phi$  で結ばれる Hausdorff 空間  $M$  を  $n$  次元位相多様体と定義する。

組  $(U, \phi)$  を座標近傍と呼び、その全体を座標近傍系と呼ぶ。

$M$  の点  $p$  に対応する  $\mathbf{R}^n$  の点  $\phi(p)$  の座標を

$$\phi(p) = (x^1(p), x^2(p), \dots, x^n(p))$$

とすると、 $x^1, \dots, x^n$  は  $U$  上の連続関数となる。この組

$$(x^1, x^2, \dots, x^n)$$

を局所座標系という。

この  $(U, \phi(p))$  の組がチャートと呼ばれ、多様体上に地図が貼れることになる。

第 4 部でみたように、多様体  $M$  上に

$$(U, \phi), (V, \psi)$$

のチャートがあるとき  $U' \rightarrow V'$  は変換関数

$$\psi \circ \phi^{-1}$$

で写すことができた。

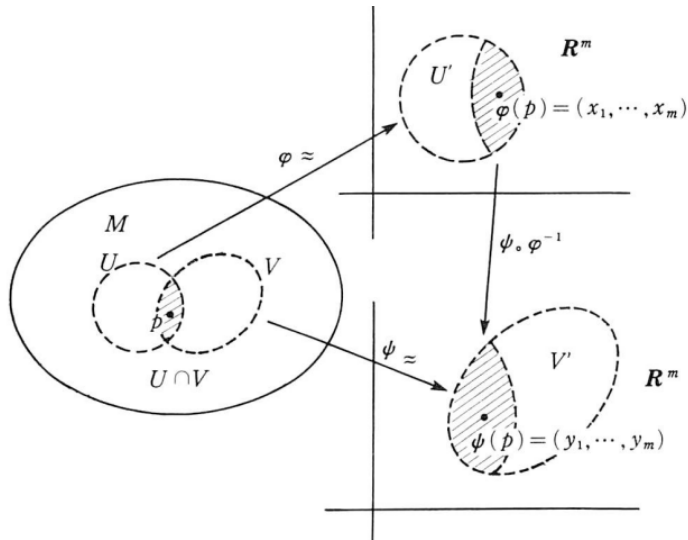


図 10.1: [118] より : 変換関数  $\psi \circ \phi^{-1}$

つまり、多様体  $M$  上の開集合  $U$  上にある関数  $f$  が

$$f(x) = f \circ \phi^{-1}(x)$$

と表すことができ、これらは  $U$  上で  $C^r$  級の関数とする。第 4 部でこれを微分多様体とした。

### 10.1.2 ベクトル場

関数  $f$  は  $p$  の近傍で定義され、連続性が保証されたので点  $p$  での値を読むことができ、これを  $p$  の局所座標という。

ここではスピノールを除いて、ベクトルとテンソルについて考える。

つまり、多様体上の線形空間を  $\mathcal{F}(M)$  として、実数値線形汎関数  $V_p$  で任意の  $f, g \in \mathcal{F}(M)$  に対して

$$V_p(fg) = f(p)V_p g + g(p)V_p f \tag{10.4}$$

が成り立つもの考える。  $V_p$  は微分作用素のようなものと考え  $g(p)V_p f(p) = 0$  と選べば

$$\begin{aligned} V_p(g \cdot (f - f(p))) &= V_p(gf) - V_p(gf(p)) \\ &= g(p)V_p f + f(p)V_p g - g(p)V_p f(p) - f(p)V_p g \\ &= g(p)V_p f \end{aligned}$$

定数  $c$  に対しては

$$V_p(c) = 0$$

とする。従って  $V_p f$  は  $f$  の点  $p$  の近傍の振る舞いで決まる。そこで

$$x^\mu(p) = 0 \tag{10.5}$$

となる座標系を取り、  $f$  は  $x$  の関数と見なす。

$$x^\mu(0) \neq 0$$

となるので注意する。

$f(x)$  はなめらかなので原点の近傍で、滑らかな関数  $f_{\mu\nu}$  を用意すれば 2 次までの近似をとることができて、

$$f(x) = f(0) + \frac{\partial f}{\partial x^\mu}(0)x^\mu + f_{\mu\nu}(x)x^\mu x^\nu \quad (10.6)$$

と表すことができる。よって式 10.5 より、 $V_p f(0) = 0$  とすれば  $x^\mu(p) = 0$  だから

$$\begin{aligned} V_p f &= V_p \left( f(0) + \frac{\partial f}{\partial x^\mu}(0)x^\mu + f_{\mu\nu}(p)x^\mu x^\nu \right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x^\mu}(0)V_p x^\mu \end{aligned}$$

であるから、 $V_p$  の作用は  $V_p x^\mu$  に依存する。そこで

$$(\partial_\mu)_p x^\nu = \delta_\mu^\nu \quad (10.7)$$

で定義される  $n$  個の 1 次独立な線形汎関数  $(\partial_\mu)_p$ ,  $(\mu = 0, \dots, n-1)$  を導入しよう。  
式 10.6 から  $x^\mu(p) = 0$  だから

$$(\partial_\mu)_p f = \frac{\partial f}{\partial x^\mu}(0)$$

となる。そこで

$$V_p x^\mu = V_p^\mu$$

と書くことにすると線形汎関数

$$V_p = V_p^\mu (\partial_\mu)_p$$

と表すことができる。従って式 10.4 のつくる線形空間を  $T_p(M)$  とすると、これは  $(\partial_\mu)_p$  を基底とし、成分  $V_p^\mu$  をもつ

$n$  次元線形空間である。この時の  $(\partial_\mu)_p$  は局所座標  $x^\mu$  からきまる座標基底という。

次に点  $p$  を通る  $M$  上の滑らかな曲線を考え、その局所座標系による表示を  $x^\mu(t)$  とすると  $t=0$  を  $p$  に対応させれば

$$x^\mu(0) = 0$$

に再セットすることができる。

よって点  $p$  で接ベクトル

$$\frac{dx^\mu}{dt}(0) = V^\mu$$

に  $T_p(M)$  の元  $V_p = V_p^\mu (\partial_\mu)_p$  を対応させると任意の  $f \in \mathcal{F}(M)$  に対して

$$\frac{d}{dt}f(x(t))|_{t=0} = V_p f$$

とすることができて、局所座標系に依存しない。よって曲線  $x(t)$  で

$$V = \frac{dx}{dt}$$

が接ベクトルを表し、これから第 4 部のベクトル場がつくられる。

## 10.2 テンソル表現

多様体  $M$  上に  $(r, s)$  型のテンソル場  $K$  をつくることは多様体上の点  $p$  に対して接空間  $T_p(M)$  上のある  $(r, s)$  型のテンソル場  $K_p$  を対応させることである。例えば局所座標系  $\{x^1, x^2, \dots, x^n\}$  をとると接ベクトル空間の基底  $\{\partial/\partial x^1, \partial/\partial x^2, \dots, \partial/\partial x^n\}$  とその双対基底  $\{dx^1, dx^2, \dots, dx^n\}$  が存在し、 $K$  の成分が座標系  $\{x^1, x^2, \dots, x^n\}$



の微分可能な関数になる場合である。テンソル場の例として例えば反変次数が1のテンソル場はベクトル場であり、共変次数が $p$ のテンソル場は $p$ 次微分形式となる。

前節のローレンツ変換でみたように、 $V$ を $n$ 次元実ベクトル空間、 $V^*$ をその双対空間とする。 $(r, s)$ 型のテンソルとは $(s+r)$ 重線形関数 $K$ を次のように $r, s$ 回の積で表される。この実ベクトル空間を $T_s^r$ として $V$ と $V^*$ の基底を $\{e_1, e_2 \dots e_n\}$ 、 $\{e^1, e^2 \dots e^n\}$ とすると

$$e_i e^j = \delta_i^j$$

である。 $(r, s)$ 型のテンソル $K \in T_s^r$ として

$$K: V(M) \times \dots \times V(M) \times V^*(M) \times \dots \times V^*(M)$$

$$K(e_{i_1} \dots e_{i_r}, e^{j_1} \dots e^{j_s}) \equiv K_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \quad (10.8)$$

として任意の $K$ は

$$K = \sum_{i,j} K_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} (e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_s})$$

と書き表されるので $T_s^r$ の次元は $0 \leq i < j \leq n$ だから $n^{r+s}$ となる。

例えば $(1, 0)$ 型の $T_0^1$ は $V$ であるし、 $(0, 1)$ 型の $T_1^0$ は $V^*$ であるし、 $(0, 0)$ 型の $T_0^0$ は $R$ である。

また、 $(1, s)$ 型は $x \in V, y^* \in V^*$ として次の内積

$$\langle \bar{K}(x_1, \dots, x_s), y^* \rangle = K(x_1, \dots, x_s, y^*)|_{y^* \in V^* i_x}$$

で与えられる $\bar{K}$ をとり $r$ 重線形写像

$$\bar{K}: (x_1, \dots, x_s) \in V(M) \times \dots \times V(M) \rightarrow \bar{K}: (x_1, \dots, x_s) \in V(M)$$

を対応させればよい。よって微分可能な $(1, s)$ 型のテンソル場は関数場 $F(M)$ に対して $s$ 重線形写像が次のようにベクトル場 $V(M)$ の $s$ 回の積からつくられる。

$$V(M) \times V(M) \times \dots \times V(M) \rightarrow V(M)$$

また、 $(1, 1)$ 型のテンソル場は恒等変換 $V(M) \rightarrow V(M)$ に対応し、その成分はどの局所座標に対しても $\delta_j^i$ である。

$T_1^1$ は $V$ のそれ自身への線形写像の全体の作るベクトル空間 $gl(V)$ と考えればよい。

さらに $(0, 2)$ 型のテンソル場は双線形写像 $g$ があり、

$$g: V(M) \times V(M) \rightarrow F(M)$$

となるが、この内、次の条件を満たす時、

- 対称性:  $g(Y, X) = g(X, Y)$
- 正值:  $g(X, X) \geq 0$  等号は $X = 0$ の時のみ

互いに直交する基底 $\{e_i^a\}$ を用いて計量は次のように表される。

$$g_{ij} \equiv \sum_a e_i^a e_j^a \quad (10.9)$$

これをリーマン計量 (Riemannian metric) という。リーマン計量は多様体  $M$  の各点  $p$  の接空間  $T_p(M)$  に正値内積を決める点で重要である。この時座標近傍の有限な開被覆  $\{U_\alpha\}$  とこれに属する 1 の分割  $\{\phi_\alpha\}$  があれば局所座標系  $\{x^1, x^2, \dots, x^n\}$  を用いて

$$g_\alpha \left( \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \delta_j^i \quad (10.10)$$

となる計量をとって

$$g = \sum_\alpha \phi_\alpha g_\alpha \quad (10.11)$$

とおけば  $g$  はリーマン計量になる。

リーマン計量によって正値をとる距離が定義できるようになった。

### 10.3 リーマン多様体

リーマン計量を持った多様体をリーマン多様体という。つまり、 $M^m$  を多様体として多様体上の  $p$  の接空間  $T_p M$  において内積  $g_p$  が定義され、次の計量は局所座標に依存することなく  $C^\infty$  級になる。

$$g_{ij} = g \left( \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \quad (10.12)$$

ベクトル場と同様にベクトル束  $E$  に内積  $g$  を入れる。  $x \in M$  のファイバー  $E_x = \pi^{-1}(x)$  に次の内積  $g_x$  を考える。

$$g_x : E_x \times E_x \rightarrow \mathbb{R} \quad (10.13)$$

$g_x$  は微分可能であるとする。部分ベクトル束  $E'$  に対し、これと直交するベクトル束  $E'^\perp$  が定義できる。これは  $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r)$  の局所切断に **Gram-Schmidt** の正規直交化により、 $E'$  の局所基底が  $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r)$  であり、 $E'^\perp$  の基底が  $(\sigma_{z+1}, \sigma_{z+2}, \dots, \sigma_r)$  となるようにできる。これは変換関数が次のように対角化できることに等しい。

$$\psi_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \psi'_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & \psi''_{\alpha\beta} \end{pmatrix} \quad (10.14)$$

この時、商ベクトル束  $E/E'$  はベクトル束  $E'^\perp$  と同型である。  $E \oplus E'$ ,  $E \otimes E'$  の変換関数は  $\{\psi_{\alpha\beta} \oplus \psi'_{\alpha\beta}\}, \{\psi_{\alpha\beta} \otimes \psi'_{\alpha\beta}\}$  となるが  $\{\psi_{\alpha\beta} \oplus \psi'_{\alpha\beta}\}$  は

$$\psi_{\alpha\beta} \oplus \psi'_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \psi_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & \psi'_{\alpha\beta} \end{pmatrix} \quad (10.15)$$

のことである。また  $E^*$  の変換関数は  $\{{}^t\psi_{\alpha\beta}^{-1}\}$  であり、 $E$  のファイバーの次元を  $r$  とすると外積  $\wedge^r E$  は  $\det E$  とかけ、この変換関数は  $\{\det \psi_{\alpha\beta}\}$  になる。また多様体  $M'$  から  $M$  への写像が次のように与えられている時

$$f : M' \rightarrow M$$

次のように  $f$  によって誘導されたベクトル束  $E'$  が得られる。

$$E' = \{(x', \xi) \in M' \times E; f(x') = \pi(\xi)\}$$

$$\pi'((x', \xi)) = x'$$

$E$  が接ベクトル束  $TM$  の場合はこの時の内積  $g$  をリーマン計量という。  
 そして  $(M, g)$  をリーマン多様体と呼ぶ。次の演算子  $\nabla$  について

$$d(g(\xi, \eta)) = g(\nabla\xi, \eta) + g(\xi, \nabla\eta) \quad (10.16)$$

が見たされれば  $\nabla$  は  $g$  を保つ ( $g$  に対して平行である) という。  $g$  は  $\nabla g = 0$  を満たしている

$$E^* \otimes E^*$$

この  $\nabla$  は  $E^* \otimes E^*$  上にも接続を定義できる。  $\nabla$  は一般的な接続であれば全節より

$$d(g(\xi, \eta)) = g(\nabla\xi, \eta) + g(\xi, \nabla\eta) + (\nabla g)(\xi, \eta)$$

局所標構を  $e_1, e_2 \dots e_r$  とすると

$$g(e_\lambda, e_\mu) = \delta_{\lambda\mu}$$

が成り立つのでこの両辺を微分すると式 3.48 から

$$g(\nabla e_\lambda, e_\mu) + g(e_\lambda, \nabla e_\mu) = \sum (g(\omega_\lambda^\nu e_\nu, e_\mu) + g(e_\lambda, \omega_\mu^\nu e_\nu)) = 0$$

となるので次のように接続形式は交代行列になれば 1 次微分形式である。

$$\omega_\lambda^\mu = -\omega_\mu^\lambda \quad (10.17)$$

これは  $\omega$  が直交群  $O(r)$  の Lie 環に値をとることに拡大できる。また、前節のような変換

$$e'_\lambda = \sum a_\lambda^\mu e_\mu$$

があると変換後の接続形式  $\omega'$  に対し、式 3.55 から

$$\omega' = a^{-1}\omega a + a^{-1}da$$

が成り立ち、この式のどの項も交代行列である。

つまり内積を保つ接続形式をつくるには交代行列になるように選ばばいいことになる。

以下で簡単な例をみておこう。

- ユークリッド空間

古典物理の舞台となるユークリッド空間は  $T_p\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$  と考えて、

$$g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \delta_{ij}$$

として  $(M, g)$  はリーマン多様体である。

- 球面

$S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  として包含写像  $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  ははめ込みになる。

## 10.4 測地線

前節で扱った測地線は曲がった空間内でまっすぐのびる直線として次のように共変微分したものの積が 0 になるから接ベクトルを  $T^\mu$  として

$$T^\mu \nabla_\mu T^\nu = 0 \quad (10.18)$$

とかける。軌道のパラメタ  $\tau$  を導入し

$$T^\mu = \frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau}$$

とすると式 10.18 に代入すると式 6.12 からすぐに

$$\frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau} \left( \nabla_\mu \left( \frac{dx^\nu(\tau)}{d\tau} \right) \right) = \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu(x(\tau)) \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau}$$

測地線の式が得られる。

## 10.5 Riemann テンソル

等価原理によれば局所的には自由落下により重力を消すことができる。つまり常に

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = 0$$

をとれる座標系があることになる。

前節の共変微分から **Riemann** 曲率テンソル  $R_{\mu\nu\beta}^\alpha$  を次のように共变的に定義する。任意の共変ベクトル  $A_\mu$  に対して

$$(\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu) A_\alpha = R_{\mu\nu\alpha}^\beta A_\beta \quad (10.19)$$

こ共変微分の括弧積はよく登場し、重要な意味を持つ演算子だから次のように定義しておこう。

$$\nabla_{[\mu, \nu]} \equiv [\nabla_\mu, \nabla_\nu] = \nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu$$

これを共変括弧積演算子と呼ぶことにする。よって

$$\nabla_{[\mu, \nu]} A_\alpha = R_{\mu\nu\alpha}^\beta A_\beta \quad (10.20)$$

とかける。一般的な共変ベクトルに共変微分を 2 階作用し、外積をとる変換が曲率テンソルに対応する。これに式の共変微分の定義を代入すると次のようになる。

$$R_{\mu\nu\alpha}^\beta = \partial_\nu \Gamma_{\mu\alpha}^\beta - \partial_\mu \Gamma_{\nu\alpha}^\beta + \Gamma_{\mu\alpha}^\rho \Gamma_{\nu\rho}^\beta - \Gamma_{\nu\alpha}^\rho \Gamma_{\mu\rho}^\beta \quad (10.21)$$

接続係数  $\Gamma$  はテンソルではないがその差がテンソルになることを前節で見た。 $\{e_\mu\}$  を座標基底、その双対基底を  $\{dx^\mu\}$  で表す。

ここでは改めて (1,2) 型の振率テンソルを  $T$  とし (1,3) 型の **Riemann Tensor** を  $R$  で表し、ベクトルを  $X, Y$  として

$$T : V(M) \otimes V(M) \rightarrow V(M)$$

$$R : V(M) \otimes V(M) \rightarrow V(M)$$

であり、

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \quad (10.22)$$

$$R(X, Y, Z) = R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \quad (10.23)$$

これは

$$R(X, Y)Z = \nabla_X (\nabla_Y Z) - \nabla_Y (\nabla_X Z) - (\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X) Z$$

となることに留意する。第 2 式は  $R$  が  $Z$  に作用すると見なすこともできる。これらは

$$T(X, Y) = -T(Y, X)$$

$$R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$$

をみたし、次のテンソルとしての性質を満たす。

$$T(X, Y) = X^\mu Y^\nu \langle e_\mu, e_\nu \rangle$$

$$R(X, Y)Z = X^\mu Y^\nu Z^\lambda R(e_\mu, e_\nu) e_\lambda$$

成分は内積の記号を用いて

$$\begin{aligned} (T^\lambda)_{\mu\nu} &= \langle dx^\lambda, T(e_\mu, e_\nu) \rangle \\ &= \langle dx^\lambda, \nabla_\mu e_\nu - \nabla_\nu e_\mu \rangle \\ &= \langle dx^\lambda, \Gamma_{\mu\nu}^\kappa e_\kappa - \Gamma_{\nu\mu}^\kappa e_\kappa \rangle \\ &= \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda = \Gamma_{[\mu, \nu]}^\lambda \end{aligned} \tag{10.24}$$

$$\begin{aligned} (R^\kappa)_{\lambda\mu\nu} &= \langle dx^\kappa, R(e_\mu, e_\nu) e_\lambda \rangle \\ &= \langle dx^\kappa, [\nabla_\mu, \nabla_\nu] e_\lambda \rangle \\ &= \langle dx^\kappa, \nabla_\mu (\Gamma_{\nu\lambda}^\eta e_\eta) - \nabla_\nu (\Gamma_{\mu\lambda}^\eta e_\eta) \rangle \\ &= \langle dx^\lambda, (\partial_\mu \Gamma_{\nu\lambda}^\eta) e_\eta - (\partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\eta) e_\eta + \Gamma_{\nu\lambda}^\eta \Gamma_{\mu\eta}^\xi e_\xi - \Gamma_{\mu\lambda}^\eta \Gamma_{\nu\eta}^\xi e_\xi \rangle \\ &= \partial_\mu \Gamma_{\nu\lambda}^\kappa - \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\kappa + \Gamma_{\nu\lambda}^\eta \Gamma_{\mu\eta}^\kappa - \Gamma_{\mu\lambda}^\eta \Gamma_{\nu\eta}^\kappa \end{aligned}$$

が導ける。共に次の関係を満たす。以後は括弧をはずし

$$T_{\mu\nu}^\lambda = -T_{\nu\mu}^\lambda$$

$$R_{\lambda\mu\nu}^\kappa = -R_{\lambda\nu\mu}^\kappa$$

という関係がある。**RicciTensor** $Ric$ が定義できた、これは(0,2)型のテンソルで Riemann 曲率テンソル  $R$  から

$$Ric(X, Y) = \langle dx^\mu, R(e_\mu, Y)X \rangle \tag{10.25}$$

のように接ベクトルの変化と  $x^\mu$  の微小変位との内積として再定義できる。

成分表示では前節と同様に  $\lambda$  で和をとり、

$$Ric(e_\mu, e_\nu) = R_{\mu\lambda\nu}^\lambda$$

であり、これからスカラー曲率  $R$  も  $\mu, \nu$  で和をとり、

$$R = g^{\mu\nu} Ric(e_\mu, e_\nu) = g^{\mu\nu} Ric_{\mu\nu}$$

で与えられる。

またベクトル場  $U, V$  に対して次の関係があれば

$$\nabla_V U^\mu = \nabla_U V^\mu$$

この時式 7.33 から曲率テンソル  $R_{\sigma\nu\lambda}^\mu$  が次のように定義できる。

$$\begin{aligned}\nabla_{[V,U]}U^\mu &= V^\nu\nabla_\nu(U^\lambda\nabla_\lambda U^\mu) - U^\lambda\nabla_\lambda(V^\nu\nabla_\nu U^\mu) \\ &= ((\nabla_\nu\nabla_\lambda - \nabla_\lambda\nabla_\nu)U^\mu)V^\nu U^\lambda \\ &\equiv R_{\sigma\nu\lambda}^\mu U^\sigma V^\nu U^\lambda\end{aligned}\tag{10.26}$$

$U$  を測地線への接ベクトル、 $V$  を  $\nabla_V U^\mu = \nabla_U V^\mu$  測地線上のある一点で  $U$  と垂直になるベクトル場であるとする。この時、

$$\nabla_U U^\mu = 0, \quad g^{\mu\nu}U^\mu U^\nu = \text{const}$$

であるので

$$\begin{aligned}\nabla_U(U_\mu V^\mu) &= (\nabla_U U_\mu)V^\mu + U_\mu\nabla_U V^\mu \\ &= U_\mu\nabla_U V^\mu \\ &= \frac{1}{2}\nabla_U(U^\mu U_\mu) \\ &= 0\end{aligned}$$

$V$  はいたるところで測地線と垂直になる。よって式 10.26 から

$$\nabla_U\nabla_U V^\mu + R_{\sigma\nu\lambda}^\mu U^\sigma U^\lambda V^\nu = 0$$

が成り立つ。ここで空間的な微小変化

$$l^\mu = \frac{dx^\mu}{d\sigma}\delta\sigma$$

$$\frac{dx^\mu}{d\sigma} = V^\mu$$

とするとこの式は

$$\frac{d^2 l}{d\tau^2} + R_{\sigma\nu\lambda}^\mu U^\sigma U^\lambda l^\nu = 0$$

となり、これは微小距離  $l$  だけ離れた測地線の間隔の時間変化を記述する測地線変移の式という。

この関係式は後章の重力波で再び導く。

測地線の距離に変化がおきれば時空は平坦ではない。

$V$  はベクトルなのでこれは物質を表す。物質と空間の関係をこの式は示しているともいえる。

Riemann テンソルの有用な公式をまとめておく。

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = g_{\mu\tau}R_{\nu\rho\sigma}^\tau$$

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\rho\nu}^\rho = R_{\nu\mu}$$

$$R = R_\mu^\mu$$

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = -R_{\nu\mu\alpha\beta}, \quad R_{\mu\nu\alpha\beta} = -R_{\mu\nu\beta\alpha}, \quad R_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{\alpha\beta\mu\nu}\tag{10.27}$$

$$R_{[\mu\nu\alpha]\beta} = 0\tag{10.28}$$

$$\nabla_\alpha [R_{\beta\mu}]_{\nu\rho} = 0 \quad (10.29)$$

この最後の2つの式が次示すビアンキの恒等式である。ただし、次のような添字括弧積のルールを作る。

$$T_{[\mu,\nu]} = \frac{1}{2} (T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu})$$

$$T_{[\mu\nu\alpha]} = \frac{1}{3!} (T_{\mu\nu\alpha} - T_{\mu\alpha\nu} + T_{\nu\alpha\mu} - T_{\nu\mu\alpha} + T_{\alpha\mu\nu} - T_{\alpha\nu\mu})$$

さらに、等価原理により局所慣性系であればいつでも

$$\partial_\alpha g_{\mu\nu} = 0$$

とすることができた。でも大局的には成立しないのでこれを次のような記号でおく。

$$\partial_\alpha g_{\mu\nu} \doteq 0$$

これにより、曲率テンソルは計量テンソルのみで次のようにかける。

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} \doteq \frac{1}{2} (\partial_\alpha \partial_\nu g_{\beta\mu} - \partial_\alpha \partial_\mu g_{\beta\nu} + \partial_\beta \partial_\mu g_{\nu\alpha} - \partial_\beta \partial_\nu g_{\mu\alpha}) \quad (10.30)$$

添字括弧積を用いても

$$R_{[\mu\nu\alpha]\beta} \doteq \frac{1}{2} (\partial_{[\alpha} \partial_\nu g_{\beta]\mu} - \partial_{[\alpha} \partial_\mu g_{\beta]\nu} + \partial_\beta \partial_{[\mu} g_{\nu\alpha]} - \partial_\beta \partial_{[\nu} g_{\mu\alpha]}) \quad (10.31)$$

となる。

次に共変微分を共変ベクトルに共変括弧積を作用させたものを考えよう。

$$\nabla_{[\nu,\alpha]} \nabla_\alpha \omega_\beta = \nabla_\mu \left( R_{\nu\alpha\beta}^\rho \omega_\rho \right)$$

のように順番を変えることができる。さらに共変微分を左から作用させると

$$\nabla_\mu \nabla_{[\nu,\alpha]} \nabla_\alpha \omega_\beta = \nabla_\mu \nabla_\mu \left( R_{\nu\alpha\beta}^\rho \omega_\rho \right)$$

これに式 10.31, 10.20 を代入し

$$R_{[\mu\nu\alpha]}^\rho \nabla_\rho \omega_\beta + R_{[\mu\nu|\beta]}^\rho \nabla_\alpha \omega_\rho = \nabla_{[\mu} R_{\nu\alpha]\beta}^\rho \omega_\rho + R_{[\mu\alpha|\beta]}^\rho \nabla_\alpha \omega_\rho$$

となる。ただし添え字内の  $|\beta|$  の記号は  $||$  内の文字を除いて反対称化するというルールにする。

これから左右の項は共通し、相殺することがわかる

よって  $g^{\alpha\nu}$  を作用させ

$$g^{\alpha\nu} R_{[\mu\nu\alpha]}^\rho \nabla_\rho \omega_\beta = g^{\alpha\nu} \nabla_{[\mu} R_{\nu\alpha]\beta}^\rho \omega_\rho$$

さらに  $g_\rho^\mu$  を作用させ、縮約する。

$$g_\rho^\mu R_{[\mu\nu\alpha]}^\rho \nabla_\rho \omega_\beta = g_\rho^\mu \nabla_{[\mu} R_{\nu\alpha]\beta}^\rho \omega_\rho$$

$$2R \nabla_\rho \omega_\beta = \nabla_\rho R_{\beta}^\rho \omega_\rho$$

さらに移行し、添え字を  $\rho \rightarrow \mu, \beta \rightarrow \nu$  と置き換え、 $g^{\mu\nu}$  を作用させると

$$\begin{aligned} 0 &= g^{\mu\nu} \nabla_\mu R_\nu^\mu - g^{\mu\nu} \nabla_\mu 2R \\ &= \nabla^\nu (R_\nu^\mu - 2R) \end{aligned}$$

よって  $g_{\mu\nu}$  を作用させれば

$$\nabla^\nu \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) = 0 \quad (10.32)$$

が得られる。これはアインシュタインの方程式である。

## 10.6 ワイルテンソル

4元ベクトルの表記は反変ベクトルが

$$\mathbf{A} = A^a \mathbf{e}_a$$

と書く。2つの反変ベクトルの内積はスカラー積として成分で表示すると

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (A^a \mathbf{e}_a) \cdot (B^b \mathbf{e}_b) = g_{ab} A^a B^b$$

である。一方で共変ベクトルは1次微分形式の基底を  $\tilde{\omega}$  のように表すと、同じように1次微分形式となり、

$$\tilde{\mathbf{B}} = B_b \tilde{\omega}^b$$

のように成分には下付、基底には上付きの添え字をつける。この場合にスカラー積は

$$\tilde{\mathbf{A}} \cdot \tilde{\mathbf{B}} = (A_a \tilde{\omega}^a) \cdot (B_b \tilde{\omega}^b) = \tilde{\omega}^a \tilde{\omega}^b A_a B_b = g^{ab} A_a B_b$$

となり、

$$g^{ab} = \tilde{\omega}^a \tilde{\omega}^b$$

でつくられることがわかる。これは次のように  $g^{ab} = g_{ab}^{-1}$  になっている。

$$\mathbf{A} \cdot \tilde{\mathbf{B}} = (A^a \mathbf{e}_a) \cdot (B_b \tilde{\omega}^b) = A^a B_b \mathbf{e}_a \tilde{\omega}^b = A^a B_b \delta_b^a = A^a B_a = AB$$

つまり、第3部で見たように常に1形式と接ベクトルからは内積がつくられ

$$\mathbf{e}_b \tilde{\omega}^a = \tilde{\omega}^a \mathbf{e}_b = \delta_b^a$$

を満たす。また、直交基底をここでは  $\hat{a}$  のように表すと

$$\tilde{\omega}^a \hat{a}^b = \eta^{\hat{a}\hat{b}}$$

である。1形式は  $\tilde{\omega}$  であること。今後は簡単に

$$\mathbf{e}^a \equiv \tilde{\omega}^a$$

で表すこともある。

基底でみれば接ベクトルと1形式があってはじめて観測値が得られる関係は基本的な双対関係であるが、どちらもあるパラメタ  $t$  で記述された連続的な物理量

$$\phi(x(t))$$

に作用して初めて値をとる。

スカラー関数の変化量を  $\tilde{d}f$  とするとこれはベクトルである。そこで全微分が

$$\tilde{d}f = \partial_a f \tilde{d}x^a$$

のように成分で表すことができた。これから第2部での方向微分が次のように求まる。

$$\mathbf{v} \cdot \tilde{d}f = (v^a \mathbf{e}_a) \cdot (\partial_a f \tilde{d}x^a) = v^a \partial_a f$$

非特異な行列  $M_a^b$  を用いて、基底の変換則を次のように決める。

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_a &= \mathbf{e}_b M_a^b \\ \tilde{\omega}^{a'} &= M_b^{a'} \tilde{\omega}^b \end{aligned}$$



従って、

$$M_{a'}^b = \partial_a x^b$$

のようにみなせる。4元ベクトルを  $\mathbf{A}$ , 1形式を  $\tilde{\mathbf{B}}$  とし、混合2階テンソルを  $\mathbf{T}$  とすると

$$\mathbf{T} = T_b^a \mathbf{e}_a \tilde{\omega}^b$$

のように双方の基底の積で表すことができる。  $\mathbf{e}_a \tilde{\omega}^b$  は外積として作用していることに注意する。成分では

$$T_{b'}^{a'} = M_{c'}^{a'} T_d^c M_{b'}^d$$

のようになる。第2部でみたようにテンソルの共変微分は接続係数  $\Gamma$  を用いて

$$\nabla_c T_b^a = \partial_c T_b^a + \Gamma_{bc}^a T_b^d - \Gamma_{bc}^d T_d^a$$

となる、この結果はテンソルではない接続係数が出てくるが、その差はテンソルなので結局3階のテンソルである。

また、接続係数は *Christoffel* の指標として第2部で定義したように

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2} g^{ad} (-\partial_d g_{bc} + \partial_c g_{db} + \partial_b g_{dc}) \quad (10.33)$$

となった。共変微分が0になるような移動が平行移動で、あるベクトルが  $c(t)$  に沿って平行移動されるとき測地線の方程式として

$$\frac{d^2 x^\mu}{dt^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\nu(c(t))}{dt} \frac{dx^\lambda(c(t))}{dt} = 0 \quad (10.34)$$

が成り立った。従って局所的なローレンツフレームをとれば自由粒子は *Christoffel* の指標は消え、

$$\frac{d^2 x^\mu}{dt^2} = 0$$

となり、測地線上を運動していることになる。つまり局所座標系で固有時  $\tau$  としてラグランジアン  $L$  を

$$L = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}$$

として、世界線の長さ  $I$  は第2部で見たように

$$I = \int ds = \int \sqrt{2L} d\tau$$

の極値をとる条件として式 10.34 が導けた。

また、共変微分の交換積をベクトルに作用させ

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) v_c = v_d R_{cab}^d$$

からリーマン曲率テンソルが

$$R_{bcd}^a = \partial_c \Gamma_{bc}^a - \partial_d \Gamma_{bc}^a + \Gamma_{ec}^a \Gamma_{bd}^e - \Gamma_{ed}^a \Gamma_{bc}^e$$

となる。このリーマン曲率テンソルは次のような反対称の関係と、循環の関係が成り立つ。

$$R_{abcd} = -R_{bacd}, R_{abcd} = -R_{abdc}, R_{abcd} = R_{cdab},$$

$$R_{abcd} + R_{adbc} + R_{acdb} = 0$$

さらにこれから有用なビアンキ恒等式が

$$\nabla_e R_{abcd} + \nabla_d R_{abec} + \nabla_c R_{abde} = 0$$

となる。対称な場合は縮約されて Ricci テンソルとスカラー曲率が

$$\begin{aligned} R_{ab} &= R_{acb} \\ R &= R_a^a \end{aligned}$$

となる。第1式はトレース和をとっている。

トレースに無関係な部分を **Weyl conformal tensor** という。

$$C_{abcd} = R_{abcd} - \frac{1}{2}(g_{ac}R_{bd} - g_{ad}R_{bc} - g_{bc}R_{ad} + g_{bd}R_{ac}) + \frac{1}{6}(g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc})R$$

## 10.7 Bianchi 恒等式

$R$  を Levi-Civita 接続された Riemann テンソルとする。

ビアンキの恒等式は次の2つにまとめることができる。

**第1Bianchi 恒等式**

$$R(X, Y)Z + R(Z, X)Y + R(Y, Z)X = 0 \quad (10.35)$$

**第2Bianchi 恒等式**

$$(\nabla_Z R)(X, Y)V + (\nabla_Y R)(Z, X)V + (\nabla_X R)(Y, Z)V = 0 \quad (10.36)$$

これを対称子  $S$  を

$$S\{f(X, Y, Z)\} = f(X, Y, Z) + f(Z, X, Y) + f(Y, Z, X) \quad (10.37)$$

とすると Jacobi 恒等式は

$$S\{[X, [Y, Z]]\} = 0 \quad (10.38)$$

と表せるので、これを利用し、次のように証明する。振率が0であることから  
等式

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0 \quad (10.39)$$

を  $Z$  に関し、共変微分すると

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_Z \{\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]\} \\ &= \nabla_Z \nabla_X Y - \nabla_Z \nabla_Y X - \{\nabla_{[X, Y]} Z + [Z, [X, Y]]\} \end{aligned}$$

これを対称化すると Jacobi 恒等式から

$$\begin{aligned} 0 &= S \{ \nabla_Z \nabla_X Y - \nabla_Z \nabla_Y X - \{\nabla_{[X, Y]} Z + [Z, [X, Y]]\} \} \\ &= S \{ \nabla_Z \nabla_X Y - \nabla_Z \nabla_Y X - \nabla_{[X, Y]} Z \} \\ &= S \{ R(X, Y)Z \} \end{aligned}$$

を得る。ここで第2ビアンキ恒等式を

$$S\{(\nabla_X R)(Y, Z)\}V = 0 \quad (10.40)$$

と表現する。次の恒等式

$$R(T(X, Y), Z) V = R(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y], Z) V = 0 \quad (10.41)$$

を対称化すると次を得る。

$$\begin{aligned} 0 &= S \{R(\nabla_X Y, Z) - R(\nabla_Y X, Z) - R([X, Y], Z)\} V \\ &= S \{R(\nabla_Z X, Y) - R(X, \nabla_Z Y) - R([X, Y], Z)\} V \end{aligned}$$

次のように縮約したものを RiccTensor, ScalarTensor という。

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= g^{\alpha\beta} R_{\mu\nu\alpha\beta} \\ R &= g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \end{aligned}$$

式 10.29 に  $g^{\alpha\nu}$  を作用し、縮約をとると

$$\begin{aligned} g^{\alpha\nu} \nabla_\alpha [R_{\beta\mu}]_{\nu\rho} &= \nabla^\mu ([R_{\beta\mu}]_\rho) \\ g^{\alpha\nu} \nabla_\alpha [R_{\beta\mu}]_{\nu\rho} &= \nabla^\mu \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \end{aligned}$$

よって共変微分を ; で表すことにするとビアンキ恒等式から

$$\left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right)_{;\mu} = 0$$

よってスカラーテンソルは次のように近似することができる。

$$R \simeq \partial\Gamma + \Gamma\Gamma \simeq g\partial^2 g + (\partial g)^2 + (g\partial g)^2$$

## 10.8 4次元でのストークスの定理

前節で見たように Riemann 空間においては座標各点の変換係数

$$\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu}$$

は一定ではない。しかし次のように  $A_{\mu\nu}$  を任意の 2 階共変テンソルとしてスカラー密度を定義すると

$$\mathbf{S}(x) = \sqrt{\det(A_{\mu\nu})} \quad (10.42)$$

$\det(g_{\mu\nu})$  は負なので改めて次のようにおく。

$$\mathbf{S}(x) = \sqrt{-g(x)} S(x)$$

時空の領域  $\Omega$  において次の値は一般的な座標変換で不変になる。

$$I = \int_{\Omega} \mathbf{S}(x) d^4 x = \int_{\Omega} d^4 x \sqrt{-g(x)} S(x)$$

このような量はスカラーという。

しかし、一般的にベクトルを積分してもベクトルにはならない。しかし、 $A$  を任意の完全反対称テンソルとして次のような積分はスカラーになる。これは大局的な回転の向きが決まることに対応する。

$$\int A_\mu dx^\mu \quad \iint A_{\mu\nu} d\sigma^{\mu\nu} \quad \iiint A_{\mu\nu\lambda} dv^{\mu\nu\lambda} \quad (10.43)$$

ただし、例えば次のように独立な無限小ベクトルを決めて

$$d_n x^\mu \equiv \{dx^n = \epsilon, dx^m = 0(m \neq n)\}$$

$$d\sigma^{\mu\nu} = \begin{vmatrix} d_1 x^\mu & d_1 x^\nu \\ d_2 x^\mu & d_2 x^\nu \end{vmatrix}$$

$$dv^{\lambda\mu\nu} = \begin{vmatrix} d_1 x^\mu & d_1 x^\nu & d_2 x^\lambda \\ d_2 x^\mu & d_2 x^\nu & d_2 x^\lambda \\ d_3 x^\mu & d_3 x^\nu & d_3 x^\lambda \end{vmatrix}$$

とすると、これからストークスの定理は次のようにまとめて表すことができる。

$$\frac{1}{2!} \iint_S f_{\mu\nu} d\sigma^{\mu\nu} = \oint_C A_\mu dx^\mu \quad (10.44)$$

$$\frac{1}{3!} \iiint_V F_{\mu\nu\lambda} dv^{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2!} \iint_S f_{\mu\nu} d\sigma^{\mu\nu} \quad (10.45)$$

$$\frac{1}{4!} \iiint\iiint_\Omega W_{\mu\nu\lambda\rho} d\omega^{\mu\nu\lambda\rho} = \frac{1}{3!} \iiint\iiint_V F_{\mu\nu\lambda} dv^{\lambda\mu\nu} \quad (10.46)$$

ただし、 $f, F, W$  はいずれも次のような完全反対称共変テンソルである。

$$f_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (10.47)$$

$$F_{\mu\nu\lambda} = \partial_\mu A_{\nu\lambda} + \partial_\nu A_{\lambda\mu} + \partial_\lambda A_{\mu\nu} \quad (10.48)$$

$$W_{\mu\nu\lambda\rho} = \partial_\mu A_{\nu\lambda\rho} - \partial_\nu A_{\lambda\rho\mu} + \partial_\lambda A_{\rho\mu\nu} - \partial_\rho A_{\mu\nu\lambda} \quad (10.49)$$

重要なことにはテンソルの微分はテンソルにはならない。

ところがスカラーを作る組み合わせであれば階数を1つ変化させたテンソルを作ることができる。

例えば

式 10.46 から

$$\iiint\iiint_\Omega W_{0123} d\omega^{0123} = \iiint\iiint_\Omega W_{0123} dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 \equiv \iiint\iiint_\Omega W_{0123} d^4x \quad (10.50)$$

とおくとこれがスカラーになるのでスカラー密度としてレヴィ・チビタテンソルを用いて次のように表す。

$$\mathbf{W} = \frac{1}{4!} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} W_{\mu\nu\lambda\rho} \quad (10.51)$$

さらに次のベクトル密度を定義すると

$$\mathbf{T}^\mu = \frac{1}{3!} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} A_{\nu\lambda\rho} \quad (10.52)$$

これは例えば

$$\mathbf{T}^0 = A_{123} \quad \mathbf{T}^1 = -A_{230} \quad \mathbf{T}^2 = -A_{310} \quad (10.53)$$

となるのでストークスの定理は次のようにもかける。

$$\mathbf{W} = \partial_\mu \mathbf{T}^\mu \quad (10.54)$$

よって式 10.46 は

$$\iiint_V \mathbf{T}^0 dv^{123} - \iiint_V \mathbf{T}^1 dv^{230} + \iiint_V \mathbf{T}^2 dv^{301} - \iiint_V \mathbf{T}^3 dv^{012} = \frac{1}{3!} \iiint_V \epsilon_{\rho\lambda\mu\nu} \mathbf{T}^\rho dv^{\lambda\mu\nu} \quad (10.55)$$

とかける。ただしここでの下付の  $\epsilon$  はテンソルではない。偶 (奇) 置換で 1(-1)、それ以外で 0 とするレビチビタ記号である。

これから式 10.46 は

$$\frac{1}{3!} \iiint_V \epsilon_{\rho\lambda\mu\nu} \mathbf{T}^\rho dv^{\lambda\mu\nu} = \int_\Omega \partial_\mu \mathbf{T}^\mu d^4x \quad (10.56)$$

となる。よって  $\partial_\mu \mathbf{T}^\mu$  はスカラー密度とみなすことができる。同じように任意の反対称反変テンソル密度  $A^{\mu\nu}$  に対して

$$\mathbf{F}^\mu = \partial_\nu A^{\mu\nu} \quad (10.57)$$

はベクトル密度である。これを用いたストークスの定理は式 10.45 の反変の場合で次のようになる。

$$\frac{1}{2!2!} \iint_S \epsilon_{\rho\lambda\mu\nu} A^{\rho\lambda} d\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{3!} \iiint_V \epsilon_{\rho\lambda\mu\nu} \mathbf{F}^\rho dv^{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{3!} \iiint_V \epsilon_{\rho\lambda\mu\nu} \partial_\tau A^{\rho\tau} dv^{\lambda\mu\nu} \quad (10.58)$$

## 11 Lie 群 [12][37]

### 11.1 超曲面 [120]

前の第 4 部では群、多様体やベクトル場の基礎を学んだ。ここではその中の線形空間  $GL(n, \mathbf{R})$  を考える。これは簡単には  $n$  行、 $n$  列の正方行列  $A$  で表すことができるので

$$\dim(A) = n^2$$

の次元を持つと思われるが、重要なのは逆が存在することで  $A \in GL(n, \mathbf{R})$  として

$$N : \det(A) = 0 \quad (11.1)$$

を除外しないとイケないことである。この行列式が 0 になるということは、今後物理的に特異点を与える重要な役割を持つことになるが、これは次の部で検討する。

この行列式が 0 になる条件を満たす集合が閉集合になるので

$$GL(n, \mathbf{R}) = \mathbb{R}^{n^2} - N$$

は開集合である。よって、式 11.1 を満たす集合  $N$  は  $x_0 \in N$  として、

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} x_\nu = x_0$$

とすると

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \det(x_\nu) = \det(x_0)$$

だから、 $x \in GL(n, \mathbf{R})$  の点  $x$  の十分近い近傍として、半径  $\epsilon$  の球  $V$  を考えると、開集合になるおかげで

$$V = \{y \in \mathbb{R}^{n^2} \mid |y - x| < \epsilon\}$$

は図のように  $GL(n, \mathbf{R})$  の中にすっぽりと入れることができる。

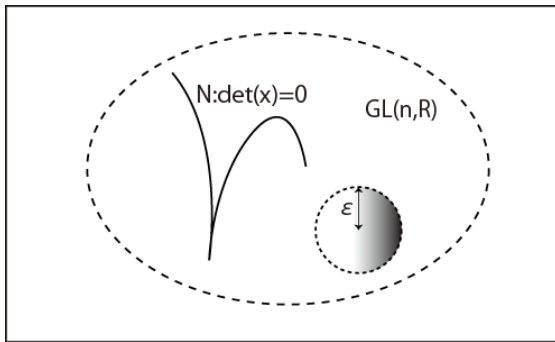


図 11.1: 行列式が 0 になる集合は微分できない点をもつ曲線、 $GL(n, \mathbf{R})$  は開集合になり、開球を収めることができる。

さらに  $SL(n, \mathbf{R})$  の場合は

$$\det(x) = 1$$

という条件がつく。従って、この超曲面は特異点のないなめらかな曲面である。

言い換えるとどこでも接平面をとれて、局所的にユークリッド座標をとれる。

例えば超曲面は代数的に定義できるので例えば次のような 4 次元空間の方程式を考えよう。

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 \tag{11.2}$$

ただし、連続的に微分可能であるとする。この時ある定点  $x^0$  (上付にして座標と区別する) をとり、ここで接平面の方程式が

$$\sum_{i=1}^4 \frac{\partial F}{\partial x_i}(x^0) (x_i - x_i^0) = 0 \tag{11.3}$$

で表すことができる。

これは次の図のように点  $x^0$  で接平面上のベクトル  $x - x^0$  と  $\text{grad}F(x^0)$  が直交することを示している。

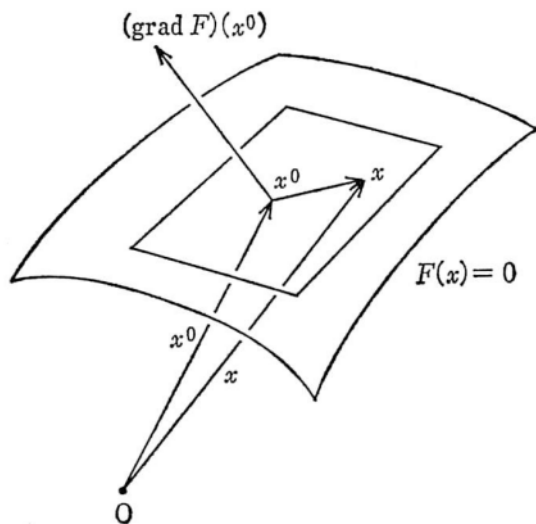


図 11.2: [120] より：多様体上の接平面とその法線ベクトル

ここで  $SL(2, \mathbf{R})$  の場合について接平面を求める具体的な計算例を示す。

この場合の行列式は 1 となるので  $\mathbb{R}^4$  の中で

$$F(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) = x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21} - 1 = 0 \quad (11.4)$$

が超曲面を表す式である。偏微分を下付添え字で表すことにして

$$F_{x_{11}} = x_{22}, F_{x_{22}} = x_{11}, F_{x_{12}} = -x_{21}, F_{x_{21}} = -x_{12}$$

と点  $x^0$  ではさらに超曲面の式を満たすから

$$F(x^0) = x_{11}^0 x_{22}^0 - x_{12}^0 x_{21}^0 - 1 = 0 \quad (11.5)$$

よって少なくともどこかの成分は 0 ではなく、

$$\text{grad} F(x^0) = (x_{22}^0, -x_{21}^0, -x_{12}^0, x_{11}^0) \neq 0$$

が言えて、接平面は存在し、式 11.5 から  $x_{11}^0 x_{22}^0 - x_{12}^0 x_{21}^0 = 1$  を代入し、

$$\begin{aligned} \text{grad} F(x^0) \cdot (x - x^0) &= x_{11}^0 (x_{22} - x_{22}^0) - x_{12}^0 (x_{21} - x_{21}^0) - x_{21}^0 (x_{12} - x_{12}^0) + x_{22}^0 (x_{11} - x_{11}^0) \\ &= \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21}^0 & x_{22}^0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{11}^0 & x_{12}^0 \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix} - 2 = 0 \end{aligned} \quad (11.6)$$

となるので接平面の式は

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21}^0 & x_{22}^0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{11}^0 & x_{12}^0 \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix} = 2 \quad (11.7)$$

これは  $x^0$  で  $x_{22}^0 \neq 0$  を満たせば、その近傍でも  $x_{22} \neq 0$  とすることができて、 $SL(2, \mathbf{R})$  の方程式として式 11.5 から超曲面上で

$$x_{11} = \frac{x_{12}x_{21} + 1}{x_{22}} \quad (11.8)$$

を選ぶことができる。この時、 $x_0$  の近傍で 3 次元のパラメタ  $t$  をとり、

$$t_1 = (x_{12} - x_{12}^0), t_2 = (x_{21} - x_{21}^0), t_3 = (x_{22} - x_{22}^0)$$

とおくと、式 11.6 から式 11.8 を用いて次の対応が得られる。

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{x_{12}x_{21}+1}{x_{22}} \\ x_{12} \\ x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(t_1+x_{12}^0)(t_2+x_{21}^0)+1}{x_{22}} \\ t_1 + x_{12}^0 \\ t_2 + x_{21}^0 \\ t_3 + x_{22}^0 \end{pmatrix} \quad (11.9)$$

これは第 4 部での Hopf 写像と同様に次元を 1 つ上げて、ファイバー束をつくり、1 つの成分を、曲面の式から求めている。

必ず、式 11.8 の商に他の成分が入ってくるので特異点が生じる。

第 4 部の Hopf 写像では複素座標として  $z \in S^3 \subset \mathbb{C}^2$  をとり、 $m = n = 1$  の場合

$$\Phi : S^1 \times S^3 \rightarrow S^3$$

$$(e^{i\theta}, z) \mapsto e^{i\theta} z \quad (11.10)$$

を考え、この時の Hopf 写像を

$$\pi : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) \\ 2\operatorname{Im}(z_1 \bar{z}_2) \\ |z_1|^2 - |z_2|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 z_2 + z_1 \bar{z}_2 \\ i(\bar{z}_1 z_2 - z_1 \bar{z}_2) \\ |z_1|^2 - |z_2|^2 \end{pmatrix}$$

とした。

ここで式 11.9 の逆像を Hopf 写像で考える。

そのため  $\mathbb{R}^4$  を  $\mathbb{C}^2$  として考える。つまり、改めて  $z_1 = x + iy, z_2 = z + iw$

として  $x, y, z, w \in \mathbb{R}$  とする。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \simeq \mu = \begin{pmatrix} x + iy \\ z + iw \end{pmatrix}$$

この時、 $S^3$  は

$$S^3 = \{\psi \in \mathbb{C} \mid |\psi| = 1\} \tag{11.11}$$

と表される。そこで単位ベクトルを  $\mu \in \mathbb{C}^2$  とし、複素平面上的の  $\mu$  方向の複素直線を

$$L_\mu = \{c\mu \mid c \in \mathbb{C}\}$$

とする。また、 $S^3$  と、 $L_\mu$  の境界部分を

$$C_\mu = L_\mu \cap S^3 = \{e^{i\phi}\mu \mid \phi \in \mathbb{R}\}$$

とすると、これは  $S^3$  表面上の円  $S^1$  であり、この円によって結合された領域を考えた。

視覚化するために  $\mathbb{R}^4$  を  $S^3$  へ立体射影する変換を考える。

$\mu \in \mathbb{R}^4$  を 3次元の球座標からの類推で次のようにおいてみる。

$$\begin{cases} x = \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \\ y = \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma \\ z = \sin \alpha \cos \beta \\ w = \cos \alpha \end{cases}$$

ここで  $\alpha, \beta \in [0, \pi], \gamma \in [0, 2\pi)$  であることに注意する。

実際に  $C_\mu$  はこの変換を  $\mu$  に作用させると

$$C_\mu = e^{i\phi} \begin{pmatrix} x + iy \\ z + iw \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

立体射影の類推で

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{1-w} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

の射影を考えると、 $\mathbb{R}^3$  の図が下のようになられた。



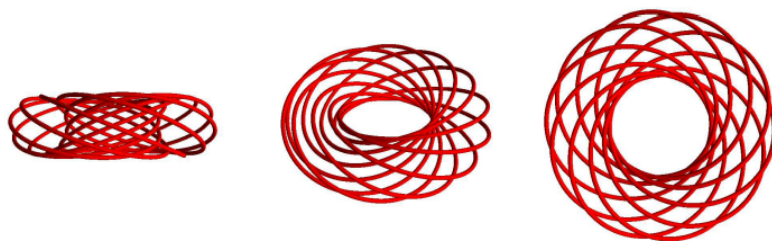


図 11.3: [45] より

これらから Hopf fibration の簡単なイメージとして次の図のようにまとめられた。  
 $\mathbb{R}^4$  上の  $S^3$  の絡んだ円  $h^{-1}(P), h^{-1}(Q)$  は  $\mathbb{R}^3$  上の  $S^2$  球面上の点  $P, Q$  のファイバーになっていて、図のように  $S^3$  から射影される。一方で同じ円  $h^{-1}(P), h^{-1}(Q)$  は立体射影により  $\mathbb{R}^3$  上の絡んだ円に写さる。

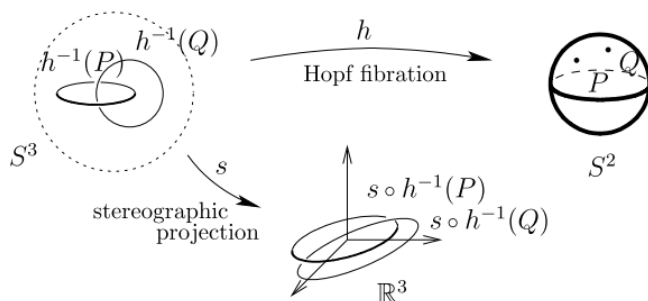


Figure 10: Stereographic projections of Hopf fibers. Any two projected fibers are linked circles, except  $s \circ h^{-1}(1, 0, 0)$  is a line.

図 11.4: [40] より

従って、式 11.9 の  $\mathbb{R}^3$  上の点  $P(t_1, t_2, t_3)$  は  $SL(2, \mathbf{R})$  の  $P' \left( \frac{x_{12}x_{21}+1}{x_{22}}, x_{12}, x_{21}, x_{22} \right)$  の曲線から写される。しかし、これも全ての領域をカバーしていない。 $x_{22} \neq 0$  という条件がつく。

## 11.2 Lie 群 [120]

$SL(2, \mathbf{R})$  の接平面の式 11.7 はある点  $x^0$  の行列式を変数座標で置き換えた形になっているが、これは一般的に拡張できる。

そこで次のように  $\det(x^0)$  の第  $i$  行を変数  $(x_{i1}, \dots, x_{in})$  で置き換えたものを  $\det^{(i)}(x, x_0)$  で定義する。

$$\det^{(i)} = \begin{vmatrix} x_{11}^0 & \cdots & x_{1n}^0 \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{i1} & \cdots & x_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{n1}^0 & \cdots & x_{nn}^0 \end{vmatrix}$$

これで式 11.7 を表すと

$$\sum_{i=1}^n \det^{(i)}(x, x^0) = n$$

を得る。特に  $x^0$  を単位行列  $1_n$  と選ぶと

$$\det^{(i)}(x, 1_n) = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{i1} & \cdots & x_{ii} \cdots & x_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = x_{ii}$$

となる。従って、

$$\sum_{i=1}^n x_{ii} = \text{Tr}[x] = n$$

この時、 $x = x^0$  での接ベクトルは

$$X = x - x^0$$

$$\text{Tr}[X] = \text{Tr}[x] - \text{Tr}[x^0] = n - n = 0$$

となり、対角和が 0 になるという結果が得られる。

これは  $SL(2, \mathbf{R})$  が  $n^2 - 1$  次元の  $\epsilon$ -球と微分同相な近傍をもっていることになる。

一方で、 $\det(x) = 0$  を満たした超曲面  $N$  は特異点を持ち、この点では安定した接平面を持ってない。

この場合は円錐の頂点に相当する。

単純に  $\det(x) = k$  を満たす場合を

$$\begin{vmatrix} x & y \\ y & x \end{vmatrix} = k$$

として  $k = 1$  と  $k = 0$  の場合を作図すると次のようになる。

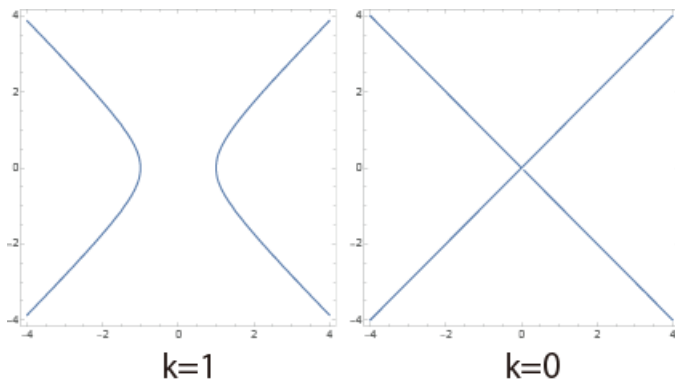


図 11.5:  $k = 0$  では原点で特異点を持つ

これから Lie 群は  $GL(n, \mathbf{R}), SL(n, \mathbf{R})$  の中でも群を形成し、局所的に  $n^2, n^2 - 1$  次元のユークリッド空間内の近傍 ( $\epsilon$ -Sphere)

と微分同相になる。

そこで逆を持ち、分母が 0 にならない解析関数で定義できて、部分群  $G$  が局所的にユークリッド空間と微分同相になる群を

リー群という。簡単にはここまでみてきたように接線の引ける多様体になっているような群である。

### 11.3 カルタンの定理 [120]

$G$  を  $GL(n, \mathbf{R})$  の部分群とする。  $g \in G$  の左乗法を  $\lambda_g$  とすると

$$x \in G \rightarrow gx \in G$$

さらに

$$y \in G \rightarrow g^{-1}y \in G$$

よって  $g(g^{-1}y) = y$  が成り立ち、

$$gx = y \iff x = g^{-1}y$$

であり、

$$x_1x_2 \in G \rightarrow g = x_2x_1^{-1} \in G$$

であるので  $G$  の元による乗法は  $G$  の上に推移的に作用する。つまり  $X$  が空でなく、 $X$  の任意の元  $x$  に対して

$$Gx = X$$

が成り立てば推移的であるという。この時の  $Gx$  は

$$Gx = \{gx | g \in G\}$$

で表され、 $X$  の  $G$  による軌道という。つまり、軌道を一意に決めていくのが推移的な作用である。

この移動が定義できると下図のように  $x_1$  の近傍  $G \cap U_{x_1}$  から  $x_2$  の近傍  $G \cap U_{x_2}$  への移動  $\lambda_a$  が存在できる。

$$U_{x_1} \rightarrow U_{x_2}$$

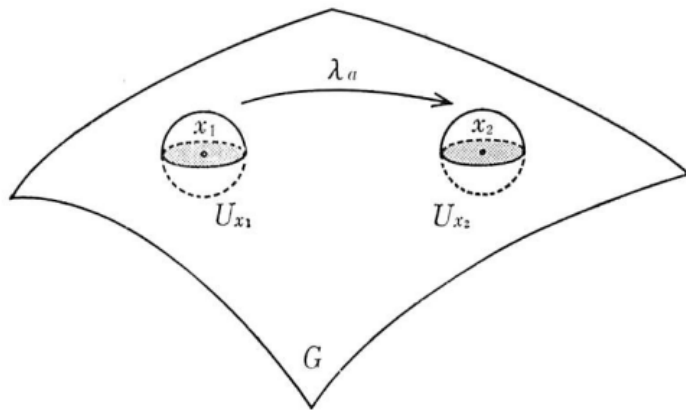


図 11.6: [120] より：推移的な移動で等質空間がえられる。

このとき  $U_{x_1}, U_{x_2}$  の位相的、解析的性質は全く同じになるのでこれを等質空間という

そこで  $G$  が  $GL(n, \mathbf{R})$  の閉部分群であって、 $G$  の一点  $x_1$  において近傍  $G \cap U_{x_1}$  が滑らかな曲面であるとわかったとする。

すると等質性があれば他の任意の点  $x_2 \in G$  の近傍  $G \cap U_{x_2}$  もまた、滑らかな曲面になる。これを全体に広げれば、

$G$  がリー群になる。これは一般化されカルタンの定理 (Cartan's Theorem) という。

定理 1. リー群の閉部分群はリー群になる。

### 11.3.1 直交群の場合

カルタンの定理を  $O(n)$  の場合で見よう。

直交群なので転置行列との積は単位行列になる。

$${}^t x x = 1_n$$

成分では

$$\sum_{k=1}^n x_{ki}x_{kj} = \delta_{ij}$$

とかける。ここでは  $i, j$  は対称であるとする。ば  $i \leq j$  として次の  $\frac{1}{2}n(n+1)$  個の方程式を考えればよい。

$$f_{ij}(x) = \sum_{k=1}^n x_{ki}x_{kj} - \delta_{ij} = 0 \quad (i \leq j)$$

さらにこれを微分して、ヤコビ行列を次で定義する。

$$\frac{\partial f_{ij}}{\partial x_{kl}} = \delta_{il}x_{kj} + \delta_{jl}x_{ki} \quad (1 \leq i \leq j \leq n, 1 \leq k, l \leq n) \quad (11.12)$$

この行列は  $((i, j), (k, l))$  成分を持ち

$$\dim \left| \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_{kl}} \right| = \frac{n(n+1)}{2} \times n^2$$

である。陰関数定理から、もしこの行列の適当な  $\frac{1}{2}n(n+1)$  次小行列式が 0 でないならその点で  $O(n)$  に接平面が存在する。

例えば  $n = 2$  の場合は式 11.12 から

$$f_{11} = x_{11}^2 + x_{21}^2 - 1, f_{12} = x_{11}x_{12} + x_{21}x_{22}, f_{22} = x_{22}^2 + x_{12}^2 - 1$$

だから

$$\frac{\partial(f_{11}, f_{12}, f_{22})}{\partial(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22})} = \begin{vmatrix} 2x_{11} & x_{12} & 0 & 0 \\ 0 & x_{11} & 2x_{22} & 2x_{21} \\ 2x_{21} & x_{22} & 0 & 0 \\ 0 & x_{21} & 2x_{22} & 2x_{12} \end{vmatrix}$$

この第 3 行を除いて得られる 3 次小行列式は  $x = x_{12}$  の時に

$$4x_{11}(x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}) = 4 \neq 0$$

となる。よって接線が引けてその式は 11.7 になる。

今の  $n = 2$  の場合いたるところ滑らかな曲線は 2 つの円である。

### 11.3.2 ケイレイ変換

これを一般化するためには、パラメタ表示を用いるのが便利である。

$$X = c(x) = (1_n - x)(1_n + x)^{-1}$$

とおく。これは  $1_n + x$  が可逆な有利変換で、さらに

$$\begin{aligned} 1_n + X &= ((1_n + x) + (1_n - x))(1_n + x)^{-1} \\ &= 2(1_n + x)^{-1} \end{aligned}$$

となり、 $1_n + X$  も可逆である。よって  $x$  で解くと、

$$\begin{aligned} x &= 2(1_n + X)^{-1} - 1_n \\ &= \{2 \cdot 1_n - (1_n + X)\}(1_n + X)^{-1} \\ &= (1_n - X)(1_n + X)^{-1} \end{aligned}$$

となるので

$$x = c(X)$$

である。よって

$$c : x \rightarrow X$$

は  $GL(n, \mathbf{R})$  から超曲面  $\det(1_n + x) = 0$  を除いた部分を  $\mathbf{R}^{n^2}$  から 2つの超曲面  $\det(1_n \pm X) = 0$  を除いた部分に

1対1で写す有理写像であり、次を満たす。

$$c \circ c = 1$$

これをケイレイ変換 (Cayley Transformation) という。

さらに  $X = c(x)$  の時、次が可換になる。

$$[1_n + x, 1_n - x] = 0$$

よって

$$\begin{aligned} {}^t X &= {}^t \left( (1_n - x)(1_n + x)^{-1} \right) \\ &= {}^t \left( (1_n + x)^{-1}(1_n - x) \right) \\ &= (1_n - {}^t x)(1_n + {}^t x)^{-1} \\ &= c({}^t x) \end{aligned}$$

であり、 $x^{-1}(1_n + x^{-1})^{-1} = (1_n + x)^{-1}$  だから

$$\begin{aligned} -X &= (x - 1_n)(1_n + x)^{-1} \\ &= (1_n - x^{-1})xx^{-1}(1_n + x^{-1})^{-1} \\ &= (1_n - x^{-1})(1_n + x^{-1}) \\ &= c(x^{-1}) \end{aligned}$$

である。よって

$$x \in O(n) \iff {}^t x = x^{-1} \iff {}^t X = -X$$

すなわち  $X$  は転置行列をとると負符号だけが出る交代行列である。

また、交代行列の固有値は純虚数である。これからも

$$\det(1_n + X) \neq 0$$

が保証される。従って、ケイレイ変換により直交群  $O(n)$  の開部分集合

$$U = O(n) - \{x \in O(n) \mid \det(1_n + x) = 0\}$$

が  $\mathbf{R}^{n^2}$  の線形部分空間

$$Alt_n(\mathbf{R}) = \{X \in \mathbf{R}^{n^2} \mid {}^t X = -X\}$$

と解析的に同相になる。これから  $O(n)$  もまた、 $1_n$  において、いたるところ滑らかでリー群になる。

そしてリー群の次元も等しく

$$\dim Alt_n(\mathbf{R}) = \frac{1}{2}n(n-1)$$

である。

### 11.3.3 Lie 群上の曲線

さて、前節で等質の空間になることを見た。そこで連続した曲線とその接ベクトルとの関係を見たい。リー群  $GL(n, \mathbf{R})$  の中のへの写像を

$$t \in \mathbb{R} \rightarrow x(t) = (x_{ij}(t)) \in GL(n, \mathbf{R})$$

とし、連続であるとは行列成分  $x_{ij}(t)$ ,  $(1 \leq i, j \leq n)$  が全てパラメタ  $t$  の連続関数であるとする。

また、この曲線は微分可能であるとする。

この時  $\alpha < t_0 < \beta$  における接ベクトルは

$$X = \left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t=t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} \quad (11.13)$$

だが、ここでは微分係数は成分で

$$\left. \frac{dx_{ij}(t)}{dt} \right|_{t=t_0}$$

で与える。

これまでのように単位元  $1_n$  を通る曲線の単位元  $1_n$  での接ベクトルを考える。

ただし、簡単のため区間  $[\alpha, \beta]$  内に 0 点があるとし

$$\alpha < 0 < \beta$$

であり、 $t = 0$  が単位元  $1_n$  に対応しているとする。

$$x(t_0) = 1_n$$

従って式 11.13 から接ベクトルは

$$X = \left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t=t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{x(t) - 1_n}{t}$$

となる。ここで 2 つの曲線  $x(t), y(t)$ ,  $(\alpha \leq t \leq \beta)$  を考え、 $t = 0$  における接ベクトルを  $X, Y$  とする。

この時、積  $x(t)y(t)$  を作ると、

$$\frac{x(t)y(t) - 1_n}{t} = \frac{(x(t) - 1_n)y(t)}{t} + \frac{y(t) - 1_n}{t}$$

となるから、これも  $1_n$  を通る曲線になる。しかもこの時の接ベクトルは  $t \rightarrow 0$  とすると

$$y(t) \rightarrow y(0) = 1_n$$

だから微分係数は  $X + Y$  であり、接ベクトルが  $X + Y$  になる。しかも図のように一点  $1_n$  を通る。

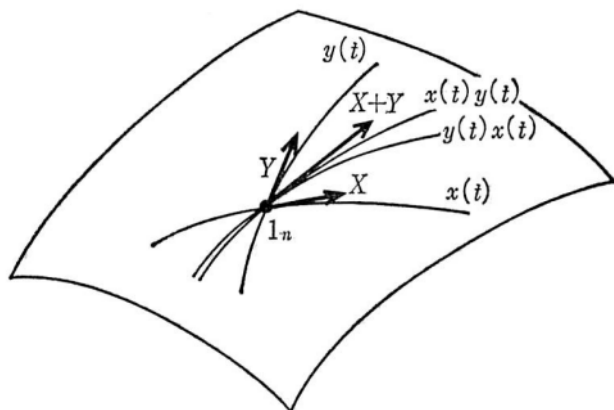


図 11.7: [120] より：積の接ベクトル

これはライプニッツの積公式

$$(f(t)g(t))' = f'(t)g(t) + f(t)g'(t)$$

を表しているから、 $y(t) = x(t)^{-1}$  の時は

$$x(t)y(t) = 1_n$$

だから

$$X + Y = 0$$

$$Y = -X$$

が成り立つ。これは

$$\frac{d}{dt}(x(t)^{-1}) = -x(t)^{-1} \frac{dx(t)}{dt} x(t)^{-1}$$

が任意の行列の曲線に対して成り立つことを表す。これも公式

$$\frac{d}{dt}(f^{-1}(t)) = -\frac{f'(t)}{f(t)^2}$$

を表すが、関数と異なり、両端に  $x^{-1}(t)$  がかかることに留意する。  
さて、転置に対しては順番は次のように入れ替えが効く。

$$\left. \frac{d^t x(t)}{dt} \right|_{t=0} = {}^t \left( \left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t=0} \right) = {}^t X$$

これから  $x(t)$  が直交群  $O(n)$  に含まれる曲線ならば

$${}^t x(t) = x(t)^{-1}$$

を満たすので、その接ベクトルは自動的に

$${}^t X = -X$$

を満たし、 $X$  が交代行列になる。

従って  $O(n)$  の  $1_n$  における接ベクトル全体の作る線形空間、接ベクトル空間は線形部分空間  $Alt_n(\mathbf{R})$  に含まれる。

言い換えると次元が同値なので  $O(n)$  の単位元  $1_n$  における接空間が  $1_n + Alt_n(\mathbf{R})$  に一致する。

したがって  $X \in Alt_n(\mathbf{R})$  に対して  ${}^t X$  のケイレイ変換によって

$$x(t) = c(tX) = \frac{1_n + tX}{1_n - tX}$$

を考えれば、十分小さい  $t$  に対して、無限級数の公式から

$$x(t) = (1_n + tX) \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} (tX)^\nu$$

さらにケイレイ変換は  $c \circ c = 1$  を満たしたので無限和では

$$\begin{aligned} x(t) &= (1_n + tX) \cdot \left( 1_n + \sum_{\nu=1}^{\infty} (tX)^\nu \right) \\ &= 1_n + tX + \sum_{\nu=1}^{\infty} (tX)^\nu + tX \sum_{\nu=1}^{\infty} (tX)^\nu \\ &= 1_n + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} (tX)^\nu \end{aligned}$$

とみなせるから微分も同様に次の計算は  $tX/t$  のみ残るから

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} \Big|_{t=0} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{x(t) - 1_n}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \sum_{\nu=1}^{\infty} (tX)^{\nu}}{t} \\ &= 2X \end{aligned}$$

である。面白いことに留数積分のように無限級数と極限で有限項のみ残った。

よって任意の交代行列  $X$  は  $O(n)$  の中の曲線の接ベクトルになる。

一般に  $GL(n, \mathbf{R})$  の閉部分群  $G$  はカルタンの定理より、リー群になる。

ここで用いた単位元  $1_n$  における接ベクトル空間を  $\mathfrak{g}$  で表すことが多い。 $SL(n, \mathbf{R})$  に対しては  $\mathfrak{sl}$  である。

これらからリー群に対応して接ベクトル空間について

$$\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R}) = \mathbf{R}^{n^2}$$

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbf{R}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbf{R}) | \text{Tr}(X) = 0\}$$

$$\mathfrak{o}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbf{R}) | {}^t X = -X\} = \text{Alt}_n(\mathbf{R})$$

であり、これらは後のリー代数につながる。

## 11.4 Lie 環

第4部で学習したように環とは群の性質を満たし、加法について可換群であり、さらに乗法について次の演算が成り立つものである。

- 環  $\mathfrak{R}$  の任意の元  $a, b, c$  に対し、結合律  $a(bc) = (ab)c$  が成り立つ。
- 環  $\mathfrak{R}$  の任意の元  $a, b, c$  に対し、左分配律  $a(b+c) = (ab) + (ac)$  が成り立つ。
- 環  $\mathfrak{R}$  の任意の元  $a, b, c$  に対し、右分配律  $(b+c)a = (ba) + (ca)$  が成り立つ。

### 11.4.1 行列のリー環

前章の単位元  $1_n$  における接ベクトル空間を  $\mathfrak{g}$  はベクトル空間に加えて、次の性質を持っている。

$$X, Y \in \mathfrak{g} \rightarrow XY - YX \in \mathfrak{g}$$

前節であつかった  $\mathfrak{gl}, \mathfrak{sl}, \mathfrak{o}$  についてこれを示そう。

### 11.4.2 $SO(3)$

単位行列  $I \in SO_3$  での接空間  $T_I SO_3$  は  $SO_3$  のリー環と呼ばれ  $\mathfrak{so}_3$  で表す。

3次正方行列全体を  $M_3(\mathbf{R})$  としてこれを9次元ユークリッド空間  $R^9$  と同一視する。

この時  $SO_3$  は  $R^9$  内のなめらかな3次元多様体とみなすことができる。

$$X \in T_I SO_3$$

であれば直交条件  $[A]^t A = I$  から次の関係が成り立つ

- 直線  $s \rightarrow I + sX$  が  $s = 0$  で  $SO_3$  に接する。



- $[I + sX]^t (I + sX)$  を展開した場合、 $s$  の 1 次項は消える。 $s$  で微分したとき  $s = 0$  で 0 になる必要があるから

$$[I + sX]^t (I + sX) = I + ([X]^t + X) s + [X]^t X s^2$$

- よって  $[X]^t = -X$  が成り立つ。

従って  $T_I SO_3$  は歪対称性行列の全体と一致している。具体的に次のように基底を置く。

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (11.14)$$

$$[X_1, X_2] = X_3 \quad (11.15)$$

リー環  $\mathfrak{so}_3$  は次の性質を持つ

- $A \in SO_3, X \in \mathfrak{so}_3$  の時、 $AXA^{-1}$  は  $\mathfrak{so}_3$  のベクトルになる。
- $X, Y \in \mathfrak{so}_3$  の時、 $XY - YX$  もまた  $\mathfrak{so}_3$  のベクトルである。

次に単位元以外での接空間を考える。 $A \in SO_3$  において

$$[A + sX]^t (A + sX) = A^2 + ([X]^t A + A^{-1} X) s + [X]^t X s^2$$

だから

$$\begin{aligned} T_A SO_3 &= \{X \in M_3(\mathbb{R}) \mid [X]^t A = -A^{-1} X\} \\ &= \{X \in M_3(\mathbb{R}) \mid A[X]^t = -X A^{-1}\} \end{aligned}$$

となる。しかしここでは  $A \in M_3(\mathbb{R})$  に対し、 $L_A, R_A : M_3 \rightarrow M_3$  を左移動、右移動として

$$L_A(B) = AB, \quad R_A = BA$$

を満たすとすると左移動  $L_A$  は  $SO_3$  の元を  $SO_3$  の元に移すので接空間  $T_B SO_3$  を  $T_{AB} SO_3$  にうつし、 $L_{A^{-1}}$  がその逆を与えると考えられる。従って

$$\begin{aligned} T_A SO_3 &= L_A(T_I SO_3) \\ &= \{AX \in M_3(\mathbb{R}) \mid X \in \mathfrak{so}_3\} \\ &= \{X \in M_3(\mathbb{R}) \mid A^{-1} X \in \mathfrak{so}_3\} \end{aligned}$$

であり、同様なことが右移動  $R_A$  でも成り立ち

$$L_A(T_I SO_3) = R_A(T_I SO_3) \quad (11.16)$$

例えば接ベクトル  $X \in T_A SO_3 = \mathfrak{so}_3$  を具体的に表すと

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad (11.17)$$

とすれば

$$XA^{-1} = X[A]^t = \begin{pmatrix} \langle x_1, v_1 \rangle & \langle x_1, v_2 \rangle & \langle x_1, v_3 \rangle \\ \langle x_2, v_1 \rangle & \langle x_2, v_2 \rangle & \langle x_2, v_3 \rangle \\ \langle x_3, v_1 \rangle & \langle x_3, v_2 \rangle & \langle x_3, v_3 \rangle \end{pmatrix}$$

となる。またこの時、

$$\langle x_i, v_j \rangle = -\langle x_j, v_i \rangle \quad (11.18)$$

である。

## 11.5 不変ベクトル場

$a, g$  を Lie 群  $G$  の元とする。このとき、 $g$  の  $a$  による右移動  $R_a : G \rightarrow G$  と左移動  $L_a : G \rightarrow G$  を次のように定義する。

$$R_a g = ga$$

$$L_a g = ag$$

また、これらの誘導写像として  $G$  の接平面について

$$L_{a*} : T_g G \rightarrow T_{ag} G$$

$$R_{a*} : T_g G \rightarrow T_{ga} G$$

が成り立つ。これらの移動に対して不変なものが存在し、例えば

$$L_{a*} X|_g = X|_{ag} \quad (11.19)$$

の時左不変ベクトル場  $X$  であるという。

この時、 $g, ag$  の座標  $x^\nu(g), x^\nu(ag)$ , について次が成り立つ

$$L_{a*} X|_g = X^\mu(ag) \frac{\partial x^\nu(ag)}{\partial x^\mu(g)} \frac{\partial}{\partial x^\nu} |_{ag} = X^\nu(ag) \frac{\partial}{\partial x^\nu} |_{ag}$$

つまり左作用素によってベクトル場は基底と作用素の座標が共に変換される。

$$X_V|_{ag} = L_{ag*} V = (L_a L_g)_* V = L_{a*} L_{g*} V = L_{a*} X_V|_g$$

重要なのは逆に左不変であれば、ただ1つのベクトル

$$V = X|_e \in T_e G$$

を決めることである。

$$V \rightarrow X_V$$

で定義される写像を  $T_e \rightarrow g$  は同型写像であり、左不変ベクトル全体の集合は  $T_e G$  に同型なベクトル空間になる。

$$\dim g = \dim G$$

になる。この写像  $g$  は同型写像で、Lie 括弧積について次のように閉じていることがわかる。

$G$  上の 2 つの点  $g, ag = L_a g$  をとる。  $L_{a^*}$  を  $X, Y \in g$  の Lie 括弧積に作用させると

$$\begin{aligned} L_{a^*}[X, Y]|_g &= [L_{a^*}X|_g, L_{a^*}Y|_g] \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial a} x(a)|_g \frac{\partial^2}{\partial y \partial a} x(a)|_g - \frac{\partial^2}{\partial y \partial a} x(a)|_g \frac{\partial^2}{\partial x \partial a} x(a)|_g \\ &= [X, Y]|_{ag} \end{aligned}$$

具体的に成分で見ると、  $a \in GL(n, \mathbb{R})$  の左不変ベクトル場とする。

$GL(n, \mathbb{R})$  の座標は行列  $n^2$  個の成分を持つことになるのでこれを  $x^{ij}$  であらわし、単位元は  $\delta^{ij}$  とする。この時、

$$g = \{x^{ij}(a)\}, \quad a = \{x^{ij}(a)\} \in GL(n, \mathbb{R})$$

とする。この時、左移動を

$$L_a g = ag = \sum_k x^{ik}(a)x^{kj}(g)$$

で表すことができる。対応するベクトル場は  $e$  点において

$$V = V^{ij} \frac{\partial}{\partial x^{ij}}|_e \in T_e G$$

この時  $V$  により生成される左不変ベクトル場は

$$\begin{aligned} X_V|_g &= L_{g^*}V = \sum_{ijklm} V^{ij} \frac{\partial}{\partial x^{ij}}|_e x^{kl}(g)x^{lm}(e) \frac{\partial}{\partial x^{km}}|_g \\ &= \sum V^{ij} x^{kl}(g) \delta_i^l \delta_k^m \frac{\partial}{\partial x^{km}}|_g \\ &= \sum x^{ki}(g) V^{ij} \frac{\partial}{\partial x^{kj}}|_g = \sum (gV)^{kj} \frac{\partial}{\partial x^{kj}}|_g \end{aligned}$$

と表される。Lie 括弧積についても  $V = V^{ij} \frac{\partial}{\partial x^{ij}}|_e, W = W^{ij} \frac{\partial}{\partial x^{ij}}|_e$  とすると

$$\begin{aligned} [X_v, X_w]|_g &= \sum x^{ki}(g) V^{ij} \frac{\partial}{\partial x^{kj}}|_g x^{ca}(g) W^{ab} \frac{\partial}{\partial x^{cb}}|_g - [V \leftrightarrow W] \\ &= \sum x^{ki}(g) [V^{jk} W^{kl} - W^{jk} V^{kl}] \frac{\partial}{\partial x^{il}}|_g \\ &= \sum (g[V, W])^{ij} \frac{\partial}{\partial x^{ij}}|_g \end{aligned}$$

よってこれから

$$\begin{aligned} L_{g^*}V &= gV \\ [X_v, X_w]|_g &= L_{g^*}[V, W] = g[V, W] \end{aligned} \tag{11.20}$$

が成り立つ。

これから **Lie 環** とは乗法についても閉じていて、**Lie 括弧積** を左不変に保つベクトル場の集合であると定義できる。

慣例では Lie 環は  $\mathfrak{so}(n)$  のように古いドイツ小文字 frack 体で表現する。

## 11.6 定義

ここまでの知識をまとめて、改めてリー群の定義を考えよう。

多様体の例として **Lie 群 (Lie group)** とは群  $G$  で同時に多様体であり、演算

$$(x, y) \in G \times G \rightarrow xy^{-1} \in G \tag{11.21}$$

つまり、直積多様体  $G \times G \rightarrow G$  が微分可能な写像になっている場合をいう。リー群  $G$  は多様体としての位相に関して位相群になっている。  $a \in G$  について次の左移動と右移動の  $G$  自身への変換が定義できる。

- 左移動  $L_a : L_a(x) = ax$
- 右移動  $R_a : R_a(x) = xa$

これらは微分同相なのでベクトル場が次を満たす場合、

$$L_a X_x = X_{ax} \quad a, x \in G \quad (11.22)$$

$$R_a X_x = X_{xa} \quad a, x \in G \quad (11.23)$$

はそれぞれ左不変 (left inuariant)、右不変 (right inuariant) という。

また、右不変、左不変であれば微分可能である。

ここで多様体の接空間  $T_e(G)$  を考えると  $G$  上の左不変なベクトル場全体の集合  $\mathfrak{g}$  は実ベクトル空間をつくり単位元が  $e$  と考えることができる。すなわち任意の  $A \in T_e(G)$  について

$$X_x = (L_x)_* A \quad x \in G$$

によってベクトル場  $X$  を定義するとこれは左不変だから  $X \in \mathfrak{g}$  である。ここで対応  $A \rightarrow X$  が図のように  $T_e(G)$  と  $\mathfrak{g}$  との線形同型写像である。

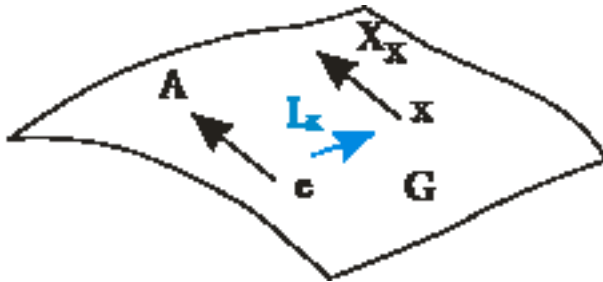


図 11.8:  $X_x = (L_x)_* A$  が線形同型写像

ここで集合  $\mathfrak{g}$  を微分可能なベクトル場全体  $V$  の部分集合であると考え  $V$  の括弧積に関して

$$X, Y \in \mathfrak{g} \rightarrow [X, Y] \in \mathfrak{g}$$

が成り立つ。 $\mathfrak{g}$  を有限次元で  $G$  と同じ次元のリー環とみなし、リー群  $G$  のリー環が  $\mathfrak{g}$  だといえる。

任意の  $A \in \mathfrak{g}$  について  $e$  の近傍  $U$  で生成される局所的 1 助変数変換群を  $\{\phi_t\}$  とすると  $A$  が任意の元  $a$  による左移動  $L_a$  により不変であることから  $a$  の近傍  $aU = L_a U$  の上で  $X$  が生成する局所的 1 助変数変換群  $\psi_t$  は図のように

$$\psi_t = L_a \phi_t L_a^{-1}$$

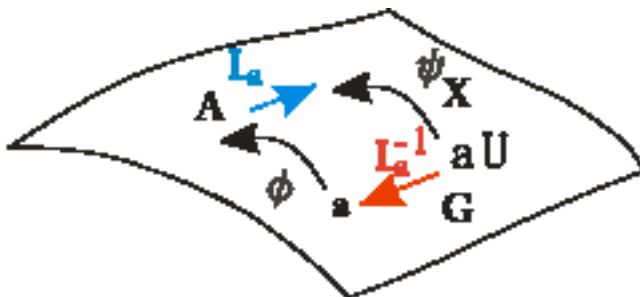


図 11.9: 左移動  $L_a$  により  $a$  の近傍  $aU = L_a U$  の上で  $X$  が生成する  $\psi_t$  と  $\phi_t$

この時、 $\phi_t$ 、 $\psi_t$  は同じ  $t$  の範囲で定義される。従って  $X$  は  $G$  の上で大域的な 1 助変数変換群  $\phi_t$  によって

$$\phi_t = L_a \phi_t L_a^{-1} \quad (11.24)$$

であるから。

$$\phi_t L_a = L_a \phi_t$$

が成立する。そこで

$$a_t = \phi_t(e) \quad (-\infty < t < \infty) \quad (11.25)$$

とおけば

$$\phi_t(a) = aa_t = R_{a_t} a \quad (11.26)$$

とかけるから

$$\phi_{t+s} = \phi_t \phi_s \quad (11.27)$$

が成立するから

$$a_{t+s} = a_t a_s \quad (11.28)$$

となり、 $a_t$  は群  $G$  の 1 助変数部分群 (1-parametar subgroup) になる。次式の関係を経数写像 (exponential mapping)  $\exp(tX)$  と表すことがある。

$$X \rightarrow \exp X \quad (11.29)$$

この指数写像は

$$a_t = \exp(tX) \quad (11.30)$$

とするとこれは幾何的には左不変ベクトル場  $X$  の積分曲線だからその接ベクトル  $a'_t$

$$a'_t = X_{a_t} = L_{a_t} \cdot X_e = L_{a_t} \cdot a'_0 \quad (11.31)$$

これから

$$a_t^{-1} a'_t = \exp(-tX) L_{a_t} \cdot a'_0 = \exp(-tX) \exp(tX) \cdot a'_0 = a'_0 \quad (11.32)$$

であるから

$$A = a'_0 \in T_e(G)$$

とおくと

$$a_t^{-1} a'_t = A \quad (11.33)$$

逆にこれを満たす  $a_t$  は  $a_0 = e$  という初期条件を与えれば式 11.30 が得られる。

例として一般線形群  $GL(n, R)$  をとるとこれは  $R^{n^2}$  の開部分多様体で行列  $a = [a_j^i]$  の  $n^2$  個の成分が  $GL(n, R)$  全体の座標系を作っている。 $GL(n, R)$  の曲線  $a_t$  に対し、各点での接ベクトルは  $da/dt$  であるから式 ?? から

$$a_t^{-1} \frac{da}{dt} = A \quad A \in gl(n, R)$$

である。単位元（単位行列）を持つ解は次のような行列に対する指数関数になる。

$$\exp tA = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} \quad (11.34)$$

リー群  $G$  のリー部分群 (Lee subgroup) とは群  $G$  の部分群  $H$  で  $H \rightarrow G$  がはめこみであるような多様体の構造に対して  $H$  自身がリー群であるようなものことである。

リー部分群  $H$  に対して

$$\eta = \{X \in \mathfrak{g}, X_e \in T_e(H)\} \quad (11.35)$$

は  $\mathfrak{g}$  のリー部分環になり、 $H$  自身のリー環と同一視することができる。

逆にリー群  $G$  のリー環  $\mathfrak{g}$  のリー部分環  $\eta$  が与えられているとする。 $G$  の各点  $a$  に対して、

$$\sigma_G = \{X_a; X \in \eta\} \subset T_a(G) \quad (11.36)$$

を対応させることによって  $\eta$  と同じ次元の接分布  $\sigma$  が得られる。 $\sigma$  は微分可能で完全積分可能である。

単位元  $e$  を通る極大積分多様体を  $H$  とすると  $H$  は  $G$  の部分群であり、 $G$  のリー部分群である。

この時  $H$  を  $\eta$  から生成されるリー部分群でという。

$H$  が弧状連結の時、リー群  $G$  の部分群  $H$  はリー部分群になる。

また  $H$  が閉部分群であればリー部分群であり、その位相は  $G$  からの相対位相と一致する。

特に部分群  $H$  が局所部分多様体構造を持ち、埋め込まれた部分多様体になる例として、 $GL(n, R)$  のリー部分群になるものとして  $SL(n, R), O(n)$  がある。

リー群  $G$  が多様体  $M$  に作用するとは  $G$  の各元  $a$  に対応し、 $M$  のそれ自身への微分同相写像  $\phi_a$  が存在し、

$$\phi_{ab} = \phi_a \cdot \phi_b \quad a, b \in G$$

が成り立ち、さらに写像

$$(a, x) \in G \times M \quad \phi_a(x) \in M$$

が微分可能であるときである。この時、 $G$  の単位元  $e$  に対応する写像  $\phi_e$  は  $M$  の恒等変換である。

逆に  $\phi_e$  が恒等変換になれば  $a = e$  という条件が成り立つ時、 $G$  は効果的 (effective) であるという。

$G$  が  $M$  に作用するとき、 $M$  の 1 点  $x_0$  に対して

$$H(x_0) = \{a \in G; \phi_a(x_0) = x_0\}$$

を  $x_0$  における固定群 (isotropy group) という。固定群は閉リー部分群になる。

## 11.7 1-parameta 部分群

$G$  をリー群として、前節にもあったように曲線  $\phi: \mathbb{R} \rightarrow G$  が条件

$$\phi(t)\phi(s) = \phi(t+s)$$

が成り立てば  $\phi$  を  $G$  の **one-parameter-subgroup** 部分群という。この時、

$$\phi(0) = e$$

$$\phi^{-1}(t) = \phi(-t)$$

が満たされる。この 1-parameta 部分群の中でベクトル場を  $X$  として

$$\frac{d\phi^\mu(t)}{dt} = X^\mu(\phi(t)) \quad (11.37)$$

を満たすものがある。するとこのベクトル場  $X$  は左不変になる。  
これはベクトル場  $d/dt$  が  $\mathbb{R}$  上では左不変だから

$$(L_t)_* \frac{d}{dt} \Big|_0 = \frac{d}{dt} \Big|_t \quad (11.38)$$

のように時間推進を表す。

次に、この時間の微分演算子に次の誘導写像を作用させる。

$$\phi_* : T_t \mathbb{R} \rightarrow T_{\phi(t)} G$$

すると式 11.37 より  $\phi(t) = g$  として

$$\phi_* \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{d\phi^\mu(t)}{dt} \Big|_0 \frac{\partial}{\partial g^\mu} \Big|_e = X \Big|_e$$

$$\phi_* \frac{d}{dt} \Big|_{t=t} = \frac{d\phi^\mu(t)}{dt} \Big|_t \frac{\partial}{\partial g^\mu} \Big|_g = X \Big|_g$$

式 11.38 より

$$(\phi L_t)_* \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} = \phi_* L_t_* \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} = X \Big|_g \quad (11.39)$$

$\phi(t) = g$  より、次の可換性があるから

$$\phi L_t = L_g \phi$$

は

$$\phi_* L_t_* = L_g_* \phi_*$$

も成立することを意味する。次に、テンソル場  $T$  をベクトル場  $X$  の 1 パラメタ変換群により移動させることからリー微分の演算子を導く。

$\phi_t(x)$  は座標依存したパラメタ  $t$  の連続関数としてテンソル場はこの関数に対し同型の変換をするとすれば

$$\tilde{\phi}_t : T_{s,x}^r \rightarrow T_{s,\phi_t(x)}^r \quad (11.40)$$

ここで  $S$  が  $(r, s)$  型のテンソルであれば

$$\left( \tilde{\phi}_t^{-1} S \right)_x = \tilde{\phi}_t^{-1} S_{\phi_t} \in T_{s,x}^r \quad (11.41)$$

となるので

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left( \tilde{\phi}_t^{-1} S \right)_x = \frac{1}{t} \left[ \left( \tilde{\phi}_t^{-1} S \right)_x - S_x \right] = \frac{d}{dt} \left( \tilde{\phi}_t^{-1} S_x \right) \Big|_{t=0} \quad (11.42)$$

これを  $X$  方向へのリー微分といい  $\mathcal{L}_X S$  で表す。すなわち下図のような異なる接空間でのベクトル場での変化率を表している。

$$(\mathcal{L}_X S)_x = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left[ \left( (\phi_t)_*^{-1} S \right)_x - S_x \right] = \frac{d}{dt} \left( (\phi_t)_*^{-1} S \right) \Big|_{t=0} \quad (11.43)$$

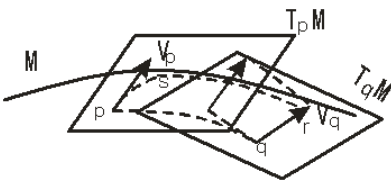


図 11.10: 異なる接空間でのベクトルの比較

この  $\mathcal{L}_X$  は次の性質を持っていることがわかる。

- $\mathcal{L}_X(aS + bS') = a\mathcal{L}_X S + b\mathcal{L}_X S' \quad a, b \in \mathbb{R}$
- $\mathcal{L}_X(S \otimes S') = \mathcal{L}_X S \otimes S' + S \otimes \mathcal{L}_X S'$
- $\mathcal{L}_X$  はテンソルの縮約と可換である。

これから  $S$  が  $(1,1)$  型のテンソルであるとき  $TM$  を自己準同型の場とみなし、 $T_x \otimes T_x^*$  を  $T_x$  の線形変換とみなすとトレースをとることができる。よって

$$S = \sum S_j^i \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j \quad (11.44)$$

これから

$$tr S = \sum S_i^i \quad (11.45)$$

を得る。これを縮約 (**contraction**) と呼ぶ。  
変換後の  $S$  が自己準同型であれば右不変となり

$$(\tilde{\phi} S) = \psi_* \circ S \circ \psi_*^{-1} \quad (11.46)$$

であることから、式 11.43 のようなテンソル場の変換  $\tilde{\phi}$  が  $S$  に作用した時、

$$\begin{aligned} tr(\tilde{\phi} S) &= \psi_* \circ S \circ \psi_*^{-1} \\ &= \psi_*^{-1} \psi_* (tr S) \\ &= \tilde{\phi} (tr S) \end{aligned}$$

となりトレースをとる順序は前後できる。縮約は  $\phi_t$  と可換であり、その極限として Lie 演算子  $\mathcal{L}_X$  とも可換になる。

## 11.8 SO 群 [11]

前節で  $SO$  群をみたが、ここでは 2 次元実正方行列全体を  $Mat_2(\mathbb{R})$  で表す。  $A \in Mat_2(\mathbb{R})$  が

$$A^t = A^{-1}$$

$$\det A = 1$$

であれば 2 次特殊直交行列  $SO_2$  という。

### 11.8.1 $S^1$

平面  $\mathbb{R}^2$  において次を単位円という。

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

単位円  $S_1$  と  $SO_2$  は次の写像で同一視ができる。

$$S_1 \ni (x, y) \rightarrow \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \in SO_2$$



例えば

$$t \rightarrow (\cos t, \sin t) \tag{11.47}$$

として、実数  $t$  は  $S^1$  上の点に対応する。これが一意ではなく、 $2n\pi$  を加えても同じであることは明らかであろう。

これをグループ化し、 $[t]$  とかく、別の実数  $s$  を対応してもグループ  $[s]$  ができる。1 対 1 にするために次のような商集合をつくる。

$$\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} = \{[t] | t \in \mathbb{R}\}$$

これにより写像 11.47 は 1 対 1 の対応が付き、引き戻しができるようになる。

$$[t + s] = [t] + [s]$$

つまり  $S^1$  は連続的な群構造が入る。

### 11.8.2 $S^2$

一方で  $S^2 \in \mathbb{R}^3$  は状況が異なる。3次元空間  $\mathbb{R}^3$  内で原点を中心とし、半径が 1 の球を単位球面と呼び、

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

とする。これは次の図のように経度  $u$ 、緯度  $v$  を用いて表すことができる。

しかし、連続的な群構造は入らない。

$S^1$  では接ベクトルの平行移動が定義できるが  $S^2$  では閉じた経路上の平行移動は 1 周しても同じにならない。

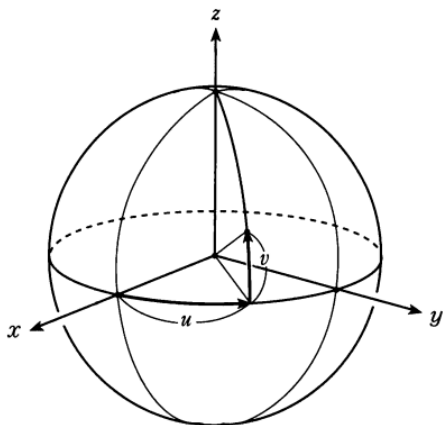


図 11.11: [11] より：球面の局所座標  $u, v$

次のように局所座標を入れる

$$\phi : \mathbb{R}^2 \ni (u, v) \rightarrow (\cos v \cos u, \cos v \sin u, \sin v) \in S^2 \tag{11.48}$$

ただし、

$$-\pi < u < \pi, \quad -\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2} \tag{11.49}$$

に制限する。

この時  $S^2$  の点  $p(a, b, c)$  における接平面  $T_p S^2$  は

$$T_p S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | ax + by + cz = 0\} \tag{11.50}$$

となり、これは  $p$  ベクトルと直交するベクトルの全体である。

## 11.9 交換積

多様体  $M$  上微分可能な関数の集合  $F$  と接ベクトル場  $V$  考え、

$$X, Y \in V(M) \quad f \in F(M)$$

として括弧積  $[X, Y] \in V$  を次で定義する。

$$[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$$

これは次のヤコビ恒等式 (Jacobi identity) を満足する。

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0 \quad (11.51)$$

また  $n$  次元多様体  $M$  上接ベクトルを

$$X = \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad Y = \sum_{i=1}^n \eta^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (11.52)$$

とおくと

$$[X, Y] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( \xi^j \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} - \eta^j \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (11.53)$$

であり、 $g, f \in F$  とすると

$$[fX, gY]f = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X \quad (11.54)$$

が成り立つ。

## 11.10 簡単な例

### 11.10.1 並進

並進移動を

$$L_a : x \rightarrow x + a$$

で定義すると左不変ベクトル場は

$$X = \frac{\partial}{\partial x}$$

で表される。これは  $a$  が定数だから

$$L_{a*}X|_x = \frac{\partial(a+x)}{\partial x} \frac{\partial}{\partial(a+x)} = \frac{\partial}{\partial(x+a)} = X|_{x+a}$$

でありこれは  $\mathbb{R}$  上のただひとつの左不変ベクトル場である。

### 11.10.2 回転

また、 $SO(2) = \{R(\theta) = e^{i\theta} | 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$  とすると

$$L_\delta : \theta \rightarrow e^{i\delta} e^{i\theta} = R(\theta + \delta)$$

とし、ベクトル場を

$$X = \frac{\partial}{\partial \theta}$$

とすると、

$$L_{\delta*} X|_\theta = \frac{\partial e^{i(\theta+\delta)}}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial e^{i(\theta+\delta)}} = \frac{\partial}{\partial(\theta + \delta)} = X|_{\theta+\delta}$$

### 11.10.3 $GL(n, \mathbb{R}), SL(n, \mathbb{R})$

$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$  を  $GL(n, \mathbb{R})$  の Lie 環とし、曲線  $c$  を  $c(0) = I$  として、次のように定義する。

$$c : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$$

この曲線は  $s = 0$  の近くで

$$c(s) = I + sA + O(s^2) \tag{11.55}$$

と、展開できる。ただし、 $I, A$  は  $n \times n$  の行列である。

明らかに

$$\dim \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) = n^2 = \dim GL(n, \mathbb{R})$$

また、単位元  $I$  での接ベクトルは

$$\left. \frac{dc(s)}{ds} \right|_{s=0} = A$$

式 11.55 から  $\dim \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) = n^2$  である。

さらに  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$  の場合は

$$\det c(s) = 1 + s \cdot \text{tr} A = 1$$

が加わる。これは

$$\text{tr} A = 0$$

であることなので

$$\dim \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = n^2 - 1$$

である。

### 11.10.4 $SO(n, \mathbb{R}), GL(n, \mathbb{C}), SU(n)$

次に単位元  $I$  を通る  $SO(n)$  の曲線を改めて、

$$c(s) = I + sA + O(s^2) \tag{11.56}$$

この時、直交性から

$$c(s)^t c(s) = I$$

だから、両辺を微分し、

$$c'(s)^t c(s) + c(s)^t c'(s) = 0$$

これに式 11.56 を代入すると

$$A^t + A = 0$$

これから  $\mathfrak{so}(n)$  は歪対称性を持つ行列の集合であることがわかる。これから

$$\dim \mathfrak{so}(n) = n(n-1)/2$$

である。同じように  $GL(n, \mathbb{C})$  についても

$$\dim \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) = 2n^2$$

であるから

$$\dim \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) = 2(n^2 - 1)$$

であり、 $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$  の対角和は 0 である。

さらに  $U(n)$  上で

$$c(s) = I + sA + O(s^2)$$

を考えると、先と同様に、直交性から

$$c(s)^\dagger c(s) = I$$

よって

$$c'(s)^\dagger c(s) + c(s)^\dagger c'(s) = 0$$

原点付近では  $s = 0$  として、式 11.56 を代入すると

$$A^\dagger + A = 0$$

よって  $\mathfrak{u}(n)$  は歪 Hermite 行列の集合で

$$\dim \mathfrak{u}(n) = n^2$$

さらに  $SU(n)$  では

$$\mathfrak{su}(n) = \mathfrak{u}(n) \cap \mathfrak{sl}(n)$$

だから

$$\dim \mathfrak{su}(n) = n^2 - 1$$

である。

### 11.10.5 1 形式

次に  $\omega$  が 1 次微分形式のときの  $\mathcal{L}_X \omega$  を求める。 $\omega(Y) = \text{tr}(Y \otimes \omega)$  だったから関数の時と同様に

$$\begin{aligned} X(\omega(Y)) &= \mathcal{L}_x (\text{tr}(Y \otimes \omega)) \\ &= \text{tr}(L_X(Y \otimes \omega)) \\ &= \text{tr}(L_X Y \otimes \omega + Y \otimes L_X \omega) \\ &= \omega([X, Y]) + (L_X \omega)(Y) \end{aligned}$$

これから

$$(\mathcal{L}_X \omega)(Y) = X(\omega(Y)) - \omega([X, Y])$$

となるが第 2 部の微分形式から一般に

$$d\omega(X, Y) = \frac{1}{2} \{X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y])\} \quad (11.57)$$

が成り立つから、

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_X \omega)(Y) &= 2d\omega(X, Y) + Y(\omega(X)) \\ &= (i_X d\omega + i_X d\omega)(Y) + i_X d\omega Y \\ &= (i_X d\omega + d i_X \omega)(Y) \end{aligned}$$

が成り立つので式 5.11 から

$$\mathcal{L}_X \omega = i_X d\omega + d i_X \omega \quad (11.58)$$

と表すことができる。これはあらゆる微分形式においても成り立つ。関数  $f$  に対しては

$$i_X f = 0$$

だったから 11.58 から式 5.13 から

$$L_X f = i_X df = Xf = \sum \xi^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \quad (11.59)$$

となりこれは 0 形式である。

これから任意の微分形式が関数と 1 次微分形式から生成される。この作用素として

$$\mathcal{L}_X \quad (11.60)$$

$$i_X d + d i_X \quad (11.61)$$

は共に次のように微分則を満たす。

$$\mathcal{L}_X(\omega' \wedge \omega) = \mathcal{L}_X \omega' \wedge \omega + \omega' \wedge \mathcal{L}_X \omega \quad (11.62)$$

$$(i_X d + d i_X)(\omega' \wedge \omega) = (i_X d + d i_X)\omega' \wedge \omega + \omega' \wedge (i_X d + d i_X)\omega \quad (11.63)$$

さらにベクトル場  $X, Y$  として次が成り立つ。

$$\mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X = \mathcal{L}_{[X, Y]} \quad (11.64)$$

$$\mathcal{L}_X i_Y - i_Y \mathcal{L}_X = \mathcal{L}_{[X, Y]} \quad (11.65)$$

$$i_X d + d i_X = \mathcal{L}_X \quad (11.66)$$

### 11.10.6 直交ローレンツ群

$n, k$  は正の整数として  $\mathbb{R}^{n+k}$  を考える。対称的な双線形形式を  $[\cdot, \cdot]$  で次のように表す。  
(交換関係ではないので注意する)

$$[x, y]_{n, k} = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n - x_{n+1} y_{n+1} - \cdots - x_{n+k} y_{n+k}$$

これから  $(n+k) \times (n+k)$  の実行列  $A$  ができてこれらは一般直交群  $\mathcal{O}(n; k)$  で表す。これは一般線形群の部分群である。

$$\mathcal{O}(n; k) \subset GL(n+k, \mathbb{R})$$

物理では特にローレンツ群と呼ぶ。行列式を1とすれば今後頻出する特殊直交群  $SO(n; k)$  である。ここで  $A^{(j)}$  を  $A_{n+k}$  成分に持つ  $j$  列ベクトルを次のように定義しよう。

$$A^{(j)} \equiv A \cdot e_j = \begin{pmatrix} A_{1,j} \\ \vdots \\ A_{n+k,j} \end{pmatrix}$$

直交群に属するという事は

$$[Ae_j, Ae_l] = [e_j, e_l]$$

の時である。もし、 $A \in \mathcal{O}(n; k)$  であれば次の関係が成り立つ。

$$\begin{cases} [A^{(j)}, A^{(l)}]_{n,k} = 0 & j \neq l \\ [A^{(j)}, A^{(l)}]_{n,k} = 0 & 1 \leq j \leq n \\ [A^{(j)}, A^{(l)}]_{n,k} = -1 & n+1 \leq j \leq n+k \end{cases}$$

これを  $(n+k) \times (n+k)$  の対角行列で表すと

$$g = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & -1 \\ 0 & & & & & & & & & & & \end{pmatrix}$$

であれば  $(j, n+k)(n+k, n+k)(n+k, j) = (j, j)$

$$A^T g A = g$$

$$\det(A^T) \det(g) \det(A) = \det(I)$$

よって

$$(\det A)^2 = I$$

## 11.11 Symplectic Groups

次に  $k = n$  の場合を考えよう。これはシンプレクティック群という。双線形空間  $B \in \mathbb{R}^{2n}$  上に  $Sp(n; \mathbb{R})$  で表される。

$$\omega(x, y) \equiv [Ae_j, Ae_j] = \sum_{j=1}^n (x_j y_{n+1} - x_{n+j} y_j)$$

であり、 $2n \times 2n$  の次の行列  $\Omega$  を定義すると

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

次の内積表現で表すことができる。

$$\omega(x, y) = \langle x, \Omega y \rangle$$

$A \in Sp(n; \mathbb{R})$  の時、

$$\Omega A(x, y) = -A(y, x)$$

$$\Omega A^T \Omega A = -I$$

だから、次の関係がある。

$$-\Omega A^T \Omega = A^{-1}$$

また、

$$\det(A) = \pm 1$$

であるが、 $\det(A) = -1$  をとる場合は  $Sp(n; \mathbb{C})$  に拡張する。この時  $z, w \in \mathbb{C}$  として

$$\omega(z, w) = \langle z, \Omega w \rangle$$

が成り立つ。また、 $\det(A) = 1$  であればユニタリ群  $U(2n)$  にもなるので

$$Sp(n) = Sp(n; \mathbb{C}) \cap U(2n)$$

であり、これをコンパクトシンプレクティック群 (compact symplectic group) という

## 12 球面の基本

### 12.1 球面上の計量 [11]

前節で Lie 群を中心に見てきたが、ここで多様体上の動力学につなげてみよう。従ってこの接では  $SO_3$  が中心的な背景になる。

#### 12.1.1 歪対称性原理

各接空間をどう接続していくかと、接空間にどう内部構造を持たせるかは関係している。

$SO_3$  の単位行列を  $I$  とすると接空間  $T_I SO_3$  は一環になり、第 4 部でみたように結合率律、左右での分配律を満たす。

ここで実係数の 3 次正方行列を一般に  $Mat_3(\mathbb{R})$  として、これを 9 次元ユークリッド空間  $\mathbb{R}^9$  と同一視しよう。

接空間  $T_A SO_3$  は点  $A$  で  $SO_3$  に接したベクトル部分空間と見なすことができる。 $SO_3$  は  $\mathbb{R}^9$  内の滑らかな 3 次元多様体になる。

よって、 $T_A SO_3$  の内部構造は  $\mathbb{R}^9$  のユークリッド内積を  $T_A SO_3$  に制限したものになる。 $A \in Mat_3(\mathbb{R})$  として、

$$[A]^t = A^{-1} \tag{12.1}$$

が成り立てば 3 次直交行列になる。さらに行列式が 1 であれば 3 次特殊直交行列という。

まず、単位元  $I$  における  $SO_3$  の接空間を調べよう。

$$X \in T_I SO_3$$

とする。これは直線  $s \rightarrow I + sX$  が点  $s = 0$  で  $SO_3$  に接していることを表す。

$$A : s \rightarrow I + sX$$

が 3 次特殊直交行列であれば、式 12.1 が成り立つから  $s \rightarrow 0$  で  
 転置行列との積は  $s$  の 1 次の項が消えることである。

$$[I + sX]^t [I + sX] |_{s=0} = I + [X]^t X s^2$$

$s$  の 2 次の速さでは十分に 0 になるとすれば式 12.1 が満足される。  
 これは次を展開したとき、

$$[I + sX]^t [I + sX] = I + ([X]^t + X) s + [X]^t X s^2$$

となるが歪対称性

$$[X]^t = -X \tag{12.2}$$

があると

$$[I + sX]^t [I + sX] = I + [X]^t X s^2$$

を満たす。つまり、 $T_I SO_3$  は歪対称性全体と一致している。これを歪対称性原理という。

$$T_I SO_3 = \{ X \in Mat_3(\mathbb{R}) \mid [X]^t = -X \}$$

例えば、リー環は  $\mathfrak{so}_3$  で表し、その基底を

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{12.3}$$

として、 $A \in SO_3, X, Y \in \mathfrak{so}_3$  のとき、ベクトルについて次が成り立つ。

$$Vect : AXA^{-1} \in \mathfrak{so}_3$$

$$Vect : XY - YX \in \mathfrak{so}_3$$

つまり、球面とは限らない  $SO_3$  の曲面に接ベクトル  $T_I SO_3$  に左演算子  $L_A$  によって次の図のように  $T_A SO_3$  に移す。

下図で注意すべきは接空間が平面のようになっているが、これは線形 3 次元の空間で  $X_1 \perp X_2 \perp X_3$  を満たしている。

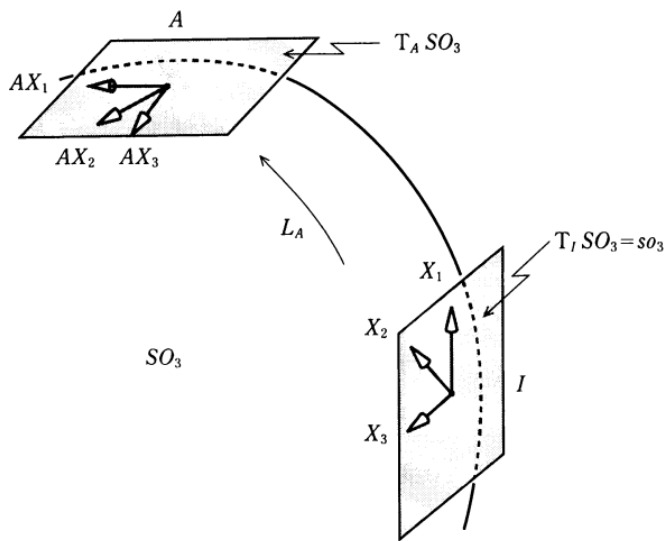


図 12.1: [11] より:接空間  $T_A SO_3$  は平面のように見えるが 3 次元の線形空間である。  
 3 次元球面から  $SO_3$  へは式 11.49 から 2 対 1 の写像が存在する。



括弧積で書くと

$$[X, Y] \in \mathfrak{so}_3$$

も独立したベクトルになる。従って 3 次元空間であれば

$$X_3 = [X_1, X_2]$$

が成り立つ。

### 12.1.2 左移動と右移動

ここまで単位元  $I$  での接空間を考えたが、一般に  $A \in SO_3$  での接空間を次に考えよう。  
先と同様にして、 $[A]^t = A^{-1}$  が成り立っているから

$$[X]^t A + [A]^t X = A[X]^t + A[A]^t = 0$$

だから

$$\begin{aligned} T_A SO_3 &= \{X \in Mat_3(\mathbb{R}) \mid [X]^t A = -A^{-1} X\} \\ &= \{X \in Mat_3(\mathbb{R}) \mid A[X]^t = -X A^{-1}\} \end{aligned}$$

となる。ここで左移動、右移動の作用素を  $L_A, R_A$  とおく。、 $A, B \in Mat_3(\mathbb{R})$  とすると

$$L_A = AB, R_A = BA$$

となる。実際に  $A \in SO_3$  の時、左移動  $L_A$  は  $SO_3$  の元を  $SO_3$  に移す。この  $L_A$  の逆像が  $L_{A^{-1}}$  となる。  
このような作用素を考えることで動的に現象を捉えて、記述できるメリットがある。  
 $L_A$  を  $SO_3$  に制限したものは  $SO_3$  からそれ自身への 1 対 1 の写像である。  
 $B \in SO_3$  での  $SO_3$  での接ベクトルを  $X$  とする。この接ベクトル  $X$  に  $L_A$  を施すと

$$L_A X = AX$$

となり、これは点

$$L_A B = AB$$

で  $SO_3$  に接する。

これから  $L_A$  は接空間について

$$L_A : T_B SO_3 \rightarrow T_{AB} SO_3$$

に移すことをしている。逆像は

$$L_A^{-1} : T_{AB} SO_3 \rightarrow T_B SO_3$$

特にさきの単位元  $I$  の場合は  $B = I$  の時、

$$\begin{aligned} T_A SO_3 &= L_A(T_I SO_3) \\ &= \{AX \in Mat_3(\mathbb{R}) \mid X \in \mathfrak{so}_3\} \\ &= \{X \in Mat_3(\mathbb{R}) \mid A^{-1} X \in \mathfrak{so}_3\} \end{aligned}$$

となる。右移動  $R_A$  についても同様に単位行列  $I$  での接ベクトルを接空間  $T_A SO_3$  まで右移動したものは

$$\begin{aligned} T_A SO_3 &= R_A(T_I SO_3) \\ &= \{XA \in Mat_3(\mathbb{R}) \mid X \in \mathfrak{so}_3\} \\ &= \{X \in Mat_3(\mathbb{R}) \mid X A^{-1} \in \mathfrak{so}_3\} \end{aligned}$$

となる。例えば接ベクトル  $X \in T_A SO_3$  に対し、これを単位行列  $I$  まで右移動したものは

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

とおくと  $XA^{-1} \in T_A SO_3 = \mathfrak{so}_3$  は  $(3,1)(1,3)$  型になるので式 12.1 から

$$XA^{-1} = XA^t = \begin{pmatrix} \langle x_1, v_1 \rangle & \langle x_1, v_2 \rangle & \langle x_1, v_3 \rangle \\ \langle x_2, v_1 \rangle & \langle x_2, v_2 \rangle & \langle x_2, v_3 \rangle \\ \langle x_3, v_1 \rangle & \langle x_3, v_2 \rangle & \langle x_3, v_3 \rangle \end{pmatrix} \quad (12.4)$$

になる。これが  $\mathfrak{so}_3$  であるためには式 12.2

$$\langle x_i, v_j \rangle + \langle x_j, v_i \rangle = 0$$

の歪対称性が成り立つ。

### 12.1.3 随伴表現

次に  $A \in SO_3$  を固定したとき、前節の  $L_A, R_A$  はともにリー環  $\mathfrak{so}_3 = T_1 SO_3$  のベクトル空間を接空間  $T_A SO_3$  のベクトルに写す。

しかし、 $X \in \mathfrak{so}_3$  に対し、その像は左、右移動とともに正方行列であれば像が

$$L_A X = AX$$

$$R_A X = XA$$

となるが、これは一致するとは限らない。

そこで次の写像を定義する。

$$Ad_A : \mathfrak{so}_3 \rightarrow \mathfrak{so}_3$$

として

$$Ad_A X = (R_A)^{-1} L_A X = AXA^{-1} \quad (12.5)$$

と定義したものを随伴表現という。  $A$  と  $X$  が可換であればこれは恒等写像になる。

左移動の次に右移動の逆を作用させると  $A$  と  $A^{-1}$  ではさむことになる。

この表現は乗法で閉じるので環をつくる。例えば、リー環は  $\mathfrak{so}_3$  の基底と  $A$  を

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix} \quad (12.6)$$

とすると

$$Ad_A X_1 = X_1$$

となるが、

$$Ad_A X_2 = \cos t X_2 + \sin t X_3$$

$$Ad_A X_3 = -\sin t X_2 + \cos t X_3$$

が成り立ち、一般に  $A, B \in SO_3$  ならば、

$$Ad_A Ad_B = Ad_{AB}$$

が成り立つ。また、随伴表現は  $\mathfrak{so}_3$  の内積を不変にする。

### 12.1.4 リーマン計量

内積を保存するような構造は物理学にとっては重要で、先の随伴、また、リーマン計量もその1つである。ただし、曲面の場合はどの点で内積をとるかで値が異なるので、移動の概念が必要になる。

行列のトレース  $tr$  を使って接空間に内積を定義する。これにより、前節の左右移動との関係が明らかになる。

はじめに  $T_I SO_3 = \mathfrak{so}_3$  の場合を考えよう。

まず2つの行列  $X, Y$  を

$$X = \begin{pmatrix} 0 & x_3 & x_2 \\ -x_3 & 0 & x_1 \\ -x_2 & -x_1 & 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 & y_3 & y_2 \\ -y_3 & 0 & y_1 \\ -y_2 & -y_1 & 0 \end{pmatrix}$$

とし、その内積を

$$\begin{aligned} \langle X, Y \rangle_I &= x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \\ &= \frac{1}{2} tr(X[Y]^t) \\ &= -\frac{1}{2} tr(XY) \end{aligned}$$

とおく。これは  $\mathfrak{so}_3$  の基底  $X_1, X_2, X_3$  を正規直交基底とする内積構造になる。

次に単位元から離れた、 $A$  での接空間  $T_A SO_3$  の内積  $\langle \rangle_A$  を考えよう。  $X, Y \in T_A SO_3$  として、

$$\langle X, Y \rangle_A = \frac{1}{2} tr(X[Y]^t) = -\frac{1}{2} tr(XY) \quad (12.7)$$

とすればこれが、内部構造を表すはずである。

前節の左右移動演算子をもってきて、 $B \in SO_3$  とすると

$$L_B X, L_B Y \in T_{BA} SO_3$$

となり、

$$R_B X, R_B Y \in T_{AB} SO_3$$

となる。これから

$$\langle L_B X, L_B Y \rangle_{BA} = \langle X, Y \rangle_A = \langle R_B X, R_B Y \rangle_{AB} \quad (12.8)$$

という重要な関係が得られる。つまり

$$\langle L_B X, L_B Y \rangle_{BA} = \frac{1}{2} tr(BX[BY]^t) = \frac{1}{2} tr(BX[Y]^t B^{-1})$$

となるが  $tr(WZ) = tr(ZW)$  だから

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} tr(BX[Y]^t B^{-1}) &= \frac{1}{2} tr(B^{-1}BX[Y]^t) \\ &= \frac{1}{2} tr(X[Y]^t) \\ &= \langle X, Y \rangle_A \end{aligned}$$

同様に右移動についても

$$\begin{aligned} \langle R_B X, R_B Y \rangle_{BA} &= \frac{1}{2} tr(XB[YB]^t) = \frac{1}{2} tr(XB[Y]^t B^{-1}) \\ &= \frac{1}{2} tr(XBB^{-1}[Y]^t) \\ &= \langle X, Y \rangle_A \end{aligned}$$

となる。

また、重要なのは各接空間の内積は非退化になることである。

つまり、 $X \in T_A SO_3$  が

$$\langle X, Y \rangle_A = 0, (\forall Y \in T_A SO_3)$$

ならば  $X = 0$  である。

例えば各  $A \in SO_3$  での内積を式 12.7 で定義したので  $SO_3$  が  $Mat_3(\mathbb{R}) \sim \mathbb{R}^9$  の中にあることを考えると

$$\langle X, Y \rangle^{\mathbb{R}^9} = \sum_j^3 \sum_i^3 x_{ij} y_{ij} = tr(X [Y]^t)$$

となる。従って  $\langle X, Y \rangle_A$  は  $T_A SO_3$  という接平面に制限されることで  $1/2$  倍になっている。

これは通常の内積が平面への射影として得られるので表裏の内の 1 つをとっていることになる。

各内積は

$$\langle X, Y \rangle_A = \langle Y, X \rangle_A$$

となり、対称性を持つ。各点での接空間が定義された曲面、 $SO_3$  のように次々に決まっていくのではなく、一斉に非退化で対称な内積が定義された場合、これをリーマン構造とよび、この内積をリーマン計量という。先にみたようにリーマン計量は左右の両側不変である。

### 12.1.5 不変ベクトル場

前節式 11.20 で Lie 環とは乗法についても閉じていて、Lie 括弧積を左不変に保つベクトル場の集合であることを見た。

さらに、左右移動  $L_A, R_A$  は  $Mat_3(\mathbb{R})$  上で考えれば線形写像である。これは微分にたいしても不変である。

$$dL_A = L_A, dR_A = R_A$$

よって接ベクトル  $X \in T_B SO_3$  の像は次のように表現できる。

$$dL_A(X) = L_A X = AX$$

$$dR_A(X) = R_A X = XA$$

左右の移動は正方行列でなくても作用する。リー環のベクトル  $X \in \mathfrak{so}_3$  に対して左右作用素を

$$\xi_X(A) = AX, \eta_X(A) = XA \tag{12.9}$$

で定義する。この  $\xi_X, \eta_X$  は次のように左移動、右移動に対して不変になる。

$$\begin{aligned} (L_B(\xi_X))(A) &= L_B(\xi_X(L_B^{-1}A)) \\ &= L_B((L_B^{-1}A)X) \\ &= L_B(B^{-1}AX) \\ &= AX \\ &= \xi_X(A) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (R_B(\eta_X))(A) &= R_B(\eta_X(R_B^{-1}A)) \\ &= R_B(X(R_B^{-1}A)) \\ &= R_B(XAB^{-1}) \\ &= XA \\ &= \eta_X(A) \end{aligned}$$

このようなベクトル場を不変ベクトル場という。

### 12.1.6 指数写像

指数関数は行列を引数にとっても、次のテーラー展開が成り立つ。

$$e^X = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} X^n \quad (12.10)$$

ここでは  $X, Y$  行列なので  $[X, Y] = 0$  の時のみ

$$e^{X+Y} = e^X e^Y$$

が成り立つ。また、 $e^X$  は直交行列で  $[X]^t = -X$  であれば、

$$(e^X)^{-1} = e^{-X} = e^{[X]^t} = [e^X]^t$$

が成り立つ。

また、便利な性質として

$$\det [e^X] = 1$$

となるが  $t$  は連続で  $t \in [0, 1]$  であれば  $t = 0$  で

$$e^{tX} = I$$

$$\det (e^{tX}) \equiv 1$$

となるので

$$e^X \in SO_3$$

である。これから写像

$$X \in \mathfrak{so}_3 \rightarrow e^X \in SO_3$$

がリー環  $\mathfrak{so}_3$  から  $SO_3$  への写像になる。

テーラー展開式 12.10 から

$$e^X = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} X^n$$

$$\sin t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n+1}$$

$$\cos t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} t^{2n}$$

を用いると、式 12.6 の行列の歪対称性が、虚数単位のような役割をして次のように三角関数が現れるのはおもしろい。

$$e^{tX_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix}, e^{tX_2} = \begin{pmatrix} \cos t & 0 & \sin t \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin t & 0 & \cos t \end{pmatrix}, e^{tX_3} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (12.11)$$

これらは環では乗法でも群を作ったので  $\mathfrak{so}_3$  での基底とみなせる。

ここで指数写像の微分では便利な次の関係を示しておこう。

$$\frac{d}{dt} e^{tX} = X e^{tX} = e^{tX} X \quad (12.12)$$

無限級数を使うところが面白い。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^{tX} &= \frac{d}{dt} \sum \frac{(tX)^n}{n!} = \sum \frac{d}{dt} \frac{(tX)^n}{n!} \\ &= \sum n t^{n-1} \frac{X^n}{n!} = X \sum \frac{(tX)^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= X e^{tX} = e^{tX} X \end{aligned}$$

これから次を  $t$  で微分すると式 12.9 より、

$$\xi_X(A) = AX, \eta_X(A) = XA$$

だったから

$$\begin{aligned} L_{e^{tX_j}}(A) &= e^{tX_j} A \\ \frac{d}{dt} (e^{tX_j} A) &= X_j e^{tX_j} A = \eta_{X_j}(e^{tX_j} A) \end{aligned}$$

のように右不変ベクトルの作用に等しい。円運動の微分は角速度  $\omega$  の積になったように左移動の族  $\{L_{e^{tX_j}}\}_t$  は右不変ベクトル場  $\eta_{X_j}$  が生成する流れ (flow) であり、右移動の族  $\{R_{e^{tX_j}}\}_t$  は右不変ベクトル場  $\xi_{X_j}$  が生成する流れ (flow) である。

式 5.7 からリー括弧積は次の Lie 微分で定義された。

$$\mathcal{L}_{\xi_X} \xi_Y = [\xi_X, \xi_Y]$$

これは不変ベクトルの微分を用いて

$$\frac{d}{dt} (R_{e^{-tX}}) \xi_Y |_{t=0}$$

とかける。また、先の随伴表現の式 12.5 から

$$(R_{e^{-tX}}) \xi_Y = \xi_{Ad_{e^{-tX}} Y}$$

である。  $Ad_{e^{-tX}} Y$  は式 12.5 から次のように展開できる。

$$\begin{aligned} Ad_{e^{-tX}} Y &\simeq (I + tX + \mathcal{O}(t^2)) Y (I - tX + \mathcal{O}(t^2)) \\ &= Y + t[X, Y] + \mathcal{O}(t^2) + \end{aligned}$$

となるのでこれを  $t$  で微分したものが括弧積  $[X, Y]$  に等しいことがわかる。

例えば式 12.11 から

$$Ad_{e^{tX_1}} X_2 = (\cos t) X_2 + (\sin t) X_3 \tag{12.13}$$

となる。この時、次が成り立つ。

$$\frac{d}{dt} X(t) = [X_1, X(t)]$$

随伴表現のパラメタに関する傾きが括弧積になることは物理にとっても重要な示唆を与える。

括弧積から物体の運動方程式を導くことができる。

また、行列の指数写像は必ず収束する。これは重要な内容なので簡単に示すと各成分は最大正值  $m$  であるとして、  $X^n$  の成分を  $x_{n;i,j}$  で表すと

$$x_{n;i,j} = \sum x_{i i_1} x_{i_1 i_2} \cdots x_{i_{n-1} j}$$

となるが各  $i$  は 1 から 3 までであるから全部で

$$N = 3^{n-1} m^n$$

通りある。これは  $(3m)^n$  より小さいので  $e^X$  の  $ij$  成分は

$$\left| \sum \frac{1}{n!} x_{n;i,j} \right| < \sum \frac{1}{n!} (3m)^n = e^{3m}$$

となるので収束する。

また、有用な関係として

$$\det e^X = e^{\operatorname{tr} X} \quad (12.14)$$

が成り立つ。これは

$$\det (I + tX + \mathcal{O}(t^2)) = 1 + \operatorname{tr}(X)t + \mathcal{O}(t^2)$$

$$\det X = \operatorname{tr}(X)$$

とかけるので

$$\frac{d}{dt} (\det e^{tX}) = \det (Xe^{tX}) = \operatorname{tr}(X) \det (e^{tX})$$

これを微分方程式とみなせば  $Y = \det e^{tX}$  として

$$\frac{d}{dt} Y = \operatorname{tr}(X) \cdot Y$$

となっているので

$$\det e^{tX} = e^{(\operatorname{tr} X)t}$$

となる。  $t \rightarrow 1$  とすると式 12.14 になる。

$$\det e^X = e^{\operatorname{tr} X}$$

### 12.1.7 局所座標

実平面から  $SO_3$  へマッピングには指数写像を用いれば簡単であることが前節からわかった。つまり、 $\mathbb{R}^3 \rightarrow SO_3$  への次の写像を考えよう。

$$\mathbb{R}^3 \ni (u, v, w) \rightarrow e^{wX_1} e^{vX_2} e^{-uX_3} \in SO_3$$

これに次の制限を加えて 1 対 1 写像にする。

$$-\pi < u, w < \pi, \quad -\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2} \quad (12.15)$$

これは部分的な開集合  $U$  を決めたことになり、局所座標系を与えたことにもなる。

さて、局所座標とは何かと言われると、外部から見る事ができる座標系であるということになる。

これは例えば  $Mat_3(\mathbb{R})$  の 9 次元の中の 3 次元座標を下図のように閉じた空間で作ることになる。

式 12.15 のように角度を限定すると簡単にみえるが、この空間内に無限の数が存在できる。

具体的にはこれがオイラー角と呼ばれるものである。第 2 部ではオイラー回転をあつかったが、それとは異なる。

一般には

1.  $(x, y, z)$  を  $z$  軸まわりに角度  $\alpha$  回転させ、 $(x', y', z')$  とする。
2.  $(x', y', z')$  を  $x'$  軸まわりに角度  $\beta$  回転させ、 $(x'', y'', z'')$  とする。

3.  $(x'', y'', z'')$  を  $z''$  軸まわりに角度  $\gamma$  回転させれば  $(X, Y, Z)$  ができる。

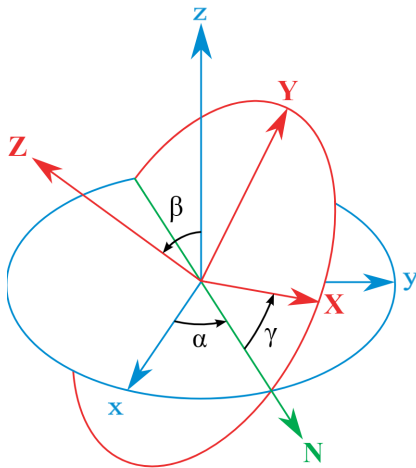


図 12.2: オイラー角

これを下図のように単位球面上のベクトルを角度に対応させる。

ここで3つの行ベクトル  $f_1, f_2, f_3$  を縦に並べて次の行列をつくる。

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos v \cos u & \cos v \sin u & \sin v \\ -\sin u & \cos u & 0 \\ -\sin v \cos u & -\sin v \sin u & \cos v \end{pmatrix} \quad (12.16)$$

$f_1$  は 11.48 である。

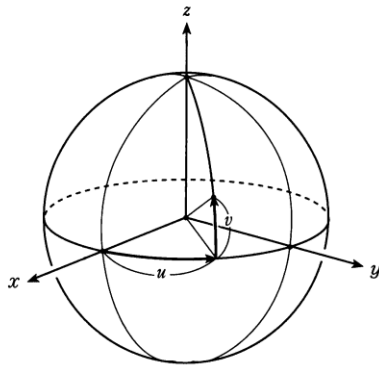


図 12.3: [11] より：球面の局所座標  $u, v$

つまり、この行列球面ののほとんど全体を覆う。

$$e^{wX_1} e^{vX_2} e^{-uX_3} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \cos w f_2 - \sin w f_3 \\ \sin w f_2 + \cos w f_3 \end{pmatrix} \quad (12.17)$$

が導ける。

限定された領域を  $(u, v, w)$  が動いたら直交行列全体は  $SO_3$  のほとんど全体を埋める。

任意の  $A$  を中心とした局所座標はこれを作用させて

$$e^{wX_1} e^{vX_2} e^{-uX_3} A$$



と書ける。よって、左右移動をつかえば移動したところでも局所座標をつくることができる。  
 実空間からリー環への写像を中心に見てきたが、リー環からリー群への写像も考えることができ、これは局所座標を構成する時に用いられる。次のような局所座標はケーリーパラメーターとして知られている。

$$\phi : \mathfrak{so}_3 \rightarrow SO_3$$

となるものとして  $X \in \mathfrak{so}_3$  の時に

$$\phi(X) = (1 + X)(1 - X)^{-1}$$

とおくと  $\phi(X)$  は局所座標になる。

この時

$$|1 - X| \neq 0$$

でないといけない。この  $\phi(X)$  は第1部でみた領域を限定したメビウス変換である。

$X$  を複素数と対応づけると第1部でみたリーマン球の立体射影に対応する。

リーマン球上の点  $p'(x', y', z')$  とすると

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$$

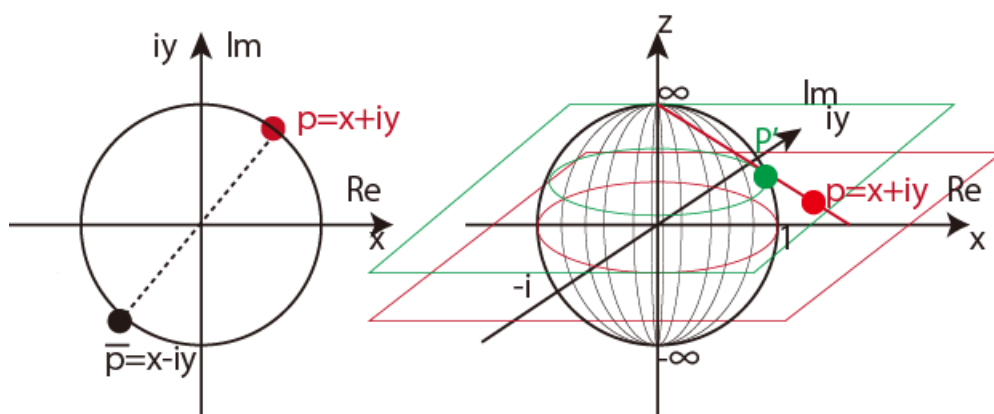


図 12.4: リーマン球

第1部でみたように、 $xy$  の複素平面で

$$p = re^{i\theta} = \cot\left(\frac{\phi}{2}\right) e^{i\theta}$$

とすると、立体射影は

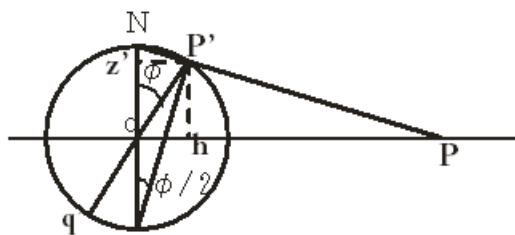


図 12.5:  $p(\phi, \theta)$  において  $\theta = 0$  の断面図

$$p = x + iy = \frac{x' + iy'}{1 - z'}$$

$$|p|^2 = \frac{x'^2 + y'^2}{(1 - z')^2} = \frac{1 - z'^2}{(1 - z')^2} = \frac{1 + z'}{1 - z'}$$

となるのでリーマン球表面の局所座標を表している。

## 12.2 球面上の接続 [11]

例えば我々は地球の表面で暮らしている。車に乗って移動するのは地上からみれば水平移動である。しかし、宇宙から地球上のものを水平に移動しようと思えばその物体は地球を離れていく。その地球外の空間を考えるわけであるが、ファイバー束の導入はここに思考転換がある。物体のある地球上のある点から宇宙空間に鉛直線と、水平線を延ばす。物体を仮想的に垂直上昇させていくといくつもの水平線ができる。この水平線は鉛直軸を回転軸に選び回転もできる。こうして広がった空間座標の中で変化が生じその結果を再び地球上に射影すると現実の物体の地球上での運動が実現するわけである。

### 12.2.1 作用と軌道

はじめに前節で学んだ  $SO_3$  に  $S^1$  束を定義したい。そのための作用を考える。

$SO_2$  の各元  $g$  を

$$g = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}, \quad x^2 + y^2 = 1 \quad (12.18)$$

とする。この時  $\rho_g : SO_3 \rightarrow SO_3$  を次の様に決める。

$$\rho_g(A) = L_{\hat{g}}A = \hat{g}A, \quad \hat{g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -y \\ 0 & y & x \end{pmatrix} \quad (12.19)$$

ただし、 $A$  は 3 次元ベクトルの組を持つ行列であることに注意する。

$$A = \begin{pmatrix} v_{1x} & v_{1y} & v_{1z} \\ v_{2x} & v_{2y} & v_{2z} \\ v_{3x} & v_{3y} & v_{3z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

$\hat{g} \in SO_3, \rho_g(A) \in SO_3$  である。 $(x, y) = (\cos t, \sin t)$  とすれば  $\hat{g}$  は次の指数写像になる。

$$\hat{g} = e^{tX_1} \quad X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

となる。よって

$$\rho_g = L_{e^{tX_1}}$$

である。写像の集まりを  $\{\rho_g | g \in SO_2\}$  とすると

$$\rho_e = id_{SO_3}, \rho_g \circ \rho_h = \rho_{gh}$$

となる。

一般に写像の集まりを  $\{\rho_g : X \rightarrow X | g \in G\}$  が上の条件を満たせば群  $G$  が  $X$  に作用しているという。

ここで  $S^1$  と  $SO_2$  を同一視すると  $\rho$  は  $S^1$  の  $SO_3$  への作用と考えることができる。

つまり、 $A \in SO_3$  を固定して、 $g \in SO_2$  を動かした時に  $SO_3$  内にできる曲線を  $A$  を通る作用  $\rho$  の軌道といい

$$S^1 \cdot A$$

とかく。

各  $A \in SO_3$  に対して  $\rho_g(A) = A$  をみたす  $g \in SO_2$  は単位元  $e$  のみになる。このような作用を自由であるという。

例えば  $\mathbb{R}^3$  上のベクトルを列ベクトルで表し、 $SO_3$  の元  $A$  の 3 つの行ベクトルを上から  $v_1, v_2, v_3$  とおく。 $SO_3$  を  $\mathbb{R}^3$  内で正の向きを持つ正規直交基底全体とする。

$S^1$  の作用  $\rho$  は次のように平面の回転行列を軸ベクトルを設けて、3次元に拡張する作用である。つまり

$$g = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

として、 $A$  は行列であるが、3次元  $v$  ベクトルの縦並びだから作用  $\rho$  は

$$\rho_g(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ (\cos t)v_2 - (\sin t)v_3 \\ (\sin t)v_2 + (\cos t)v_3 \end{pmatrix} \quad (12.20)$$

これは下の図のように  $v_1$  を軸として負方向（時計回り）の回転になる。

これは  $S^2$  の向きとは反対になることに注意する。

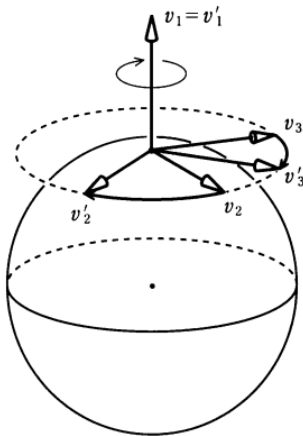


図 12.6: [11] より :  $SO_3$  への  $S^1$  の作用は  $v_1$  軸周りの回転になる。

### 12.2.2 自由な作用

自由ではない作用を考えてみよう。例えば

$$\Phi(a, b, t) = ((\cos t)a - (\sin t)b, (\sin t)a + (\cos t)b)$$

を考えると、これは  $S^1$  の  $\mathbb{R}^2$  への作用であるが自由ではない。なぜなら  $(a, b) \neq (0, 0)$  ならば  $\Phi(a, b, t) = (a, b)$  となるのは

$$t \equiv 0 \pmod{2\pi}$$

となるが、 $(a, b) = (0, 0)$  の時は全ての  $t$  に対して、

$$\Phi(0, 0, t) = (0, 0)$$

となる。

これからベクトル場が生成する 1 パラメタ変換群  $\Phi$  が全ての  $(p, t)$  に対して定義されていれば  $\mathbb{R}$  の作用である。

さらにその全ての軌道が閉じていれば  $S^1$  の作用ということができる。

### 12.2.3 基本ベクトル場

$A \in SO_3$  を固定し、次の曲線

$$\mathbb{R} \ni t \rightarrow c(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix} A \in SO_3 \quad (12.21)$$

を考えるとその像は軌道  $S^1 \cdot A$  であり、その接ベクトルは上図のように  $A$  で  $SO_3$  に接している。つまり、

$$\frac{dc(0)}{dt} = T_A SO_3$$

である。具体的に計算すると

$$\begin{aligned} \frac{dc(0)}{dt} &= \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix} A|_{t=0} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} A \\ &= X_1 A \end{aligned} \quad (12.22)$$

とかける。これは曲線に沿った接ベクトルであり、 $\eta(A)$  である。 $SO_3$  上のどこでもこのベクトルを作ることができるので

$$SO_3 \ni A \rightarrow \eta(A) = X_1 A \in T_A SO_3 \quad (12.23)$$

となるベクトルの全体を基本ベクトル場という。これは前節 12.9 の右不変ベクトル場と一致する。従って、行列  $A, B \in SO_3$  を

$$A = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

と表現すると、この  $A$  と  $B$  が共に  $S^1$  軌道上にあるための必要十分条件は  $v_1 = u_1$  のように軸がそろえばよい。

これから  $SO_3$  上の 1 つ 1 つの  $S^1$  軌道

$$S^1 \cdot A = S^1 \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

と 2 次元単位球面  $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  上の 1 つの点  $v_1(x, y, z)$  と 1 対 1 に対応している。これを  $SO_3$  の  $S^1$  束構造という。この写像を  $\pi_\rho$  として

$$\pi_\rho : A \in SO_3 \rightarrow \pi_\rho(A) = v_1 \in S^2$$

で表し、これを束射影という。つまり、

$$\pi_\rho(A) = (1, 0, 0) \cdot A$$

となるので 3 次正方行列の第 1 行を取り出す写像

$$Mat_3(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^9 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

を  $SO_3$  に制限したものが  $\pi_\rho$  である。よく射影というイメージで表すが、内積をとり、次元を減らす操作が入るので留意する。

この束射影  $\pi_\rho$  の微分について考えてみる。これは曲線に接線を引くことと同じであるので、曲面に接平面をとることと同じになる。

つまり、 $\pi_\rho : SO_3 \rightarrow S^2$  の  $A \in SO_3$  の微分を

$$(d\pi_\rho)_A : T_A SO_3 \rightarrow T_{\pi_\rho(A)} S^2$$

とする。つまり、 $SO_3$  の接平面から、 $S^2$  の接平面への対応になる。この接点も

$$A \rightarrow \pi_\rho(A) = v_1 \tag{12.24}$$

となり、射影してきていることに留意する。

例えば

$$A = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \in T_A SO_3$$

とすると

$$(d\pi_\rho)_A(X) = x_1$$

となる。この時、直線  $t \rightarrow A + tX$  は  $Mat_3(\mathbb{R})$  内で点  $A$  で  $SO_3$  に接してしる。これを  $Mat_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$  で写すと

$$t \rightarrow v_1 + tx_1$$

になり、これは点  $\pi_\rho(A)$  で  $S^2$  に接している。

つまり、式 12.24 は球面  $S^2$  の 1 点  $v_1$  の  $\pi_\rho$  による逆像が

$$A = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

であるともいえる。 $v_2, v_3$  は  $T_{v_1} S^2$  の正規直交基底になっている。

これと式 3.14 のフルネーセレ標構との関係を見ると、

第 1 行ベクトルは接ベクトルを表し、第 2 行は 2 回微分方向を加えることになる。

曲面の場合は第 1 行は、法線方向、第 2,3 行は接平面方向を持った標構といえる。

曲線になると、自由度がなかったが、曲面では同じ曲線でもちょうど 1 周、 $S^1$  の自由度があるということになる。

このように標構全体をとらえることを標構束という。

#### 12.2.4 一般の $S^1$ 束

$SO_3$  への  $S^1$  を作用させてみたが、一般的な集合  $E$  に  $S^1$  を自由に作用し、

軌道が別の集合と 1 対 1 に対応すれば射影発展的のイメージとして  $\pi$  が定義できる。

これを  $E$  の  $S^1$  束構造という。簡単には次のように「輪」と「点」の対応がとれば束がある。

$$E \rightarrow M$$

$$\cup \rightarrow \cup$$

$$orbital \rightarrow 1point$$

この時  $E$  をこの  $S^1$  束の全空間、 $M$  はその底空間と呼ぶ。 $E$  から  $M$  への写像  $\pi$  が束射影になる。

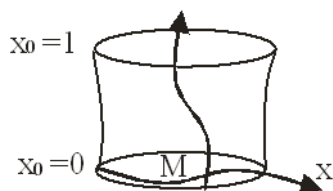


図 12.7: 多様体  $M$  と  $I$  の直積空間

また、各  $S^1$  軌道は  $\pi^{-1}(p)$ , ( $p \in M$ ) をファイバーという。この時の底空間は

$$M = E/S^1$$

とかくことができ、この作用  $\rho_g$  と束射影  $\pi$  との間に

$$\pi \circ \rho_g = \pi$$

を満たす。

これらの空間の関係は  $SO_3$  を  $\pi_\rho$  で射影すると  $SO_3/S^1 \simeq S^2$  になる。つまり、球面から、赤道面の円周を除いた空間である。

### 12.2.5 モレ-カルタン形式

これで多様体上に接続形式を考える準備ができた。接続形式を考えることは多様体上に 1 次微分形式をつくることだった。

ここでは  $SO_3$  上でモレ-カルタン形式を考えよう。

$SO_3$  のリー環  $\mathfrak{so}_3 = T_1SO_3$  は  $Mat_3(\mathbb{R})$  の 3 次元部分空間であり、その基底は式 12.6 から

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

とおく。 $SO_3$  上の基本ベクトル場  $\eta_i$  は次のようにおけた。

$$SO_3 \ni A \rightarrow \eta_i(A) = R_A X_i = X_i A \in T_A SO_3$$

モレ-カルタン形式とは次を満たす 1 次微分形式である。

$$\theta_i(\eta_j) = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (12.25)$$

ただし、 $i, j = 1, 2, 3$  である。 $A \in SO_3$ 、 $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  は接空間  $T_A SO_3$  の線形基底である。従って、式 12.7 が成り立ち、

$$\theta_i(X) = -\frac{1}{2} \text{tr}(X_i X A^{-1}) \quad (12.26)$$

である。

実際に  $X$  を確認するとこれは接平面を表し、式 11.50 から

$$X = a_1 \eta_1(A) + a_2 \eta_2(A) + a_3 \eta_3(A)$$

また、式 12.23 から右不変ベクトル場は

$$\eta_i(A) = X_i A$$

とかけたので  $X$  は  $A$  の微分から 1 点を指定して得られる。

$$\begin{aligned} X_i X A^{-1} &= X_i (a_1 \eta_1(A) + a_2 \eta_2(A) + a_3 \eta_3(A)) A^{-1} \\ &= X_i (a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3) \end{aligned}$$

であり、直接計算から

$$-\frac{1}{2} \text{tr}(X_i X_j) = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

となるから式 12.26 の右辺は

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \text{tr}(X_i X A^{-1}) &= -\frac{1}{2} \text{tr}(X_i (a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3)) \\ &= -\frac{1}{2} \text{tr} \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & a_1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -a_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -a_3 \\ a_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \text{tr} \left( \begin{pmatrix} -a_2 - a_3 & 0 & 0 \\ 0 & -a_1 - a_3 & 0 \\ 0 & 0 & -a_1 - a_2 \end{pmatrix} \right) = a_1 + a_2 + a_3 \end{aligned}$$

これは式 12.4 から行列  $X A^{-1} = Y$  として

$$\frac{\partial Y}{\partial X_1} + \frac{\partial Y}{\partial X_2} + \frac{\partial Y}{\partial X_3} = \nabla_X Y = a_1 + a_2 + a_3 \quad (12.27)$$

に等しい。左辺も

$$\begin{aligned} \theta_i(X) &= \theta_i(a_1 \eta_1(A) + a_2 \eta_2(A) + a_3 \eta_3(A)) \\ &= a_1 + a_2 + a_3 \end{aligned}$$

となり、成り立つことがわかる。

前節で内積を保存させたリーマン計量を扱ったがこれを用いれば式 12.8 から

$$\theta_i(X) = \langle X, \eta_i(A) \rangle_A$$

と書くことができる。

つまり、 $A$  での接平面と不変ベクトルとの内積である。

右移動  $R_A : \eta_i(A) = X_i A$  から

$$A = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in T_A SO_3$$

とすると、具体的に成分を計算すると式 12.4 から

$$\begin{aligned}
 \theta_1(X) &= \langle X, \eta_1(A) \rangle_A \\
 &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \\
 &= (x_1, x_2, x_3) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -v_3 \\ v_2 \end{pmatrix} \\
 &= -x_2 \cdot v_3 + x_3 \cdot v_2
 \end{aligned} \tag{12.28}$$

$$\begin{aligned}
 \theta_2(X) &= \langle X, \eta_2(A) \rangle_A \\
 &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \\
 &= (x_1, x_2, x_3) \cdot \begin{pmatrix} v_3 \\ 0 \\ -v_1 \end{pmatrix} \\
 &= x_1 \cdot v_3 - x_3 \cdot v_1
 \end{aligned} \tag{12.29}$$

$$\begin{aligned}
 \theta_3(X) &= \langle X, \eta_3(A) \rangle_A \\
 &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \\
 &= (x_1, x_2, x_3) \cdot \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= -x_1 \cdot v_2 + x_2 \cdot v_1
 \end{aligned} \tag{12.30}$$

となり、歪対称性から大きさが

$$\theta_i(X) = X \wedge A \tag{12.31}$$

となっていて、式 5.9 の内部積で 1 形式  $k = 1$  の場合

$$i_X(\omega \wedge \eta) = (i_X\omega) \wedge \eta - \omega \wedge (i_X\eta)$$

から 12.25 から

$$\begin{aligned}
 i_{\eta_1}\theta_1 &\equiv \theta_1(\eta_1) \\
 &= 1
 \end{aligned} \tag{12.32}$$

となるべきで、さらに、リー微分は内積を保つので

$$\mathcal{L}_{\eta_1}\theta_1 = 0 \tag{12.33}$$



が常に満たされる。  
一般の  $S^1$  束

$$\pi : E \rightarrow M$$

で基本ベクトル  $\eta$  に対して条件式 12.32、12.33 を満たす時、この 1 次微分形式  $S^1$  の接続形式という。これは引き戻しによるリー微分の定義式 5.5 から

$$\mathcal{L}_X A = \frac{d}{dt} (\Phi_t)^* A|_{t=0}$$

である。基本ベクトル場が生成する流れが作用  $\rho$  に等しいから

$$(\rho_g)^* \theta_1 = \theta_1$$

$\rho_g$  が指数写像  $e^{tX}$  による左移動であったからベクトル場  $\eta_1$  は  $\rho_g$  不変になり、次のように表現できる。  
 $X \in T_A SO_3$  として

$$\begin{aligned} ((\rho_g)^* \theta_1)(X) &= \theta_1(d\rho_g(X)) \\ &= \langle X_1, d\rho_g(X) \rangle_{\rho_g(A)} \\ &= \langle d\rho_{g^{-1}}(X_1), X \rangle_A \\ &= \langle X_1, X \rangle_A \\ &= \theta_1(X) \end{aligned} \tag{12.34}$$

つまり、 $\rho_g$  で  $A$  から移動した  $\rho_g(A)$  での  $X_1$  と  $d\rho_g(X)$  の内積は点  $A$  での  $X_1$  と  $X$  の内積に等しい。このような  $\theta_1$  を標準接続形式という。これはベクトルを入れることで意味をなす作用素で

$$\theta_1(\text{Vector})$$

として内積を作るものをみなすとよい。

次節での式 14.34 のカルタンの公式を用いると共変微分を内部積で表すことができ、

$$\mathcal{L}_{\eta_1} \theta = 0 = di_{\eta_1} \theta + i_{\eta_1} d\theta$$

となるが、 $i_{\eta_1} = 1$  であったから、

$$i_{\eta_1} d\theta = 0$$

である。

### 12.2.6 引き戻し

ここで  $u, v, w$  は回転角として  $SO_3$  を局所表示するのに前節で用いたオイラー角 12.17 を用いると

$$\psi(u, v, w) = e^{wX_1} e^{vX_2} e^{-uX_3} \tag{12.35}$$

となった。

再び前節の図を見ながら標準接続形式  $\theta_1$  を  $\psi$  で引き戻すことをしてみる。引き戻されても 1 形式になるはずだから、これを

$$\psi^*(\theta_1) = fdu + gdv + hdw \tag{12.36}$$

で表す。ただし、

$$f(u, v, w) = \theta_1 \left( \frac{\partial}{\partial u} \psi(u, v, w) \right) \quad (12.37)$$

$$g(u, v, w) = \theta_1 \left( \frac{\partial}{\partial v} \psi(u, v, w) \right) \quad (12.38)$$

$$h(u, v, w) = \theta_1 \left( \frac{\partial}{\partial w} \psi(u, v, w) \right) \quad (12.39)$$

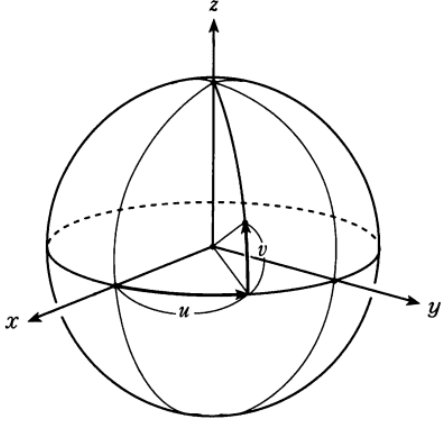


図 12.8: [11] より：球面の局所座標  $u, v$  を表す。ここではさらに  $w$  の回転を考える。

ここで  $\frac{\partial}{\partial u} \psi \in T_\psi SO_3$  であり、各接ベクトルは式 12.35 の偏微分から次のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial u} \psi(u, v, w) = e^{wX_1} e^{vX_2} (-X_3) e^{-uX_3}$$

$$\frac{\partial}{\partial v} \psi(u, v, w) = e^{wX_1} X_2 e^{vX_2} e^{-uX_3}$$

$$\frac{\partial}{\partial w} \psi(u, v, w) = X_1 e^{wX_1} e^{vX_2} e^{-uX_3}$$

となるので  $\theta_1(\cdot)$  に代入すると式 12.26 から  $\theta_i(X) = -\frac{1}{2} \text{tr}(X_i X A^{-1})$  を用いて、 $A = \psi(u, v, w)$  だから逆行列で順番が反対になることに留意し、

$$\begin{aligned} \theta_1 \left( \frac{\partial}{\partial u} \psi(u, v, w) \right) &= -\frac{1}{2} \text{tr} \left( X_1 \frac{\partial}{\partial u} \psi(u, v, w) \psi(u, v, w)^{-1} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \text{tr} \left( X_1 e^{wX_1} e^{vX_2} (-X_3) e^{-uX_3} (e^{uX_3} e^{-vX_2} e^{-wX_1}) \right) \\ &= -\frac{1}{2} \text{tr} \left( X_1 e^{wX_1} e^{vX_2} (-X_3) (e^{-vX_2} e^{-wX_1}) \right) \\ &= -\frac{1}{2} \text{tr} \left( X_1 e^{wX_1} \text{Ad}_{e^{vX_2}} (-X_3) (e^{-wX_1}) \right) \end{aligned} \quad (12.40)$$

ここで前節の計算 12.13 から

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

として、

$$Ad_A X_1 = X_1$$

$$Ad_A X_2 = \cos t X_2 + \sin t X_3$$

$$Ad_A X_3 = -\sin t X_2 + \cos t X_3$$

となったことを用いれば

$$Ad_{e^{vX_2}} = \cos v X_3 + \sin v X_1$$

となるので結局、

$$\begin{aligned} \theta_1 \left( \frac{\partial}{\partial u} \psi(u, v, w) \right) &= -\frac{1}{2} \text{tr} \left( X_1 e^{wX_1} Ad_{e^{vX_2}} (-X_3) (e^{-wX_1}) \right) \\ &= -\frac{1}{2} \text{tr} \left( X_1 (\cos v X_3 + \sin v X_1) \right) \\ &= -\sin v \end{aligned}$$

となる。

同様にして次を得る。

$$\theta_1 \left( \frac{\partial}{\partial v} \psi(u, v, w) \right) = 0$$

$$\theta_1 \left( \frac{\partial}{\partial w} \psi(u, v, w) \right) = 1$$

よって式 12.36 に代入し、引き戻しは

$$\psi^* (\theta_1) = -\sin v du + dw \quad (12.41)$$

となる。

結局これは  $\theta_1$  方向の接続は半径  $r = \sin v$  で  $du$  だけ回転したときの周の長さを戻し、 $dw$  を加えている。つまり  $E_M$  の接続形式  $\theta_M$  が一般に  $SO_3$  の接続形式  $\theta_{S^2}$  の  $\Gamma$  による引き戻しである。

### 12.2.7 水平分布

これまで1つの平面のみを見て、接平面の鉛直方向についてはあまり考えてこなかったが、 $SO_3$  内での接平面は3次元の空間にあり、水平ベクトルと独立したベクトルを持つはずである。よって、複数の平面を比べるとこの相違点がこのベクトルで記述される。ここで、その成分、すなわち、 $g$  方向を考える。まず、 $SO_3$  の点  $A$  での接平面  $T_A SO_3$  を考える。前節から

$$\eta_i (A) = X_i A (i = 1, 2, 3)$$

は  $T_A SO_3$  での線形基底をなした。従って、この接平面上の任意のベクトルはこの1次結合で書くことができて

前節の標準接続形式  $\theta_1$  を用いると次のようになる。

$$X = \theta_1 (X) X_1 A + \theta_2 (X) X_2 A + \theta_3 (X) X_3 A$$

つまり、 $X_1 A$  成分が  $\theta_1 (X)$  であることを表す。

そこで  $T_A SO_3$  の部分空間  $H(A)$  を次で表す。

$$H(A) = \{X \in T_A SO_3 | \theta_1 (X) = 0\}$$

するとこれは  $\eta_1 = X_1 A = 0$  なので

$$\begin{aligned} H(A) &= \theta_2(X) X_2 A + \theta_3(X) X_3 A \\ &= \theta_2(X) \eta_2(A) + \theta_3(X) \eta_3(A) \end{aligned}$$

であり、この  $H(A)$  を  $\theta_1$  に関する水平面と呼ぶ。

つまり、

$$X = H(A) + \theta_1(X) \eta_1(A)$$

である。この水平面上のベクトルを水平ベクトルという。

点  $A$  は自由に選べるので  $SO_3$  全体に水平面が分布することになる。

この分布を

$$\mathcal{H} = \{H(A) | A \in SO_3\}$$

と書く。例えば

$$A = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in T_A SO_3$$

とすると、

$$v_1 \in \pi_\rho(A) \in S^2$$

となるので  $X$  の第一成分  $x_1$  について  $v_1 \perp x_1$  だから、次の対応は線形同型である。

$$H(A) \ni X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \rightarrow x_1 \in T_{\pi_\rho(A)} S^2$$

これは別表現で、 $\pi_\rho$  の微分  $d\pi_\rho$  の水平面  $H(A)$  への制限とすることができる。

従って、逆に  $x_1 \in T_{\pi_\rho(A)} S^2$  に対して、 $X \in H(A)$  を対応させることができる。

この水平面のベクトル  $X$  を  $x_1$  の水平リフトと呼ぶ。

もし、 $H(A)$  のベクトルが水平方向であれば  $\eta_1(A) = X_1 A$  方向は垂直方向と考えることができる。

このとき、図のように  $A$  を通るファイバーをほぼ、鉛直向きに作図すると、これを接する方向が  $T_A(S^1 \cdot A)$  で垂直方向が  $H(A)$  となるので

$$T_A SO_3 = T_A(S^1 \cdot A) \oplus H(A)$$

のおゆに分解できる。

ここで注意すべきは水平平面  $H(A)$  は  $SO_3$  中の平面ではない。しかし、図には平面的に描かれることが多い。

正確には  $SO_3$  内で  $A$  点を通る小さい曲面  $h(A)$  を考えて、 $A$  で  $h(A)$  に接する全てのベクトル  $X$  が  $H(A)$  に含まれるように

$$H(A) = T_A h(A)$$

と考えればよい。

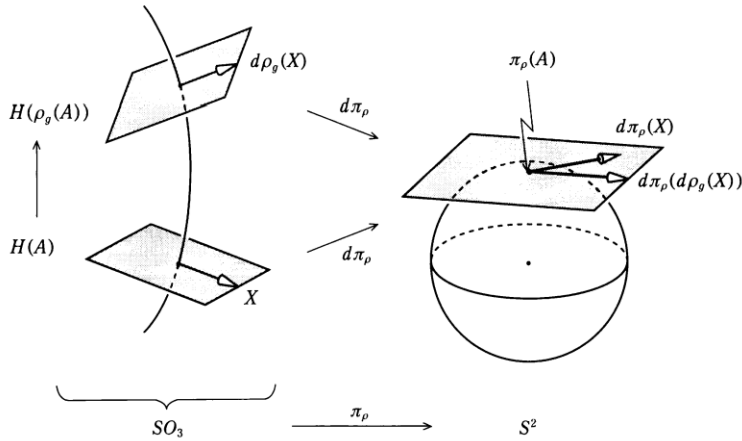


図 12.9: [11] より : 水平面  $H(A)$  はファイバーに直交する。作用  $\rho_g$  により、ファイバーに沿って移動する。

図で見るように  $H(A)$  での接ベクトル  $X$  を作用  $\rho_g(A)$  で移動すると、その微分  $d\rho_g(X)$  に写る。

$$H(A) \rightarrow H(\rho_g(A)) : X \rightarrow d\rho_g(X) \quad (12.42)$$

つまり、 $S^1$  の作用は基本ベクトル場  $\eta_1$  が生成する流れであったから  $\eta_1 \rightarrow \eta_1$  で不変である。

一方で、 $A$  における水平ベクトルは  $\eta_1(A)$  と直交する。 $S^1$  の作用は内積を保つのでこの直交性を保ち、水平ベクトルは水平ベクトルに写されるのである。

しかし、同じ水平面にあるが式 12.38 より  $X$  を  $\rho_g$  で  $S^2$  の接平面  $T_{\pi_\rho(A)}S^2$  に写した時には  $g$  の分だけ回転する。

ここで逆に、 $SO_3$  内の平面の分布を先に次のように与える。

$$\mathcal{H}' = \{H'(A) | A \in SO_3\}$$

これが

$$T_A SO_3 = T_A(S^1 \cdot A) \oplus H'(A)$$

を満たし、さらに  $S^1$  の作用で  $\mathcal{H}' \rightarrow \mathcal{H}'$  となる

$$d\rho_g(H'(A)) = H'(\rho_g(A)) \quad (12.43)$$

の条件を満たす  $SO_3$  内の接続形式は  $\theta'$  の 1 つしかない。

これが接続の意味であるといえる。

### 12.2.8 回転トーラス

**基本形式** 具体例として下図のような回転トーラス  $T^2$  を考える。 $S^1$  の自由な作用をこのトーラスで考えてみよう。

$0 < r < R$  を定数として、 $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  を  $\phi(\theta, \phi) = (x, y, z)$  として

$$\phi(\theta, \phi) = ((R + r \cos \theta) \cos \phi, (R + r \cos \theta) \sin \phi, r \sin \theta) \quad (12.44)$$

とおく。

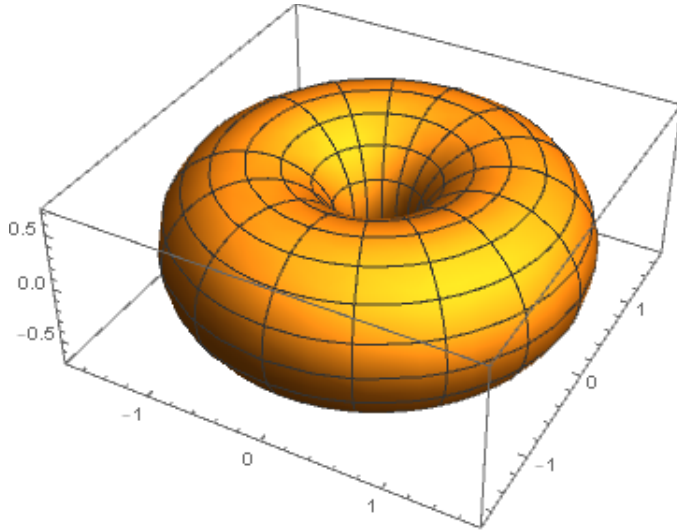


図 12.10: 3次元内のトーラス

これは図のように穴の中心からトーラス断面の中心までの距離が  $R$  で断面の半径が  $r$  のトーラスである。このトーラスのリーマン計量をまず求める。式 3.29 の第一基本量であるからトーラス上の任意の点  $p(\theta, \phi) = \psi(\theta, \phi) = (x(\theta, \phi), y(\theta, \phi), z(\theta, \phi))$  として、各偏微分を求めると

$$p_\theta = \frac{\partial}{\partial \theta} \psi(\theta, \phi) = (-r \sin \theta \cos \phi, -r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta)$$

$$p_\phi = \frac{\partial}{\partial \phi} \psi(\theta, \phi) = (-(R + r \cos \theta) \sin \phi, (R + r \cos \theta) \cos \phi, 0)$$

従ってリーマン計量は式 3.29 の第一基本量であるから

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \begin{pmatrix} p_\theta \cdot p_\theta & p_\theta \cdot p_\phi \\ p_\phi \cdot p_\theta & p_\phi \cdot p_\phi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & (R + r \cos \theta)^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (12.45)$$

また、

$$E = |p_\theta \cdot p_\theta| = r^2, F = 0, G = |p_\phi \cdot p_\phi| = (R + r \cos \theta)^2$$

となる。これから

$$\det g_{ij} = r^2 (R + r \cos \theta)^2$$

よって

$$g = \sqrt{\det g_{ij}} = r (R + r \cos \theta)$$

がリーマン計量になる。

これからトーラスの表面積は次のように簡単に求まる。

$$S = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} r (R + r \cos \theta) = 4\pi r^2 R$$

となる式 12.45 からは不変線素として次の第 1 基本形式が得られる。 $\omega^t = (d\theta, d\phi)$  とすれば

$$\begin{aligned} I &= \omega^t g_{ij} \omega \\ &= r^2 d\theta^2 + (R + r \cos \theta)^2 d\phi^2 \end{aligned}$$

次に式 3.42 等を用いて第 2 基本形式をつくる。  
 まず法単位ベクトルが

$$\gamma = \frac{p_\theta \times p_\phi}{\|p_\theta \times p_\phi\|} = (-\cos \theta \cos \phi, -\cos \theta \sin \phi, -\sin \theta)$$

だから

$$p_{\theta\theta} = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \psi(x, y) = (-r \cos \theta \cos \phi, -r \cos \theta \sin \phi, -r \sin \theta)$$

$$p_{\theta\phi} = \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \phi} \psi(x, y) = (-r \sin \theta \sin \phi, -r \sin \theta \cos \phi, 0)$$

$$p_{\phi\phi} = \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \psi(x, y) = -(R + r \cos \theta) \cos \phi, -(R + r \cos \theta) \sin \phi, 0)$$

これらと  $\gamma$  との内積をとり、

$$L = \langle (d\gamma)_p X, X \rangle = - \left\langle \gamma, \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \phi(u, v) \right\rangle = p_{\theta\theta} \cdot \gamma = r$$

$$M = \langle (d\gamma)_p X, Y \rangle = - \left\langle \gamma, \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \phi} \phi(u, v) \right\rangle = p_{\theta\phi} \cdot \gamma = 0$$

$$N = \langle (d\gamma)_p Y, Y \rangle = - \left\langle \gamma, \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \phi(u, v) \right\rangle = p_{\phi\phi} \cdot \gamma = (R + r \cos \theta) \cos \theta$$

よって

$$h_{ij} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & (R + r \cos \theta) \cos \theta \end{pmatrix}$$

とおくと、第 2 基本形式は

$$\begin{aligned} II &= \omega^t h_{ij} \omega \\ &= (d\theta, d\gamma) \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & (R + r \cos \theta) \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\theta \\ d\gamma \end{pmatrix} \\ &= rd\theta^2 + (R + r \cos \theta) \cos \theta d\phi^2 \end{aligned}$$

ともとまる。

よって平均曲率  $H$  とガウス曲率  $K$  は次のようになる。

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \frac{EN - 2FM + GL}{EF - F^2} = \frac{R + 2r \cos \theta}{r^2 (R + r \cos \theta)} \\ G &= \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{\cos \theta}{r (R + r \cos \theta)} \end{aligned}$$

接続形式 次にトーラスの接続形式を調べる。

$\mathbb{R}^3(x, y, z)$  として下図のよに座標を決める。

回転体トーラス  $T^2$  は半径  $r$  の円を  $z$  軸周りに半径  $R$  で回転させればよい。

この座標系で接続形式を考えるために、このトーラスを改めて、

$$\phi(x, y) = ((R + r \cos y) \cos x, (R + r \cos y) \sin x, r \sin y) \quad (12.46)$$

とおく。

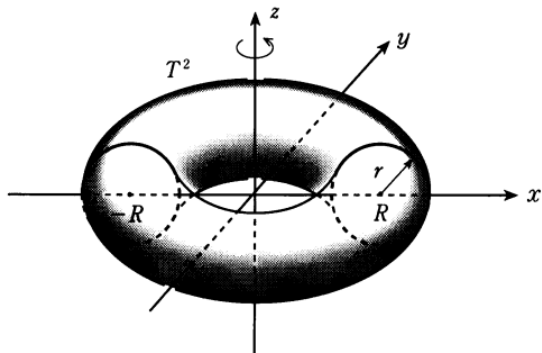


図 12.11: [11] より :

この時の作用  $\rho$  を  $[t] \in S^1$  として

$$\rho_{[t]}(\phi(x, y)) = \phi(x + 2\pi at, y + 2\pi bt)$$

となる。作用が自由であるためには  $\rho_g(A) = A$  をみたすのは  $g \in SO_2$  は単位元  $e$  のみになる必要があった。

従って、 $S^1$  の作用では  $a, b$  は整数で、互いに素の関係である必要がある。

そこで今、 $a = 0, b = 1$  として、次の場合を考える。

$$\rho_{[t]}(\phi(x, y)) = \phi(x, y + 2\pi t) \quad (12.47)$$

この時の  $T^2$  の各点での 1 次微分形式を  $\theta$  として、この  $\theta$  が接続形式となるために式 12.36 と同じように

$$\phi^*(\theta) = f dx + g dy$$

とするが、ここでは

$$\phi^*(\theta) = f(x) dx + dy \quad (12.48)$$

となる場合を考える。

ただし、 $f(x)$  は周期  $2\pi$  の可微分関数である。

式 12.37 から

$$\begin{aligned} f(x) &= \theta_1 \left( \frac{\partial}{\partial x} \psi(x, y) \right) = \theta \left( \frac{\partial}{\partial x} ((R + r \cos y) \cos x, (R + r \cos y) \sin x, \sin y) \right) \\ &= \theta_1 (- (R + r \cos y) \sin x, (R + r \cos y) \cos x, 0) \\ &= - (R + r \cos y) \sin x \end{aligned}$$

式 12.40 より



$$\theta_i(X) = -\frac{1}{2} \text{tr}(X_i X A^{-1})$$

また、

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

だった。ただし、 $X, A^{-1}$  は行列なので

$$\begin{pmatrix} (R + r \cos(\theta)) \cos(\phi) & 0 & 0 \\ 0 & (R + r \cos(\theta)) \sin(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & r \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \theta_1 \left( \frac{\partial}{\partial x} \psi(x, y) \right) &= -\frac{1}{2} \text{tr} \left( X_1 \frac{\partial}{\partial x} \psi(x, y) \psi(x, y)^{-1} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

この作用に対する基本ベクトル場は内部積が 1 になるから

$$X(\phi(x, y)) = \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y)$$

$T^2$  の接ベクトル場は 12.48 より直線群  $Y(x, y)$  が  $\phi(x, y)$  での水平面になるためには

$$\theta(Y(x, y)) = 0$$

をみたさないといけない、そこで

$$Y(\phi(x, y)) = \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y) - f(x) \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

とすると 12.48 より

$$\begin{aligned} \theta(Y(x, y)) &= \theta \left( \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y) - f(x) \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

である。

例えばトーラス式 12.46 において  $r, x, y$  の変数をパラメタ  $t$  を用いて

$$x = at, y = bt$$

と 1 変数で表す。

これは

$$\phi(t, r) = ((R + r \cos bt) \cos at, (R + r \cos bt) \sin at, r \sin bt) \quad (12.49)$$

となる。これを  $a = 0, b = 0$  の場合をそれぞれ作画すると下図のようになる。

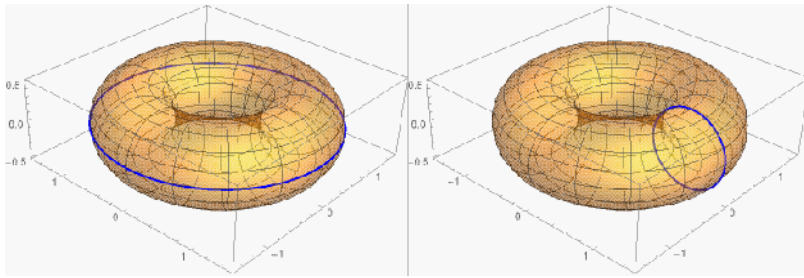


図 12.12: トーラス上の  $x, y$  の基本作用

$a \neq 0, b \neq 0$  の場合に次のようにトーラス表面を  $x, y$  それぞれの方向で周回する。

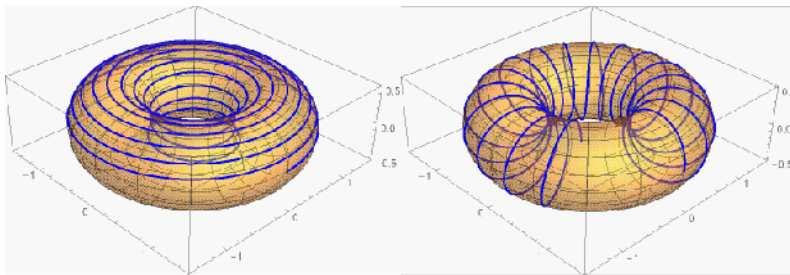


図 12.13:  $a, b$  の値を変化させていく

特に  $n, m$  が整数で

$$na = mb$$

の場合は同じ経路を周回する。

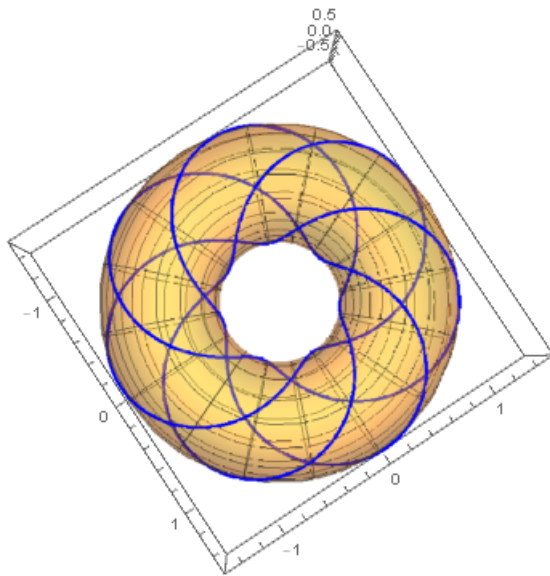


図 12.14:  $a = 16.8, b = 9.6$  の場合

## 12.3 球面上の曲率 [11]

### 12.3.1 曲率形式

接続形式は全空間  $SO_3$  の 1 次微分形式であった。次に底空間  $S^2$  の 2 次微分形式を考える。従って、面積要素が単位になる。これを曲率形式と呼ぶ。

$S^1$  束が

$$\pi_\rho : SO_3 \rightarrow S^2$$

を満たす底空間  $S^2$  の 2 次微分形式を  $\kappa$  とすると、これの引き戻しは 1 次微分形式となり

$$d\theta_1 = (\pi_\rho)^* \kappa$$

が一意的に存在する。つまり、

$$d\theta = \pi^* \kappa, \kappa \in \Omega^2(M) \quad (12.50)$$

となる 2 次微分形式  $\kappa$  を接続形式  $\theta$  に対する曲率形式といい、

$$\kappa_{S^2}$$

とかく。

$S^1$  束  $\pi : E \rightarrow M$  の任意の 2 つの接続形式を  $\theta, \theta'$  とする。対応する 2 つの曲率形式を  $\kappa, \kappa' \in \Omega^2(E)$  とすると

積分

$$\int_E \kappa = \int_{E'} \kappa'$$

となる。このことから、この積分は大局的な保存則と関係することが示唆される。

興味あることに、この積分値は常に  $2\pi$  の倍数になる。特に

$$\int_{S^2} \kappa_{S^2} = 4\pi$$

で単位球面の表面積を表す。

$S^1$  束  $\pi : E \rightarrow M$  の基本ベクトル場を  $\eta$  とする。微分形式を  $\xi \in \Omega^*(E)$  として内部積が 0、リー微分も 0 になるとしよう。

$$i_\eta \xi \equiv 1, \mathcal{L}_\eta \xi = 0$$

この時、

$$\pi^* \zeta = \xi$$

となるような微分形式が底面  $\zeta \in \Omega^*(M)$  に存在する。

証明は後にして、前節の式 12.41 から特に  $\xi \in \Omega^*(E)$  が  $SO_3$  の標準接続形式  $\theta_1$  であれば

$$\psi^*(\theta_1) = -\sin v du + dw$$

となることを見た。これから 2 形式  $d\theta_1$  を作ると

$$d\theta_1 = -\cos v dv \wedge du = \cos v du \wedge dv \quad (12.51)$$

となる。つまり、外微分

$$\xi = d\theta$$

は内積保存と、リー微分が 0 になる条件

$$i_\eta \theta \equiv 1, \mathcal{L}_\eta \theta = 0$$

を満たすので接続形式の差  $\theta - \theta'$  もこの条件を満たし、

$$\pi^* \zeta = \theta - \theta'$$

となる  $\zeta \in \Omega^1(M)$  が存在する。従って底面での曲率の差が

$$d\zeta = \kappa - \kappa'$$

となる。つまり、重要な命題

**2つの接続形式  $\theta, \theta'$  に対する曲率形式  $\kappa, \kappa'$  の差  $d\zeta = \kappa - \kappa'$  は完全形式をつくる。**

つまり  $p$  次微分形式  $\omega$  が  $d\omega = 0$  を満たせば閉じているという。

さらに多様体  $M$  上に  $p-1$  次微分形式  $\theta$  が存在し、

$$\omega = d\theta \tag{12.52}$$

を満たせば完全であるという。

この場合は、

$$\int d\zeta = 0$$

から

$$\int_E \kappa = \int_{E'} \kappa'$$

が成り立つわけである。

### 12.3.2 面積要素

次に  $SO_3$  の標準接続形式に対応する曲率形式が  $S^2$  の面積要素に等しくなることを前節のオイラー角を用いて示す。

$$\psi(u, v, w) = e^{wX_1} e^{vX_2} e^{-uX_3} \tag{12.53}$$

とおく。束射影は  $SO_3$  の第1行を取り出すことだったから

$$\psi(u, v) = (\cos v \cos u, \cos v \sin u, \sin v) \tag{12.54}$$

従って式 12.50 より  $S^2$  の面積要素は式 3.29 から

$$g_{ij}(u, v) = \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial u_i}(u, v), \frac{\partial \psi}{\partial u_j}(u, v) \right\rangle$$

$$g_{11} = \frac{\partial \psi}{\partial u} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial u} = (\sin u \cos v)^2 + (\cos u \cos v)^2 = \cos^2 v$$

$$g_{12} = g_{21} = \frac{\partial \psi}{\partial u} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial v} = (\sin u \sin v \cos u \cos v) - (\cos u \cos v \sin u \sin v) = 0$$

$$g_{22} = \frac{\partial \psi}{\partial v} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial v} = (\sin v \cos u)^2 + (\sin u \sin v)^2 + (\cos v)^2 = 1$$

よって

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} \cos^2 v & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(g_{ij}) = \cos^2 v$$

となるので面積要素  $\omega_{S^2}$  は式 3.30 より

$$\omega_{S^2} = \sqrt{\det(g_{ij}(p))} du \wedge dv = \cos v du \wedge dv$$

となる。この面積要素を  $\psi$  を用いて表すと  $\omega_{S^2} = \psi^*(\omega_{S^2})$  であり、

$$\psi^*(\omega_{S^2}) = \cos v du \wedge dv \quad (12.55)$$

となる。これは式 12.51 に等しい。

つまり、標準接続形式に対応する曲率形式は  $S^2$  の面積要素に等しくなる。

これは前節式 3.22 の  $S^2$  でのガウス曲率はいたるところで一定で

$$K_{S^2} \equiv 1 \quad (12.56)$$

となったことに対応している。ただし、一般の曲面では  $K_M$  は常に 1 に等しいわけではなく、後に示すようガウス曲率を面積で足し合わせないといけない。

### 12.3.3 振れ率

微分形式の中でも前節のモレ-カルタン形式は  $SO_3$  上の微分形式を定義した。

$\theta_1, \theta_2, \theta_3$  を持ち、その中でも式 3.15 から

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ e_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(t) & 0 \\ -\kappa(t) & 0 & \tau(t) \\ 0 & -\tau(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ e_3(t) \end{pmatrix} \quad (12.57)$$

が成り立ち、さらに曲率、振れ率を標準接続形式  $\theta_1, \theta_3$  を用いて表すことができる。

弧長パラメタを持つ空間曲線を

$$\phi: I \rightarrow \mathbb{R}^3$$

を考える。フルネーセレ標構をとれるように

$$\frac{d}{dt}\phi(t) \neq 0$$

が各  $t \in I$  で成り立ち、フルネーセレ標構を

$$F(t) = \begin{pmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ e_3(t) \end{pmatrix} \in SO_3$$

とする。  $t \rightarrow F(t)$  は  $SO_3$  内の曲線である。その接ベクトルを

$$\frac{d}{dt}F(t) \in T_{F(t)}SO_3$$

をモレ-カルタン形式 12.26 に代入すると  $F(t) \in SO_3$  から式 12.57 を用いて

$$\begin{aligned} \theta_i \left( \frac{d}{dt}F(t) \right) &= -\frac{1}{2} \text{tr} \left( X_i \left( \frac{d}{dt}F(t) \right) F(t)^{-1} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \text{tr} \left( X_i \begin{pmatrix} 0 & \sigma(t) & 0 \\ -\sigma(t) & 0 & \tau(t) \\ 0 & -\tau(t) & 0 \end{pmatrix} \right) \end{aligned} \quad (12.58)$$

となる。ここで  $\sigma$  は曲線の曲率であり、 $\tau$  は曲線の捩率である。これらはモレ-カルタン形式の  $\theta_1, \theta_3$  と次のように関係している。

$$\tau(t) = -\theta_1 \left( \frac{d}{dt} F(t) \right) \tag{12.59}$$

$$\sigma(t) = -\theta_3 \left( \frac{d}{dt} F(t) \right) \tag{12.60}$$

これで曲面を扱う、接続と曲率の基本の紹介が終わり、ホロノミーを考察する準備ができた。

### 13 ホロノミー [11]

決してフラットではない宇宙の中で、我々は物質を認識し、運動と関わる。物理学はこの現象を数式で記述することを目指す。

曲面上の運動をより、高次元位相空間を用意して、連続的に記述する基本が、ホロノミーにある。これは次部であつかう幾何学的位相やゲージ理論、さらには超弦理論を記述していく基本の考え方である。

#### 13.1 自然リフト

はじめに、これまでの球面幾何を用いて、リフトという高次化の手法を見ていこう。

$S^2$  上の曲線  $c: [a, b] \rightarrow S^2$  に対し、 $SO_3$  の曲線  $\tilde{c}: [a, b] \rightarrow SO_3$  で、それを図のように底空間に落としたものの  $\pi_p \circ \tilde{c}$  が  $c$  と一致するとき  $\tilde{c}$  を  $c$  のリフトという。

リフトの中には重要なものとして自然リフトと水平リフトがある。

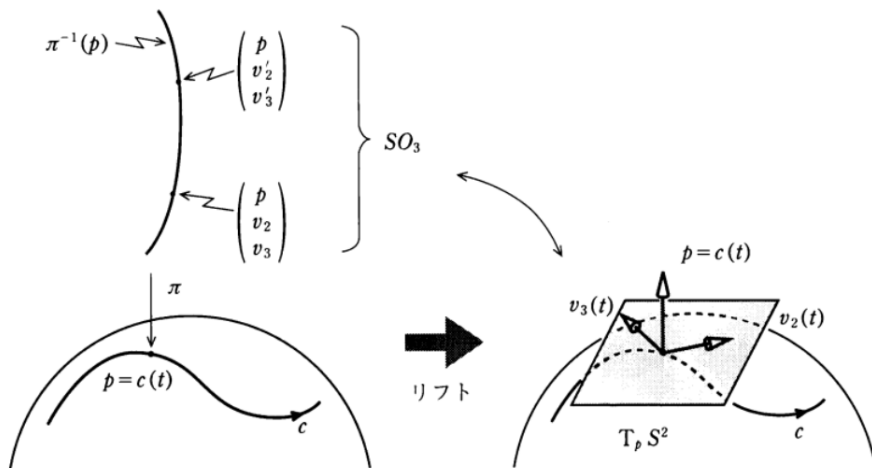


図 13.1: [11] より：自然リフト

まず、自然リフトを見る。

曲線  $c: [a, b] \rightarrow S^2$  が微分可能で次を満たせば、正則である。

$$0 \neq \frac{dc}{dt}(t) = \dot{c}(t) \in T_{c(t)}S^2 \quad (\forall t \in [a, b])$$

この正則曲線  $c: [a, b] \rightarrow S^2$  に対し、

$$\begin{cases} v_1(t) = c(t) \\ v_2(t) = \frac{\dot{c}(t)}{\|\dot{c}(t)\|} \\ v_3(t) = v_1(t) \times v_2(t) \end{cases} \quad (13.1)$$

として、そのリフト  $\tilde{c}: [a, b] \rightarrow SO_3$  を次のようにおく。

$$\tilde{c}(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \end{pmatrix}$$

これを正則曲線  $c(t)$  の自然なリフトと呼ぶ。

つまり、 $v_1$  と  $v_2$  のベクトルの右ねじ系が  $v_1(t)$  でこれは  $c(t)$  そのものに等しい。

自然なリフトである時  $v_2$  は単位ベクトルで曲線  $c(t)$  の接線方向に向きを持つ。

$S^2$  に写すことで単位球面上で考えるので  $v_1(t)$  は球面に写した  $c(t)$  のある点を決める。

この向きは原点を球の中心にとるので上図のように球面に対して法線方向になる。

## 13.2 測地線

前節でも用いた  $SO_3$  の標準接続形式を  $\theta_1$  とする。正則曲線を  $c: [a, b] \rightarrow S^2$  として弧長をパラメータにもつ。この時

$$\|\dot{c}(t)\| = 1$$

$\tilde{c}: [a, b] \rightarrow SO_3$  を  $c$  の自然なリフトとすると、式 12.59 より、次の操作はスカラー値を得て、

$$k_{c(t)} = -\theta_1 \left( \frac{d}{dt} \tilde{c}(t) \right) \quad (13.2)$$

を測地曲率という。この負符号は曲面の向きに対して右手系を正にとるようになるためである。

この測地曲率がいたるところで 0 であれば、この曲線を測地線という。

ただし、これが  $c(t)$  が直線の場合のみというわけではない。13.2 から自然なリフトの  $t$  微分になっていることに留意する。

つまり、

$$\tilde{c}(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c(t) \\ \dot{c}(t) \\ c \times \dot{c}(t) \end{pmatrix} \quad (13.3)$$

とすると  $\dot{c} \times \dot{c} = 0$  だから

$$\frac{d}{dt} \tilde{c} = \begin{pmatrix} \dot{v}_1(t) \\ \dot{v}_2(t) \\ \dot{v}_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{c}(t) \\ \ddot{c}(t) \\ \dot{c} \times \ddot{c}(t) \end{pmatrix}$$

となる。そこで前例に習い

$$A = \tilde{c}, X = \frac{d}{dt} \tilde{c}$$

とおくと式 12.28 より、次の第 2 項は 0 になるから

$$\begin{aligned} \theta_1 \left( \frac{d}{dt} \tilde{c} \right) &= -\dot{v}_2 \cdot v_3 + \dot{v}_3 \cdot v_2 \\ &= -\ddot{c}(t) \cdot (c \times \dot{c}(t)) - \dot{c}(t) \cdot (\dot{c} \times \ddot{c}(t)) \\ &= -\langle \ddot{c}(t), c \times \dot{c}(t) \rangle \end{aligned}$$

となる。

$S^2$  では  $\ddot{c}(t), c \times \dot{c}(t)$  のベクトルの大きさは 1 なので、内積の定義からこれは  $\ddot{c}(t), c \times \dot{c}(t)$  のベクトルのなす角  $\delta$  の余弦である。

言い換えれば  $\ddot{c}(t), c(t)$  のベクトルのなす角  $\alpha$  の正弦である。

$$\theta_1 \left( \frac{d}{dt} \tilde{c} \right) = -\cos \delta = -\sin \alpha \quad (13.4)$$

これは  $c \times \dot{c}(t)$  のつくる面積ベクトルと  $\ddot{c}$  とのなす角ともとれるのでこの角度を  $\delta = \pi/2$  の時、すなわち、接続形式  $\theta_1 \left( \frac{d}{dt} \tilde{c} \right) \equiv 0$  であれば  $\ddot{c}$  は常に  $c$  と  $\dot{c}$  とで張られる平面の法線と垂直である。

この関係が接続形式の極めて強力な拘束条件で  $c \times \dot{c}(t)$  の方向が常に平面につぶされている。

言い換えれば  $\ddot{c}$  が常に  $c$  と  $\dot{c}$  とで張られる平面上にあるということである。

そこで次のように

$$\ddot{c} = \gamma c + \beta \dot{c}$$

とすれば

$$\frac{d}{dt} (c \times \dot{c}) = c \times \ddot{c} = \beta c \times \dot{c}$$

となる。成分  $\beta$  のみを拾っていることに留意する。つまり  $c \times \dot{c}$  は  $t$  の変化に対して、同じ向きを保つ。

これから球面上の曲線  $c$  がはじめの  $c(a)$  と  $\dot{c}(a)$  で決められた平面内に下図のように留まり続けることになる。

この重要性は物理の慣性モーメントを考えるとよくわかるだろう。平面の回転が自然に方向の保存に自然界の構造はできている。

後部で深く考察をする。

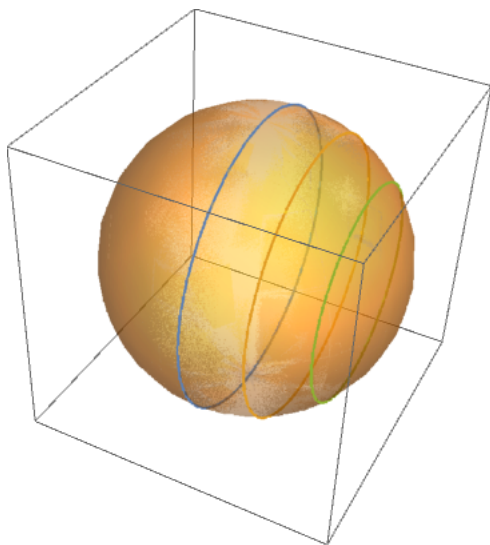


図 13.2:  $S^2$  上にある  $S^1$  が大円 (青線) ならば、 $c \times \dot{c}$  は向きを変えない。

つまり、測地線は大円上 (青線) にある。

上図のように大円に沿ってゴム輪をかければ安定するが、測地線にならない小円に沿ってゴム輪をかけてもすぐはずれてしまう。

### 13.3 水平リフト

次に曲線  $c: [a, b] \rightarrow S^2$  が必ずしも正則ではない場合を考える。

$c \times \dot{c}(t)$  の値は局所的に決めることができるが、これが方向をかえないということはどのような条件になるかを考えよう。



各  $A \in \pi_\rho^{-1}(c(a))$  に対して、 $c$  のリフト  $\tilde{c}: [a, b] \rightarrow SO_3$  で次を満たすものはただ 1 つ存在する。

$$\tilde{c}(a) = A, \theta_1 \left( \frac{d}{dt} \tilde{c}(t) \right) \equiv 0, (\forall t \in [a, b]) \quad (13.5)$$

この式を満たす  $\tilde{c}$  を  $A$  を初期値にもつ水平リフトという。この終点での値を  $P_c(A) = \tilde{c}(b) \in \pi_\rho^{-1}(c(b))$  とすると、 $P_c$  はファイバー  $\pi_\rho^{-1}(c(a))$  から  $\pi_\rho^{-1}(c(b))$  への写像となる。これを  $c$  に沿った平行移動という。ここでも

$$\tilde{c}(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c(t) \\ \dot{c}(t) \\ c \times \dot{c}(t) \end{pmatrix} \quad (13.6)$$

とおくと

$$\theta_1 \left( \frac{d}{dt} \tilde{c} \right) = -\langle \dot{v}_2, v_3 \rangle$$

となるので  $A$  を初期値に持つ水平リフトとは

$$\theta_1 \left( \frac{d}{dt} \tilde{c} \right) = 0$$

から、

$$\langle \dot{v}_2, v_3 \rangle = 0$$

である。一方で  $\langle v_2, v_2 \rangle = 0$  の両辺を微分して

$$\langle \dot{v}_2, v_2 \rangle = 0$$

であるから、3次元空間では残る  $v_1$  と  $\dot{v}_2$  の関係は

$$\dot{v}_2 = \lambda v_1 \quad (13.7)$$

とかける。また、 $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$  であるから同じく両辺を  $t$  で微分すると

$$0 = \langle \dot{v}_2, v_1 \rangle + \langle v_2, \dot{v}_1 \rangle = \lambda + \langle v_2, \dot{v}_1 \rangle = 0$$

両辺に  $v_1$  をかけて式 13.7 より、

$$\begin{aligned} \dot{v}_2 &= \lambda v_1 = -v_1 \langle v_2, \dot{v}_1 \rangle \\ &= -\langle v_2, \dot{c} \rangle c \end{aligned} \quad (13.8)$$

$c$  は固定された  $S^2$  の 1 つの曲線である。従って、この式は常微分方程式と見なすことができ、解の一意性から

式 13.5 を満たすものは一意に決まる。

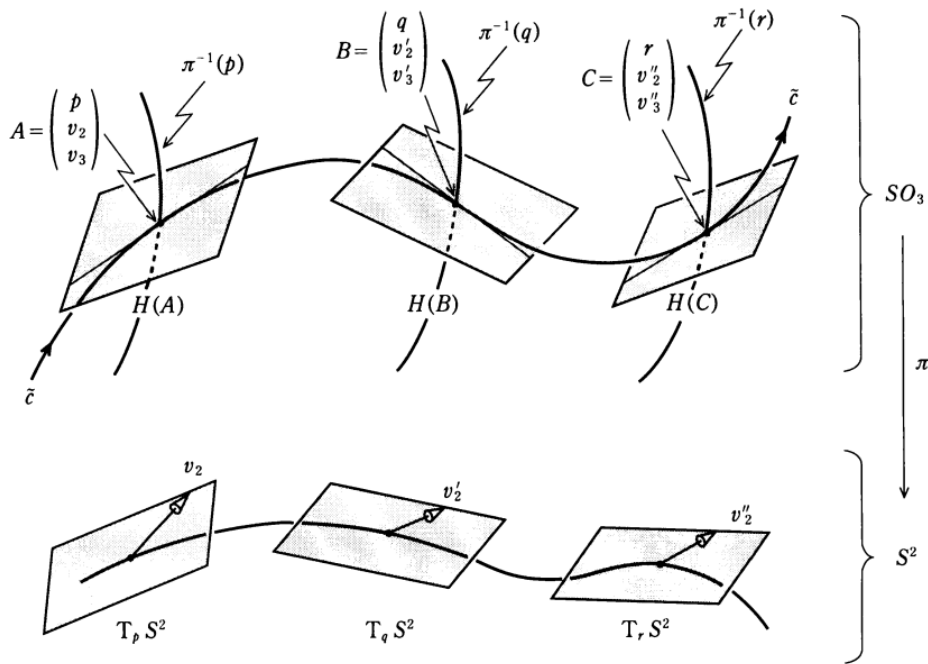


図 13.3: [11] より :  $S^2$  上の水平リフトで  $SO_3$  上のファイバーが作られる。

$\tilde{c}(A), \tilde{c}(B), \tilde{c}(C) \in SO_3$  を図のように射影  $\pi$  で球面  $S^2$  に射影する。

$SO_3$  上の  $\tilde{c}$  を  $S^2$  に射影すると  $c$  ができるとみなすこともできるが、射影して  $c$  になるのは幾通りもある。

上図において  $\tilde{c}$  に沿って  $A$  を  $B, C$  に移動する。  $\tilde{c}$  が  $c$  の水平リフトになるためには  $\tilde{c}$  の各点での接ベクトルが水平面  $H(A), H(B), H(C)$

に含まれていないといけない。従って、  $\tilde{c}$  の接ベクトル  $\frac{d}{dt}\tilde{c}(t)$  は水平面  $H(\tilde{c}(t))$  に含まれる。

初期値  $A \in \pi_\rho^{-1}(c(A))$  を決めれば  $c$  全体で一意に決まることを微分方程式が保証する。

しかし、初期値  $A$  の決め方はファイバー  $\pi_\rho^{-1}(c(A))$  のどの点をとってもよいことになる。

各ファイバーが  $S^1$  だけあるので  $c$  の水平リフトもちょうど  $S^1$  だけあることになる。

もし、何もルールがなくつなげていくとしたら、量子論の状態ベクトルのように位相を持ち、その向きは不確定になる。

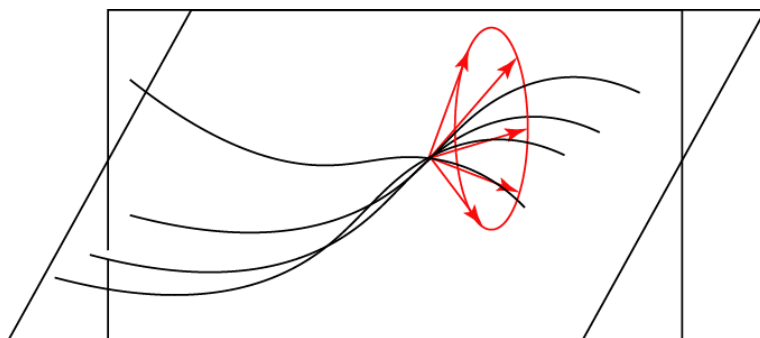


図 13.4:  $\tilde{c}$  は 3次元の中にあるので  $S^1$  に沿って回転して見れば、それだけ水平リフトの取り方ができる。

これに対し、式 13.1 を満たす自然なリフトは  $c(t)$  に対して 1つしか存在しない。

これは量子論の観測の効果に興味ある示唆を与えている。

無限次元という問題があるが、微分値と微分形式がリンクし観測値が決められるのは状態ケットベクトルと観測ブラベクトルからスカラー値を決定していくことに対応する。

次に作用  $S^1 \ni g$  を考え、初期値をかえてみる。この時、

$$P_c(\rho_g(A)) = \rho_g(P_c(A))$$

が成り立つ。つまり式 12.42 から水平リフトでは

$$\frac{d}{dt}\rho_g(\tilde{c}) = d\rho_g\left(\frac{d}{dt}\tilde{c}\right)$$

だから

$$\theta_1\left(\frac{d}{dt}\tilde{c}(t)\right) \equiv 0$$

が成り立てば、引き戻しの定義より、

$$\begin{aligned}\theta_1\left(\frac{d}{dt}\rho_g(\tilde{c})\right) &= \theta_1\left(d\rho_g\left(\frac{d}{dt}\tilde{c}\right)\right) \\ &= ((\rho_g)^*\theta_1)\left(\frac{d}{dt}\tilde{c}\right) \\ &= \theta_1\left(\frac{d}{dt}\tilde{c}\right) \\ &= 0\end{aligned}$$

が成り立つ。

$c$  のリフトを式 13.6 から

$$\tilde{c}(t) = \begin{pmatrix} c(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \end{pmatrix}$$

とすると、 $v_2(t)$  は  $c(t)$  で  $S^2$  に接する長さが 1 の単位接ベクトルである。定義から

$$v_3(t) = c(t) \times v_2(t)$$

となるので  $c$  のリフト  $\tilde{c}$  は  $v_2$  により一意に決まることになる。つまり、ある  $a$  において  $c$  のリフトは  $v_2(a)$  で一意にきまる。

これから  $c$  に沿う平行移動  $P_c$  とは次のように説明できる。

長さが 1 の接ベクトル  $v_2(a) \in T_{c(a)}S^2$  を長さが 1 で  $S^2$  に接するという条件を守りながら、ある一定の操作で  $c$  に沿って移動し、

$c(b)$  まで達したのが  $v_2(b) = P_c(v_2(a))$  である。

この  $\tilde{c}$  が水平リフトであれば  $v_2$  は  $c$  に沿う平行ベクトル場という。

つまり、これは微分方程式が保証するのである。

例えば式 12.54 の球面の局所座標と式 12.53 のオイラー角の間には

$$\psi(u, v) = (\cos v \cos u, \cos v \sin u, \sin v)$$

$$\tilde{\psi}(u, v, w) = e^{wX_1}e^{vX_2}e^{-uX_3}$$

の間には

$$\pi_\rho \circ \tilde{\psi} = \psi \tag{13.9}$$

が成り立つ。これを別表現すると  $S^2$  上の曲線  $c$  を  $\psi$  で引き戻したのが

$$\psi^{-1}(c(t)) = (u(t), v(t))$$

で表せば、 $c$  のリフト  $\tilde{c}$  を  $\tilde{\psi}$  で引き戻す場合は

$$\tilde{\psi}^{-1}(\tilde{c}(t)) = (u(t), v(t), w(t))$$

とかけると、引き戻しの式 12.41 から、よって  $c$  の水平リフトの方程式は  $w(t)$  に関する微分方程式

$$\tilde{\psi}^*(\theta) = -\sin v du + dw$$

であったので接続形式になる条件から  $\tilde{\psi}^*(\theta) = 0$  として、微分すれば

$$\frac{dw(t)}{dt} = \sin v(t) \frac{du}{dt}$$

が得られる。これが水平リフトの  $w(t)$  に関する微分方程式である。

### 13.4 パラメタ変換

曲線  $c$  の像を変えずにパラメタを変えると平行移動にどう影響するかを考える。

- 向きを変えない変換：

底空間の曲線のリフトを  $\tilde{c}$  とおく。 $c$  のパラメタ  $t$  が  $s$  の関数であったとする。この時  $\tilde{c}(t(s))$  は  $c(t(s))$  の水平リフトとなる。

$$\frac{d}{ds} \tilde{c}(t(s)) = \frac{d}{dt} \tilde{c}(t(s)) \frac{dt}{ds}(s)$$

となるが、 $\frac{d}{dt} \tilde{c}(t(s))$  は水平面に属するベクトルであるから  $\frac{d}{ds} \tilde{c}(t(s))$  も水平面に属するベクトルである。一方で

$$\pi_\rho(\tilde{c}(t(s))) = c(t(s))$$

だから  $\tilde{c}(t(s))$  は  $c(t(s))$  の水平リフトになる。また、 $\tilde{c}(t(s))$  の始点と終点の値が  $\tilde{c}(t)$  の始点と終点に一致する。

従って、 $c(t)$  に沿う平行移動と  $c(t(s))$  に沿う平行移動は一致する。この平行移動を  $P_c$  とする。

- 向きを変える変換：

これに対し、向きを変える場合は始点と終点が反対になる。よって平行移動の向きが逆になる。よってこの移動は  $P_{-c}$  と書ける。向きが逆になることを考えると

$$P_{-c} P_c = 1$$

が成り立つので

$$P_{-c} = (P_c)^{-1}$$

のように逆写像になることがわかる。

### 13.5 測地曲率と平行移動

$S^2$  上の曲線  $c: [a, b] \rightarrow S^2$  で弧長をパラメタにもてば  $\|\dot{c}\| = 1$  ととれるから  $c(a), c(b)$  でのファイバーを

$$A = \begin{pmatrix} c(a) \\ \dot{c}(a) \\ c \times \dot{c}(a) \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} c(b) \\ \dot{c}(b) \\ c \times \dot{c}(b) \end{pmatrix}$$

とおく。\$A\$ を \$c\$ に沿って \$c(b)\$ 上まで平行移動したものを \$P\_c(A)\$ とし、ここでの \$B\$ とのなす角を \$\mu\$ とおくと

$$B = \rho_{g(\mu)}(P_c(A))$$

とかける。ただし \$g(\mu)\$ は次のように 2次元のベクトルに作用する回転を表す行列である。

$$g(\mu) = \begin{pmatrix} \cos \mu & -\sin \mu \\ \sin \mu & \cos \mu \end{pmatrix} \quad (13.10)$$

である。\$c\$ の測地曲率を \$k\_c\$ とすると式 13.2 と 13.4 から測地線から微小だけずれば \$\alpha(t)\$ が小さいので

$$k_{c(t)} = -\theta_1 \left( \frac{d}{dt} \tilde{c}(t) \right) = \sin \alpha(t) \simeq \alpha(t)$$

となる。各 \$dt\$ でこれを足し合わせると角度 \$\mu\$ が得られ、これを

$$\mu = - \int_a^b k_c(t) dt \pmod{2\pi} \quad (13.11)$$

とおく。つまり、曲率を曲線に沿って \$a\$ から \$b\$ まで足し合わせていくと \$A\$ と \$B\$ のなす角が求まる。これは次のように示せる。

\$A\$ を初期値に持つ \$c\$ の水平リフトを \$\tilde{c}\_1, c\$ の自然なリフトを \$\tilde{c}\_2\$ とする。

各 \$t\$ に対し、\$\tilde{c}\_1(t), \tilde{c}\_2(t)\$ は同じファイバー \$(\pi\_M)^{-1}(c(t))\$ 上にあるので、ある \$S^1\$ の元として微小回転を表す行列

$$g = \begin{pmatrix} \cos \alpha(t) & -\sin \alpha(t) \\ \sin \alpha(t) & \cos \alpha(t) \end{pmatrix}$$

があって、式 12.20, 12.11 から指数行列を用いて

$$e^{tX_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix} \quad (13.12)$$

$$\tilde{c}_2(t) = \rho_g(\tilde{c}_1) = e^{\alpha(t)X_1} \tilde{c}_1$$

とかける。この時、\$\alpha : [a, b] \to \mathbf{R}\$ は可微分関数で \$\alpha(a) = 0\$ と選べるから、上式を微分し、

$$\frac{d\tilde{c}_2(t)}{dt} = \frac{d\alpha}{dt}(t) X_1 e^{\alpha(t)X_1} \tilde{c}_1(t) + e^{\alpha(t)X_1} \frac{d\tilde{c}_1}{dt}(t)$$

とかけるのでこれを接続 1 形式に代入すると \$e^{\alpha(t)X\_1} \frac{d\tilde{c}\_1}{dt}(t)\$ は水平ベクトルと考えることができるから

$$\begin{aligned} k_{c(t)} &= -\theta_1 \left( \frac{d}{dt} \tilde{c}_2(t) \right) \\ &= -\theta_1 \left( \frac{d\alpha}{dt}(t) X_1 e^{\alpha(t)X_1} \tilde{c}_1(t) + e^{\alpha(t)X_1} \frac{d\tilde{c}_1}{dt}(t) \right) \\ &= \frac{d\alpha}{dt}(t) + 0 \end{aligned}$$

となる。よって \$a\$ から \$b\$ まで積分すると

$$- \int_a^b k_c(t) dt = \alpha(a) - \alpha(b) = \mu$$

となる。

## 13.6 ホロノミー

$S^2$  の 2 つの曲線  $c_0, c_1 : [0, 1] \rightarrow S^2$  で共通の始点と終点を持つ場合を考える。

この曲線に沿う平行移動は共に  $\pi_\rho^{-1}(p)$  から  $\pi_\rho^{-1}(q)$  への写像であるが、これはどういう時に一致するか、考えてみたい。

ここに登場するのがホロノミーという概念になる。

物理にとっても重要な概念になるので後の章で詳しくふれる。ここで  $SO_3$  に持ち上げた曲面上の平行移動との関連を考える。

曲線  $c : [a, b] \rightarrow S^2$  が閉じている場合、

$$c(a) = c(b) = p$$

とおく。この時  $c$  に沿う平行移動  $P_c$  は  $p$  のファイバーから自身への写像とみなせる。

ファイバー上の点  $A$  の像  $P_c(A)$  が  $A$  と同じファイバー上にあるから、ある元  $g \in S^1$  があって、

$$P_c(A) = \rho_g(A)$$

となる。ファイバー上の別の点  $B$  の像  $P_c(B)$  についても、ある元  $h \in S^1$  があり、

$$P_c(B) = \rho_h(B)$$

が成り立つ。しかし、13.5 から、作用と平行移動の同変性から、このとき

$$g = h$$

である。すなわち、閉曲線  $c : [a, b] \rightarrow S^2$  により決まる  $g = g_c \in S^1$  があって、任意の  $A \in \pi_\rho^{-1}(c(a))$  に対し、

$$P_c(A) = \rho_{g_c}(A)$$

となる。この  $S^1$  の元  $g_c$  を閉曲線  $c$  に沿うホロノミーという。例えば前節の

$$g_c = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

となる角度  $t \pmod{2\pi}$  をホロノミーというこもある。一般にホロノミーは一周させた時のある関数の変化量である。

### 13.6.1 面積

$S^2$  の閉曲線  $c : [a, b] \rightarrow S^2$  は領域  $D$  を正の向きに 1 周するものとする。

この時  $D$  の面積を  $\alpha$  とすると  $c$  に沿うホロノミーは

$$g_c = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}^{-1}$$

となる。これを示しながらホロノミーを理解していこう。

$D$  とその境界  $\partial D = c([a, b])$  を合わせたものを  $\bar{D}$  とおく。この  $\bar{D}$  を適当な写像  $f$  で  $SO_3$  にリフトする。

$$f : \bar{D} \rightarrow SO_3$$

この時、射影との合成は恒等写像になる。

$$\pi_\rho \circ f = id_{\bar{D}}$$

$f \circ c$  は  $c$  の 1 つのリフトであると考えることができる。各  $t \in [a, b]$  において  $f(c(t))$  も  $\tilde{c}(t)$  も同じファイバー

$$(\pi_\rho)^{-1}(c(t))$$

上にあるとよい。従って、式 12.21 から

$$c(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix} A \in SO_3$$

だったので

$$A = f(c(a)) \quad (13.13)$$

において、 $t$  の可微分関数  $s(t)$  で、持ち上げを

$$\tilde{c}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos s(t) & -\sin s(t) \\ 0 & \sin s(t) & \cos s(t) \end{pmatrix} \cdot (f \circ c(t)), \quad (\forall t \in [a, b]) \quad (13.14)$$

とすることができる。曲面上の点を式 13.13 で  $A = f(c(a))$  と持ち上げで表していることに注意する。特に  $s(a) = 0$  となるものを選ぶとこれは一意で決まり、式 12.11 から  $\mathfrak{so}_3$  での基底を次のようにおけた。

$$e^{tX_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix}, e^{tX_2} = \begin{pmatrix} \cos t & 0 & \sin t \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin t & 0 & \cos t \end{pmatrix}, e^{tX_3} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

よってここでは次の基底をとる。

$$\hat{g}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos s(t) & -\sin s(t) \\ 0 & \sin s(t) & \cos s(t) \end{pmatrix} = e^{s(t)X_1}$$

この時、13.14 は

$$\tilde{c}(b) = P_c(A) = \hat{g}(b)A = \hat{g} \cdot (f \circ c) \quad (13.15)$$

とかけることになり。これから角度  $s(b)$  が  $c$  に沿うホロノミーである。  
 $\tilde{c}$  の定義から上式を微分すると

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{c} &= \left( \frac{d}{dt} \hat{g} \right) \cdot (f \circ c) + \hat{g} \cdot \left( \frac{d}{dt} f \circ c \right) \\ &= s' X_1 e^{s(b)X_1} \cdot (f \circ c) + \hat{g} \cdot \left( \frac{d}{dt} f \circ c \right) \end{aligned}$$

となるのでこれを接続 1 形式に代入すると式 12.25 より、0 にならないといけなかったから 1 成分をとり、

$$\begin{aligned} 0 &= \theta_1 \left( \frac{d}{dt} \tilde{c} \right) \\ &= s' \theta_1 \left( X_1 e^{s(b)X_1} \cdot (f \circ c) \right) + \theta_1 \left( \hat{g} \cdot \left( \frac{d}{dt} f \circ c \right) \right) \\ &= s' + \theta_1 \left( \frac{d}{dt} f \circ c \right) \end{aligned}$$

となる。よって

$$s' = -\theta_1 \left( \frac{d}{dt} f \circ c \right)$$

である。これが  $\tilde{c}$  に沿うパラメタ  $t$  に対する変化率とみれば積分すれば、 $t$  微分を含むので

$$\begin{aligned} s(b) &= \int_a^b s' dt = - \int_a^b \theta_1 \left( \frac{d}{dt} f \circ c \right) dt \\ &= - \int_a^b \theta_1 d(f \circ c) \\ &= - \int_{f \circ c} \theta_1 \end{aligned}$$

が得られる。これは  $f \circ c$  に沿う 1 形式  $\theta_1$  の積分とみなせる。

式 12.55 から曲率形式  $\kappa_{S^2}$  は  $S^2$  の面積要素  $\omega_{S^2}$  と一致したので

$$\partial D = c([a, b])$$

だから、ストークスの定理を用いれば  $\omega_{S^2} = d\theta_1$  から、関数  $f(D)$  の積分区間が領域  $D$  の積分区間に変えて、

$$s(b) = - \int_{f \circ c} \theta_1 = - \int_{f(D)} d\theta_1 = - \int_D \omega_{S^2} \quad (13.16)$$

となる。これは前章でみたガウス・ボネの定理である。

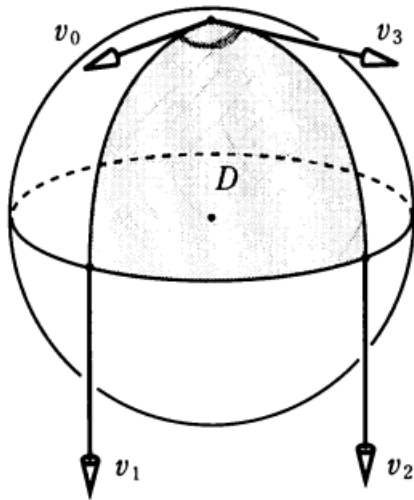


図 13.5: [11] より：測地線で囲まれる領域  $D$ 、この面積にマイナスをかけるとホロノミーである。

例えば、上の図のように、球面上の領域  $D$  をとると、この  $D$  の境界はどれも大円の 1 部で測地線であることがわかる。

従ってこの境界に沿ってベクトル移動をすると、図のように  $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3$  となる。

この 1 周でベクトルのなす角が 0 にならず  $\pi/2$  である。これは領域  $D$  の面積に等しい。これに符号  $-$  をかければホロノミーになる。

$$s = -\frac{\pi}{2}$$

一方で

$$v_0 \times v_3 = 1$$

である。  $\nabla$



### 13.6.2 測地曲率

リーマン幾何学は第1基本量  $g_{ij}$  から出発する幾何学なので、一般の曲面において局所座標  $\phi$  に関する第1基本量を  $g_{ij}$  とすると

式 3.29 より、

$$g_{ij}(u_1, u_2) = \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial u_i}(u_1, u_2), \frac{\partial \phi}{\partial u_j}(u_1, u_2) \right\rangle$$

であった。従って曲線  $c$  の長さ  $L$  は線素  $ds$  を積分すればいいが、これは第1基本量で表すことができる。局所座標  $u$  を用いて

$$L = \int ds = \int \sqrt{\sum g_{ij} \frac{du_i}{dt} \frac{du_j}{dt}} dt$$

$$ds = \sqrt{\sum g_{ij} \frac{du_i}{dt} \frac{du_j}{dt}} dt$$

とかける。もちろんこれを2乗すると

$$ds^2 = g_{ij} du_i du_j$$

前節でみたようにローレンツ変換の章では式 2.9 より

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2$$

である。この時  $u_1, u_2$  は座標で

$$c(t) = \phi(u_1(t), u_2(t))$$

とかける。曲面上の2点を結ぶ全ての曲線を考え、その中で最も距離が短いものがあれば、それを最短線という。

大円は最短線ではないが、測地線である。しかし、十分小さい領域であれば測地線は最短線になる。

これは第2部でみたように微分方程式に長さを最小にする条件をいれるとオイラー・ラグランジュ方程式になる。

これは後で見るようにレヴィ・ティビタ接続の測地線と一致する。

## 14 曲率の幾何

### 14.1 曲率の幾何学的意味

第2部では Riemann 曲率テンソルは平行移動について非可換であることを示した。式 5.6 で、曲線の平行移動のずれがベクトルの交換積になることをみた。前節では  $SO_3$  特に球面上での接続等を考えたが、

ここではさらに一般化していきたい。

そこで主束上で曲率の意味を考える。

水平ベクトル  $X, Y \in H_u P$  とすると曲率  $\Omega(X, Y)$  は Lie 括弧積  $[X, Y]$  の垂直成分を与えていることをまずみておこう。

この時、 $\omega(X) = \omega(Y) = 0$  だから第2部の式より

$$d\omega([X, Y]) = X[\omega(Y)] - Y[\omega(X)] - \omega([X, Y]) = -\omega([X, Y])$$

よって

$$d_p \omega(X, Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X, Y]) = -\omega([X, Y])$$

$X^H = X, Y^H = Y$  だから

$$\Omega(X, Y) = d_p \omega(X, Y) = -\omega([X, Y])$$

となる。

ここでチャート  $U_i$  上の座標系  $\{x^\mu\}$  を考える。接ベクトル

$$V = \frac{\partial}{\partial x_1}, W = \frac{\partial}{\partial x_2}$$

とする。無限小の平行四辺形  $\gamma$  が頂点  $O = \{0\}, P = \{\epsilon, 0, \dots, 0\}, Q = \{\epsilon, \delta, 0, \dots, 0\}, R = \{0, \delta, 0, \dots, 0\}$  となるもの考える。

この  $\gamma$  の水平持ち上げを  $\tilde{\gamma}$  とする。  $X, Y \in H_u P$  とし

$$\pi_* X = \epsilon V, \pi_* Y = \delta W$$

となるとすると

$$\pi_* ([X, Y]^H) = \epsilon \delta [X, Y] = \epsilon \delta \left[ \frac{\delta}{\delta x^1}, \frac{\delta}{\delta x^2} \right] = 0$$

とすることができる。つまり図のように  $[X, Y]$  は垂直方向にあり、平行四辺形のループ  $\gamma$  の持ち上げで  $\tilde{\gamma}$  が  $P$  内では閉じていないことを示している。

この時の開きが同じファイバー上で始点と終点をつなぐ垂直ベクトル  $[X, Y]$  に比例するわけである。

さらに曲率とはこの距離で括弧積からさらに 1 次微分形式をとり、

$$\Omega(X, Y) = -\omega([X, Y]) = A$$

になる。ただし、 $A \in \mathfrak{g}$  は基本ベクトル場

$$A^\# = [X, Y]$$

をつくる。前節でのホロノミーとはこうした閉曲線を水平持ち上げたときの始点と終点とのずれで、これが曲率に依存するわけである。

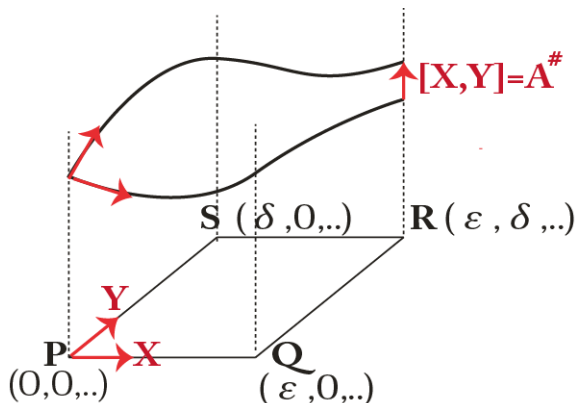


図 14.1: 微小平行四辺形の水平持ち上げ、閉曲線は持ち上げら得ると閉じなくなる。そのずれが基底ベクトルの交換積になる。

## 14.2 曲率の局所表示

曲率  $\Omega$  を局所座標系だけで表すことを考えよう。これには前節の切断を利用する。第 2 部の引き戻しの章で関数  $f$  の  $\phi$  による引き戻しは

$$\phi^* f = f \circ \phi \in \Omega^0(R^n)$$

例えばともに  $n$  次元として式から体積形式として  $V$  上に 1 次微分形式を

$$\omega = dy^1 \wedge dy^2 \wedge \cdots \wedge dy^n$$

で定義すると

$$\phi^*\omega = \det \left[ \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right] dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

として定義された。ベクトル場  $A$  は  $\sigma$  を多様体  $M$  のチャート  $U$  上で定義された局所切断であるとすれば

$$A = \sigma^*\omega \quad (14.1)$$

となるから、局所表示を  $\mathcal{F}$  として次のように曲率の引き戻しにより

$$\mathcal{F} = \sigma^*\Omega$$

で表すことができる。式 14.39 から

$$\mathcal{F} = dA + A \wedge A \quad (14.2)$$

または

$$F(X, Y) = dA(X, Y) + [A(X), Y(X)]$$

が成り立つ Cartan 構造方程式からも

$$\mathcal{F} = \sigma^*(d_p\omega + \omega \wedge \omega) = d_p\sigma^*\omega + \sigma^*\omega \wedge \sigma^*\omega \quad (14.3)$$

と直接導くことができる。

では局所座標として  $x^\mu = \phi(p)$  をチャート  $U$  上にもつ  $\mathcal{F}$  の成分表示求める。

$$A = A_\mu dx^\mu, \quad (A_\mu \in g)$$

をゲージポテンシャルとする。これを式 14.2 に代入すると

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]$$

となる。この  $\mathcal{F}$  は曲率 2 形式という。  $A_\mu, F_{\mu\nu}$  は  $g$  値関数だから  $g$  の基底  $\{T_\alpha\}$  を用いて

$$A_\mu = A_\mu^\alpha T_\alpha, \quad F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^\alpha T_\alpha$$

と展開できて、基底については

$$[T_\alpha, T_\beta] = f_{\alpha\beta}^\gamma T_\gamma$$

という交換関係になったから代入すると

$$F_{\mu\nu}^\alpha = \partial_\mu A_\nu^\alpha - \partial_\nu A_\mu^\alpha + f_{\beta\gamma}^\alpha A_\mu^\beta A_\nu^\gamma$$

が得られる。これは Yang-Mills の場の強さを表している。第 7 部で扱うゲージ理論で重要な役割を担う式が導けた。

### 14.3 ピュア・ゲージ

複数のチャート  $U_i, U_j$  があり、 $U_i \cap U_j \neq \emptyset$  を満たすチャートとして  $\mathcal{F}_i, \mathcal{F}_j$  を各チャートの場の強とする。

$$\mathcal{F}_i = dA_i + A_i \wedge A_i, \quad \mathcal{F}_j = dA_j + A_j \wedge A_j \quad (14.4)$$

$U_i, U_j$  の変換関数を  $t_{ij}$  として

$$A_j = t_{ij}^{-1} A_i t_{ij} + t_{ij}^{-1} dt_{ij}$$

ここで

$$d(tt^{-1}) = t^{-1} dt + t dt^{-1} = 0$$

だから

$$dt^{-1} = -t^{-1} dt t^{-1}$$

とかけることを利用して

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_j &= d(t_{ij}^{-1} A_i t_{ij} + t_{ij}^{-1} dt_{ij}) + (t_{ij}^{-1} A_i t_{ij} + t_{ij}^{-1} dt_{ij}) \wedge (t_{ij}^{-1} A_i t_{ij} + t_{ij}^{-1} dt_{ij}) \\ &= [-t_{ij}^{-1} dt_{ij} \wedge t_{ij}^{-1} A_i t_{ij} + t_{ij}^{-1} dt_{ij} - t_{ij}^{-1} dA_i t_{ij} - t_{ij}^{-1} A_i dt_{ij} - t_{ij}^{-1} dt_{ij} t_{ij}^{-1} \wedge dt_{ij}] \\ &\quad + [t_{ij}^{-1} A_i \wedge A_i t_{ij} + t_{ij}^{-1} A_i \wedge dt_{ij} + t_{ij}^{-1} dt_{ij} t_{ij}^{-1} \wedge A_i t_{ij} + t_{ij}^{-1} dt_{ij} \wedge t_{ij}^{-1} dt_{ij}] \\ &= t_{ij}^{-1} (dA_i + A_i \wedge A_i) t_{ij} = t_{ij}^{-1} \mathcal{F}_i t_{ij} \end{aligned}$$

であり両立条件

$$\mathcal{F}_j = Ad_{t_{ij}^{-1}} \mathcal{F}_i = t_{ij}^{-1} \mathcal{F}_i t_{ij}$$

が成り立っている。

もし、ゲージポテンシャルが

$$A = g^{-1} dg \quad (14.5)$$

とかけるときはピュア・ゲージと呼ばれる。この時、場の強さは式 14.4 より

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= d(g^{-1} dg) + (g^{-1} dg) \wedge (g^{-1} dg) \\ &= -g^{-1} dg \wedge g^{-1} dg + g^{-1} d(dg) + (g^{-1} dg) \wedge (g^{-1} dg) \\ &= 0 \end{aligned}$$

これは逆も成り立つので場の力が  $\mathcal{F} = 0$  であれば式 14.5 が成り立つ。

### 14.4 Bianchi 恒等式

曲率のところで既に Bianchi 恒等式は登場したが、接続形式を用いて導いておこう。水平ベクトルを  $X$  とすると  $\omega(X) = 0$  であった。れをつかうことで簡単に導くことができる。 $g$  の基底を  $\{T_\alpha\}$  とする。するとこの基底を使い次のように接続は成分表記できる。

$$\omega = \omega^\alpha T_\alpha, \quad \Omega = \Omega^\alpha T_\alpha$$

とすると式 14.39 より曲率  $\Omega$  が

$$\Omega^\alpha = d_p \omega^\alpha + f_{\beta\gamma}^\alpha \omega^\beta \wedge \omega^\gamma \quad (14.6)$$

とかけた。この段階では  $d_p \omega^\alpha$  があるので 0 にはならない。ところがこれを外微分すると、 $d(d_p \omega) = 0$  だから

$$d_P \Omega^\alpha = f_{\beta\gamma}^\alpha d_p \omega^\beta \wedge \omega^\gamma + f_{\beta\gamma}^\alpha \omega^\beta \wedge d_P \omega^\gamma$$

とかける。これから  $\omega(X) = 0$  を用いて 0 にすることができる。よって  $X, Y, Z \in T_u P$  として

$$D\Omega(X, Y, Z) \equiv d_P \Omega(X^H, Y^H, Z^H) = 0$$

が成り立つ。これが **Bianchi 恒等式** である。

このように接空間を成分に分けることから 2 回の微分作用の結果 0 値をとることができるようになるわけである。

これはさらに幾何学的な説明をつけることができる

前節で曲率の局所表示を切断と引き戻しでおこなったので、同じように Bianchi 恒等式の局所表示をしてみよう。

式 14.1 のように式 14.3、14.6 から

$$\sigma^*(d_P \Omega) = d \cdot \sigma^* \Omega = d\mathcal{F}$$

とすると

$$\begin{aligned} \sigma^*(d_P \omega \wedge \omega - \omega \wedge d_P \omega) &= d\sigma^* \omega \wedge \sigma^* \omega - \sigma^* \omega \wedge d\sigma^* \omega \\ &= d\mathcal{A} \wedge \mathcal{A} - \mathcal{A} \wedge d\mathcal{A} = \mathcal{F} \wedge \mathcal{A} - \mathcal{A} \wedge \mathcal{F} \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\mathcal{F} &= d\mathcal{F} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{F} - \mathcal{F} \wedge \mathcal{A} \\ &= d\mathcal{F} + [\mathcal{A}, \mathcal{F}] = 0 \end{aligned}$$

となる。従って  $\mathcal{D}$  の  $M$  上の  $g$  値  $p$  形式  $\eta$  への作用が

$$\mathcal{D}\eta \equiv d\eta + [\mathcal{A}, \eta]$$

とすればよい。特に  $G = U(1)$  については可換であるから

$$\mathcal{D}\mathcal{F} = d\mathcal{F}$$

## 14.5 曲率と接続

曲率についてはすでにリーマン曲率を中心に学んできたが、ここではさらに一般化をめざすため前節の接続形式から考えてみる。

標構をつくる多脚場は  $m$  次元リーマン多様体において  $m^2$  の次元を持つことになる。しかし計量は  $g_{\mu\nu}$  から  $m(m+1)/2$  だけの自由度を持つ。これは同じ計量に対しても正規直交標構が複数あり、それらは各点において局所な直交回転により関係づけられる。これを次のように表す。変換行列を  $\Lambda$  として

$$\hat{l}^\alpha \rightarrow \hat{l}^{\alpha'}(p) = \Lambda_\beta^\alpha(p) \hat{l}^\beta(p)$$

対応する多脚場は

$$e_\mu^\alpha(p) \rightarrow e_\mu^{\alpha'}(p) = \Lambda_\beta^\alpha(p) e_\mu^\beta(p)$$

と変換するが添え字  $\lambda, \mu, \nu, \dots$  は座標変換するが添え字  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  は直交回転の下で変換され、座標変換では不変である。

計量テンソルが局所回転で不変であることから

$M$  が  $m$  次元 Riemann 多様体であれば

$$\Lambda_\beta^\alpha \delta_{\alpha\delta} \Lambda_\gamma^\delta = \delta_{\beta\gamma}$$

となるが  $M$  が  $m$  次元 Lorentz 多様体であれば

$$\Lambda_{\beta}^{\alpha} \eta_{\alpha\delta} \Lambda_{\gamma}^{\delta} = \eta_{\beta\gamma}$$

となる。ただし  $\eta$  は相対性理論の章からも

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{cases} 1 & (\mu = \nu = 1, 2, 3) \end{cases}$$

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{cases} 0 & (\mu \neq \nu) \end{cases}$$

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{cases} -1 & (\mu = \nu = 0) \end{cases}$$

で定義される。よって  $M$  が  $m$  次元 Riemann 多様体であれば

$$\{\Lambda_{\beta}^{\alpha}(p)\} \in SO(m)$$

$M$  が  $m$  次元 Lorentz 多様体であれば反対称成分を 1 つ持ち、

$$\{\Lambda_{\beta}^{\alpha}(p)\} \in SO(m-1, 1)$$

となりこの Lie 群の次元は  $m(m-1)/2$  となるがこれは  $e_{\mu}^{\alpha}$  と  $g_{\mu\nu}$  の次元の差であり

$$\dim\{\Lambda_{\beta}^{\alpha}(p)\} = \dim\{e_{\mu}^{\alpha}\} - \dim\{g_{\mu\nu}\}$$

となる。また回転のもとの基底の変換則は

$$\hat{e}'_{\alpha} = \hat{e}_{\beta} (\Lambda^{-1})_{\alpha}^{\beta} \quad (14.7)$$

となる。ここで次のような  $(1, 1)$  型のテンソル  $t_{\nu}^{\mu}$  を導入しよう。

$$\begin{aligned} t &= t_{\nu}^{\mu} e_{\mu} \otimes dx^{\nu} \\ &= t_{\beta}^{\alpha} \hat{e}_{\alpha} \otimes \hat{l}^{\beta} \end{aligned}$$

のように世界標構  $(\mu, \nu)$  と局所標構  $(\alpha, \beta)$  で表現されるが回転のもとの世界標構は影響をうけない。局所標構は他にもいろいろな表現ができるので別な標構として式 14.7 から

$$\{\hat{e}'_{\alpha}\} = \{\hat{e}_{\beta} (\Lambda^{-1})_{\alpha}^{\beta}\}$$

$$\{\hat{l}'^{\alpha}\} = \{\Lambda_{\beta}^{\alpha} \hat{l}^{\beta}\}$$

を選ぶとテンソル  $t$  が

$$\begin{aligned} t' &= t'_{\beta}^{\alpha} \hat{e}'_{\alpha} \otimes \hat{l}'^{\beta} \\ &= t'_{\beta}^{\alpha} \hat{e}_{\gamma} (\Lambda^{-1})_{\alpha}^{\gamma} \otimes \Lambda_{\delta}^{\beta} \hat{l}^{\delta} \end{aligned}$$

となることから変換則として

$$t'_{\beta}^{\alpha} = \Lambda_{\delta}^{\alpha} t_{\gamma}^{\delta} (\Lambda^{-1})_{\beta}^{\gamma} \quad (14.8)$$

とならなければならない。正規直交表示の添え字は回転角が決まるのでは  $\Lambda(\Lambda^{-1})$  によって回転する。

## 14.6 接続 1 形式

変換規則の応用例として接続 1 形式を考えよう。そのために振率 2 形式の変換を考えて式 14.34 から

$$\begin{aligned} T'^{\alpha} &= \Lambda_{\beta}^{\alpha} T^{\beta} \\ &= \Lambda_{\beta}^{\alpha} \left( d\hat{l}^{\beta} + \omega_{\gamma}^{\beta} \wedge \hat{l}^{\gamma} \right) \\ &= d\hat{l}'^{\beta} + \omega'_{\gamma}{}^{\beta} \wedge \hat{l}'^{\gamma} \end{aligned}$$

が成り立つので  $\hat{l}'^{\beta} = \Lambda_{\alpha}^{\beta} \hat{l}^{\alpha}$  を上式に代入すると

$$\begin{aligned} T'^{\alpha} &= d\left(\Lambda_{\alpha}^{\beta} \hat{l}^{\beta}\right) + \omega'_{\delta}{}^{\beta} \wedge \left(\Lambda_{\gamma}^{\delta} \hat{l}^{\gamma}\right) \\ &= d\Lambda_{\alpha}^{\beta} \hat{l}^{\beta} + \Lambda_{\beta}^{\alpha} d\hat{l}^{\beta} + \omega'_{\delta}{}^{\beta} \wedge \left(\Lambda_{\gamma}^{\delta} \hat{l}^{\gamma}\right) \end{aligned}$$

はじめの式を引くと  $\hat{l}^{\gamma}$  の外積を外に出して、次が成り立つことになる。

$$\begin{aligned} d\Lambda_{\alpha}^{\beta} \hat{l}^{\beta} + \omega'_{\delta}{}^{\beta} \wedge \left(\Lambda_{\gamma}^{\delta} \hat{l}^{\gamma}\right) - \Lambda_{\beta}^{\alpha} \omega_{\gamma}^{\beta} \wedge \hat{l}^{\gamma} &= 0 \\ \left(d\Lambda_{\gamma}^{\beta} + \omega'_{\delta}{}^{\beta} \Lambda_{\gamma}^{\delta} - \Lambda_{\beta}^{\alpha} \omega_{\gamma}^{\beta}\right) \wedge \hat{l}^{\gamma} &= 0 \\ \omega'_{\delta}{}^{\beta} \Lambda_{\gamma}^{\delta} &= \Lambda_{\beta}^{\alpha} \omega_{\gamma}^{\beta} - d\Lambda_{\gamma}^{\beta} \end{aligned}$$

となるので単位行列の微分

$$(\Lambda \Lambda^{-1})' = d\Lambda (\Lambda^{-1}) + \Lambda d\Lambda^{-1} = 0 \quad (14.9)$$

を利用して右から両辺に  $\Lambda^{-1}$  をかけると

$$\begin{aligned} \omega'_{\delta}{}^{\alpha} &= \Lambda_{\beta}^{\alpha} \omega_{\gamma}^{\beta} (\Lambda^{-1})_{\delta}^{\gamma} - d\Lambda_{\gamma}^{\beta} (\Lambda^{-1})_{\delta}^{\gamma} \\ \omega'_{\beta}{}^{\alpha} &= \Lambda_{\delta}^{\alpha} \omega_{\gamma}^{\delta} (\Lambda^{-1})_{\beta}^{\gamma} + \Lambda_{\beta}^{\alpha} (d\Lambda_{\beta}^{\delta})^{-1} \end{aligned}$$

となる。曲率 2 形式については式 14.8 から

$$\begin{aligned} R'^{\alpha}_{\beta} &= d\omega'_{\beta}{}^{\alpha} + \omega'_{\gamma}{}^{\alpha} \wedge \omega'_{\beta}{}^{\gamma} \\ &= \Lambda_{\delta}^{\alpha} R_{\gamma}^{\delta} (\Lambda^{-1})_{\beta}^{\gamma} \end{aligned}$$

### 14.6.1 Levi-Civita 接続

$\nabla$  が Levi-Civita 接続ならば振率が 0 になったから

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} \quad (14.10)$$

が成り立った。これと同様に Riemann 多様体とすると Ricci 回転係数として

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = \delta_{\alpha\delta} \Gamma_{\beta\gamma}^{\delta} \quad (14.11)$$

を定義すると式 14.31 から

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\delta} = e_{\nu}^{\delta} e_{\alpha}^{\mu} \nabla_{\mu} e_{\beta}^{\nu}$$

となるから式 3.10 から

$$g_{\mu\nu} = e_{\mu}^{\alpha} e_{\nu}^{\beta} \delta_{\alpha\beta}$$

$$g = g_{\mu\nu} e_{\alpha}^{\mu} e_{\beta}^{\nu} \hat{l}^{\alpha} \otimes \hat{l}^{\beta}$$

$$\nabla_{\mu} (e_{\gamma}^{\lambda} e_{\lambda}^{\delta}) = \nabla_{\mu} (e_{\gamma}^{\delta} \delta_{\delta}^{\lambda} e_{\lambda}^{\delta}) = \nabla_{\mu} g = 0$$

を用いて  $e_{\beta}^{\mu} = e_{\beta}^{\nu} \delta_{\nu}^{\mu}$  から

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\beta\gamma} &= \delta_{\alpha\delta} \Gamma_{\beta\gamma}^{\delta} \\ &= \delta_{\alpha\delta} e_{\lambda}^{\delta} e_{\beta}^{\mu} \nabla_{\mu} e_{\gamma}^{\lambda} \\ &= -\delta_{\alpha\delta} e_{\gamma}^{\lambda} e_{\beta}^{\mu} \nabla_{\mu} e_{\lambda}^{\delta} \\ &= -\delta_{\alpha\delta} e_{\gamma}^{\delta} \delta_{\delta}^{\lambda} e_{\beta}^{\mu} \nabla_{\mu} e_{\lambda}^{\delta} \\ &= -\delta_{\gamma\delta} e_{\lambda}^{\delta} e_{\beta}^{\mu} \nabla_{\mu} e_{\alpha}^{\lambda} \\ &= -\Gamma_{\gamma\beta\alpha} \end{aligned}$$

となる。接続 1 形式を用いると  $\omega_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\gamma} \omega_{\beta}^{\gamma} = -\omega_{\beta\alpha}$  となる。これは式 14.33 から明らかである。また振率が 0 であることは、式 14.33、式 14.34 より

$$d\hat{l}^{\alpha} + \omega_{\beta}^{\alpha} \wedge \hat{l}^{\beta} = d\hat{l}^{\alpha} + \Gamma_{\gamma\beta}^{\alpha} \hat{l}^{\gamma} \wedge \hat{l}^{\beta} = 0 \quad (14.12)$$

となる。これから

$$d\hat{l}^{\alpha} + \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} \hat{l}^{\beta} \wedge \hat{l}^{\gamma} = 0$$

との差をとれば

$$(\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} + \Gamma_{\gamma\beta}^{\alpha}) \hat{l}^{\gamma} \wedge \hat{l}^{\beta} = 0$$

となるので

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = -\Gamma_{\gamma\beta}^{\alpha} \quad (14.13)$$

であることがわかる。

また振率が 0 であれば式 14.27 から

$$\begin{aligned} [\hat{e}_{\alpha}, \hat{e}_{\beta}] &= e_{\alpha}^{\gamma} \hat{e}_{\gamma} \\ &= e_{\nu}^{\gamma} \left[ e_{\alpha}^{\mu} \partial_{\mu} e_{\beta}^{\nu} - e_{\beta}^{\mu} \partial_{\mu} e_{\alpha}^{\nu} \right] \hat{e}_{\gamma} \end{aligned} \quad (14.14)$$

さらに式 14.29 から

$$\partial_{\mu} e_{\beta}^{\nu} = \nabla_{\mu} e_{\beta}^{\nu} + e_{\beta}^{\lambda} \Gamma_{\mu\lambda}^{\nu}$$

を代入すると交換関係として

$$\begin{aligned} e_{\nu}^{\gamma} \left[ e_{\alpha}^{\mu} \partial_{\mu} e_{\beta}^{\nu} - e_{\beta}^{\mu} \partial_{\mu} e_{\alpha}^{\nu} \right] \hat{e}_{\gamma} &= e_{\nu}^{\gamma} \left[ e_{\alpha}^{\mu} (\nabla_{\mu} e_{\beta}^{\nu} + e_{\beta}^{\lambda} \Gamma_{\mu\lambda}^{\nu}) - e_{\beta}^{\mu} (\nabla_{\mu} e_{\alpha}^{\nu} + e_{\alpha}^{\lambda} \Gamma_{\mu\lambda}^{\nu}) \right] \hat{e}_{\gamma} \\ &= e_{\nu}^{\gamma} \left[ \nabla_{\alpha} e_{\beta}^{\nu} - \nabla_{\beta} e_{\alpha}^{\nu} + e_{\alpha}^{\mu} e_{\beta}^{\lambda} (\Gamma_{\mu\lambda}^{\nu} - \Gamma_{\mu\lambda}^{\nu}) \right] \hat{e}_{\gamma} \\ &= \nabla_{\alpha} e_{\beta}^{\gamma} \hat{e}_{\gamma} - \nabla_{\beta} e_{\alpha}^{\gamma} \hat{e}_{\gamma} \\ [\hat{e}_{\alpha}, \hat{e}_{\beta}] &= \nabla_{\alpha} \hat{e}_{\beta} - \nabla_{\beta} \hat{e}_{\alpha} \end{aligned} \quad (14.15)$$



が得られる。つまり基底の交換関係は接続を基底に作用させた差になる。さらに式 14.28 から

$$\nabla_\alpha \hat{e}_\beta \equiv \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \hat{e}_\gamma$$

を用いて

$$[\hat{e}_\alpha, \hat{e}_\beta] = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \hat{e}_\gamma - \Gamma_{\beta\alpha}^\gamma \hat{e}_\gamma$$

だから式 14.14 から

$$e_{\alpha\beta}^\gamma = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma - \Gamma_{\beta\alpha}^\gamma \quad (14.16)$$

とおけることがわかる。これから式 14.32 の Riemann 曲率テンソルが

$$\begin{aligned} R_{\beta\gamma\delta}^\alpha &= \hat{e}_\gamma \Gamma_{\delta\beta}^\alpha \hat{e}_\epsilon - \hat{e}_\delta \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha + \Gamma_{\delta\beta}^\epsilon \Gamma_{\gamma\epsilon}^\alpha - \Gamma_{\gamma\beta}^\epsilon \Gamma_{\delta\epsilon}^\alpha - e_{\gamma\delta}^\epsilon \Gamma_{\epsilon\beta}^\alpha \\ &= \hat{e}_\gamma \Gamma_{\delta\beta}^\alpha \hat{e}_\epsilon - \hat{e}_\delta \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha + \Gamma_{\delta\beta}^\epsilon \Gamma_{\gamma\epsilon}^\alpha - \Gamma_{\gamma\beta}^\epsilon \Gamma_{\delta\epsilon}^\alpha - (\Gamma_{\gamma\delta}^\epsilon - \Gamma_{\delta\gamma}^\epsilon) \Gamma_{\epsilon\beta}^\alpha \end{aligned} \quad (14.17)$$

と決まる。

### 14.6.2 球面計量での例

例えば球面  $S^2$  を考えると

$$g = d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\phi \otimes d\phi$$

と計量が与えられているので  $e_\mu^\alpha$  の成分として 2 脚場となので次のように表す

$$\begin{pmatrix} e_\theta^1 & e_\phi^1 \\ e_\theta^2 & e_\phi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin \theta \end{pmatrix} \quad (14.18)$$

さらに接続について  $\omega_\beta^\alpha \equiv \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha \hat{l}^\gamma$  だったから

$$\omega_{11} = \omega_{22} = 0$$

$$\omega_1^1 = \omega_2^2 = 0 \quad (14.19)$$

振率が 0 であれば式 14.34 から振率がない場合は

$$d\hat{l}^\alpha + \omega_\beta^\alpha \wedge \hat{l}^\beta = 0 \quad (14.20)$$

となるから接続係数が 0 にならない成分について

$$d(d\theta) + \omega_2^1 \wedge \sin \theta d\phi = 0$$

$$d(\sin \theta d\phi) + \omega_1^2 \wedge d\theta = 0$$

よって 2 番目の式から

$$\omega_1^2 = \cos \theta d\phi$$

である。よって

$$\omega_2^1 = -\cos \theta d\phi$$

が得られる。よって Cartan 構造式 14.34 から

$$d\hat{l}^\alpha + \omega_\beta^\alpha \wedge \hat{l}^\beta = \frac{1}{2} T_{\beta\gamma}^\alpha \hat{l}^\beta \wedge \hat{l}^\gamma$$

$$d\omega_\beta^\alpha + \omega_\gamma^\alpha \wedge \omega_\beta^\gamma = \frac{1}{2} R_{\beta\gamma\delta}^\alpha \hat{l}^\gamma \wedge \hat{l}^\delta$$

となったのでこの場合は

$$\frac{1}{2} R_{1\gamma\delta}^1 \hat{l}^\gamma \wedge \hat{l}^\delta = \omega_2^1 \wedge \omega_1^2$$

$$\frac{1}{2} R_{2\gamma\delta}^2 \hat{l}^\gamma \wedge \hat{l}^\delta = \omega_1^2 \wedge \omega_2^1$$

$$\frac{1}{2} R_{2\gamma\delta}^1 \hat{l}^\gamma \wedge \hat{l}^\delta = d\omega_2^1$$

$$\frac{1}{2} R_{1\gamma\delta}^2 \hat{l}^\gamma \wedge \hat{l}^\delta = d\omega_1^2$$

となるので0ではない成分として

$$\frac{1}{2} R_{212}^1 \hat{l}^1 \wedge \hat{l}^2 = \frac{1}{2} R_{212}^1 d\theta \wedge d\phi = d\omega_2^1$$

だから

$$\frac{1}{2} (R_{212}^1 - R_{221}^1) d\theta \wedge d\phi = -d(\cos\theta d\phi)$$

となるので

$$R_{212}^1 = -R_{221}^1 = \sin\theta$$

が得られる。座標基底の場合は  $e_\alpha^\theta$  で変換し、式 14.18 を代入し、

$$R_{\phi\theta\phi}^\theta = e_\alpha^\theta e_\phi^\beta e_\theta^\gamma e_\phi^\delta R_{\beta\gamma\delta}^\alpha = \frac{1}{\sin^2\theta} R_{212}^1 = \frac{1}{\sin\theta} \quad (14.21)$$

となる。

### 14.6.3 Schwarzschild 計量での例

次によく知られている Schwarzschild 計量の場合を見ておこう。

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

$$= -\hat{l}^0 \otimes \hat{l}^0 + \hat{l}^1 \otimes \hat{l}^1 + \hat{l}^2 \otimes \hat{l}^2 + \hat{l}^3 \otimes \hat{l}^3$$

となるので

$$\hat{l}^0 = \sqrt{1 - \frac{2M}{r}} dt$$

$$\hat{l}^1 = 1/\sqrt{1 - \frac{2M}{r}} dr$$

$$\hat{l}^2 = r d\theta$$

$$\hat{l}^3 = r \sin\theta d\phi$$

であり次の条件が加わる。

$$2M < r$$

$$0 \leq \theta \leq \pi$$

$$0 \leq \phi \leq 2\pi$$

計量との両立性として 14.19 から

$$\omega_1^1 = \omega_2^2 = \omega_3^3 = \omega_0^0 = 0 \quad (14.22)$$

であり、式 14.20 から振率が消えるので

$$d\hat{l}^\alpha + \omega_\beta^\alpha \wedge \hat{l}^\beta = 0$$

さらに  $\omega_\beta^\alpha \equiv \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha \hat{l}^\gamma$  だったから 0 にならない成分として

$$g_{\mu\lambda} g^{\lambda\nu} = \delta_\mu^\nu$$

$$\delta_0^0 = g_{00}g^{00} + g_{01}g^{10} + g_{02}g^{20} + g_{03}g^{30} = 1$$

$\Gamma_{\mu\nu}^\kappa = \frac{1}{2}g^{\kappa\lambda}(-\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\lambda\mu})$  だったから 0 ではない成分として

$$\begin{aligned} \Gamma_{01}^0 &= \frac{1}{2}g^{00}(-\partial_0 g_{01} + \partial_0 g_{10} + \partial_1 g_{00}) \\ &= \frac{1}{2}g^{00}(\partial_1 g_{00}) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} \frac{d}{dr} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \\ &= \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} \frac{M}{r^2} = -\frac{M}{(2M - r)r} \end{aligned} \quad (14.23)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(-\partial_1 g_{00} + \partial_0 g_{01} + \partial_0 g_{10}) \\ &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_1 g_{00}) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{d}{dr} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{M}{r^2} = -\frac{M(2M - r)}{r^3} \end{aligned} \quad (14.24)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{21}^2 &= \frac{1}{2}g^{22}(-\partial_2 g_{21} + \partial_2 g_{12} + \partial_1 g_{22}) \\ &= \frac{1}{2}g^{22}(\partial_1 g_{22}) \\ &= \frac{1}{2r^2} \frac{d}{dr} (r^2) \\ &= \frac{1}{r} \end{aligned} \quad (14.25)$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{33}^2 &= \frac{1}{2}g^{22}(-\partial_2g_{33} + \partial_3g_{32} + \partial_3g_{23}) \\
&= \frac{1}{2}g^{22}(-\partial_2g_{33}) \\
&= -\frac{1}{2r^2}\frac{d}{d\theta}(r^2\sin^2\theta) \\
&= -\sin\theta\cos\theta
\end{aligned} \tag{14.26}$$

式 14.23 より

$$\begin{aligned}
\omega_1^0 &= \Gamma_{\gamma 1}^0 \hat{l}^\gamma = \Gamma_{01}^0 \hat{l}^0 \\
&= -\frac{M}{(2M-r)r} \hat{l}^0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega_0^1 &= \Gamma_{\gamma 0}^1 \hat{l}^\gamma = \Gamma_{00}^1 \hat{l}^0 \\
&= -\frac{M(2M-r)}{r^3} \hat{l}^0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega_1^2 &= -\omega_2^1 = \Gamma_{21}^2 \hat{l}^2 \\
&= \frac{1}{r} \hat{l}^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega_3^2 &= -\omega_2^3 = \Gamma_{33}^2 \hat{l}^3 \\
&= -\cos\theta\sin\theta \hat{l}^3
\end{aligned}$$

さらに式 14.36 から曲率 2 形式  $R_\beta^\alpha = \frac{1}{2}R_{\beta\gamma\delta}^\alpha \hat{l}^\gamma \wedge \hat{l}^\delta$  は

$$d(\Gamma_{\gamma\beta}^\alpha \hat{l}^\gamma) + (\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \hat{l}^\beta) \wedge (\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \hat{l}^\alpha) = \frac{1}{2}R_{\beta\gamma\delta}^\alpha \hat{l}^\gamma \wedge \hat{l}^\delta = R_\beta^\alpha$$

となったから 0 ではない成分の一部として

$$\begin{aligned}
d\hat{l}^0 &= -\omega_\beta^0 \wedge \hat{l}^\beta \\
&= -\omega_1^0 \wedge \hat{l}^1 \\
&= \frac{M}{(2M-r)r} \hat{l}^0 \wedge \hat{l}^1
\end{aligned}$$

となるから  $\gamma=0$  となるのは次の 1 つしかなく

$$\begin{aligned}
d(\Gamma_{\gamma 1}^0 \hat{l}^\gamma) + (\Gamma_{1\gamma}^0 \hat{l}^\gamma) \wedge (\Gamma_{01}^\gamma \hat{l}^0) &= \Gamma_{01}^0 d\hat{l}^0 + (\Gamma_{10}^0 \hat{l}^1) \wedge (\Gamma_{01}^0 \hat{l}^0) \\
&= \left(-\frac{M}{(2M-r)r}\right) \frac{M}{(2M-r)r} \hat{l}^0 \wedge \hat{l}^1 + \left(-\frac{M}{(2M-r)r}\right)^2 \hat{l}^1 \wedge \hat{l}^0 \\
&= -\frac{2M^2}{(2M-r)^2 r^2} \hat{l}^0 \wedge \hat{l}^1 \\
&= \frac{1}{2}R_{101}^0 \hat{l}^0 \wedge \hat{l}^1 \\
&= R_1^0
\end{aligned}$$

よって

$$R_1^0 = -\frac{2M^2}{(2M-r)^2 r^2} \hat{l}^0 \wedge \hat{l}^1$$

$$\begin{aligned} R_0^1 &= d(\Gamma_{\gamma 0}^1 \hat{l}^\gamma) + (\Gamma_{0\gamma}^1 \hat{l}^0) \wedge (\Gamma_{10}^\gamma \hat{l}^1) \\ &= \Gamma_{00}^1 d\hat{l}^0 + (\Gamma_{00}^1 \hat{l}^0) \wedge (\Gamma_{10}^0 \hat{l}^1) \\ &= \left(-\frac{M(2M-r)}{r^3}\right) \frac{M}{(2M-r)r} \hat{l}^0 \wedge \hat{l}^1 + \left(-\frac{M(2M-r)}{r^3}\right) \frac{M}{(2M-r)r} \hat{l}^0 \wedge \hat{l}^1 \\ &= -\frac{2M^2}{r^4} \hat{l}^0 \wedge \hat{l}^1 \end{aligned}$$

であり、 $g^{11} = -(2M-r)/r$ ,  $g^{00} = -r/(2M-r)$  だから

$$\begin{aligned} R^{01} &= g^{11} R_1^0 + g^{00} R_0^1 = \left(\frac{2M-r}{r} \frac{2M^2}{(2M-r)^2 r^2} + \frac{r}{2M-r} \frac{2M^2}{r^4}\right) \hat{l}^0 \wedge \hat{l}^1 = \frac{2M^2}{r^3} \\ &= \frac{2M^2}{(2M-r)r^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_2^0 &= d(\Gamma_{\gamma 2}^0 \hat{l}^\gamma) + (\Gamma_{2\gamma}^0 \hat{l}^2) \wedge (\Gamma_{02}^\gamma \hat{l}^0) \\ &= (\Gamma_{20}^0 \hat{l}^2) \wedge (\Gamma_{02}^0 \hat{l}^0) \\ &= \end{aligned}$$

となる。

## 14.7 Cartan 構造方程式

正規直交標構は前節の接と関係している。その関係をここではみていこう。

ここでは添え字  $\lambda, \mu, \nu, \dots$  は座標基底を表し、添え字  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  は局所的な正規直交座標の基底を表すとする。

前節の捩率と曲率は次のようになった。

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

$$R(X, Y, Z) = R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$$

が与えられた。一方で式 3.11 からベクトル場  $\{\hat{e}_\alpha\}$  について

$$[\hat{e}_\alpha, \hat{e}_\beta] = e_{\alpha\beta}^\gamma \hat{e}_\gamma \quad (14.27)$$

が成り立つ。

例えば極座標で  $S^2$  上の標準計量を用いて

$$\begin{aligned} g &= d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\phi \otimes d\phi \\ &= \hat{l}^1 \otimes \hat{l}^1 + \hat{l}^2 \otimes \hat{l}^2 \end{aligned}$$

とおくと

$$\begin{aligned}\hat{l}^1 &= d\theta \\ \hat{l}^2 &= \sin\theta d\phi\end{aligned}$$

となるので2脚場として

$$\begin{pmatrix} e_\theta^1 & e_\phi^1 \\ e_\theta^2 & e_\phi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin\theta \end{pmatrix}$$

よって式 3.11 から  $e_{\alpha\beta}^\gamma$  の 0 にならない成分は

$$e_{12}^2 = -e_{21}^2 = (e_\theta^1)^{-1} e_\phi^2 \partial_\phi e_\theta^1 - (e_\phi^2)^{-1} e_\theta^1 \partial_\theta e_\phi^2 = -\cot\theta$$

となり  $-\Gamma_{\theta\phi}^\phi$  と一致する。従って共変微分と接続との関係を

$$\nabla_\alpha \hat{e}_\beta \equiv \nabla_{\hat{e}_\alpha} \hat{e}_\beta = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \hat{e}_\gamma \quad (14.28)$$

と定義する。ただしベクトル場の共変微分から

$$\hat{e}_\alpha = e_\alpha^\mu e_\mu$$

$$\nabla_\mu e_\beta^\nu = \partial_\mu e_\beta^\nu - e_\beta^\lambda \Gamma_{\mu\lambda}^\nu \quad (14.29)$$

であり、

$$e_\beta^\mu = e_\beta^\nu \delta_\nu^\mu, \quad \hat{e}_\alpha = e_\alpha^\mu e_\mu \quad (14.30)$$

だから、

$$\begin{aligned}\nabla_\alpha \hat{e}_\beta &= \nabla_\alpha e_\beta^\mu e_\mu \\ &= \nabla_\alpha e_\beta^\nu \delta_\nu^\mu e_\mu \\ &= \nabla_\alpha e_\beta^\nu e_\nu \\ &= e_\alpha^\mu \nabla_\mu e_\beta^\nu e_\nu \\ &= e_\alpha^\mu (\partial_\mu e_\beta^\nu - e_\beta^\lambda \Gamma_{\mu\lambda}^\nu) e_\nu \\ &= \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma e_\gamma^\nu e_\nu\end{aligned}$$

となり

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = e_\nu^\gamma e_\alpha^\mu (\partial_\mu e_\beta^\nu - e_\beta^\lambda \Gamma_{\mu\lambda}^\nu) = e_\nu^\gamma e_\alpha^\mu \nabla_\mu e_\beta^\nu \quad (14.31)$$

となるので捩率はこの基底を用いて成分で表すと内積をとればいいから式 14.27 を用いて

$$\begin{aligned}T_{\beta\gamma}^\alpha &= \langle \hat{l}^\alpha, T(\hat{e}_\beta, \hat{e}_\gamma) \rangle \\ &= \langle \hat{l}^\alpha, \nabla_\beta \hat{e}_\gamma - \nabla_\gamma \hat{e}_\beta - [\hat{e}_\beta, \hat{e}_\gamma] \rangle \\ &= \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha - \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha - e_{\beta\gamma}^\alpha\end{aligned}$$

を得られ、同様に曲率テンソルについても

$$\begin{aligned}
R_{\beta\gamma\delta}^\alpha &= \left\langle \hat{l}^\alpha, \nabla_\gamma \nabla_\delta \hat{e}_\beta - \nabla_\delta \nabla_\gamma \hat{e}_\beta - \nabla_{[\hat{e}_\gamma, \hat{e}_\delta]} \hat{e}_\beta \right\rangle \\
&= \left\langle \hat{l}^\alpha, \nabla_\gamma (\Gamma_{\delta\beta}^\epsilon \hat{e}_\epsilon) - \nabla_\delta (\Gamma_{\gamma\beta}^\epsilon \hat{e}_\epsilon) - e_{\gamma\delta}^\epsilon \nabla_\epsilon \hat{e}_\beta \right\rangle \\
&= \hat{e}_\gamma \Gamma_{\delta\beta}^\alpha \hat{e}_\epsilon - \hat{e}_\delta \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha + \Gamma_{\delta\beta}^\epsilon \Gamma_{\gamma\epsilon}^\alpha - \Gamma_{\gamma\beta}^\epsilon \Gamma_{\delta\epsilon}^\alpha - e_{\gamma\delta}^\epsilon \Gamma_{\epsilon\beta}^\alpha
\end{aligned} \tag{14.32}$$

となる。最後の項に構造係数が残るが次節でこれを明らかにする。

そこで接続 1 形式として

$$\omega_\beta^\alpha \equiv \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha \hat{l}^\gamma \tag{14.33}$$

を定義すると次の Cartan 構造式が成り立つ。

$$d\hat{l}^\alpha + \omega_\beta^\alpha \wedge \hat{l}^\beta = T^\alpha \tag{14.34}$$

$$d\omega_\beta^\alpha + \omega_\gamma^\alpha \wedge \omega_\beta^\gamma = R_\beta^\alpha \tag{14.35}$$

ただし、捩率 2 形式と曲率 2 形式を次で定義する。

$$T^\alpha = \frac{1}{2} T_{\beta\gamma}^\alpha \hat{l}^\beta \wedge \hat{l}^\gamma$$

$$R_\beta^\alpha = \frac{1}{2} R_{\beta\gamma\delta}^\alpha \hat{l}^\gamma \wedge \hat{l}^\delta$$

省略しない別表現で

$$\begin{aligned}
d\hat{l}^\alpha + \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha \hat{l}^\gamma \wedge \hat{l}^\beta &= \frac{1}{2} T_{\beta\gamma}^\alpha \hat{l}^\beta \wedge \hat{l}^\gamma \\
d(\Gamma_{\gamma\beta}^\alpha \hat{l}^\gamma) + (\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \hat{l}^\beta) \wedge (\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \hat{l}^\alpha) &= \frac{1}{2} R_{\beta\gamma\delta}^\alpha \hat{l}^\gamma \wedge \hat{l}^\delta
\end{aligned} \tag{14.36}$$

となる。式 14.34 を導くために左辺を  $(\hat{e}_\gamma, \hat{e}_\delta)$  に作用させる。式 14.33、式 3.11 から

$$\langle \omega_\beta^\alpha, \hat{e}_\gamma \rangle = \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha \hat{l}^\gamma \hat{e}_\gamma = \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha \tag{14.37}$$

$$e_{\gamma\delta}^\alpha = [\hat{e}_\gamma, \hat{e}_\delta] \hat{l}^\alpha = \langle \hat{l}^\alpha, [\hat{e}_\gamma, \hat{e}_\delta] \rangle - \left\{ \hat{e}_\gamma \langle \hat{l}^\alpha, \hat{e}_\delta \rangle - \hat{e}_\delta \langle \hat{l}^\alpha, \hat{e}_\gamma \rangle \right\}$$

$\hat{l} = \{dx\}$  には内積をとり、 $d\hat{l}$  には外積をとることになるので左辺への作用は

$$\begin{aligned}
d\hat{l}^\alpha(\hat{e}_\gamma, \hat{e}_\delta) + \omega_\beta^\alpha \wedge \hat{l}^\beta(\hat{e}_\gamma, \hat{e}_\delta) &= d\hat{l}^\alpha(\hat{e}_\gamma, \hat{e}_\delta) + \left\{ \langle \omega_\beta^\alpha, \hat{e}_\gamma \rangle \langle \hat{l}^\beta, \hat{e}_\delta \rangle - \langle \hat{l}^\beta, \hat{e}_\gamma \rangle \langle \omega_\beta^\alpha, \hat{e}_\delta \rangle \right\} \\
&= \left\{ \hat{e}_\gamma \langle \hat{l}^\alpha, \hat{e}_\delta \rangle - \hat{e}_\delta \langle \hat{l}^\alpha, \hat{e}_\gamma \rangle \right\} - \langle \hat{l}^\alpha, [\hat{e}_\gamma, \hat{e}_\delta] \rangle + \left\{ \langle \omega_\delta^\alpha, \hat{e}_\gamma \rangle - \langle \omega_\gamma^\alpha, \hat{e}_\delta \rangle \right\} \\
&= -e_{\gamma\delta}^\alpha + \Gamma_{\gamma\delta}^\alpha - \Gamma_{\delta\gamma}^\alpha \\
&= T_{\gamma\delta}^\alpha
\end{aligned}$$

となる。同様に右辺に  $(\hat{e}_\gamma, \hat{e}_\delta)$  に作用させる。

$$\begin{aligned}
T^\alpha(\hat{e}_\gamma, \hat{e}_\delta) &= \frac{1}{2} T_{\beta\epsilon}^\alpha \hat{l}^\beta \wedge \hat{l}^\epsilon(\hat{e}_\gamma, \hat{e}_\delta) \\
&= \frac{1}{2} T_{\beta\epsilon}^\alpha \left\{ \langle \hat{l}^\beta, \hat{e}_\gamma \rangle \langle \hat{l}^\epsilon, \hat{e}_\delta \rangle - \langle \hat{l}^\epsilon, \hat{e}_\gamma \rangle \langle \hat{l}^\beta, \hat{e}_\delta \rangle \right\} \\
&= \frac{1}{2} T_{\beta\epsilon}^\alpha \left( \delta_\gamma^\beta \delta_\delta^\epsilon - \delta_\gamma^\epsilon \delta_\delta^\beta \right) \\
&= T_{\gamma\delta}^\alpha
\end{aligned}$$

さらに式 14.35 の左から外微分をとると

$$d\omega_\beta^\alpha \wedge \hat{l}^\beta + \omega_\gamma^\alpha \wedge \omega_\beta^\gamma \wedge \hat{l}^\beta = R_\beta^\alpha \wedge \hat{l}^\beta$$

式 14.34 を用いて  $d(\hat{d}^\alpha) = 0$  から

$$\begin{aligned} d\omega_\beta^\alpha \wedge \hat{l}^\beta + \omega_\gamma^\alpha \wedge (T^\gamma - \hat{d}^\gamma) &= R_\beta^\alpha \wedge \hat{l}^\beta \\ d\omega_\beta^\alpha \wedge \hat{l}^\beta - \omega_\gamma^\alpha \wedge \hat{d}^\gamma + \omega_\gamma^\alpha \wedge T^\gamma &= R_\beta^\alpha \wedge \hat{l}^\beta \\ d(\hat{d}^\alpha + \omega_\gamma^\alpha \wedge \hat{l}^\gamma) + \omega_\gamma^\alpha \wedge T^\gamma &= R_\beta^\alpha \wedge \hat{l}^\beta \\ dT^\alpha + \omega_\gamma^\alpha \wedge T^\gamma &= R_\beta^\alpha \wedge \hat{l}^\beta \end{aligned}$$

となる。

接続 1 形式  $\omega$  の共変微分を曲率 2 形式  $\Omega$  という。

$$\Omega \equiv D\omega \in \Omega^2(P) \otimes g$$

この時、式 15.24、15.25 から  $H_{ug}P = R_{g*}H_uP, \omega(R_{g*}X) = R_g^*\omega(X)$  で定義された  $R_{g*}$  と  $R_a^*$  を用いて曲率 2 形式は式 15.21 と比較し、

$$R_a^*\Omega = a^{-1}\Omega a, \quad a \in G$$

が成り立つ。この命題を証明しておこう。まず、 $R_{a*}$  演算子が水平部分空間を不変にしたから

$$(R_{a*}X)^H = R_{a*}(X^H)$$

さらに外微分演算子と交換する

$$d_p R_a^* = R_a^* d_p$$

また、 $a$  が定数で、式 15.22 から

$$R_a^*\omega = a^{-1}\omega a$$

従って、 $\Omega = d_p\omega$ ,  $d_p a = 0$  ( $a = \text{Const.}$ ) だから

$$\begin{aligned} R_a^*\Omega(X, Y) &= \Omega(R_{a*}X, R_{a*}Y) \\ &= d_p\omega((R_{a*}X)^H, (R_{a*}Y)^H) \\ &= d_p\omega(R_{a*}X^H, R_{a*}Y^H) \\ &= R_a^*d_p\omega(X^H, Y^H) \\ &= d_p R_a^*\omega(X^H, Y^H) \\ &= d_p(a^{-1}\omega a)(X^H, Y^H) \\ &= a^{-1}d_p\omega(X^H, Y^H)a \\ &= a^{-1}\Omega(X, Y)a \end{aligned}$$

が言えた。 $\{T_\alpha\}$  は  $g$  の基底とする。

接続形式  $g$  値  $p$  形式を  $\zeta^\alpha \in \Omega^p(M)$  として

$$\zeta = \zeta^\alpha \otimes T_\alpha$$

接続形式  $g$  値  $q$  形式を  $\eta^\alpha \in \Omega^q(M)$  として



$$\eta = \eta^\alpha \otimes T_\alpha$$

とすると、次のように交換積が定義できる。

$$\begin{aligned} [\zeta, \eta] &\equiv \zeta \wedge \eta - (-1)^{pq} \eta \wedge \zeta \\ &= T_\alpha T_\beta \zeta^\alpha \wedge \eta^\beta - (-1)^{pq} T_\beta T_\alpha \eta^\beta \wedge \zeta^\alpha \\ &= [T_\alpha, T_\beta] \otimes \zeta^\alpha \wedge \eta^\beta = f_{\alpha\beta}^\gamma T_\gamma \otimes \zeta^\alpha \wedge \eta^\beta \end{aligned}$$

特に  $p, q$  が奇数の場合は

$$[\zeta, \zeta] = 2\zeta \wedge \zeta = f_{\alpha\beta}^\gamma T_\gamma \otimes \zeta^\alpha \wedge \zeta^\beta$$

となる。

$P$  点において水平、垂直部分空間内のベクトル  $X \in H_u P, Y \in V_u P$  とする。この時、このベクトルの交換積は

$$[X, Y] \in H_u P \quad (14.38)$$

のように水平部分空間内にある。一見、交換積は対称のように見えるが、常に水平空間内にあることには興味がある。

そこで、これをみておく、 $Y$  を  $g(t)$  で生成されるベクトル場とすると定義から

$$[Y, X] = \lim_{t \rightarrow 0} t^{-1} (R_{g(t)*} X - X)$$

が成り立つ。さらに

$$R_{g*} H_u P = H_{ug} P$$

を満たすので、ベクトル  $R_{g(t)*} Y$  は水平方向にある。よって  $[Y, X]$  も水平方向にある。 $X, Y \in T_u P$  とする。このとき、 $\Omega$  と  $\omega$  について次の **Cartan** 構造方程式を満たす。

$$\Omega(X, Y) = d_p \omega(X, Y) + [\omega(X), \omega(Y)]$$

これから  $\omega = \omega^\alpha \otimes T_\alpha$  として

$$\begin{aligned} [\omega, \omega](X, Y) &= [T_\alpha, T_\beta] \omega^\alpha \wedge \omega^\beta(X, Y) \\ &= [T_\alpha, T_\beta] (\omega^\alpha(X) \omega^\beta(Y) - \omega^\beta(X) \omega^\alpha(Y)) \\ &= [\omega(X), \omega(Y)] - [\omega(Y), \omega(X)] \\ &= 2[\omega(X), \omega(Y)] \end{aligned}$$

となるので

$$\Omega(X, Y) = \left( d_p \omega + \frac{1}{2} [\omega, \omega] \right) (X, Y) = (d_p \omega + \omega \wedge \omega) (X, Y)$$

とかけるから簡単に次のように表現することが多い。

$$\Omega = d_p \omega + \omega \wedge \omega \quad (14.39)$$

さて、**Cartan** の構造方程式を導こう。

まず  $X, Y \in H_u P$  とすると

$$\omega(X) = \omega(Y) = 0$$

となる。 $X = X^H, Y = Y^H$  であるから

$$\Omega(X, Y) = d_p \omega(X^H, Y^H) = d_p \omega(X, Y)$$

である。

また、 $X \in H_u P, Y \in V_u$  とすると  $Y^H = 0$  だから

$$\Omega(X, Y) = 0$$

$$\omega(X) = 0$$

よって  $d_p \omega(X, Y) = 0$  が成り立てばよいことになる。これは第 2 部の式から一般に

$$d_p \omega(X, Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X, Y])$$

この時、 $X \in H_u P, Y \in V_u$  とすると  $\omega(X) = 0$  だから

$$d_p \omega(X, Y) = X\omega(Y) - \omega([X, Y])$$

となる。 $Y \in V_u P$  だから、ある元  $V \in g$  に対して

$$Y = V^\#$$

となり、基本ベクトル場  $V^\#$  をつくれる。このとき

$$\omega(Y) = V$$

が定数になるから

$$X\omega(Y) = X \cdot V = 0$$

となる。従ってこの時、式 14.38 から

$$[X, Y] \in H_u P$$

だから  $V_u P$  上には  $[X, Y]$  はないことになる。よって

$$\omega([X, Y]) = 0$$

が成り立ち、

$$d_p \omega(X, Y) = 0$$

である。

次に  $X, Y \in V_u P$  とすると  $\Omega(X, Y) = 0$  を得るから、この時は

$$d_p \omega(X, Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X, Y]) = -\omega([X, Y])$$

となる。 $X, Y$  は Lie 括弧積  $[X, Y] \in V_u P$  に対して閉じているから、ある元  $A \in g$  が存在して

$$A = \omega([X, Y]), A^\# = [X, Y]$$

を満たす。そこで  $B^\# = X, C^\# = Y$  とすると

$$[B, C]^\# = [B^\#, C^\#]$$

だから

$$[\omega(X), \omega(Y)] = [B, C] = A$$

となるから

$$0 = d_p \omega(X, Y) + \omega([X, Y]) = d_p \omega(X, Y) + [\omega(X), \omega(Y)]$$

となる。 $\Omega$  が線形かつ歪対称なので以上で Cartan の構造方程式が示された。

## 14.8 曲面の単位接束 [11]

$\mathbb{R}^3$  に埋め込まれた滑らかな曲面  $M$  を考える。 $M$  の点  $p$  と  $\mathbb{R}^3$  のベクトルの組を

$$(p, v)$$

で表す。特に  $v$  は  $p$  で  $M$  に接し、かつ長さが 1 の単位ベクトルを考え、これらを  $E_M$  とする。

$$E_M = \{(p, v) \in M \times \mathbb{R}^3 \mid v \in T_p M, \|v\| = 1\}$$

$E_M$  から  $M$  への写像を  $\pi_M$  とし、次のように  $(p, v) \in E_M$  に対し、第 1 成分  $p$  を対応させた組を

$$\pi_M : E_M \ni (p, v) \rightarrow p \in M$$

とする。この時の集合  $E_M$  を単位接束と呼ぶ。接ベクトルの表現に対応し、

$$T^1 M$$

と表現することもある。1 点  $p \in M$  の逆像を

$$\pi_M^{-1}(p)$$

で表すと、これは点  $p$  で  $M$  に接する長さ 1 のベクトルの全体である。これは単位球面上の  $S^1$  と同じである。これから  $S^1$  束と呼ばれる。この構造を考えていこう。

曲面  $M$  全体でガウス写像を  $\gamma : M \rightarrow S^2$  が定義されているとする。すなわち、 $M$  は向き付け可能である。この設定で、 $E_M$  への  $S^1$  の作用を

$$\rho^M = \{\rho_g^M \mid g \in S^1 = SO_2\}$$

とする。つまり式 12.18 に対応して

$$g(s) = \begin{pmatrix} \cos(s) & -\sin(s) \\ \sin(s) & \cos(s) \end{pmatrix}$$

とする。 $(p, v) \in E_M$  に対して、 $\rho_g^M(p, v)$  をこの  $g(s)$  で定義する。また、

$$u = \gamma(p) \times v$$

と置き、作用は

$$\rho_g^M(p, v) = (p, (\cos(s))v - (\sin(s))u)$$

で定義する。これにより、 $E_M$  上の  $S^1$  束構造が決まる。この束射影が

$$\pi_M : E_M \rightarrow M$$

であり、その底空間が  $M$  になる。そこで写像  $\Gamma : E_M \rightarrow SO_3$  を次で定義する。

$$\Gamma(p, v) = \begin{pmatrix} \gamma(p) \\ v \\ \gamma(p) \times v \end{pmatrix}$$

もし、 $M$  が単位球面  $S^2$  であれば前節の  $E_{S^2} = SO_3$  と同じになり、 $\gamma$  は  $S^2$  の恒等写像である。作用  $\rho^M$  の基本ベクトル場  $\eta_M$  も 12.22 と同様に次のように定義できる。

$$\eta_M(p) = \frac{d}{ds} \rho_{g(s)}^M(p) \Big|_{s=0}$$

この時、 $\pi_{S^2} \circ \Gamma = \gamma \circ \pi_M$  が成り立つ。次の図式は可換になる。

$$\begin{array}{ccc} E_M & \xrightarrow{\Gamma} & SO_3 \\ \pi_M \downarrow & & \downarrow \pi_{S^2} \\ M & \xrightarrow{\gamma} & S^2 \end{array}$$

上の図で縦列が束射影となる。 $S^1$  の束

$$\pi_i : E_i \rightarrow M_i$$

の底空間と全空間の写像が

$$\phi : M_1 \rightarrow M_2$$

$$\Phi : E_1 \rightarrow E_2$$

があって、

写像と束射影が可換であり、 $S^1$  の作用に関し、同変的である場合、

写像  $\Phi$  あるいは組、 $(\Phi, \phi)$  を  $S^1$  束の間の束準同型写像という。

$S^1$  の作用  $\rho^M$  と  $\rho^{S^2}$  に関して

$$\Gamma(\rho_g^M(p, v)) = \rho_g^{S^2} \Gamma((p, v)), \quad (\forall g \in S^1, \forall (p, v) \in E_M) \quad (14.40)$$

が成り立つ。この時、 $\Gamma$  は作用  $\rho^M, \rho^{S^2}$  に対して同変的であるという。

前節でみたように接ベクトル  $X$  を作用  $\rho_g(A)$  で移動すると、その微分  $d\rho_g(X)$  に写った。

そこで式 12.42 より  $\eta$  は  $SO_3$  上の基本ベクトル場だから

$$d\Gamma(\eta_M) = \eta, \quad \eta \in SO_3$$

## 14.9 局所座標

$M$  の局所座標  $\phi : U \rightarrow M$  を使って  $E_M$  の局所座標を  $\tilde{\phi} : V \rightarrow E_M$  を次のように構成する。

$\mathbb{R}^2$  の座標  $(x, y)$  とおく、ガウス写像  $\gamma : M \rightarrow S^2$  と  $\phi$  との合成写像  $\gamma \circ \phi(x, y)$  を今後、略して  $\gamma(x, y)$  とする。

前節で自然なリフトを構成する際にベクトル組の式 13.1 を作ったように合成写像を表す組として

次のようなベクトルを構成する。

$X, Y : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  を

$$X(x, y) = \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y) / \left\| \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y) \right\| \quad (14.41)$$

$$Y(x, y) = \gamma(x, y) \times X(x, y) \quad (14.42)$$

と置く、この場合の  $X, Y$  は 2 次元のベクトル成分を持つ。 $\tilde{\phi}(x, y, s)$  を行列に格上げし、

$$\tilde{\phi}(x, y, s) = (\phi(x, y), \cos sX(x, y) - \sin sY(x, y)) \quad (14.43)$$

で定義し、 $\mathbb{R}^3$  の開集合  $V_{U,a}$  を

$$V_{U,a} = \{(x, y, s) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in U, a - \pi < s < a + \pi\}$$

とおく。これにより  $\tilde{\phi} : V_{U,a} \rightarrow E_M$  は  $E_M$  の局所座標になる。前節で見ると、これは一通りではない。 $M$  の局所座標  $(\phi, U)$  と定数  $a$  をいろいろ変えて得られる  $\tilde{\phi}$  を全部あつめれば  $E_M$  の局所座標系が得られることになる。

この場合についても

$$\pi_M \circ \tilde{\phi} = \phi$$

が成り立つので、変数  $s$  を固定すれば  $\tilde{\phi}$  は  $\phi$  のリフトである。よって式 12.20 のように  $\Gamma$  と  $\tilde{\phi}$  との合成が次のようになる。

$$\Gamma \circ \tilde{\phi} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \cos sX(x, y) - \sin sY(x, y) \\ \sin sX(x, y) + \cos sY(x, y) \end{pmatrix}$$

ただし、 $M$  は  $\mathbb{R}^3$  の部分集合で  $E_M$  は  $M \times \mathbb{R}^3$  の部分集合なので、 $E_M$  は  $\mathbb{R}^6$  の部分集合である。従って局所座標  $\tilde{\phi}$  は  $V_{U, \alpha}$  から  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$  への写像になる。よって次の 3 つのベクトルが  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$  の中で 1 次独立であり、

$E_M$  の接空間  $T_{\tilde{\phi}(x, y, s)} E_M$  の線形基底となるはずである。

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x}(x, y, s), \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial y}(x, y, s), \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial s}(x, y, s)$$

これから  $E_M$  は  $\mathbb{R}^6$  内に描かれた 3 次元多様体である。

$S^1$  の  $E_M$  への作用  $\rho^M$  と、この局所座標との関係は次のようになる。

$$g(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

とすると、作用はパラメタを推進させるから

$$\rho_{g(t)}^M(\tilde{\phi}(x, y, s)) = \tilde{\phi}(x, y, s + t)$$

となる。従って、 $(x, y)$  を固定するごとに、曲線  $s \rightarrow \tilde{\phi}(x, y, s)$  は  $S^1$  軌道のパラメタ表示である。これから接ベクトル

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial s}(x, y, s) = (0, -\sin sX(x, y) - \cos sY(x, y)) \in T_{\tilde{\phi}(x, y, s)} E_M$$

は作用  $\rho^M$  の基本ベクトル場  $\eta_M$  である。

$$\eta_M(\tilde{\phi}(x, y, s)) = \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial s}(x, y, s) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin sX(x, y) - \cos sY(x, y) \end{pmatrix}$$

## 14.10 単位接束の接続形式

$S^1$  束  $\pi_M : E_M \rightarrow M$  に、ある標準的な接続を定義する。 $E_M$  への  $S^1$  作用  $\rho^M$  に帯する基本ベクトル場を  $\eta_M$  で表す。

$SO_3$  の標準接続形式を  $\theta_{S^2}$  とする。写像  $\Gamma$  で 1 次微分形式  $\theta_{S^2}$  の引き戻しを

$$\theta_M = \Gamma^*(\theta_{S^2})$$

と表す。

$\Gamma$  の同変性を利用して  $E_M$  上の 1 次微分形式  $\theta_M$  が作用  $\rho^M$  に関する接続形式になるためには式 12.32, 12.33 より

$$i_{\eta_M} \theta_M \equiv 1, \mathcal{L}_{\eta_M} \theta_M \equiv 0$$

が成り立つ。従って、 $\theta_M$  は  $E_M$  への  $S^1$  作用に関する接続形式である。

この接続形式は  $M$  の形状に依存するので標準接続形式とよぶ。

$T_{(p, v)} E_M$  の 2 次元部分空間  $H(p, v)$  を

$$H(p, v) = \{X \in T_{(p, v)} E_M \mid \theta_M(X) = 0\}$$

とおき、これが  $(p, v)$  における水平面とよぶ。

束射影の微分  $d\pi_M$  は式より水平面に制限すると水平面と  $T_p M$  の間の線形同型写像になる。

この逆写像が接平面  $T_p M$  から水平面  $H(p, v)$  への水平リフトと呼ぶ。

微分形式の引き戻しの定義式 12.34、から  $X \in T_{(p,v)} E_M$  に対し 1 次微分形式から

$$\begin{aligned}\theta_M(X) &= \Gamma^*(\theta_{S^2})(X) \\ &= \theta_{S^2}(d\Gamma(X))\end{aligned}$$

となる。例えば  $X$  を接ベクトルにもつ  $E_M$  の曲線

$$t \rightarrow (p(t), v(t))$$

を考えてみよう。  $X$  は  $p-v$  曲面の接ベクトルだから

$$X = \left( \frac{dp(0)}{dt}, \frac{dv(0)}{dt} \right) \quad (14.44)$$

この時の  $d\Gamma$  は式 13.3 から  $t=0$  での微分係数として次のように定義できる。

$$\begin{aligned}d\Gamma(X) &= \frac{d}{dt} \Gamma(p(t), v(t))|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \gamma(p(t)) \\ v(t) \\ \gamma(p(t)) \times v(t) \end{pmatrix} \Big|_{t=0}\end{aligned} \quad (14.45)$$

さらに接続形式の定義式 12.26 から

$$\theta_{S^2}(d\Gamma(X)) = -\frac{1}{2} \text{Tr}[X_1 d\Gamma(X) \Gamma(p(0), v(0))^{-1}]$$

となったから式 14.45 に 14.44 を代入すると式 12.28, 12.29, 12.30 をまとめて次の行列式で表す。

$$\begin{aligned}\theta_M(X) &= - \left\langle \frac{dv(0)}{dt}, \gamma(p(0)) \times v(0) \right\rangle \\ &= - \det \begin{pmatrix} \gamma(p(0)) \\ v(0) \\ \frac{dv(0)}{dt} \end{pmatrix}\end{aligned} \quad (14.46)$$

これに式 14.43 を代入すると

$$\tilde{\phi}(x, y, s) = (\phi(x, y), \cos s X(x, y) - \sin s Y(x, y)) = (p(0), v(0))$$

だから

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} = \left( \frac{\partial \phi}{\partial x}, \cos s \frac{\partial X}{\partial x} - \sin s \frac{\partial Y}{\partial x} \right)$$

となるので、式 14.41, 14.42 から

$$X(x, y) = \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y) / \left\| \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y) \right\|, \quad Y(x, y) = \gamma(x, y) \times X(x, y)$$

これから先の結果を利用して代入し、内積をつくると式 3.16 から

$$p = \tilde{\phi}(x, y, s) \rightarrow \gamma(p) = \frac{\frac{\partial}{\partial x} \phi(x, y, s) \times \frac{\partial}{\partial y} \phi(x, y, s) \times \frac{\partial}{\partial s} \phi(x, y, s)}{\left\| \frac{\partial}{\partial x} \phi(x, y, s) \times \frac{\partial}{\partial y} \phi(x, y, s) \times \frac{\partial}{\partial s} \phi(x, y, s) \right\|}$$

だったので式 14.46 より  
歪対称性

$$\left\langle \frac{\partial X}{\partial x}, Y \right\rangle + \left\langle \frac{\partial Y}{\partial x}, X \right\rangle = 0$$

を用いると

$$\begin{aligned} \theta_M \left( \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} \right) &= - \left\langle \cos s \frac{\partial X}{\partial x} - \sin s \frac{\partial Y}{\partial x}, \gamma(\phi(x, y)) \times (\cos s X(x, y) - \sin s Y(x, y)) \right\rangle \\ &= \left\langle - \left( \cos s \frac{\partial X}{\partial x} - \sin s \frac{\partial Y}{\partial x} \right), \frac{d}{ds} (\cos s X(x, y) - \sin s Y(x, y)) \right\rangle \\ &= - \left\langle \cos s \frac{\partial X}{\partial x} - \sin s \frac{\partial Y}{\partial x}, \sin s X(x, y) + \cos s Y(x, y) \right\rangle \\ &= - \cos^2 s \left\langle \frac{\partial X}{\partial x}, Y \right\rangle + \sin^2 s \left\langle \frac{\partial Y}{\partial x}, X \right\rangle \\ &= - \left\langle \frac{\partial X}{\partial x}, Y \right\rangle \end{aligned}$$

同様にして、

$$\theta_M \left( \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial y} \right) = \left\langle \frac{\partial X}{\partial y}, Y \right\rangle$$

である。さらに

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial s} = (0, -\sin s X - \cos s Y)$$

だから

$$\theta_M \left( \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial s} \right) = - \langle -\sin s X - \cos s Y, \sin s X + \cos s Y \rangle = 1$$

であり、 $\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial s} = \eta_M$  で接ベクトルになっていることがわかる。

以上から次の重要な関係が得られる。接続形式の  $\tilde{\phi}$  による引き戻しが

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}^* (\theta_M) &= \theta_M \left( \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} \right) dx + \theta_M \left( \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial y} \right) dy + \theta_M \left( \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial s} \right) ds \\ &= - \left\langle \frac{\partial X}{\partial x}, Y \right\rangle dx - \left\langle \frac{\partial X}{\partial y}, Y \right\rangle dy + ds \end{aligned}$$

で表される。ここで  $x, y$  と  $s$  を差別し、 $\mathbf{X} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  の微分を

$$d\mathbf{X} = \frac{\partial X}{\partial x} dx + \frac{\partial X}{\partial y} dy$$

とすると接続形式  $\theta_M$  の局所座標表示として

$$\tilde{\phi}^* (\theta_M) = ds - \langle d\mathbf{X}, Y \rangle$$

とかける。これは  $Y$  がねじれ方向

$$Y(x, y) = \gamma(x, y) \times X(x, y)$$

であったので

$$d\mathbf{Y} = \frac{\partial Y}{\partial x} dx + \frac{\partial Y}{\partial y} dy$$

$$\tilde{\psi}^* (\theta_M) = ds - \langle d\mathbf{Y}, X \rangle$$

も局所表示になる。

## 14.11 測地線 [11]

前節の球面上の例 13.9 でみたように、 $M$  の曲線  $c: [a, b] \rightarrow M$  に対し、 $E_M$  の曲線は持ち上げられた  $\tilde{c}$  で

$$c = \pi_M \circ \tilde{c}$$

を満たすのなら、 $\tilde{c}$  を  $c$  のリフトと呼べる。前節の球面と同じように次の場合を自然なリフトという。  
 $c$  は正則で

$$\frac{dc}{dt} \neq 0 \quad (\forall t \in [a, b])$$

とする。自然なリフトの定義は

$$\tilde{c}(t) = \left( c(t), \frac{dc}{dt} / \left\| \frac{dc}{dt}(t) \right\| \right)$$

である。一方で水平リフトは  $c$  が必ずしも正則である必要がない。

$$\theta_M \left( \frac{d\tilde{c}}{dt}(t) \right) \equiv 0$$

が満たされれば水平リフトという。

これから平行移動も次のように定義できる。

$$A \in \pi_M^{-1}(c(a))$$

に対し、 $A$  を初期値荷物水平リフト  $\tilde{c}$  の終点での値を

$$P_c(A) = \tilde{c}(b) \in \pi_M^{-1}(c(b))$$

とすると、これは  $c$  に沿った平行移動である。

$c$  のリフト  $(c, v)$  が水平リフトの時、 $v$  を  $c$  に沿う平行ベクトル場という。

$c$  は弧長パラメータを持つ時、

$$\left| \frac{dc}{dt} \right| \equiv 1$$

となるので球面の時の式 13.6 から  $c$  の測地曲率を

$$k_c(t) = -\theta_M \left( \frac{d\tilde{c}}{dt}(t) \right)$$

と定義し、 $k_c \equiv 0$  となれば  $c$  は測地線である。つまり、自然リフトが水平リフトになるような曲線が測地線といえる。

また、任意の点  $(p, v) \in E_M$  に対して初期条件

$$c(0) = p, \quad \frac{dc}{dt}(0) = v$$

となる測地線が式 13.8 から一意に決まることは重要である。

### 14.11.1 平行移動

曲線  $c: [a, b] \rightarrow M$  を考える。特に正則の条件はつけない。

$$A \in \pi_M^{-1}(c(a))$$

に対し、前節でみたように常微分方程式の一意性定理から  $c$  のリフト  $\tilde{c}$  で次の初期条件を満たすものが一意に存在する。

$$\tilde{c}(a) = A, \quad \theta_M \left( \frac{d\tilde{c}}{dt} \right) \equiv 0$$



よって  $\tilde{c}$  を 曲線  $c: [a, b] \rightarrow M$  の水平リフトとする。このとき  $\Gamma \circ \tilde{c}$  は

$$\gamma \circ c: [a, b] \rightarrow S^2$$

の水平リフトになる。

これは前節式 12.41 から  $E_M$  の接続形式  $\theta_M$  が  $SO_3$  の接続形式  $\theta_{S^2}$  の  $\Gamma$  による引きもどしであったことから明らかである。

球面の時と同様に平衡移動  $P_c$  は  $S^1$  の作用  $\rho^M$  と次のような同変性が成り立つ。

$$\rho_g^M \circ P_c = P_c \circ \rho_g^M, \quad (\forall g \in S^1)$$

前節の式 12.49 のところでトーラス上の平行移動を見た。そこで次の図のような種数 2 のトーラス  $M$  を考える。

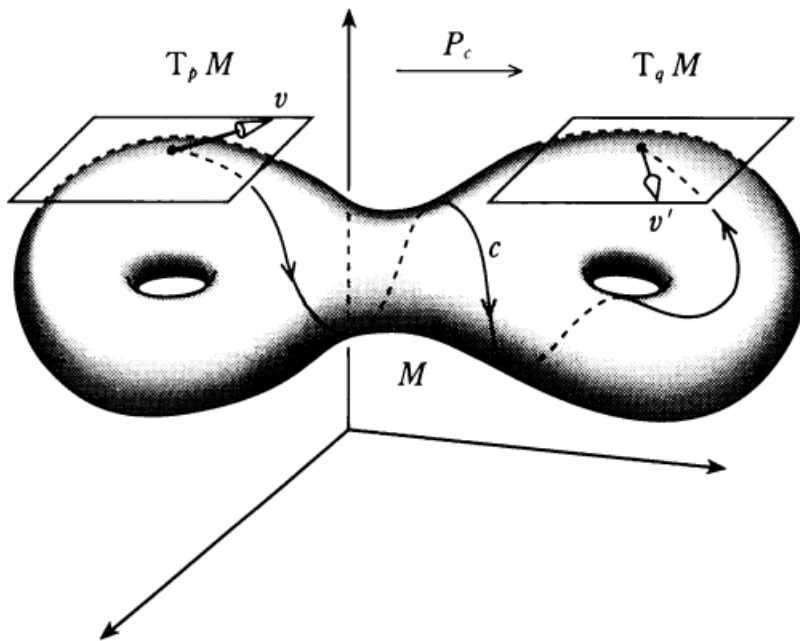


図 14.2: [11] より

$v \in T_p M$  を  $c$  に沿って平行移動する。  $q$  における長さ 1 の接ベクトルを

$$v' = P_c(v)$$

とする。  $v$  の大きさが 1 ではない場合はどうなるかという、次のように単位ベクトルを移動しておいて、後から  $\|v\|$  倍する。

$$v' = \|v\| P_c(v/\|v\|)$$

図では  $v$  と  $v'$  は平行な面上にあるように見えるが、曲線  $c$  の位置によってはその保証はない。つまり、平行移動の結果

$$v' = Av$$

のような線形写像になる。

そこで  $M$  上の曲線  $c: [a, b] \rightarrow M$  で弧長パラメ  $t$  を持つものを考える。この時はパラメタによる微分は

$$\|\dot{c}\| = 1$$

とおけた。さらに  $c(a), c(b)$  上のファイバーを次の  $A, B$  でおく。

$$A \left( c(a), \frac{dc}{dt}(a) \right), B \left( c(b), \frac{dc}{dt}(b) \right)$$

$A$  を  $c$  で  $c(b)$  まで移動したとき、 $P_c(A)$  と  $B$  との角度のずれを  $\mu$  とすると前節のホロノミーの式 13.15

$$B = \rho_{g(\mu)}^M(P_c(A))$$

になる。よって  $c$  の測地曲率  $k_c$  を次のように積分すれば角度  $\mu$  が求まる。

$$\mu \equiv - \int_a^b k_c(t) dt$$

このホロノミーとガウス曲率の関係を考えてみよう。式 12.56 のように球面の曲率は 1 であったが、普通はガウス曲率を面積要素で積分したものがホロノミーになる。

### 14.11.2 閉測地線

$c: [a, b] \rightarrow M$  を弧長パラメタを持ち、かつ閉じた測地線とする。すなわち、

$$c(a) = c(b), \quad \frac{dc(a)}{dt} = \frac{dc(b)}{dt}, \quad \theta_M \left( \frac{d\tilde{c}}{dt}(t) \right) \equiv 0$$

とできる。この  $\tilde{c}$  は  $c$  の自然なリフトである。この閉じた閉曲線は閉測地線という。

この時の平行移動演算子  $P_c$  は  $\pi_M^{-1}(a)$  から自身への恒等写像になる。

$$P_c = id_{\pi_M^{-1}(a)}$$

従って閉測地線に沿うホロノミーの角度は 0 になる。

## 15 ファイバー [12]

### 15.1 主束

前節までは主に  $SO_3$  中心に考えてきたが、ここでは更に一般化して多様体上の束構造を考える。

$P(M, G)$  を主束とする。  $u \in P$  として  $G_p$  を  $p = \pi(u)$  におけるファイバーとする。

ここで多様体の接空間ではなく、 $P$  での接空間を考える。

この時、 $P$  上の接続とは接空間  $T_uP$  を垂直部分空間  $V_uP$  と水平部分空間  $H_uP$  へ一意的に分解する操作である。

ただし、次の条件を満たすとする。ただし、滑らかなベクトル場  $X$  が存在し、 $X^H \in H_uP, X^V \in V_uP$  とし、 $u \in P, g \in G$  とする。

1.  $T_uP = H_uP \oplus V_uP$
2.  $X = X^H + X^V$
3.  $H_{ug}P = R_{g*}H_uP$

第 2 で部で構造群とベクトル束の考え方の基本を学んだ。次にとなりあう接空間がどう変化していくことについて考察しよう。

接続 (connection) とは無限小だけ離れた点での接空間を比べる構造である。

例えば物理ではゲージポテンシャルが接続を表し、曲率はゲージ場の強さを表すといった対応がある。

多様体上での平行移動を次のように決める。

点  $p, p'$  を結ぶ曲線を  $t$  をパラメタとして  $\gamma(t)$  で表す。

点  $p$  で接空間  $T_p M$  上のベクトル  $X$  は  $\gamma(t)$  に接している。

$X$  が曲線に沿って平行移動されるとは  $X$  が  $p$  から  $p' \leftarrow dX/dt$  で曲面に垂直になることである。

つまり接空間に垂直な空間が用意され、接ベクトルの時間変化を示すベクトルはこの垂直な空間におさまらないといけない。

逆にこれが保証されるように連続な曲線  $\gamma(t)$  ができる。これは前節の式 6.34 から次のように表すことができる。

$$X^\mu(x + \Delta x)_{//} - X^\mu(x) = \Delta x^\nu G_{\nu\lambda}^\mu X^\lambda$$

この曲線  $\gamma(t)$  に対して  $X$  の共変微分が  $t$  に対する変化率として

$$\begin{aligned} \nabla_\nu X^\mu &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \{X^\mu(x + \Delta x) - X^\mu(x)\} - G_{\nu\lambda}^\mu X^\lambda \\ &= \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\nu} - G_{\nu\lambda}^\mu X^\lambda \end{aligned} \quad (15.1)$$

となる。この共変微分と通常の微分との差を測るが接続であるともいえる。共変微分が 0 であれば平行移動と考えることができる。

平行移動は多様体の接線に沿って移動するのでこの線は測地線とも呼ばれる。n 次元多様体の  $M$  を底空間とする。

各点  $p \in M$  でのファイバが接空間  $T_p M$  の順序付けられた全ての基底の集合である時、これをフレーム束 (Frame bundle)  $F(M)$  という。

## 15.2 右作用演算子

全てのフレームは 1 つの固定されたフレームに  $GL(n, R)$  群の元を作用させることで得られたからファイバーは群  $GL(n, R)$  自身である。このようにファイバ自身が群構造となっているような Fiber 束を主ファイバ束 (主束) といい  $P(M, G)$  で表す。

一般の主ファイバ束 (主束) は局所的に

$$P = U_\alpha \times G \quad (15.2)$$

であり、これを変換関数でつないだものと理解できる。

$P$  は多様体上の主ファイバ束とする。主ファイバ束  $P$  の点を  $u$  とし、 $p = \pi(u)$  におけるファイバーを  $G_p$  と書く。点  $u$  を通るファイバーの接ベクトル全体が接空間  $T_u M$  の部分空間であるとみなせる。そこでこれを  $u$  での垂直部分空間といい、 $V_u(P)$  で表す。接空間  $T_p M$  において、 $V_u(P)$  の補空間を考えこれを水平部分空間といい  $H_u(P)$  で表す。すると次の図左のように直和にわけることができる。

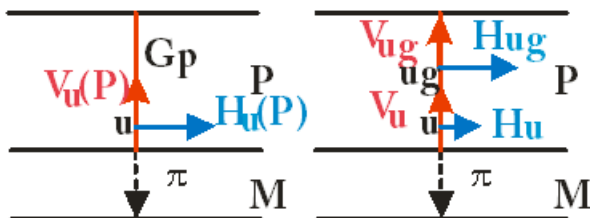


図 15.1: 主ファイバ束  $P$  とその水平、垂直部分空間

$$T_u(P) = V_u(P) \oplus H_u(P) \quad (15.3)$$

ただし、この時、 $V_u(P)$  は  $P$  の構造で決まるが  $H_u(P)$  を一意的に決めるものではない。そこで次のような条件を課すことにする。

$u$  が次のように変化する場合

$$u \rightarrow u' + ug \quad (g \in G) \tag{15.4}$$

図の右のように  $H_u$  は  $H_{u'}$  に変化すると考える。この時次のように右作用演算子を定義する。

$$H_{u'} \equiv H_{ug} = R_g H_u$$

この演算子により同じファイバー上で別の水平部分空間に移ることができる。

実際に  $P$  上に 1 形式  $\omega$  を考えてこの様子を見てみる。  $P$  上の局所座標を  $x \in M, g \in G$  として

$$\{x, g\}$$

とおく、ただし多様体の  $M$  の次元を  $n$ 、構造群の次元を  $d$  とする。従って接空間  $T_u(P)$  の次元は

$$n + d$$

である。ここで天下りの的だが 1 形式を満たす次のような接続形式  $A$  を持つてくる。

$$A = A_\mu^\alpha \frac{\lambda_\alpha}{2i} dx^\mu \tag{15.5}$$

ただし、 $\lambda_\alpha$  はリー代数  $\mathcal{L}$  の元で構造定数を  $f_{abc}$  として次の括弧積の関係を満足するとする。

$$\left[ \frac{\lambda_a}{2i}, \frac{\lambda_b}{2i} \right] = f_{abc} \frac{\lambda_c}{2i} \tag{15.6}$$

また、この  $A$  をもちいて ( $g \in G$ ) の作用は式 15.4 から、次のように書ける。

$$g\omega = dg + Ag \tag{15.7}$$

よって

$$\begin{aligned} \omega &= g^{-1}dg + g^{-1}Ag \\ &= (g^{-1})_{ik} (dg)_{kj} + (g^{-1})_{kl} A_\mu^\alpha \frac{(\lambda_\alpha)_{lk}}{2i} dx^\mu (g)_{kj} \end{aligned}$$

ここでは接空間  $T_u(P)$  は次のように分解され  $V_u(P)$  の次元が  $d$ 、 $H_u(P)$  の次元は  $n$  である。よって  $H_u(P)$  は接ベクトルと構造群の基底を用いて基底を次のように置くことができる。

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} + C_{\mu ij} \frac{\partial}{\partial g_{ij}} \quad (\mu = 1, 2, \dots, n), (i, j = 1, 2, \dots, d) \tag{15.8}$$

従って  $C_{\mu ij}$  がわかれば  $H_u(P)$  が決まる。主ファイバー束  $P$  の接空間  $T_u(P)$  の双対空間を  $T_u^*(P)$  で表すと図のように  $\omega \in \mathcal{L} \otimes T_u^*(P)$  は垂直部分空間  $V_u(P)$  への  $T_u(P)$  の射影である

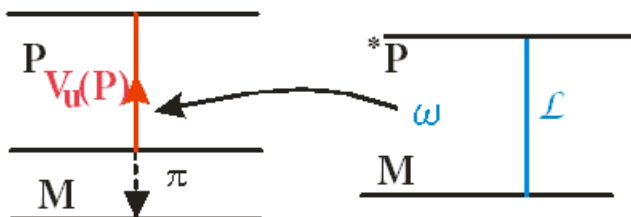


図 15.2: 垂直部分空間への射影

### 15.3 水平、垂直移動

第2部で  $R^N$  値の1次微分形式の分解を考えた。これを拡張してファイバー上での接続を考えよう。前節から多様体  $M$  上の点  $x$  でのファイバー  $E_x$  が定義できる。この時射影により  $E_x$  の全ての点は底空間の1点  $x$  に図左のように射影される。

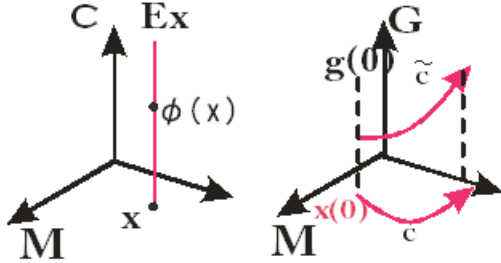


図 15.3: ファイバー上の垂直・水平移動

これを次のような式で表現する。

$$\pi(E_x) = x, \quad E_x = \pi^{-1}(x) \quad (15.9)$$

よって全体は局所的には底空間  $M$  とファイバー  $F$  の直積として表すことができる。

$$U \times F \sim \pi^{-1}(U) \quad (15.10)$$

例えば  $p \in E_x$  に対して

$$\varepsilon_x(p) = \{x, \phi(x)\} \quad (15.11)$$

とすると  $\varepsilon_x(p)$  がファイバ上の座標である。余分な自由度が加えられていることが重要である。この余分な自由度は  $x$  に対して影響を与えない。  $g$  が  $G$  を構造群とする。

Lie 群であるとするこの要素が右から作用し、ファイバ空間を垂直方向のみに移動させることがわかる。つまり  $p \in P, g \in G$  として

$$\pi(pg) = \pi(p) = x$$

また

$$\phi_x(pg) = \phi_x(p)g$$

である。

次に主ファイバ束  $P$  での水平方向の移動について考える。これにはこれまで次のような少々まわりくどい考え方をを用いた。

上図右のように底空間  $M$  に連続した曲線  $C$  がある時、ファイバー束上では  $\tilde{C}$  に引き上げられる。この曲線上の座標は

$$(x^\mu, g(t)) \quad (15.12)$$

と表すことにする。

主ファイバ束  $P$  での単位ベクトルを次のように決める。まず、底空間において  $x^\mu$  が増加する方向をファイバ水平方向の単位ベクトルの時間成分として

$$\left( \frac{d}{dt} \right)_H = \dot{x}^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (15.13)$$

とし、垂直方向についてはから Lie 群が無限小生成元  $A$  をパラメタ  $t$  で表すことができる。

### 15.4 基本ベクトル場

$u$  を主束  $P(M, G)$  の元とし  $G_p$  を  $p = \pi(u)$  におけるファイバーとする。  $M$  ではなく主束  $P$  での接空間を  $T_uP$  とすると  $V_uP$  は垂直部分空間に相当し、その補空間として水平部分空間  $H_uP$  を次のように定義するのである。

$$T_uP = H_uP \oplus V_uP \tag{15.14}$$

垂直部分空間  $V_uP$  は  $g$  の元を  $A$  として次のような右作用で表すことができる。

$$R_{\exp(tA)}u \equiv u \exp(tA) \tag{15.15}$$

これから  $u$  を通る曲線が  $P$  に定義され

$$\pi(u) = \pi(u \exp(tA)) = p \tag{15.16}$$

となるのでこの曲線は構造群  $G_p$  の内部にある。  $f : P \rightarrow R$  をなめらかな関数として今  $A^\# \in T_uP$  を

$$A^\# f(u) = \left. \frac{d}{dt} f(u \exp(tA)) \right|_{t=0} \tag{15.17}$$

で定義する。

$A$  は式 15.5 で定義した Lie 環を満たす接続 1 形式のベクトル場であった。

$A^\#$  は  $u$  において  $G_p$  に接するので  $A^\# \in V_uP$  となることがわかる。

こうして  $P$  の各点において Lie 環の構造を保ったベクトル場  $A^\#$  が導入できるのでこの  $A^\#$  は基本ベクトル場という。

ここで  $A \rightarrow A^\#$  の同型写像として  $g \rightarrow V_uP$  が定義できる。

次の図のように任意の  $u \in P, g \in G$  に対し、式 15.15 より

$$R_{g*}H_uP = H_{ug}P \tag{15.18}$$

となる。

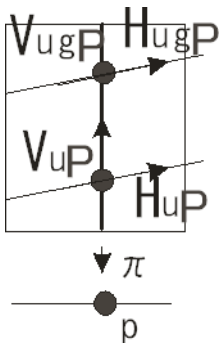


図 15.4:  $H_{ug}P$  は右作用  $R_{g*}$  により  $H_uP$  からつくられる

主束の接空間  $T_uP$  と  $V_uP$  が関係を保つためには接続が必要になる。そのため次のように双対空間との直積から 1 形式の  $\omega$  を導入する。

$$\omega \in g \otimes T^*P \tag{15.19}$$

これは  $T_uP$  の垂直線分  $V_uP \simeq g$  の上への射影であり Lie 環になっている。

式 15.17 から次が成り立つ。

$$\omega(A^\#) = A \quad A \in \mathfrak{g} \quad (15.20)$$

$$R_g^* \omega = Ad_{g^{-1}} \omega \quad (15.21)$$

つまり接続 1 形式は 1 形式  $\omega$  と主束  $P$  の接空間上の  $A^\# \in V_u P$  との作用がベクトル場  $A \in \mathfrak{g}$  になるものである。

形式的には 1 形式  $\omega$  と  $A^\#$  を作用させると  $\#$  がとれる。また、第 2 式からは随伴表現が  $X \in T_u P$  において

$$R_g^* \omega_{ug}(X) = \omega_{ug}(R_{g*} X) = g^{-1} \omega_u(X) g \quad (15.22)$$

が成り立つ。

すると水平部分空間  $H_u P$  が  $\omega$  の核を用いて定義できる。

$$H_u P \equiv \{X \in T_u P | \omega(X) = 0\} \quad (15.23)$$

これは切断の双対ように  $\omega$  の接ベクトルに対する核を満足するものとして水平部分空間が張られることを意味し、水平部分空間は右作用によりつくることができることを示す。

点  $u \in P, X \in H_u P$  として  $R_{g*} X \in T_{ug} P$  を考えると  $\omega(X) = 0$  なので

$$\omega(R_{g*} X) = R_g^* \omega(X) = g^{-1} \omega(X) g = 0 \quad (15.24)$$

となるから  $R_{g*}$  もまた水平部分空間をつくり

$$R_{g*} X \in H_{ug} P \quad (15.25)$$

となる。

$R_{g*}$  は逆を持つ線形写像だから任意のベクトル

$$Y \in H_{ug} P$$

はあるベクトル

$$X \in H_u P$$

に対して

$$Y = R_{g*} X$$

となるので結局

$$R_{g*} H_u P = H_{ug} P$$

を満たす。このような接続 1 形式は **Ehresmann 接続** と呼ばれる。

この垂直、水平空間への分解は後章のゲージ理論で拡張される。

## 15.5 局所自明化 [12]

$\{U_i\}$  を  $M$  の開被覆として  $\sigma_i$  を各  $U_i$  で定義される切断であるとする。 $U_i$  上の Lie 環に値をとる 1 形式を次で定義する。

$$A_i \equiv \sigma_i^* \omega \in \mathfrak{g} \otimes \Omega^1(U_i) \quad (15.26)$$

これにより  $\sigma_i^*$  による引き戻しが  $A_i$  になる接続 1 形式がつくられる。 $U_i$  上に 1 形式と局所切断

$$\sigma_i : U_i \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$$

が与えられると

$$A_i = \sigma_i^* \omega \tag{15.27}$$

となる  $\omega$  が  $U_i$  上に存在する。切断による引き戻しは今後重要な意味を持つのでこれを証明しておく。

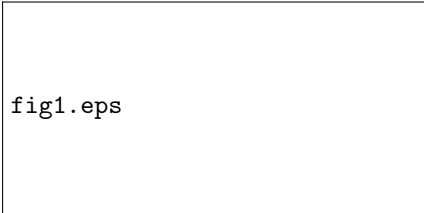


図 15.5: 多様体  $M$  上の接ベクトル  $X$  はファイバー上の  $\sigma_{i*}X$  に写される

上図のように  $u = \sigma_i(p)g_i$  に対して  $\phi_i(p, g_i) = u$  となる写像を用意する。

$$\phi_i^{-1}(u) = (p, g_i)$$

このように逆行列が定義できることを標準的自明化という。

$P$  上の  $g$  値 1 形式を  $\omega_i$  として、式 3.55 より  $d_P$  を  $P$  上の外微分とすると  $\omega_i$  は

$$\omega_i = g_i^{-1} \pi^* A_i g_i + g_i^{-1} d_P g_i \tag{15.28}$$

によって定義できる。

とおく。  $X = T_p M$  に対して  $\sigma_{i*}X \in T_{\sigma_i} P$  であり、  $\sigma_i$  においては  $g = e$  であるから

$$\begin{aligned} \sigma_i^* \omega_i(X) &= \omega_i(\sigma_{i*}X) \\ &= \pi^* A_i(\sigma_{i*}X) + d_P g_i(\sigma_{i*}X) \\ &= A_i(\pi_* \sigma_{i*}X) + d_P g_i(\sigma_{i*}X) \end{aligned} \tag{15.29}$$

さらに  $\sigma_{i*}X$  に沿っては  $g = e$  なので、次のように  $T_p M$  での恒等元が定義できる。

$$\pi_* \sigma_{i*} = id_{T_p(M)} \tag{15.30}$$

さらに、ここでは常に外微分が 0 であり、回転成分もない。

$$d_P g_i(\sigma_{i*}X) = 0 \tag{15.31}$$

である。よって

$$\sigma_i^* \omega(X) = A_i(X) \tag{15.32}$$

がいえた。

次に式 15.28 の定義が接続の条件を満たすことをみておく必要がある。

そこで  $X = A^\# \in V_u P$ ,  $A \in g$  とする。切断であれば

$$\pi_* X = 0 \tag{15.33}$$



であるから式 15.28 から次のように  $t$  を分離できて

$$\begin{aligned}
\omega_i(A^\#) &= g_i^{-1} d_p g_i(A^\#) \\
&= g_i(u)^{-1} \frac{dg(u \text{Exp}(tA))}{dt} \Big|_{t=0} \\
&= g_i(u)^{-1} g_i(u) \frac{d(\text{Exp}(tA))}{dt} \Big|_{t=0} \\
&= A
\end{aligned} \tag{15.34}$$

である。次に  $X \in T_u P, h \in G$  とする。この時  $\pi R_h = \pi$  だから  $\pi_* R_{h*} = \pi_*$  よって

$$\pi_* R_{h*} X = \pi_* X \tag{15.35}$$

$$g_{iuh} = g_{iu} h \tag{15.36}$$

ここで  $\gamma(t)$  を  $\gamma(0)$  が  $t=0$  で  $u$  を通る曲線で  $u$  での接ベクトルが  $X$  であるものとして

$$\begin{aligned}
g_{iuh}^{-1} d_p g_{iuh}(R_{h*} X) &= g_{iuh}^{-1} \frac{d}{dt} g_{i\gamma(t)h} \Big|_{t=0} \\
&= h^{-1} g_{iu}^{-1} \frac{d}{dt} g_{i\gamma(t)} \Big|_{t=0} h \\
&= h^{-1} g_{iu}^{-1} d_p g_{iu}(X) h
\end{aligned}$$

が成り立つので式 15.28 から

$$\begin{aligned}
R_h^* \omega_i(X) &= \omega_i(R_{h*} X) \\
&= g_{iuh}^{-1} A_i(\pi_* X) g_{iuh} + g_{iuh}^{-1} d_p g_{iuh}(R_{h*} X) \\
&= h^{-1} g_{iu}^{-1} A_i(\pi_* X) g_{iu} h + h^{-1} g_{iu}^{-1} d_p g_{iu}(X) h \\
&= h^{-1} g_{iu}^{-1} (A_i(\pi_* X) g_{iu} + d_p g_{iu}(X)) h \\
&= h^{-1} \omega_i(X) h
\end{aligned} \tag{15.37}$$

となる。従って  $g$  値 1 形式  $\omega_i$  は実際に

$$R_h^* \omega_i(X) = h^{-1} \omega_i(X) h \tag{15.38}$$

を満たすので接続 1 形式であるといえる。

## 15.6 主束上の共変微分

第 2 部で切断について詳しくみた。今後、ゲージ論などで主束上に同伴するベクトル束の切断を微分することが生じる。

そこで同伴束上の共変微分を考える。

前節で曲率については共変微分を 2 回作用させることで考えてきた。主に 微分 0 形式である関数の接続をみてきたが、ここではさらに一般化し、ベクトル束の接続を考える。主束を  $P(M, G)$  とし、まず、 $k$  次元ベクトル空間の  $V$  として

はじめに共変微分の再定義をする。外微分  $d$  を

$$d : \Omega^r(M) \rightarrow \Omega^{r+1}(M)$$

として微分  $r$  形式とは  $\phi \in \Omega^r(P) \otimes V$  というベクトル空間と外微分空間のつくる体積空間の要素を考え、

$$\phi : TP \wedge \cdots \wedge TP \rightarrow V$$

とし、これを微分可能になるように一般化をする。 $\{e_\alpha\}$  を  $V$  の基底、 $\phi^\alpha \in \Omega^r(P)$  とし、次のように基底ベクトルの和を用いて表す。

$$\phi = \sum_{\alpha=1}^k \phi^\alpha \otimes e_\alpha$$

先に見たように主束  $P(M, G)$  上の接続  $\omega$  は節空間  $T_u P$  を水平、垂直部分空間に分解した。

$$T_u P = H_u P \oplus V_u P$$

これからベクトル  $X \in T_u P$  は

$$X = X^H + X^V$$

で表すことができた。この時、共変微分は  $d_p \phi \equiv d_p \phi^\alpha \otimes e_\alpha$  として、

$$D\phi(X_1, \cdots, X_{r+1}) \equiv d_p \phi(X_1^H, \cdots, X_{r+1}^H)$$

のように水平ベクトルのみに作用するもので、射影の働きをしていることが確認できる。

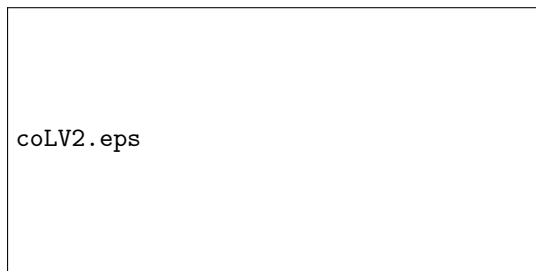


図 15.6: 共変微分は水平持ち上げにより区別されない

$P(M, G)$  を射影  $\pi_p$  の  $G$  主束とする。 $M$  のチャート  $U_i$  と  $U_i$  上の切断  $\sigma_i$  をとる。標準的な自明化として

$$\phi_i(p, e) = \sigma_i(p)$$

を取る。曲線  $\gamma : [0, 1] \rightarrow U_i$  の水平持ち上げを図のように  $\tilde{\gamma}$  として

$$\gamma(0) = p_0$$

$$\tilde{\gamma}(0) = u_0$$

とする。するとこの主束には射影  $\pi_E$  とするベクトル束  $E = P \times_\rho V$  が同伴する。 $X \in T_{p_0} M$  を  $p_0$  において  $\gamma(t)$  に接する接ベクトルとする。 $s \in \Gamma(M, E)$  を  $M$  上の切断、すなわちベクトル場とする。 $E$  の元は

$$[(u, v)] = \{(ug, \rho(g)^{-1}v) | u \in P, v \in V, g \in G\}$$

と書ける。同値類の代表元をとることがゲージを固定することに対応する。そこで切断

$$s(p) = [(\sigma_i(p), \xi(p))]$$

を代表元として選ぶ。

ここで  $E$  において、 $M$  上の曲線  $\gamma$  に沿った平行移動を考える。ただし、 $\xi$  が平行移動されたとは  $\xi(\gamma(t))$  が  $\gamma(t)$  に沿って定数であることが条件にしたいのだが、ここでは切断  $\sigma_i(p)$  の選び方に依存するのでつかえない。

そこで、あるベクトルが  $P$  における  $\gamma$  の水平持ち上げ  $\tilde{\gamma}$  に関して定数であれば平行移動であるとする。この時、切断

$$s(t) = [(\tilde{\gamma}(t), \eta(\gamma(t)))]$$

は平行移動されたとする。  $\tilde{\gamma}'(t)$  が  $\gamma$  の別の水平持ち上げであるとき

$$\tilde{\gamma}'(t) = \tilde{\gamma}(t)a, \quad a \in G$$

とかけるから簡単のために  $\eta(\gamma(t)) = \gamma(t)$  と書くと、第2部から  $G$  のファイバー  $F$  への右からの作用を  $u \in \pi^{-1}(U_i), p = \pi(u)$  に対して

$$\phi_i : U_i \times G \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$$

は局所自明化で

$$\phi_i^{-1}(u) = (p, g_i)$$

$\pi^{-1}(U_i)$  への右作用が

$$\phi_i^{-1}(ua) = (p, g_i a)$$

となり、これは図のような垂直移動をファイバー空間上で表していた。

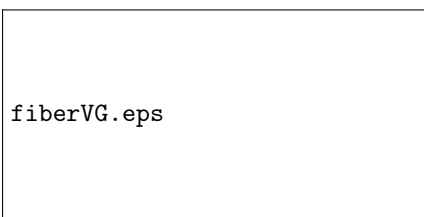


図 15.7: ファイバー上の垂直移動

よってこの時は'に注意して

$$[(\tilde{\gamma}(t), \eta(\gamma(t)))] = [(\tilde{\gamma}'(t)a^{-1}, \eta(t))] = [(\tilde{\gamma}'(t), a^{-1}\eta(t))] \quad (15.39)$$

となる。よって  $\eta(t)$  が  $\gamma(t)$  に沿って定数であればその定数倍になる  $a^{-1}\eta(t)$  もまた定数になる。次に共変微分を定義する。切断  $s(p)$  は  $\gamma(t)$  に沿って  $s(t)$  に移動し、

$$s(t) = [(\tilde{\gamma}(t), \eta(\gamma(t)))]$$

従って  $p_0 = \gamma(0)$  における  $s(t)$  の  $\gamma(t)$  に沿った共変微分は

$$\nabla_X s \equiv \left[ \left( \tilde{\gamma}(0), \frac{d}{dt} \eta(\gamma(t)) \Big|_{t=0} \right) \right]$$

となる。この値が普遍的であるためには水平持ち上げ

$$\tilde{\gamma}'(t) = \tilde{\gamma}(t)a, \quad a \in G$$

に依存しないはずである。この時、式 15.39 から'に注意して

$$\left[ \left( \tilde{\gamma}'(0), \frac{d}{dt} \{a^{-1}\eta(\gamma(t))\} \Big|_{t=0} \right) \right] = \left[ \left( \tilde{\gamma}'(0)a^{-1}, \frac{d}{dt} \eta(\gamma(t)) \Big|_{t=0} \right) \right] = \left[ \left( \tilde{\gamma}(0), \frac{d}{dt} \eta(\gamma(t)) \Big|_{t=0} \right) \right] \quad (15.40)$$

が成り立つので影響をうけない。つまり、持ち上げられた  $\tilde{\gamma}$  の程度には無関係である。これが共変微分のもつ重要な性質である。

従って共変微分  $\nabla_X s$  は切断を新しい切断に写すことになる。

$\nabla_X s$  は接ベクトル  $X$  と切断  $s \in \Gamma(M, E)$  のみに依存し、局所自明化には依存しない。

つまり、 $p$  において

$$X_p \in T_p M$$

となる接ベクトル場  $X$  があれば曲線  $\gamma(t)$  で  $X_p \in T_p M$  を満たし、かつ

$$\gamma(0) = p$$

ととれるということになる。

## 15.7 主束上の共変外微分

前節と同様に  $M$  は  $n$  次元多様体  $E$  はベクトル束とする。  $\pi: E \rightarrow M$  は射影である。よって  $x \in M$  に対し  $E_x = \pi^{-1}(x)$  は  $x$  上のファイバーである。ファイバーは  $R^r$  であり

$$E: M \times R^r$$

$M$  上の  $p$  次微分形式の全体を  $A^p(M)$  と表す。  $E$  上に値をとる場合は  $A^p(E)$  である。

$$\begin{aligned} A^p(M) &= \Gamma(\wedge^p T^*M) \\ A^p(E) &= \Gamma(\wedge^p T^*M \otimes E) \end{aligned}$$

と表す。外積によって

$$A^p(M) \times A^q(E) = A^{p+q}(E)$$

となり、接続により

$$\nabla: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(T^*M \otimes E)$$

となった。そこでさらにこのベクトル束  $T^*M \otimes E$  の接続を考える。単純には

$$\nabla: \Gamma(T^*M \otimes E) \rightarrow \Gamma(T^*M \otimes T^*M \otimes E)$$

となるが単純ではなく  $T^*M$  の接続を考えないといけない。そこで切断を  $\sigma$  として

$$\sigma \in A^0(E)$$

$$\theta \in A^p(M)$$

とおき、

$$D: A^p(E) \rightarrow A^{p+1}(E)$$

となる写像を式 15.28 から次のようにおく。これを共変外微分という。

$$D(\sigma, \theta) = \nabla\sigma \wedge \theta + \sigma \cdot d\theta \tag{15.41}$$

たとえば1次微分形式の場合  $p = 1$  として  $\phi \in A^1(E)$  の時、式 11.57 のように座標変化と  $\phi$  の両方の変化が関わるので2つの接ベクトル場  $X, Y$  により

$$D\phi(X, Y) = \frac{1}{2} (\nabla_X(\phi(Y)) - \nabla_Y(\phi(X)) - \phi([X, Y])) \in A^2(E) \quad (15.42)$$

となる。これは Lie 微分でみた一般化といえる。従って共変外微分は  $\sigma \in A^0(E)$  に対しては接続に一致し、

$$D\sigma = \nabla\sigma$$

である。また外微分の性質から  $\phi \in A^p(E)$ ,  $\theta \in A^q(M)$  の時、共変外微分は

$$D(\phi \wedge \theta) = D\phi \wedge \theta + (-1)^p \phi \wedge d\theta \quad (15.43)$$

が成り立つ。通常の外微分では  $dd = 0$  であったので 15.41 から

$$\begin{aligned} D^2(\sigma, \theta) &= D(D\sigma \wedge \theta + \sigma \cdot d\theta) \\ &= D^2\sigma \wedge \theta - D\sigma \wedge d\theta + D\sigma \wedge d\theta + \sigma^2 d^2\theta \\ &= D^2\sigma \wedge \theta \end{aligned}$$

従ってこの結果は  $D^2\sigma$  に依存している。これは一般的に  $\mathbf{0}$  であるとはいえない。直接2次微分形式が関わる。そこで  $\theta$  が関数  $f$  とすれば

$$D^2(f\sigma) = fD^2\sigma, \quad \sigma \in A^0(E), \quad f \in A^0(M) \quad (15.44)$$

したがって  $M$  上の1点  $x$  で  $\sigma_x = 0$  であれば  $(D^2\sigma)_x = 0$  となるから一般に

$\sigma, \rho \in A^0(E)$  が  $\sigma_x = \rho_x$  であれば  $(D^2\sigma)_x = (D^2\rho)_x$  となる。

これから  $(D^2\sigma)_x$  が  $\sigma_x$  だけでできまり、近傍の様子や変化量には無関係であることがわかる。

そこで各点  $x$  で  $D^2$  は次の線形写像として定義できる。

$$D^2 : E_x \rightarrow \wedge^2 T^*M \otimes E_x \quad (15.45)$$

これは2形式になるので自己準同型写像を  $End$  記号で表すと次のように接続の曲率  $R$  が定義できる。

$$R \equiv D^2 \in A^2(End E) \quad (15.46)$$

1形式  $\phi = D\sigma$  から接続の曲率を求めてみると式 15.42 から

$$\begin{aligned} D^2\sigma &= R(X, Y)\sigma \\ &= D(\phi) \\ &= \frac{1}{2} (\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]}) \sigma \end{aligned}$$

これはビアンキ恒等式の章で登場した **Ricci** 恒等式である。

$E$  の局所標機構  $\{e_1, e_2, e_3, \dots, e_r\}$  に曲率  $R$  を作用させると接続形式を  $\omega_j^i$  として

$$De_i = \sum \omega_i^\mu e_\mu \quad (15.47)$$

$$\begin{aligned} Re_i &= D\left(\sum \omega_i^\mu e_\mu\right) \\ &= \sum d\omega_i^\mu e_\mu - \sum \omega_i^\mu \wedge De_\mu \\ &= \sum \left(d\omega_i^\mu - \sum \omega_i^\nu \wedge \omega_\nu^\mu\right) e_\mu \end{aligned}$$

となるので次の 1 形式演算子を定義すると次の接続の構造方程式 (structure equation)

$$\Omega_i^\mu = d\omega_i^\mu - \sum \omega_i^\nu \wedge \omega_\nu^\mu = d\omega_i^\mu + \sum \omega_\nu^\mu \wedge \omega_i^\nu \quad (15.48)$$

行列表示では次の接続の曲率形式 (curvature form) が得られる。

$$\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega \quad (15.49)$$

これから次が得られる。

$$Re_i = \sum \Omega_i^\mu e_\mu \quad (15.50)$$

$\Omega$  は局所標構の変換に対し接続形式が式 3.55 から

$$\omega' = a^{-1}\omega a + a^{-1}da$$

と 1 形式が足されて変換された。これを曲率形式 15.49 に代入すると曲率形式の変換は  $da \wedge da = 0, dda = 0, (da^{-1})\omega a = -a^{-1}\omega da$  だから

$$\begin{aligned} \Omega' &= d\omega' + \omega' \wedge \omega' \\ &= d(a^{-1}\omega a) + (a^{-1}\omega a + a^{-1}da) \wedge (a^{-1}\omega a + a^{-1}da) \\ &= a^{-1}d\omega a - a^{-1}\omega da + a^{-1}\omega da + a^{-1}\omega a \wedge a^{-1}\omega a + a^{-1}da \wedge a^{-1}\omega a \\ &\quad + a^{-1}\omega a \wedge a^{-1}da + a^{-1}da \wedge a^{-1}da \\ &= a^{-1}d\omega a + a^{-1}\omega a \wedge a^{-1}\omega a \\ &= a^{-1}(d\omega + \omega \wedge \omega) a \\ &= a^{-1}\Omega a \end{aligned}$$

となる。微分形式のみの変換則になった。従って曲率  $R$  が  $A^2(\text{End } E)$  の元であることがわかる。さらにこの時の行列  $a$  は  $U_a \cap U_b$  上での変換関数を  $\psi_{ab}$  とすれば

$$\Omega_b = \psi_{ab}^{-1}\Omega_a\psi_{ab} \quad (15.51)$$

と表すことができる。

また共変外微分  $D$  が作用しても接続  $\nabla$  は定義される。

$$D : A^p(\text{End } A) \rightarrow A^{p+1}(\text{End } E)$$

ならば 2 形式  $A^2$  の元である曲率  $R$  に共変外微分を作用させるとどうなるかみてみよう。

$\sigma \in A^0(E), \phi \in A^p(E)$  に対し

$$D^2\phi = R \wedge \phi$$

だったから  $\phi = D\sigma$  に対して

$$D^2(D\sigma) = R \wedge D\sigma$$

を得るがライプニッツ則から

$$D(R\sigma) = DR \cdot \sigma + R \wedge D\sigma$$

となるのでこれから恒等式として

$$DR = 0$$

が成り立たなくてはいけないことがわかる。

これはリーマン曲率を共変微分して和をとることで得られたビアンキ恒等式 Bianchi identity である。

リーマン曲率が共変微分の交換積によって定義されたのと同様に、曲率形式が2次の共変外微分から定義されたが、さらに微分あるいは外微分を作用させると同じビアンキ恒等式が得られることは大変興味深い。

相対論のところでもやったようにこの恒等式は別表現が得られる。

そのために曲率形式 15.49 を外微分すると  $d\omega \wedge \omega = \Omega \wedge \omega - \omega \wedge \omega \wedge \omega$  だから

$$\begin{aligned} d\Omega &= d\omega \wedge \omega - \omega \wedge d\omega \\ &= -\omega \wedge \omega \wedge \omega + \Omega \wedge \omega + \omega \wedge \omega \wedge \omega - \omega \wedge \Omega \end{aligned}$$

からビアンキ恒等式の別表現として

$$d\Omega - \Omega \wedge \omega + \omega \wedge \Omega = 0$$

が得られる。

多様体  $M$  上に2つのベクトル束  $E, E'$  があり、その接続を  $\nabla, \nabla'$  とするこの時  $\nabla \oplus \nabla'$  の曲率は  $R \oplus R'$  となる。

曲率形式の行列が次のような対角行列になる。

$$\begin{pmatrix} \Omega & 0 \\ 0 & \Omega' \end{pmatrix}$$

次に積  $E \otimes E'$  についての接続を  $\nabla''$  とし、外微分を  $D''$  とすると

$$\nabla'' = \nabla \otimes I_{E'} + I_E \otimes \nabla'$$

であり、これから曲率は式 15.43 から  $D$  は1次微分形式だったから

$$\begin{aligned} R''(\sigma \otimes \sigma') &= D''D''(\sigma \otimes \sigma') \\ &= D''(D\sigma \otimes \sigma' + \sigma \otimes D'\sigma') \\ &= DD\sigma \otimes \sigma' - D\sigma \otimes D'\sigma' + D\sigma \otimes D'\sigma' + \sigma \otimes D'D'\sigma' \\ &= R\sigma \otimes \sigma' + \sigma \otimes R'\sigma' \end{aligned}$$

となり結局次のように接続と同じ形式になる。

$$R'' = R \otimes I_{E'} + I_E \otimes R'$$

次に双対形式に対する変換もみておく。内積の微分から次が成り立つ。

$$d \langle \sigma^*, \sigma \rangle = \langle \nabla \sigma^*, \sigma \rangle + \langle \sigma^*, \nabla \sigma \rangle$$

## 15.8 変換規則

次に接続係数が異なるベクトル場でどのような変換をうけるか求めてみる。

$U \cap V \neq \emptyset$  であるチャート  $(V, \phi)$  を考え、その座標を関数

$$y = \phi(p)$$

とする。それぞれの座標における基底を  $\{e_\mu\} = \{\partial/\partial x^\mu\}$ 、 $\{f_\alpha\} = \{\partial/\partial y^\alpha\}$  とおく。

$y$  座標に対応した接続係数を  $\hat{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha$  とする。この時、基底ベクトル  $f_\alpha$  は

$$\nabla_{f_\alpha} f_\beta = \hat{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma f_\gamma$$

となるが

$$f_\alpha = (\partial x^\mu / \partial y^\alpha) e_\mu$$

と書くと左辺が

$$\begin{aligned} \nabla_{f_\alpha} f_\beta &= \nabla_{f_\alpha} (\partial x^\mu / \partial y^\beta) e_\mu \\ &= \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial y^\alpha \partial y^\beta} e_\mu + \frac{\partial x^\lambda}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\beta} \nabla_{e^\lambda} e_\mu \\ &= \left( \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial y^\alpha \partial y^\beta} + \frac{\partial x^\lambda}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\beta} \Gamma_{\lambda\mu}^\nu \right) e_\nu \end{aligned}$$

となる。一方で右辺は

$$\hat{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma f_\gamma = \hat{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma (\partial x^\nu / \partial y^\gamma) e_\nu$$

に等しいことから接続係数は

$$\hat{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma f_\gamma = \frac{\partial x^\lambda}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\beta} \frac{\partial y^\gamma}{\partial x^\nu} \Gamma_{\lambda\mu}^\nu + \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial y^\alpha \partial y^\beta} \frac{\partial y^\gamma}{\partial x^\nu} \quad (15.52)$$

と変換しなくてはならない。従ってこの変換規則は  $\nabla_X Y$  をベクトルにする

$$\hat{X}^\alpha \left( \hat{\partial}_\alpha \hat{Y}^\gamma + \hat{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma \hat{Y}^\beta \right) f_\gamma = X^\lambda (\partial_\lambda Y^\nu + \Gamma_{\lambda\mu}^\nu Y^\mu) e_\nu$$

が成り立つことである。これは  $\nabla_X Y$  が座標の選び方に依存しないように変換則が決まることでもある。

よってテンソル場  $T_{\mu\nu}^\lambda$  がある時、 $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda + T_{\mu\nu}^\lambda$  は別の接続係数になる。また逆に接続係数はテンソルにはなり得なかったが

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma - \hat{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma \quad (15.53)$$

=をつくるとこれは  $(x,2)$  型のテンソルとして変換することがわかる。

また式 15.52 の第 2 項は局所的には  $\hat{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma f_\gamma = 0$  とする慣性系をとることがいつでもできることを意味する。このような座標系は無重力系という。

## 15.9 共変微分の局所表示

第 2 部の切断の章では切断を取ることでファイバー上に次元を広げることができた。この時、どこで切断をとるかで局所座標が定義できた。

そこで 局所座標のみで共変微分を表すことを考える。 $P(M, G)$  を  $G$  を主束、ベクトル束  $E = P \times_\rho V$  を同伴束とする。

局所切断を  $\sigma_i \in \Gamma(U_i, P)$  とする。



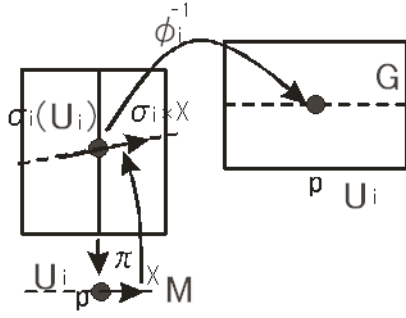


図 15.8: 接ベクトル  $X$  の水平持ち上げ

自明化は  $\sigma_i(p) = \phi_i(p, e)$  を選ぶ。  $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$  を  $U_i$  における曲線とし、その水平持ち上げは

$$\tilde{\gamma} = \sigma_i(t)g_i(t), \quad g_i(t) \equiv g_i(\gamma(t)) \in G$$

とする。  $e_\alpha^0$  は  $V$ , つまり、  $\gamma(0)$  での  $\alpha$  番目の基底ベクトルで、  $E$  の切断を

$$e_\alpha(p) \equiv [(\sigma_i(p), e_\alpha^0)] \quad (15.54)$$

とする。今後この切断と接ベクトルの 2 成分表示を多用する。

$$(e_\alpha^0)^\beta = (\delta_\alpha)^\beta$$

であるから式 15.39 から

$$\begin{aligned} e_\alpha(t) &= [(\tilde{\gamma}(t)g_i(t)^{-1}, e_\alpha^0)] \\ &= [(\tilde{\gamma}(t), g_i(t)^{-1}e_\alpha^0)] \end{aligned}$$

と書ける。これは  $\gamma$  に沿って基底は変化していくわけだが、これを補正するように  $g_i(t)^{-1}$  が  $e_\alpha^0$  に作用している。

式 15.34 から  $g$  値 1 形式の  $\omega$  について  $\sigma_{i*}X$  に沿っては回転成分がなかったから

$$\omega(\sigma_{i*}X) = \sigma_i^*\omega(X) = \mathcal{A}_i(X)$$

とした時、常微分方程式から  $g_i(t)$  の  $t$  微分が

$$\frac{dg_i(t)}{dt} = -\omega(X)g_i(t) = -\mathcal{A}_i(X)g_i(t)$$

となり、形式解が  $P$  を順序演算子として

$$g_i(\gamma(t)) = P \exp \left( - \int_0^t \mathcal{A}_{i\mu} \frac{dx^\mu}{dt} dt \right) = P \exp \left( - \int_{\gamma(0)}^{\gamma(t)} \mathcal{A}_{i\mu}(\gamma(t)) dx^\mu \right)$$

とかけた。また

$$\frac{d}{dt} \{g^{-1}g\} = 0 \rightarrow \frac{dg^{-1}}{dt}g = -g^{-1}\frac{dg}{dt}$$

を利用し、  $g_i^{-1}(0) = g_i(0)$  だからベクトル  $e_\alpha$  の共変微分は式 15.40 から

$$\begin{aligned} \nabla_X e_\alpha &= \left[ \left( \tilde{\gamma}(0), \frac{d}{dt} \{g_i^{-1}(t)e_\alpha^0\} \Big|_{t=0} \right) \right] \\ &= \left[ \left( \tilde{\gamma}(0), -g_i^{-1}(t) \left\{ \frac{d}{dt} g_i(t) \right\} g_i^{-1}(t)e_\alpha^0 \Big|_{t=0} \right) \right] \\ &= [(\tilde{\gamma}(0)g_i^{-1}(0), \mathcal{A}_i(X)g_i^{-1}(t)e_\alpha^0 \Big|_{t=0})] \\ &= [(\tilde{\gamma}(0)g_i^{-1}(0), \mathcal{A}_i(X)e_\alpha^0 \Big|_{t=0})] \end{aligned}$$

となる。これから局所表示として  $\tilde{\gamma}(0) = \sigma_i(0)g_i(0)$  を代入し、

$$\nabla_X e_\alpha = [(\sigma_i(0), \mathcal{A}_i(X)e_\alpha^0)] \quad (15.55)$$

となる。ここで 1 形式について

$$\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_{i\mu} dx^\mu = \mathcal{A}_{i\mu\beta}^\alpha dx^\mu$$

とする。ただし、ベクトル  $T_\gamma$  について

$$\mathcal{A}_{i\mu\beta}^\alpha \equiv A_{i\mu}^\gamma (T_\gamma)_\beta^\alpha$$

である。これを 15.55 に代入し、基底との内積は  $(T_\gamma)_\beta^\alpha e_\alpha^0 = \delta_\beta^\gamma$  とすると固有方程式が初期状態で

$$\mathcal{A}_i(X)e_\alpha^0 = \frac{dx^\mu}{dt} e_\beta^0 \mathcal{A}_{i\mu}^\beta (T_\alpha)_\gamma^\beta e_\alpha^0 = \frac{dx^\mu}{dt} e_\beta^0 \mathcal{A}_{i\mu\gamma}^\beta \delta_\alpha^\gamma = \frac{dx^\mu}{dt} \mathcal{A}_{i\mu\alpha}^\beta e_\beta^0 \quad (15.56)$$

となる。 $t$  微分を前に出すことができる。

共変微分は

$$\nabla_X e_\alpha = \left[ \left( \sigma_i(0), \frac{dx^\mu}{dt} \mathcal{A}_{i\mu\alpha}^\beta e_\beta^0 \right) \right] = \frac{dx^\mu}{dt} \mathcal{A}_{i\mu\alpha}^\beta e_\beta$$

つまり、

$$\nabla e_\alpha = \frac{dx^\mu}{dt} \mathcal{A}_{i\mu\alpha}^\beta e_\beta$$

となるから、座標曲線  $x^\mu$  に対して次のようにかける。

$$\nabla_{\partial/\partial x^\mu} e_\alpha = \mathcal{A}_{i\mu\alpha}^\beta e_\beta$$

これは主束  $P$  上の接続  $\mathcal{A}$  が伴束  $E$  上の共変微分を完全に決めていることになる。

この意味を考えよう。 $E$  での切断を一般的に  $e_\alpha$  を  $\gamma(t)$  の基底とし、

$$s(p) = [\sigma_i(p), \xi_i(p)] = \xi_i^\alpha(p) e_\alpha$$

とすると

$$\xi_i(p) = \xi_i^\alpha(p) e_\alpha^0$$

とかけて、この共変微分が式 3.64 から次のようにかける。

$$\nabla_X s = \left[ \left( \sigma_i(0), \frac{d\xi_i}{dt} + \mathcal{A}_i(X)\xi_i|_{t=0} \right) \right] \quad (15.57)$$

つまり、 $t=0$  の値にたいして常に変化量  $\frac{d\xi_i}{dt}$  が加わる。 $\xi_i$  が局所座標で表されるから、さらに式 15.56 から

$$\nabla_X s = \left[ \left( \sigma_i(0), \frac{d\xi_i}{dt} + \mathcal{A}_i(X)\xi_i|_{t=0} \right) \right] = \frac{dx^\mu}{dt} \left\{ \frac{\partial \xi_i^\alpha}{\partial x^\mu} + \mathcal{A}_{i\mu\beta}^\alpha \xi_i^\beta \right\} e_\alpha \quad (15.58)$$

のように曲線の接ベクトルでくくると座標の時間微分、つまり速度が見えてくる。こうなるように  $\{\}$  内の接続の構造があるわけである。

共変微分が局所自明化にはよらないこともみておこう。切断  $\sigma_j(p), \sigma_i(p)$  を共通部分をもつチャート  $U_i, U_j$  上の局所切断としよう。 $U_i \cap U_j$  上では変換関数を用いて

$$\sigma_j(p) = \sigma_i(p) t_{ij}(p)$$

のように継ぎ接ぎをしていくことができた。そこで接ベクトル  $X$  に沿った共変微分を  $i \rightarrow j$  と変化させると式 3.55 から

$$\mathcal{A}_j = t_{ij}^{-1} \mathcal{A}_i t_{ij} + t_{ij}^{-1} dt_{ij}$$

だったから、式 6.7 から次のようになる。

$$\begin{aligned}
\nabla_X s &= \left[ \left( \sigma_j(0) \cdot t_{ij}^{-1}, \frac{d(t_{ij}\xi_j)}{dt} + \mathcal{A}_i(X)t_{ij}\xi_j|_{t=0} \right) \right] \\
&= \left[ \left( \sigma_j(0), \frac{d\xi_j}{dt} + \left( t_{ij}^{-1} \frac{dt_{ij}}{dt} \right) \xi_j|_{t=0} + (t_{ij}^{-1} \mathcal{A}_i t_{ij}) \xi_j|_{t=0} \right) \right] \\
&= \left[ \left( \sigma_j(0), \frac{d\xi_j}{dt} + (t_{ij}^{-1} \mathcal{A}_i t_{ij} + t_{ij}^{-1} dt_{ij}) \xi_j|_{t=0} \right) \right] \\
&= \left[ \left( \sigma_j(0), \frac{d\xi_j}{dt} + \mathcal{A}_j(X)\xi_j|_{t=0} \right) \right]
\end{aligned}$$

つまり、これは共変微分が水平持ち上げに依存しないことを示す。ここで接続形式  $\mathcal{A}_i$  はゲージポテンシャルであったことを思いだそう。

主束を考えると共変微分を変化させないようにこの  $\mathcal{A}_i$  も変換されていく。次にゲージ変換についてみておこう。

## 15.10 ゲージ変換

接空間が  $T_u P = H_u P \oplus V_u P$  のように一意的に水平、垂直に分けられるためには  $U_i \cap U_j$  上で

$$U_i \cap U_j \rightarrow \omega_i = \omega_j \quad (15.59)$$

でなくてはならない。ここで 1 形式  $\omega$  は

$$\omega|_{U_i} = \omega_i \quad (15.60)$$

であり、 $P$  全体で定義される。この条件を満足させるために接続が必要である。

まず、変換関数により切断は

$$\sigma_j(p) = \sigma_i(p)\psi_{ij}(p) \quad (15.61)$$

と変換した。これに対し、引き戻しについては

$P(M, G)$  は主束、 $\sigma_i$  は  $U_i$  上の局所切断であるとする。ただし、 $U_i \cap U_j \neq \emptyset$  とする。この時、 $X \in T_p M (p \in U_i \cap U_j)$  に対して

$$\sigma_{j*} = R_{\psi_{ij}*}(\sigma_{i*}X) + (\psi_{ij}^{-1} d\psi_{ij}(X))^{\#} \quad (15.62)$$

つまり  $U_i$  上の切断を  $U_j$  上にもってくるためには単純な変換関数による引き戻しだけではなく、新たな基本ベクトル場が加わることになる。これを示そう。

曲線  $\gamma(t)$  を

$$\gamma(t) : [0, 1] \rightarrow M; \gamma(0) = p, \dot{\gamma}(0) = X \quad (15.63)$$

となるように選ぶ。  $\sigma(\gamma(t)) = \sigma(t)$  と表し、  $G : R_{g*} = Xg \ g \in G$  とする。  $G$  は線形行列群になる。

$t = 0$  において

$$\psi_{ij}(p)^{-1}\psi_{ij}(\gamma(t)) = e \quad (15.64)$$

が成り立つので

$$\begin{aligned}
\psi_{ij}(p)^{-1}d\psi_{ij}(X) &= \psi_{ij}(p)^{-1}\frac{d}{dt}\psi_{ij}(X)d(\gamma(t)) \\
&= \psi_{ij}(p)^{-1}\frac{d}{dt}\psi_{ij}(X)|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}[\psi_{ij}(p)^{-1}\psi_{ij}(t)]|_{t=0} \in T_e(G) \sim g
\end{aligned}$$

を用いて

$$\begin{aligned}
\sigma_{j*}X &= R_{X*}\sigma_j(\gamma(t))|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}\sigma_j(\gamma(t))|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}\{\sigma_i(t)\psi_{ij}(t)\}|_{t=0} \\
&= \left(\frac{d}{dt}\sigma_i(t)\right)\psi_{ij}(t) + \sigma_i(t)\frac{d}{dt}\psi_{ij}(t)|_{t=0} \\
&= R_{\psi_{ij}*}(\sigma_{i*}X) + \sigma_j(t)\psi_{ij}(p)^{-1}\frac{d}{dt}\psi_{ij}(t)|_{t=0}
\end{aligned}$$

となるが最後の式の第2項は式 15.17 から切断  $\sigma_j(p)$  における基本ベクトル場になる。すなわち

$$\sigma_j(t)\psi_{ij}(p)^{-1}\frac{d}{dt}\psi_{ij}(t)|_{t=0} = (\psi_{ij}^{-1}d\psi_{ij}(X))^{\#} \quad (15.65)$$

ここで両立条件として 15.29、15.37 から

$$\begin{aligned}
\sigma_j^*\omega(X) &= \omega(\sigma_{j*}X) \\
&= \pi^*A(\sigma_{j*}X) + d_Pg(\sigma_{j*}X) \\
&= R_{\psi_{ij}*}^*\omega(\sigma_{i*}X) + \psi_{ij}^{-1}d\psi_{ij}(X) \\
&= \psi_{ij}^{-1}\omega(\sigma_{i*}X)\psi_{ij} + \psi_{ij}^{-1}d\psi_{ij}(X)
\end{aligned}$$

となるがこれが任意の  $X \in T_pM$  で成立するために条件として次を得る。

$$A_j = \psi_{ij}^{-1}A_i\psi_{ij} + \psi_{ij}^{-1}d\psi_{ij} \quad (15.66)$$

よってこれが成り立つなら  $P$  上に  $g$  値 1 形式をつくることができる。

ここで重要なのは大局性と局所性である。これは前部ののゲージ理論にも関係するがここでの局所表示  $\{A_j\}$  について

$$A_i = \sigma_i^*\omega$$

は局所的には成立するが大局的には成立の保証はない。この背景には時間連続な曲線の存在がある。これらの曲線は多様体  $M$  上でいくらでも自由にとれる。従って局所的な開被覆によりつくられる局所座標に依存する。例えば  $U_i, U_j$  上の局所切断を  $\sigma_i, \sigma_j$  とし、 $A_i, A_j$  を局所接続形式とする。この時切断については  $p \in U_i \cap U_j$  とし、 $g \in G$  として

$$\sigma_j(p) = \sigma_i(p)g(p) \quad (15.67)$$

が満たされれば

$$A_j(p) = g^{-1}A_i(p)g + g^{-1}dg \quad (15.68)$$

例えば成分にて表すと

$$A_{2\mu} = g^{-1}(p)A_{1\mu}(p)g(p) + g^{-1}(p)\partial_u g(p)$$

とあらわせば、これは第7部でみるゲージ変換に対応している。  
 $g$  が変換関数であるから1パラメタ関数を用いて

$$\psi_{ij}(p) = \exp(i\chi(p)) \quad \chi(p) \in \mathcal{R} \quad (15.69)$$

とすれば  $i$  局所系の座標を用いて

$$\psi_{ij}(p)^{-1} d\psi_{ij}(p) = id(\chi(p)) \quad (15.70)$$

と書けるので

$$\begin{aligned} A_j(p) &= \psi_{ij}(p)^{-1} A_i \psi_{ij}(p) + \psi_{ij}(p)^{-1} d\psi_{ij}(p) \\ &= A_i(p) + \psi_{ij}(p)^{-1} d\psi_{ij}(p) \end{aligned} \quad (15.71)$$

となる。これを成分に表せば

$$id(\chi(p)) = i\partial_\mu \chi \quad (15.72)$$

結局、ゲージ変換

$$A_{j\mu} = A_{i\mu} + i\partial_\mu \chi \quad (15.73)$$

に対応する。ただし大局的な主束  $P$  においてはこれらの情報を持ちえない。なぜなら

$$\omega = \sum_j \omega_j = \sum_j A_j \quad (15.74)$$

を満たす  $\omega$  のみ主束の情報となる。逆に個々の  $\omega_j$  からは全体の  $\omega$  は見えない。

## 15.11 接続係数

第2部でみたように接続係数は基底の共変微分から得られた。これは  $M$  上で  $x = \phi(p)$  をとるチャート  $(U, \phi)$  を選び、 $m^3$  個の接続係数が

$$\nabla_\nu e_\mu \equiv \nabla_{e_\nu} e_\mu = e_\lambda \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \quad (15.75)$$

から定義できた。 $\nabla$  はアフィン接続である。これは基底ベクトルが点から点にどう変化していくかを表していた。

次に  $M$  上のフレーム束を  $FM$ , 同伴束を  $TM$  とする。

$$FM = P(M, GL(m, \mathbb{R}))$$

$$TM = FM \times_\rho \mathbb{R}^m$$

である。ここで  $m = \dim M$  であり  $\rho$  は  $GL(m, \mathbb{R})$  の  $m \times m$  表現である。 $gl(m, \mathbb{R})$  の元も  $m \times m$  行列である。

局所接続形式を  $\mathcal{A}_i$  は

$$\mathcal{A}_i = \Gamma_{\mu\beta}^\alpha dx^\mu$$

とする。式 15.55 から

$$\nabla_X e_\alpha = [(\sigma_i(0), \mathcal{A}_i(X)e_\alpha^0)]$$

ただし、

$$\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_{i\mu} dx^\mu = \mathcal{A}_{i\mu\beta}^\alpha dx^\mu$$

$$\mathcal{A}_{i\mu\beta}^\alpha \equiv A_{i\mu}^\gamma (T_\gamma)^\alpha_\beta \quad (15.76)$$

としたように  
この時、式 15.75 から

$$\nabla_{\partial/\partial x^\mu} e_\alpha = [(\sigma_i(0), \Gamma_\mu e_\alpha^0)] = \Gamma_{\mu\alpha}^\beta e_\beta$$

となることが期待できる。一般の切断  $s(P)$  に対しては

$$s(p) = [(\sigma_i(p), X_i(p))] = X_i^\alpha(p) e_\alpha$$

とすると

$$\nabla_{\partial/\partial x^\mu} s = \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} X_i^\alpha, \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \right) \right] e_\alpha$$

となり、第 2 部でのアフィン接続と同じ結果になる。つまり、接続係数が接ベクトルの水平方向成分を得る和を添え字で指定する。

しかし。ここでの添え字は  $\alpha, \beta$  が  $gl(m, \mathbb{R})$  を表し、 $\mu$  は曲率 1 形式  $\Omega^1(M)$  を表す。  
従って単純に足しあわせの添え字  $\mu$  は異なった空間上の足し合わせをおこなう。

## 15.12 複素スカラー場

複素スカラー場を  $\phi$  に選ぶ。 $U(1)$  束をゲージ場として主束  $P(M, U(1))$ 、同伴束を  $E = P \times_\rho \mathbb{C}$  とする。 $\rho$  は複素数で  $U(1)$  の元と同一視する。 $\omega$  に対する局所表示は

$$\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_{i\mu} dx^\mu$$

となったが、ここでの

$$A_{i\mu} = A_i(\partial/\partial x^\mu)$$

は Maxwell の電磁ベクトルポテンシャルである。 $M$  の曲線  $\gamma$  は  $\gamma(0)$  において接ベクトル  $X$  を持った。局所切断  $\sigma_i$  をとり  $\gamma$  の水平持ち上げを

$$\tilde{\gamma}(t) = \sigma_i(t) e^{i\phi(t)}$$

で表す。この時、基底の切断は  $1 \in \mathbb{C}$  として

$$e = [(\sigma_i(p), 1)]$$

である。また、 $p$  点で

$$\phi(p) = [(\sigma_i(p), \Phi(p))] = \Phi(p)e \quad (\Phi : M \rightarrow \mathbb{C})$$

は  $E$  の切断とおく。これは複素スカラー場と同一視できる。 $\tilde{\gamma}(t)$  の切断を

$$g(t) = e^{i\phi(t)}$$

とする。これから  $t$  での切断は  $\tilde{\gamma}(t)$  を用いると、式 15.39 から

$$\phi(t) = \Phi(t) [\tilde{\gamma}(t), g(t)^{-1}]$$

となる。 $\gamma$  に沿う  $\phi$  の共変微分が 15.57 から

$$\begin{aligned}\nabla_X \phi &= \frac{d\Phi}{dt} [(\tilde{\gamma}(0), g(0)^{-1})] + \Phi(0) [\tilde{\gamma}(0), g(0)^{-1} \mathcal{A}_i(X) \cdot 1] \\ &= \left( \frac{d\Phi}{dt} + \mathcal{A}_{i\mu} \Phi \frac{dx^\mu}{dt} \right) e \\ &= X^\mu \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu} + \mathcal{A}_{i\mu} \Phi \right) e\end{aligned}$$

となる。

となり、接ベクトルを前に出せる。

### 15.13 随伴作用

第 2 部のベクトル場の内積と随伴で写像  $f: V \rightarrow W$  が与えられとその随伴 (adjoint) として  $\tilde{f}$  は

$$G(\mathbf{w}, f\mathbf{v}) \rightarrow g(\mathbf{v}, \tilde{f}\mathbf{w}) \quad (15.77)$$

で定義し、行と列が入れ替わる操作が入っていることに注意し、 $v \in V, w \in W$  として成分で表示すると

$$w^\alpha G_{\alpha\beta} f_i^\beta v^j = v^j g_{ij} \tilde{f}_\alpha^j w^\alpha$$

となり、 $f$  の下添え字は  $u, w$  の添え字にかかるように入れ替わる。極短に

$$g_{ij} = \delta_{ij}, \quad G_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$$

であれば随伴は線型変化を伴わず、単に転置の操作と考えることができた。

$$\tilde{f} = f^t$$

そこで、同伴束  $E_g = P \times_{Ad} \mathfrak{g}$  とする。 $G$  の  $\mathfrak{g}$  への随伴作用は

$$V \rightarrow Ad_{\mathfrak{g}} V = g^{-1} V g, \quad V \in \mathfrak{g}, g \in G$$

とする。

局所切断は  $\sigma_i \in \Gamma(U_i, P)$  で  $\tilde{\gamma}(t) = \sigma_i(t)g(t)$  のように水平持ち上げをもつものをとる。

ここで  $V(p) = V^\alpha(p)T_\alpha$   $\{T_\alpha\}$  は  $\mathfrak{g}$  の基底として  $E_g$  の切断は

$$s(p) = [(\sigma_i(p), V(p))]$$

とする。この時の共変微分  $\nabla_X s$  は

$$\nabla_X s \equiv \left[ \left( \tilde{\gamma}(0), \frac{d}{dt} \{ Ad_{g(t)^{-1}} V(t) \} \Big|_{t=0} \right) \right]$$

で定義すれば、 $\tilde{\gamma}(t) = \sigma_i(t)e^{i\phi(t)}$  が成り立ち、 $\Delta t \rightarrow 0$  で

$$Ad_{g(t)^{-1}} V = \int_0^{\Delta t} \left\{ \frac{dV(t)}{dt} + [\mathcal{A}_i(X), V(t)] \right\} dt$$

であることになるから  $(\sigma_i(0), T_\alpha) = f_{\beta\gamma}^\alpha e_\alpha^0$  とみなせるから式 15.58 から

$$\begin{aligned}\nabla_X s &= \left[ \left( \tilde{\gamma}(0), \frac{d}{dt} \{ Ad_{g(t)^{-1}} V(t) \} \Big|_{t=0} \right) \right] \\ &= \left[ \left( \sigma_i(0), \frac{dV(t)}{dt} + [\mathcal{A}_i(X), V(t)] \Big|_{t=0} \right) \right] \\ &= X^\mu \left[ \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\mu} + f_{\beta\gamma}^\alpha A_{i\mu}^\beta V^\gamma \right] [(\sigma_i(0), T_\alpha)]\end{aligned}$$

となる。添え字の和が異なる空間を連結するので注意がいる。

## 15.14 曲率

一般に共変微分の  $\nabla_X s$  は作用素

$$\nabla : \Gamma(M, E) \rightarrow \Gamma(M, E \otimes \Omega^1(M))$$

を決めた。 $\Omega$  は微分形式である。そこで共変微分のベクトル値  $p$  形式  $s \otimes \eta$ ,  $\eta \in \Omega^p(M)$  への作用を考えると

$$\nabla(s \otimes \eta) \equiv (\nabla s) \wedge \eta + s \otimes d\eta$$

で表される。そこで  $U_i$  を  $M$  のチャートとし、 $\sigma_i$  を  $P$  での切断とする。曲率を考えるために次のように作用素  $\nabla$  を 2 回作用させる。

$$e_\beta = \left[ \left( \sigma_i, e_\beta^0 \right) \right] \in \Gamma(U_i, E) \text{ とすると } \nabla e_\beta \wedge \mathcal{A}_i^\beta{}_\alpha = e_\beta \otimes \left( \mathcal{A}_i^\beta{}_\gamma \wedge \mathcal{A}_i^\gamma{}_\alpha \right) \text{ だから}$$

$$\begin{aligned} \nabla \nabla e_\alpha &= \nabla \left( e_\beta \otimes \mathcal{A}_i^\beta{}_\alpha \right) \\ &= \nabla e_\beta \wedge \mathcal{A}_i^\beta{}_\alpha + e_\beta \otimes d\mathcal{A}_i^\beta{}_\alpha \\ &= e_\beta \otimes \left( d\mathcal{A}_i^\beta{}_\alpha + \mathcal{A}_i^\beta{}_\gamma \wedge \mathcal{A}_i^\gamma{}_\alpha \right) \\ &= e_\beta \otimes \mathcal{F}_i^\beta{}_\alpha \end{aligned}$$

のように

$$\mathcal{F}_i^\beta{}_\alpha = d\mathcal{A}_i^\beta{}_\alpha + \mathcal{A}_i^\beta{}_\gamma \wedge \mathcal{A}_i^\gamma{}_\alpha$$

としてまとめることができる。

よって、一般に  $s(p) = \xi^\alpha(p) e_\alpha(p)$  が  $E$  の切断であれば式 15.57 から

$$\xi_i(p) = \xi_i^\alpha(p) e_\alpha^0$$

とかけて、

$$\nabla_X s = \left[ \left( \sigma_i(0), \frac{d\xi_i}{dt} + \mathcal{A}_i(X)\xi_i|_{t=0} \right) \right] = \frac{dx^\mu}{dt} \left\{ \frac{\partial \xi_i^\alpha}{\partial x^\mu} + \mathcal{A}_{i\mu}^\alpha{}_\beta \xi_i^\beta \right\} e_\alpha$$

とまとめられたから 2 回作用は

$$\nabla \nabla s = e_\alpha \otimes \mathcal{F}_i^\alpha{}_\beta \xi_i^\beta$$

になる。

## 15.15 接続形式と曲率形式

さらに一般に前節で見たように共変微分から接続形式と曲率形式を次のように定義できる。

多様体  $M$  上のベクトル場の基底  $e_a$  とその双対基底  $l^a$  ( $a = 1, 2, \dots, n-1$ ) として次のような対称関係が成り立つ。

$$\nabla_X e_a = e_b \omega_a^b(X) \iff \nabla_X l^a = -\omega_b^a(X) l^b$$

が成り立つ。この  $\omega_a^b(X)$  を接続形式という。曲率テンソル  $R$  については

$$R(X, Y) e_a = e_b R_a^b(X, Y)$$

$$R_a^b(X, Y) = \frac{1}{2} R_{bcd}^a l^c \wedge l^d$$



で定義される  $R_g^a$  を曲率形式という。計量テンソルが

$$g = g_{ab}l^a l^b$$

とした時、Riemann 接続の接続形式は次の関係を満たす。

$$\Omega^a = dl^a + \omega_b^a \wedge l^b = 0$$

$$(\nabla g)_{ab} = dg_{ab} - \omega_{ab} - \omega_{ba} = 0$$

## 15.16 Maurer-Cartan 微分形式

ここでは  $P$  を Lie 群  $G$  を構造群とする  $M$  上の主ファイバー束とする。ベクトル束  $E$  の接続は  $M$  の開被覆  $\{U_\alpha\}$  と変換関数  $\{\psi_{\alpha\beta}\}$

を用いて  $U_\alpha$  上の行列値の 1 次微分形式  $\omega_\alpha$  を用いて式 3.56 より

$$\omega_\beta = \psi_{\alpha\beta}^{-1} \omega_\alpha \psi_{\alpha\beta} + \psi_{\alpha\beta}^{-1} d\psi_{\alpha\beta}$$

で結ばれていれば  $M$  上ではない  $P$  上で  $\pi^{-1}(U_\alpha) \subset P$  上に  $g$  値 1 次微分形式  $\tilde{\omega}_\alpha$  を

$$\pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$$

上で

$$\tilde{\omega}_\alpha = \tilde{\omega}_\beta$$

が成り立つ。これは

$$\phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times G$$

であるから  $\pi^* \omega_\alpha$  は  $U_\alpha \times G$  上の 1 次微分形式とみなせる。

次に  $s_\alpha \in G$  を  $G$  上の座標とみなし、15.66 から 1 次微分形式が次のように表される。

$$\tilde{\omega}_\alpha = s_\alpha^{-1} \omega_\alpha s_\alpha + s_\alpha^{-1} ds_\alpha$$

$\tilde{\omega}_\alpha$  は  $U_\alpha \times G$  上の 1 次微分形式とする。  $\pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$  上で

$$s_\beta = \psi_{\beta\alpha} s_\alpha$$

だから式 3.56 より

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_\beta &= s_\beta^{-1} \omega_\beta s_\beta + s_\beta^{-1} ds_\beta \\ &= s_\alpha^{-1} \psi_{\beta\alpha}^{-1} \omega_\beta \psi_{\beta\alpha} s_\alpha + s_\alpha^{-1} \psi_{\beta\alpha}^{-1} d(\psi_{\beta\alpha} s_\alpha) \\ &= s_\alpha^{-1} \left( \psi_{\beta\alpha}^{-1} \omega_\beta \psi_{\beta\alpha} + \psi_{\beta\alpha}^{-1} d\psi_{\beta\alpha} \right) s_\alpha + s_\alpha^{-1} ds_\alpha \\ &= \tilde{\omega}_\alpha \end{aligned}$$

となるのであたりに  $\omega$  を

$$\omega = s_\alpha^{-1} \omega_\alpha s_\alpha + s_\alpha^{-1} ds_\alpha \tag{15.78}$$

とおけば  $\omega$  が  $P$  全体で定義された  $g$  値 1 次微分形式である。  $\phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times G$  の対応から切断  $\sigma_\alpha$  について

$$\sigma_\alpha : U_\alpha \rightarrow \pi^{-1}(U_\alpha)$$

に対応する写像  $U_\alpha \rightarrow U_\alpha \times G$  は  $e$  は  $G$  の単位元として

$$\mathbf{x} \rightarrow (x, e)$$

で与えられるから結局

$$s_\alpha = e$$

である。従って  $\omega$  を  $\sigma_\alpha$  で引き戻すと式 15.78 の  $s_\alpha = e$  として

$$\sigma_\alpha^* \omega = \omega_\alpha$$

となる。単位元としては消えた  $s_\alpha^{-1} ds_\alpha$  については Lie 群  $G$  上に  $\mathfrak{g}$  値の 1 次微分形式を  $\theta$  として

$$\theta(X) = s^{-1}X, \quad s \in G, \quad X \in T_s G$$

とおく。  $\theta$  は左不変で単位元においては

$$X \in T_e G = \mathfrak{g}$$

であったから  $\theta(X) = X$  となった。このような  $X$  は左不変のベクトル場という。

この微分形式  $\theta$  は **Maurer-Cartan** 微分形式という。  $\mathfrak{g}$  の基を  $B_1, \dots, B_m$  と選ぶと

$$\theta = \sum \theta^i B_i$$

として左不変であれば

$$B_j = \theta(B_j) = \sum \theta^i(B_j) B_i$$

なので

$$\theta^i(B_j) = \delta_j^i \tag{15.79}$$

でなくてはならないことがわかる。これから双対基が定義できて  $\mathfrak{g}$  の双対空間を  $\mathfrak{g}^*$  とおくと  $\mathfrak{g}^*$  の基が  $\{\theta^m\}$  であることになる。

また、  $\mathfrak{g}$  の構造定数を  $c_{jk}^i$  とすると

$$[B_j, B_k] = \sum c_{jk}^i B_i$$

が成り立ち。式 15.79 から

$$d\theta^i = -\frac{1}{2} \sum c_{jk}^i \theta^j \wedge \theta^k$$

が成り立つ。これは双対関係の基の変化を与える。

これは **Lie 群  $G$  の構造方程式 (structure equation)** と呼ばれ、添え字を省略し、

$$d\theta = -\frac{1}{2} [\theta, \theta] \tag{15.80}$$

と表現することもある。一般化すると  $s \in G$  を変数として考えれば  $s^{-1} ds$  は Maurer-Cartan の微分形式  $\theta$  と同一視できる。

このとき

$$\theta = \frac{ds}{s}$$

今、  $G = GL(r; \mathbf{R})$  とすると

$$s_j^i \in GL(r; \mathbf{R})$$

は座標のように変換すると考え、  $s^{-1} ds$  は行列値 1 次微分形式であり、前節から左不変になる。例えば  $a \in GL(r; \mathbf{R})$  に対し、

$$(as)^{-1} d(as) = s^{-1} a^{-1} a ds = s^{-1} ds$$

となる。また、一方で  $A = (a_j^i) \in \mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(r; \mathbf{R})$  を単位元  $e$  における接ベクトル

$$A = \sum a_j^i \left( \frac{\partial}{\partial s_j^i} \right)$$

とみなす。このとき  $s = e$  では

$$s^{-1} ds = ds_j^i$$

となるから

$$s^{-1} ds(A) = (a_j^i) = A$$

となり式 15.79 を満たす。よって  $s^{-1} ds$  は Maurer-Cartan の微分形式とみなせるわけである。

## 16 holonomy

第7部のゲージ理論でみるように物理の方程式は位相をずらしても同じように成り立つことがある。これは同じ運動を満たす位相空間の組が複数あることを示す。この数学的な背景がホロノミーである。古典的には簡単であった3次元内の運動の世界にさらに多くの自由度を持ち込み複雑になっていくが、これは量子論を説明していくために重要な過程になる。

### 16.1 水平リフト

$R$  を内積を持つベクトル空間  $V$  上の曲率テンソルとする。 $G$  を  $O(V)$  のコンパクト連結な Lie 部分群とし、 $\mathfrak{g}$  をその Lie 環とする

任意の  $x, y \in V$  に対して

$$R(x, y) \in \mathfrak{g}$$

となる時、 $G$  を  $R$  のホロノミー群という。このときの  $[V, R, G]$  の組をホロノミー系という。

前節の接続のところでベクトルの平行移動について考えたが、ここでは多様体上での曲線に沿った主束の平行移動について考える。 $\gamma(t) : [0, 1] \rightarrow M$  を  $M$  における曲線とし、 $P(M, G)$  を  $G$  束とする。P での  $\tilde{\gamma}(t)$  の接ベクトルが水平移動  $H_{\tilde{\gamma}(t)}P$  に属し、次のような射影の関係

$$\pi \circ \tilde{\gamma} = \gamma \tag{16.1}$$

が満たされれば  $\tilde{\gamma}(t)$  は  $\gamma(t)$  の水平持ち上げという。

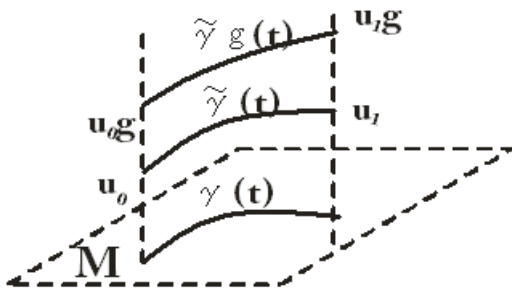


図 16.1: 曲線  $\gamma$  の水平持ち上げ  $u_0$  を通る持ち上げは 1 通りしかない。そのため  $u_1$  を一意に決めることができる。

この時、持ち上げられた  $\tilde{\gamma}$  の接ベクトルを  $\tilde{X}$  とすると式 15.31 から

$$\omega(\tilde{X}) = 0 \quad (16.2)$$

が成り立ち、これは常微分方程式が成立することに等しい。つまり、水平もちあげの局所的な存在と解の一  
意性が保証される。

これを見るために図のようにスタート点を

$$u_0 \in \pi^{-1}(\gamma(0))$$

としたとき、P における水平持ち上げ  $\tilde{\gamma}(t)$  で

$$\tilde{\gamma}(0) = u_0$$

を満たすものがただ 1 つ存在すればよい。

そこで  $\gamma$  を含む開被覆を  $U_i$  とし、その切断を  $\sigma_i$  にとる。水平持ち上げが存在すれば式 6.29 から図のように

$$\tilde{\gamma}(t) = \sigma_i(\gamma(t))g_i(t) \quad g_i(\gamma(t)) \in G$$

とおける。この時、

$$\sigma_i(\gamma(0)) = \tilde{\gamma}(0)$$

とおけるから

$$g_i(0) = e$$

を満たす切断がとれる。

$$\sigma_i(\gamma(0))g_i(0) = \sigma_i(\gamma(0)) = \gamma(0)$$

原点 0 を選ぶことができる。X を原点  $\gamma(0)$  における接ベクトルとする。この時引き戻し、 $\tilde{X} = \tilde{\gamma}_* X$  は図  
の  $u_0$  における  $\tilde{\gamma}(t)$  の接ベクトルとみなせる。この接ベクトルは水平方向なので

$$\omega(\tilde{X}) = 0 \quad (16.3)$$

を満たす。従って式 15.71 から # を式 15.17 として

$$\tilde{X} = g_i(t)^{-1}\sigma_{i*}Xg_i(t) + [g_i(t)^{-1}dg_i(X)]^\#$$

が成り立つ。これに  $\omega$  を作用させれば式 15.34 から

$$\begin{aligned} \omega(\tilde{X}) &= g_i(t)^{-1}\omega(\sigma_{i*}X)g_i(t) + \omega\left([g_i(t)^{-1}dg_i(X)]^\#\right) \\ &= g_i(t)^{-1}\omega(\sigma_{i*}X)g_i(t) + g_i(t)^{-1}\frac{dg_i(X)}{dt} \end{aligned}$$

となるので左から  $g_i(t)$  をかけると

$$\frac{dg_i(t)}{dt} = -\omega(\sigma_{i*}X)g_i(t) \quad (16.4)$$

という接続の常微分方程式を得る。この時局所的には式 15.29 から接続 1 形式を用いて

$$\omega(\sigma_{i*}X) = \sigma_i^*\omega(X) = A_i(X)$$

なので

$$\frac{dg_i(t)}{dt} = -A_i(X)g_i(t) \quad (16.5)$$

と見慣れた式になる。初期条件として  $g_i(0) = e$  とし、 $A_{i\mu}$  の非可換性から  $T$  を  $\gamma(t)$  に沿った順序積として

$$\begin{aligned} g_i(\gamma(t)) &= T \exp \int_0^t \left( -A_{i\mu} \frac{dx^\mu}{dt} dt \right) \\ &= T \exp \int_{\gamma(0)}^{\gamma(t)} (-A_{i\mu}(\gamma(t)) dx^\mu) \end{aligned} \quad (16.6)$$

となる。このような順序積があるのは  $\gamma(t)$  という曲線に沿って運動しているため、この曲線から見た順序が生じ

$$[A_{i\mu}, A_{i\nu}] \neq 0$$

のように非可換になるためである。

第7部で考察するがこの時の

$$\mathcal{A}_i = A_{i\mu} dx^\mu$$

はゲージポテンシャルと考えてよい。ゲージ場はまさに接続  $A_{i\mu}$  のことである。

この時の水平持ち上げが

$$\tilde{\gamma}(t) = \sigma_i(\gamma(t))g_i(\gamma(t)) \quad (16.7)$$

に対応している。

この曲線を図にはさらに次によって水平持ち上げされた場合が描いてある。

$$\tilde{\gamma}'(t) = \tilde{\gamma}(t)g_i(t)$$

これは水平部分空間は右不変であることが重要である。式 15.15 から

$$R_{g^*}H_u P = H_{ug}P$$

となったのと同様に全ての  $t \in [0, 1]$  に対して

$$\tilde{\gamma}_g : t \rightarrow \tilde{\gamma}(t)g$$

が  $\gamma(t)$  の水平持ち上げになる。

## 16.2 具体例

接続1形式を満たす  $\omega$  として具体的に次のような例で水平リフトをみてみよう。

$$\omega = \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} + df \quad (16.8)$$

ただし、 $\mathcal{R}$  は加群とし、多様体  $M$  は

$$M = \mathcal{R}^2 - \{0\}$$

とする。主束  $P$  と局所自明化  $\phi$  を

$$P(M, \mathcal{R}) = M \times \mathcal{R}$$

$$\phi : ((x, y), f) \rightarrow u \in P$$

とする。この  $\omega$  は基本ベクトル場を

$$A^\# = A \frac{\partial}{\partial f}$$

として、式 15.34 より

$$\omega(A^\#) = A \frac{\partial}{\partial f} \cdot \left( \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} + df \right) = A$$

を満たし、さらに式 15.38 より

$$R_g^* \omega = \omega = g^{-1} \omega g$$

を満たし、1形式である。

曲線  $\gamma$  については  $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$  を

$$t \rightarrow (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) \tag{16.9}$$

とする。これにより持ち上げの始点を次の点  $p((1, 0), 0)$  に選び、 $\gamma(t)$  を実際に持ち上げる。

$$p(1, 0) \rightarrow ((1, 0), 0)$$

持ち上げられた  $\tilde{\gamma}(t)$  の接ベクトル  $X$  は  $t$  については全微分で次のように 3 項で書ける。

$$X = \frac{d}{dt} \equiv \frac{dx}{dt} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{df}{dt} \frac{\partial}{\partial f}$$

これが  $\tilde{\gamma}(t)$  の接ベクトルになるべきだから水平持ち上げになるためには、式 16.2 より

$$\omega(X) = 0$$

が満たされないといけない。式 16.8 から  $r^2 = x^2 + y^2$  として

$$\begin{aligned} \omega(X) &= \frac{dx}{dt} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{df}{dt} \frac{\partial \omega}{\partial f} \\ &= \frac{dx}{dt} \frac{y}{r^2} - \frac{dy}{dt} \frac{x}{r^2} + \frac{df}{dt} = 0 \end{aligned}$$

である。しかし、16.9 があるから  $x = r \cos 2\pi t, y = r \sin 2\pi t$  として

$$\begin{aligned} \omega(X) &= \frac{d(r \cos 2\pi t)}{dt} \frac{(r \sin 2\pi t)}{r^2} - \frac{d(r \sin 2\pi t)}{dt} \frac{(r \cos 2\pi t)}{r^2} + \frac{df}{dt} \\ &= -2\pi + \frac{df}{dt} = 0 \end{aligned}$$

を満たす必要がある。よって

$$f = 2\pi t + Const. \tag{16.10}$$

と求まり、水平リフトが

$$\tilde{\gamma}(t) = ((r \cos 2\pi t, r \sin 2\pi t), 2\pi t)$$

という螺旋で表されることになる。さら作用し  $f + g$  に変化すると

$$\tilde{\gamma}'(t) = ((\cos 2\pi t, \sin 2\pi t), 2\pi t + g)$$

となる。

これらが群をつくるとき、ホロノミー群と呼ばれる。

16.7 は右不変であることが示される。

### 16.3 平行移動

ここで水平リフト先の平行移動を考えてみよう。 $\gamma(t) : [0, 1] \rightarrow M$  を  $M$  における曲線とし、 $P(M, G)$  を  $G$  束とする。

$u_0 \in \pi^{-1}(\gamma(0)), u_1 \in \pi^{-1}(\gamma(1))$  を満たす水平リフトを  $\tilde{\gamma}$  として先の図の  $u_1$  を  $\tilde{\gamma}$  に沿った  $u_0$  の平行移動とする時、

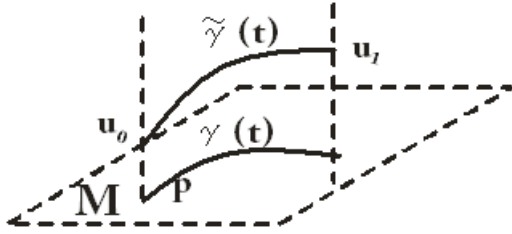


図 16.2: P 点での水平持ち上げ

区間  $U_i$  上の切断  $\sigma_i$  を用いて水平リフトが式 16.7 のように表されたから  $g_i(0) = e$  として

$$u_0 = \tilde{\gamma}(0) = \sigma_i(\gamma(0))g_i(0) = \sigma_i(\gamma(0))$$

さらさら  $g_i(1) = e$  の時、

$$u_1 = \tilde{\gamma}(1) = \sigma_i(\gamma(1))$$

のように決まるので式 16.6 から順序積  $T$  を用いて

$$\begin{aligned} u_1 &= \sigma_i(1)T \exp \int_0^1 \left( -A_{i\mu} \frac{dx^\mu(\gamma(t))}{dt} dt \right) \\ &= \sigma_i(1)T \exp \int_0^1 (-A_{i\mu} dx^\mu) \end{aligned}$$

と表すことができる。局所座標について位相部分の 1 形式の和をとる形になる。これは

$$A_i = A_{i\mu} dx^\mu$$

と  $U_i$  上のゲージポテンシャルを定義したとき、

$$u_1 = \tilde{\gamma}(1) \in \pi^{-1}(\gamma(1))$$

が一意に決まる。この時  $u_1$  は  $\tilde{\gamma}$  に沿った  $u_0$  の平行移動という。これは

$$\Gamma(\tilde{\gamma}) : \pi^{-1}(\gamma(0)) \rightarrow \pi^{-1}(\gamma(1))$$

のように表すことができる。この時、式 15.18 から右作用を  $R_g$  として  $u_0 g$  を通る水平リフトの一意性から

$$u_1 g = \Gamma(\tilde{\gamma})(u_0 g)$$

従って

$$R_g \Gamma(\tilde{\gamma})(u_0) = \Gamma(\tilde{\gamma}) R_g(u_0)$$

が成り立つ。

これから次のようにここでも  $\gamma(t) : [0, 1] \rightarrow M$  はループであれば

$$\tilde{\gamma}^{-1}(t) = \tilde{\gamma}(1-t)$$

写像  $\Gamma(\tilde{\gamma})$  は次のような群としての性質を満たす。

$$\Gamma(\tilde{\gamma})^{-1} = \Gamma(\tilde{\gamma}^{-1}) \quad (16.11)$$

これを大局の条件と呼ぶことにする。以下で照明してみよう。

2つの曲線  $\alpha, \beta$  として次のように端点が固定されているとする。

$$\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow M \quad (16.12)$$

$$\alpha(0) = \beta(0) = p_0 \quad (16.13)$$

$$\alpha(1) = \beta(1) = p_1 \quad (16.14)$$

この曲線の水平リフト  $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$  を考えよう。前の図のように同じ始点をとる。

$$\tilde{\alpha}(0) = \tilde{\beta}(0) = u_0$$

とする。しかし一般には

$$\tilde{\alpha}(1) \neq \tilde{\beta}(1)$$

であって終点は一致しない。

しかし、今、次のようなループについて

$$\gamma(0) = \gamma(1) = p$$

水平リフトした場合

$$\tilde{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}(1)$$

が成り立つ場合を考える。

例えば2つの曲線  $\alpha, \beta$  が  $\alpha(1) = \beta(0)$  を考え、その積を

$$\alpha * \beta = \begin{cases} \alpha(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (16.15)$$

によって定義する。さらに

$$\Gamma(\tilde{\alpha}) : \pi^{-1}(\alpha(0)) \rightarrow \pi^{-1}(\alpha(1))$$

$$\Gamma(\tilde{\beta}) : \pi^{-1}(\beta(0)) \rightarrow \pi^{-1}(\beta(1))$$

のようにおく。この時、 $\Gamma(\alpha \tilde{*} \beta)$  は  $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$  であれば

$$\Gamma(\alpha \tilde{*} \beta) : \pi^{-1}(\alpha(0)) \rightarrow \pi^{-1}(\alpha(1)) \quad (16.16)$$

は  $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$  であれば



$$\Gamma(\alpha \tilde{*} \beta) : \pi^{-1}(\beta(0)) \rightarrow \pi^{-1}(\beta(1)) \quad (16.17)$$

となるので

$$\Gamma(\alpha \tilde{*} \beta) = \Gamma(\tilde{\beta})\Gamma(\tilde{\alpha}) \quad (16.18)$$

が成り立ち積について閉じている。

よって  $P(M, G)$  が主束であれば2つの曲線

$$\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow M$$

において端点が同じ場合

$$\alpha(0) = \beta(0) = p_0$$

$$\alpha(1) = \beta(1) = p_1$$

を考える。この持ち上げで

$$\tilde{\alpha}(0) = \tilde{\beta}(0) = u_0$$

を選べても

$$\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1) = u_1$$

となるためには多様体上でのループ

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow M$$

を考え、 $\gamma = \tilde{\alpha} * \beta$  が1つのループ  $\gamma$  をなせばループはファイバー上において変換  $\tau$

$$\tau_\gamma : \pi^{-1}(p) \rightarrow \pi^{-1}(p)$$

を決めるとする。これは群の右作用と適合したので

$$\tau_\gamma(ug) = \tau_\gamma(u)g \quad (16.19)$$

がなり立つ。つまり接続  $g$  の大局性が成り立つ。

## 16.4 平行移動と曲率

平面であれば平行移動は単純に定義できる。しかし、曲面でこれをしようと思うと実は多様な平行移動をとれる。ここではその基準を明らかにして、第4部でみてきた切断と接続の関係を明らかにしていく。

### 16.4.1 区分的になめらかな曲線上の切断

前節で球面上の平行移動を考えた。ここで曲面に沿った平行移動を考えてみよう。

ただし、なめらかでない部分を含むことも考慮する。つまり、区分的に滑らかな曲線を考える。

$I$  を単位区間  $(0, 1)$  とし、 $M$  をなめらかな多様体とする。ここで区分的になめらかな曲面を

$$\gamma : I \rightarrow M$$

で考え、曲線  $\gamma$  に沿った区分的になめらかな領域を  $\sigma$  とする。これに対応した部分区間を

$$[t_{i-1}, t_i] \in I$$

とするとこの区間であれば前章の平行移動が定義できる。先の区分的に滑らかな関数を用いて

今度は2つの曲線を

$$\alpha[0, 1] \rightarrow M, \beta[0, 1] \rightarrow M$$

の写像とし、 $\alpha(0) = x, \alpha(1) = y = \beta(0), \beta(1) = z$  のようにつなぐ。さらに

$$\alpha^{-1} = \alpha(1 - t)$$

$$\beta\alpha(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t - 1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (16.20)$$

によって定義する。

例えば、単位ベクトル  $e_x \in E_x$  を曲線  $\alpha$  で平行移動し  $P_\alpha(e_x) = e_y \in E_y$  となったとする。

この時、一意な切断  $\sigma \in E_{\alpha(t)}$  があり、

$$\sigma(0) = e_x, \sigma(1) = e_y$$

となる。ここで逆向きを

$$\tilde{\sigma}(t) \equiv \sigma(1 - t)$$

を定義すると、これは  $\alpha^{-1}$  により引き戻し、平行切断 (**parallel\_section**)

$$(\alpha^{-1})^*(E)$$

になる。よって

$$\tilde{\sigma}(0) = e_y, \tilde{\sigma}(1) = e_x$$

となる。これを平行移動  $P$  を用いて次のように表す。

$$P_{\alpha^{-1}}(e_y) = e_x$$

よって一般に区分的になめらかな曲線が  $M$  上にあれば

$$(P_\gamma)^{-1} = P_{\gamma^{-1}}$$

が成り立つ。また、

$$P_\beta \circ P_\alpha = P_{\beta\alpha}$$

が成り立つ。よって、平行切断

$$\tilde{\sigma}(t) = \begin{cases} \sigma_\alpha(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \sigma_\beta(2t - 1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

が定義できれば  $\tilde{\gamma}$  は  $(\beta\alpha)^*(E)$  の切断になる。

第4部のフレームでファイバーが連続で複数あればファイバー束が定義され、計量が定義されれば、各ファイバーから1つの基底を選び、フレームを作ることをみた。

$\gamma$  に沿った切断も

$$\Phi = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$$

のように定義され、これをベクトル束のフレーム (**frame\_of\_vector\_bundle**) と呼ぶ。

ここで  $C_\gamma^{(\infty)}(E)$  を曲線  $\gamma$  に沿った滑らかな切断の集合とする。このとき、滑らかな写像  $p$  を

$$p: I \rightarrow \mathbb{R}^k (\text{or } \mathbb{C}^k)$$

として  $p$  を  $\Phi$  の主要部分と呼ぶ。このとき、

$$\sigma = \sum_{i=1}^k p^i \sigma_i$$

のように書ける。また、平行移動に沿って  $p$  は  $t$  の関数になるのでライプニッツの規則を満たし、共変微分が

$$\nabla_{\partial_t} \sigma = \sum_{i=1}^k (\partial_t p^i) \sigma_i$$

のように通常の偏微分で定義できる。これから有用な次の関係式が得られる。

$$P_\gamma \nabla_{\partial_t} \sigma = \partial_t P_\gamma \sigma \tag{16.21}$$

簡単に示すと  $t_0 \in I$  を選び

$$P_\gamma \sigma = \sum_{i=1}^k p^i(t_0) \sigma_i(t_0)$$

とすると、

$$P_\gamma \nabla_{\partial_t} \sigma = \sum_{i=1}^k (\partial_t p^i)(t_0) \sigma_i(t_0) = \partial_t P_\gamma \sigma$$

とすることができる。

#### 16.4.2 切断と曲率

これまでの結果から区分的に滑らかな曲面での平行移動を一般化することをここで考えてみる。  
 $I$  を区間とし、 $M$  をなめらかな多様体とする。次のような連続写像を定義する。

$$H : I \times [a, b] \rightarrow H(s, t) = h_s(t)$$

ここで  $H(s, t)$  は区分的になめらかなホモトピーで、 $s$  の区分域でなめらかとする。多様体  $M$  上の点を  $p, q \in M$ 、  
 また、 $s \in I$  とすると

$$H(s, a) = p, H(s, b) = q$$

となる。この時の写像は網目の曲線をつくる。 $h_s(a)$  から  $h_s(b)$  はなめらかである。  
 そこでホモトピーに沿った切断を  $\sigma(s, t)$  とする。ファイバー束の引き戻しでしたように

$$t \in [a, b]$$

の領域で  $t$  を固定するとこの網目上に

$$I \rightarrow M$$

の滑らかな曲線を選べる。これによってどんな  $H$  の像である 2 つの点も、この曲線で結ぶことができる。  
 これで平行移動  $P_{s,t}$  の準備ができたわけだ。

$$P_{h_s} : h_s(t) \rightarrow h_s(b)$$

$$P_{s,t}^{-1} : h_s(b) \rightarrow h_s(t)$$

前節でベクトル束

$$E \rightarrow M$$

は接続  $\nabla$  と曲率  $R$  を与えた。これを発展させ、ここでは  $C^{(\infty)}(E) \rightarrow C^{(\infty)}(E)$  を与える写像  $R_{s,t}$  を曲率の変換として

次のように考える。式 16.21 の関係があったから共変微分を偏微分で置き換えることができ、

$$R_{s,t} = P_{s,t} \circ R(\partial_t H(s, t), \partial_s H(s, t)) \circ P_{s,t}^{-1} \quad (16.22)$$

これは 1 つのループであるが、まず、切断  $\gamma$  に沿って  $h_s(b) \rightarrow h_s(t)$  の平行移動をして、次に曲がった曲面上の  $\gamma$  に沿うが、

接ベクトル  $(\partial_t H, \partial_s H)$  によりつくられる切断  $\sigma$

$$R(\partial_t H(s, t), \partial_s H(s, t)) \sigma$$

によって  $h_s(b)$  に戻るわけである。これにより、区分的に滑らかな切断  $\sigma$  があり、区分的になめらかなホモトピー  $H$  が与えられれば

$$\nabla_{\partial_t} \sigma(s, t) = \nabla_{\partial_s} \sigma(s, a) = 0, \text{ for all } s \in I$$

が選べて、次の重要な関係

$$\nabla_{\partial_s} \sigma(s, b) = \left( \int_a^b R_{s,t} dt \right) \sigma(s, b)$$

が成り立つ。さらに平行移動という特徴から曲率に関するいくつかの有用な関係が導ける。

$U \subset \mathbb{R}^2$  を开区間とし、 $f = f(x, y)$  は  $U \rightarrow M$  のなめらかな写像とする。ベクトル束  $E$  の切断  $\sigma$  について曲率の定義 10.23 から

$$R(\partial_x f, \partial_y f) \sigma = (\nabla_{\partial_x} \nabla_{\partial_y} - \nabla_{\partial_y} \nabla_{\partial_x} - \nabla_{[\partial_x, \partial_y]}) \sigma$$

となるが、平行移動の時、

$$\nabla_{[\partial_x, \partial_y]} = 0$$

とみなせるので

$$R(\partial_x f, \partial_y f) \sigma = (\nabla_{\partial_x} \nabla_{\partial_y} - \nabla_{\partial_y} \nabla_{\partial_x}) \sigma$$

となる。また、16.22 から  $\nabla_{\partial_t} \sigma = 0$  の切断を選べば

$$\nabla_{\partial_s} \nabla_{\partial_t} \sigma = \nabla_{\partial_t} \nabla_{\partial_s} \sigma + R(\partial_t H, \partial_s H) \sigma = R(\partial_t H, \partial_s H) \sigma$$

よって 16.21 から  $\partial_t P_\gamma \sigma = P_\gamma \nabla_{\partial_t} \sigma$  だから

$$\begin{aligned} \partial_t P_{s,t} \nabla_{\partial_s} \sigma &= P_{s,t} (\nabla_{\partial_t} \nabla_{\partial_s} \sigma(s, t)) \\ &= P_{s,t} (R(\partial_t H(s, t), \partial_s H(s, t)) \sigma(s, t)) \\ &= P_{s,t} \left( R(\partial_t H(s, t), \partial_s H(s, t)) P_{s,b}^{-1} (\sigma(s, b)) \right) \\ &= R_{s,t} \sigma(s, b) \end{aligned}$$

ただし、3 行目には

$$\sigma(s, t) = P_{s,b}^{-1} (\sigma(s, b))$$

## 16.5 ホロノミ一群

$(M, g)$  をアフィン接続  $\nabla$  を持つ  $m$  次元 Riemann 多様体とする。各接空間  $T_P M$  で変換群をつくると接続になる。

下図のように  $p$  が  $(M, g)$  の点で  $p$  におけるループの全体の集合を

$$\{c(t) | 0 \leq t \leq 1, c(0) = c(1) = p\}$$

ベクトル  $X \in T_p M$  を選びループ  $c(t)$  に沿って平行移動させる。この時  $X$  は新しいベクトル  $X_c \in T_p M$  になる。

こうしてループ  $c(t)$  と接続  $\nabla$  は新しい線形変換

$$P_c : T_p M \rightarrow T_p M$$

を作るのである。一見するとこれは同じものであるように見える。

ところが下図のようにここで重要なのはループにより同じベクトル空間になるとは限らないことである。

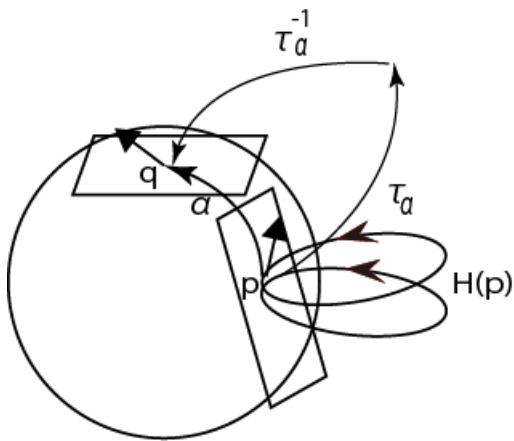


図 16.3: 多様体上の点  $p$  での接ベクトルとホロノミー群  $H(p)$

これらに変換は群をつくり、この群をホロノミー群  $H(p)$  というのである。

この時

$$h \in H(p)$$

として、次が成り立つとする。

$$P_c X = X h$$

これは  $H$  が右作用素であることが重要になる。  $T_p M$  の基底を  $\{e_\nu\}$  とすると成分表示で

$$P_c X = X^\mu h_\mu^\nu e_\nu$$

である。共変的に表現できる。これによってあるベクトルをはじめに  $c$  次に  $c'$  に沿って平行移動したとき

$$P_d = P_{c'} P_c$$

とする。具体的に見ると、経路  $c, c'$  を次のように用意する。

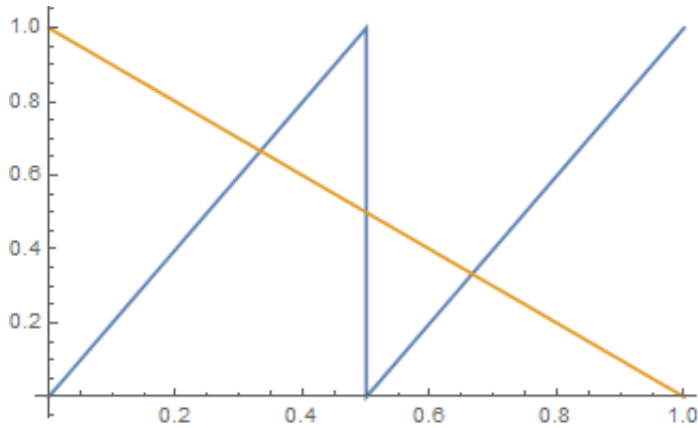


図 16.4:  $c(t)$  と  $c^{-1}(t)$  のグラフ

$$d(t) \begin{cases} c(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ c'(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$P_c$  の逆元は  $P_{c^{-1}}$  とすると  $t=0$  で  $c(0)$ 、 $t=1$  で  $c(1)$  になるので、逆に

$$c(1-t)$$

とすれば、 $t=0$  で  $c(1)$ 、 $t=1$  で  $c(0)$  になる。

$H(p)$  が自明であるためには図の  $p$  点の接平面のみのように Riemann テンソルが 0 であればよい。

しかし、曲面が曲率をもつと自明ではなくなる。

この場合、図のように  $M$  が弧状連結で 2 点  $p, q \in M$  は曲線が  $\alpha$  で結ばれるとする。

$T_p M$  のベクトルをこの曲線  $\alpha$  で  $T_q M$  に平行移動すると曲線  $\alpha$  は下図のように  $T_q M$  上にベクトルを移す。

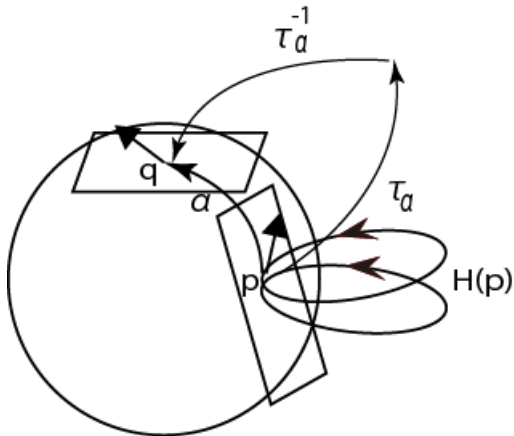


図 16.5: 多様体上の点  $p$  での接ベクトルとホロノミー群  $H(P)$

この時ホロノミー群  $H(q), H(p)$  が共役写像で次のように結ばれることになる。

$$H(q) = \tau_\alpha^{-1} H(p) \tau_\alpha$$

これから  $H(p)$  と  $H(q)$  は同型になる。 $m$  次元の場合、 $H(p)$  は最大のホロノミー群で線形群  $GL(m, \mathbb{R})$  の部分群になる。

具体例を考えて見る。  $M : \mathbb{R}^2 - \{0\}$  上にファイバー  $\mathcal{R}$  束と接続 1 形式の  $\omega$  をとり、次のループ  $\gamma$  を次のようにおく。

$$\gamma : g \rightarrow g + 2\pi \quad g \in \mathbb{R}$$

さらに写像  $\tau_\gamma$  を

$$\tau_\gamma : \pi^{-1}((1,0)) \rightarrow \pi^{-1}((1,0))$$

を定義する。

射影  $\pi(u) = p$  をとる点  $u \in P$  を取り、  $M$  上の点  $p$  におけるループの集合を  $C_p(M)$  とする。

$$C_p \equiv \{\gamma : [0,1] \rightarrow M \mid \gamma(0) = \gamma(1) = p\}$$

次の集合

$$\Phi_u = \{g \in G \mid \tau_\gamma(u) = ug, \gamma \in C_p(M)\}$$

は構造群  $G$  の部分群になる。これを  $u$  におけるホロノミ群という。

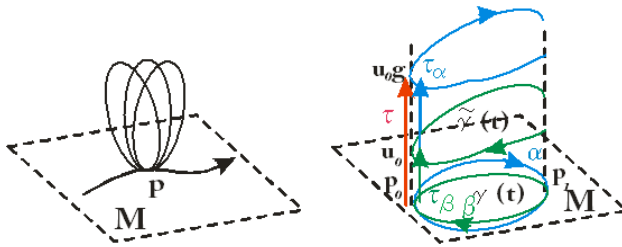


図 16.6: 図左のように  $p$  におけるループは幾通りもある。ファイバー上での変換  $\tau$  は垂直移動になる。

上図右のように写像  $\tau$  はファイバー上の変換で  $\tau(u) = ug$  となる。  $\alpha, \beta, \gamma = \alpha * \beta$  がループになっているので 16.18 から

$$\tau_\gamma = \tau_\beta \tau_\alpha$$

接続の大局性から

$$\tau_\gamma(u) = ug_\gamma = \tau_\beta \tau_\alpha(u) = \tau_\beta(ug_\alpha) = \tau_\beta(u)g_\alpha = ug_\beta g_\alpha$$

が成り立つ。よって

$$g_\gamma = g_\beta g_\alpha$$

となる。また定数ループ

$$c : [0,1] \rightarrow p$$

から変換の単位元  $e$  を

$$\tau_e : u \rightarrow u$$

が決まり逆元については

$$\tau_{\gamma^{-1}} = \tau_\gamma^{-1}$$

$$g_{\gamma^{-1}} = g_\gamma^{-1}$$

が成り立つ。

また  $\tau_\alpha(ug) = ug_\alpha$  とすると第 4 部の随伴演算子を用いて

$$\tau_\alpha(ug) = ug_\alpha g = ug(ad_g g_\alpha) = ug(g^{-1}g_\alpha g)$$

と表すこともできる。

よって同型な関係としてホロノミ群  $\Phi_{ua}$  について

$$\Phi_{ua} = a^{-1}\Phi_u a$$

が成り立ち、図のようにループを作っていることがわかる。

## 16.6 接続

前節での Levi-Civita 接続とホロノミ一群との関係を考えておこう。 $S^2$  の計量  $g$  が次のように与えられているとする。

$$g = -d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\phi \otimes d\phi$$

この時の接続係数で 0 でないものは式 7.35 より 0 でないものは

$$\begin{aligned} \Gamma_{\phi\phi}^\theta &= \frac{1}{2}g^{\theta\alpha} (\partial_\phi g_{\alpha\phi} + \partial_\phi g_{\alpha\phi} - \partial_\alpha g_{\phi\phi}) = -\frac{1}{2}g^{\theta\theta} \partial_\theta g_{\phi\phi} \\ &= \sin \theta \cos \theta \\ \Gamma_{\theta\theta}^\phi &= \Gamma_{\theta\phi}^\phi = \frac{1}{2}g^{\phi\phi} \partial_\theta g_{\phi\phi} = \cot \theta \end{aligned} \quad (16.23)$$

となる。簡単のため、点  $(\theta_0, 0)$  におけるベクトル  $e_\theta = \frac{\partial}{\partial \theta}$  を、円  $\theta = \theta_0$ 、 $0 \leq \phi \leq 2\pi$  に沿って平行移動する。

この円に沿って平行移動したベクトル  $X$  は

$$X = X^\theta e_\theta + X^\phi e_\phi \quad (16.24)$$

と表される。このベクトルは式 6.12 から共変微分が 0 になるはずだから

$$\partial_\mu X^\nu + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha X^\alpha = 0$$

が成り立つはずである。よって式 16.23 より

$$\partial_\phi X^\theta + \cot \theta_0 X^\phi = 0 \quad (16.25)$$

$$\partial_\phi X^\phi + \sin \theta_0 \cos \theta_0 X^\theta = 0 \quad (16.26)$$

が得られる。2 番目の式を  $\phi$  で微分すると

$$\frac{d^2 X^\phi}{d\phi^2} + \sin \theta_0 \cos \theta_0 \frac{dX^\theta}{d\phi} = 0$$

となる。第 2 項に 1 番目の式を代入すると

$$\frac{d^2 X^\phi}{d\phi^2} + \sin \theta_0 \cos \theta_0 \cdot (-\cot \theta_0 X^\phi) = 0$$

$$\frac{d^2 X^\phi}{d\phi^2} - \cos^2 \theta_0 X^\phi = 0$$

となる。これは角速度  $\omega = \cos \theta_0$  の単振動を表す。



よって一般解が

$$X^\phi = A \cos(\cos \theta_0 \phi) + B \sin(\cos \theta_0 \phi)$$

となる。 $\phi = 0$  の時  $X^\theta = 1$  を初期条件に選べば

$$X^\theta = \cos(\cos \theta_0 \phi)$$

また、 $X^\phi$  は奇関数になるから  $A = 0$  さらに 16.26 より

$$\begin{aligned} B \cos \theta_0 &= -\sin \theta_0 \cos \theta_0 \\ B &= -\sin \theta_0 \end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned} X^\theta &= \cos(\cos \theta_0 \phi) \\ X^\phi &= -\sin \theta_0 \sin(\cos \theta_0 \phi) \end{aligned}$$

よって式 16.24 から

$$X = \cos(\cos \theta_0) e_\theta - \sin \theta_0 \sin(\cos \theta_0) e_\phi$$

これが円に沿って  $\phi = 2\pi$  だけ移動すると

$$X' = \cos(2\pi \cos \theta_0) e_\theta - \sin \theta_0 \sin(2\pi \cos \theta_0) e_\phi$$

となる。よってベクトルの大きさは

$$|X| = |X'|$$

だが円に沿って  $\theta = 2\pi$  の移動は接空間  $T_{(\theta,0)}S^2$  では

$$\Theta = 2\pi \cos \theta_0$$

の移動になる。

## 16.7 時間微分

次に  $u$  にパラメタ  $t$  を導入し、変化率を考える。

$$u = e^{tA} \tag{16.27}$$

$$\frac{du}{dt} = Au \tag{16.28}$$

これは  $t$  に対しての接線方向と考えることができる。 $G$  が Lie 群であることを利用し、群  $G$  の要素  $g$  の関数を  $f(g)$  とすると  $g$  による原点での微分をもとめればいから垂直方向への作用が右からであることに注意し、先に微分をし、 $t = 0$  とすると

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(ge^{tA})|_{t=0} &= \left[ (gA + \dot{g}) e^{tA} \frac{d}{d(ge^{tA})} f(ge^{tA}) \right]_{t=0} \\ &= (gA)_{ij} \frac{\partial}{\partial g_{ij}} f(g) \end{aligned} \tag{16.29}$$

これにより  $t = 0$  での時間微分演算子として垂直方向の成分が

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_V = -A_{kj}g_{ik} \frac{\partial}{\partial g_{ij}}$$

となるように決める。よって図のように GM 平面で見ると底空間を張る単位ベクトル  $\partial/\partial x$  に対して、G 方向の成分だけベクトルが回転する。この成分が  $-gA \frac{\partial}{\partial g}$  となるわけだが、 $A$  が複数とればその数だけ自由にとれる。

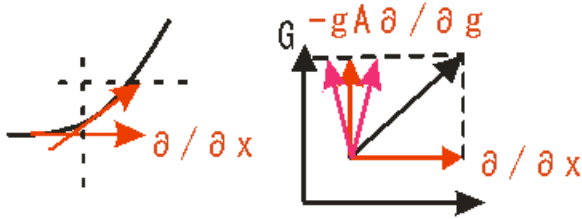


図 16.7: G 方向のベクトルは複数とれる

図のようにはじめ  $x$  方向に曲線  $C$  があつたとすると GM 平面上のベクトルは接線方向の単位ベクトル  $\partial/\partial x$  に加え次の G 方向のベクトルが加わるために向きが変化する。そこで単位ベクトルを次のように変更する。

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x^\mu} - A_{\mu,kj} \left( g_{ik} \frac{\partial}{\partial g_{ij}} \right) \quad (16.30)$$

一方でファーター束上の座標の時間微分は一般に

$$\frac{d}{dt} = \dot{x}^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \dot{g}_{ij} \frac{\partial}{\partial g_{ij}} \quad (16.31)$$

とかける。時間に関する全微分は  $t$  がパラメタ化され共通しているとすれば時空間での時空間での微分を次のように補正する。

$$\frac{d}{dt} = \dot{x}^\mu \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} - A_{\mu,kj} \left( g_{ik} \frac{\partial}{\partial g_{ij}} \right) \right) \quad (16.32)$$

これから  $\frac{\partial}{\partial g_{ij}}$  と  $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$  が独立しているとして係数を比較すれば次の関係式が求まる。

$$\dot{g}_{ij} = -g_{ik} A_{\mu,kj}(x) \dot{x}^\mu(t)$$

これは微分方程式なので Dyson の公式から解けて経路順の演算子をつけ

$$g(t) = g(0) P \exp \left( - \int_0^t A_\mu(x(\tau)) \dot{x}^\mu(\tau) d\tau \right)$$

と求まる。これによって水平リフトされた曲線  $\tilde{C}(x^\mu, g(t))$  が決定された。

次に同一ファイバー上での他の点、つまり垂直移動した場合の変化について見てみよう。

この時、水平方向には同じ形になると考えれば変換  $g' = gu$  について式 16.32 から

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} - A'_{\mu,kj} \left( g'_{ik} \frac{\partial}{\partial g'_{ij}} \right) = \frac{\partial}{\partial x^\mu} - A_{\mu,kj} \left( g_{ik} \frac{\partial}{\partial g_{ij}} \right)$$

が成り立つべきである。よって  $g = g' u^{-1}$  だから添え字を省略し、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^\mu} - A'_\mu \left( g' \frac{\partial}{\partial g'} \right) &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} - A'_\mu \left( gu \frac{\partial}{\partial (gu)} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} - A'_\mu \left( gu \left( \frac{\partial}{u \partial g} + g \partial u \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x^\mu} A'_\mu \left( g' \frac{\partial}{\partial g'} \right) &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} A'_\mu \left( gu \frac{\partial}{\partial g} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} (u^{-1} A_\mu u - u^{-1} \partial_\mu u)\end{aligned}$$

が同じ形になるためには

$$A'_\mu = u A_\mu u^{-1} - u \partial_\mu u^{-1}$$

$$\begin{aligned}&(u^{-1} A_\mu u - u^{-1} \partial_\mu u) \left( gu \frac{\partial}{\partial (gu)} \right) \\ &= u^{-1} A_\mu u \left( g' \frac{\partial}{\partial (g')} \right) - u^{-1} \partial_\mu u \left( g' \frac{\partial}{\partial (g')} \right) \\ &= u^{-1} A_\mu u \left( g' \frac{\partial}{\partial (g')} \right) - u^{-1} (\partial_\mu u) g' \frac{\partial}{\partial (g')} - \partial_\mu g' \frac{\partial}{\partial (g')} \\ &A'_\mu = u^{-1} A_\mu u - u^{-1} \partial_\mu u\end{aligned}$$

を代入すると

$$\begin{aligned}(u A_\mu u^{-1} - u \partial_\mu u^{-1}) \left( g \frac{\partial}{\partial g} \right) &= u A_\mu u^{-1} g u \frac{\partial}{\partial g} - u (\partial_\mu u^{-1}) g u \frac{\partial}{\partial (gu)} - \partial_\mu g u \frac{\partial}{\partial (gu)} \\ &= \end{aligned}$$

## 17 一般多様体への応用

$n$ 次元の多様体であってもそこに直交座標系をつくることで埋め込みが発生する。物理現象を観測していく系は常に局所的な座標を持つのでこの関係は重要である。連続した観測ができるためには接続という概念が必要である。相対論の時に登場したこの概念をさらに多角的に理解していこう。

### 17.1 Symplectic 多様体

多様体と微分形式を見て来たので物理と特に関わりの深い **Symplectic** 多様体  $\Omega$  を考えよう。 $m$ 次元ベクトル空間  $V$  において次の双線型写像を定義する。

$$\Omega : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

この時

$$\Omega(u, v) = -\Omega(v, u)$$

が全ての  $u, v \in V$  で成り立てばこれを交代行列 (skew-symmetric map) という。

$V$  上の基底を  $u_1 \cdots u_k, e_1 \cdots e_n, f_1 \cdots f_n$  とすると

$$\begin{aligned}\Omega(u_i, v) &= 0, \text{ for all } i \text{ and } v \in V \\ \Omega(e_i, e_j) &= 0 = \Omega(f_i, f_j), \text{ for all } i \text{ and } j \in V\end{aligned}$$

$$\Omega(e_i, f_j) = \delta_{ij}, \text{ for all } i \text{ and } j \in V \quad (17.1)$$

が成り立つ。これらを満たす基底を正準基底 (canonical basis) という。  
 $\Omega$  を行列表示すると次のようにかける。

$$\Omega(u, v) = [\cdots u \cdots] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \\ 0 & -I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ v \\ \vdots \end{bmatrix}$$

これはグラムシュミットの対角化法から導かれる。

$$U := \{u \in V \mid \Omega(u, v) = 0 \text{ for all } v \in V\}$$

として、基底を  $u_1 \cdots u_k$  とし、 $U$  とその補集合を  $W$  として

$$V = U \oplus W$$

とおく。ここで  $e_1 \in W$  をとり、さらにある  $f_1 \in W$  について

$$\Omega(e_1, f_1) \neq 0$$

とすることができる。そこで

$$\Omega(e_1, f_1) = 1$$

と仮定する。すると距離を

$$W_1 = \text{span of } (e_1, f_1)$$

$$W_1^\Omega = \{w \in W \mid \Omega(w, v) = 0 \text{ for all } v \in W_1\}$$

次の要請をしよう。

$$W_1 \cap W_1^\Omega = \{0\}$$

例えば

$$v = ae_1 + bf_1 \in W_1 \cap W_1^\Omega$$

とおくと、次の条件がそろえば

$$\begin{cases} 0 = \Omega(v, e_1) = -b \\ 0 = \Omega(v, f_1) = a \end{cases} \Rightarrow v = 0$$

さらに次の要請をする。

$$W = W_1 \oplus W_1^\Omega$$

例えば

$$\begin{cases} \Omega(v, e_1) = c \\ \Omega(v, f_1) = d \end{cases}$$

とすると補集合との組み合わせだから

$$v = (-cf_1 + de_1) + (v + cf_1 - de_1)$$

$$(-cf_1 + de_1) \in W_1$$

$$(v + cf_1 - de_1) \in W_1^\Omega$$

続けて  $e_2 \in W_1^\Omega, e_2 \neq 0$  とすると  $f_2 \in W_1^\Omega$  が次の条件を満たす。

$$\Omega(e_2, f_2) \neq 0$$

そこで  $\Omega(e_2, f_2) = 1$  とすると、

$$W_2 = \text{span of } (e_2, f_2)$$

とおける。これを次々に繰り返すことができそうだが、 $\dim V < \infty$  だから

$$V = U \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_n$$

と有限である。各  $W_i$  について式 17.1 を満たし、

$$\Omega(e_i, f_i) = 1$$

が成り立つ。

重要なのは部分空間の次元

$$k = \dim U, \quad U = \{u \in V \mid \Omega(u, v) = 0, \text{ for all } v \in V\}$$

は基底の選び方に依存しない。次元  $k$  は  $(V, \Omega)$  の不変量である。

また、

$$k + 2n = m = \dim V$$

であれば  $n$  は  $(V, \Omega)$  の不変量になる。また、 $2n$  は  $\Omega$  の rank になる。  
 $V$  を  $m$  次元ベクトル空間とし、

$$\Omega: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

を双線形写像とする。この時双対な写像を

$$\tilde{\Omega}: V \rightarrow V^*: \tilde{\Omega}(v)(u) = \Omega(v, u)$$

で定義する。もし、 $\tilde{\Omega}$  が全単射であれば双線型写像の  $\Omega$  は  $V$  上の線形シンプレクティック構造を持つとい  
 い。 $V$  はシンプレクティックベクトル空間であるという。この時の単位ベクトルについて

$$\Omega(u, v) = [\cdots u \cdots] \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ v \\ \vdots \end{bmatrix}$$

が成り立つ。シンプレクティック構造発議のように複素多様体（次部で扱う）に拡大するときに便利である。  
 多様体  $M$  上で  $\omega$  を 2 形式とする。  $p \in M$  として、このとき次の写像

$$\omega_p: T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$$

は交代シンプレクティック写像をつくることができる。  $\omega$  は閉形式で

$$d\omega = 0$$

とする。  $\omega$  がシンプレクティックであれば

$$\dim T_p M = \dim M$$

であり、これらの次元は偶数でなくてはならない。

例えば  $M = \mathbb{R}^{2n}$  として

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i$$

とするとシンプレクティックな基底が

$$\left\{ \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right)_p \cdots \left( \frac{\partial}{\partial x_n} \right)_p, \left( \frac{\partial}{\partial y_1} \right)_p \cdots \left( \frac{\partial}{\partial y_n} \right)_p \right\}$$

とおける。また、 $M = \mathbb{C}^n$  の場合は  $z_k = x_k + iy_k$  として

$$\omega_0 = \frac{i}{2} \sum_{k=1}^n dz_k \wedge d\bar{z}_k$$

とすればこのフォームはシンプレクティックである。

さらに例えば  $M = \mathbb{S}^2$  in  $\mathbb{R}^3$  として  $S^2$  球面上の点  $p$  の接ベクトルは中心からのベクトル  $op$  に常に垂直だから

$$\omega_p(u, v) := \langle p, u \times v \rangle, \quad u, v \in T_p S^2$$

とおける。このフォームは閉じていて次のようにおける。

$$v = u \times p$$

### 17.1.1 光錐量子化

シンプレクティック構造  $\Omega_{ij}(x, x')$  が実際に使われる例としてスカラー場の光錐 (Light-cone) 量子化がある。

実スカラー場のラグランジアンを

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial\phi)^2 - U(\phi)$$

$$U(\phi) = \frac{1}{2} m\phi^2 + V(\phi)$$

とおく。 $(z, t)$  方向の光錐に対応する光錐座標を

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}} (z + t)$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{2}} (z - t)$$

## 17.2 Stiefel 多様体

### 17.2.1 The Orr-Sommerfeld equation[52]

The Orr-Sommerfeld equation は  $\mathbb{C}^4$  上の微分方程式として次のように表される。

$$\mathbf{u}_x = \mathbf{A}(x, \lambda)\mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \in \mathbb{C}^4, \quad a \leq x \leq b$$

ただし、 $\lambda \in \mathbb{C}$  は固有値である。 $x = a, x = b$  では2つの同相な境界条件がある。

ここで  $\mathbf{h}(x, \lambda)$  を  $2 \times 2$  の逆行列を持つ複素行列とする。  $\mathbf{V}(x, \lambda) \in \mathbb{C}^{4 \times 2}$  として、

$$\mathbf{V}(x, \lambda) = \mathbf{U}(x, \lambda)\mathbf{h}(x, \lambda)$$

とする。ただし  $\mathbf{U}(x, \lambda)$  は次のように書けるとする。

$$\mathbf{U}(x, \lambda) = [\mathbf{u}_1(x, \lambda) | \mathbf{u}_2(x, \lambda)]$$

さらに連続した直交性が変換で保たれるためには

$$\mathbf{g} = \mathbf{h}^{-1}\mathbf{h}_x, \quad \mathbf{h}_x = \mathbf{h}\mathbf{g}, \quad \mathbf{h}(a, \lambda) = \mathbf{I}_2 \quad (17.2)$$

とすると

$$\mathbf{V}_x = \mathbf{A}(x, \lambda)\mathbf{V} + \mathbf{V}\mathbf{g}$$

となる必要がある。  $\mathbf{V}$  の成分表示は具体的に

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2] = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{21} \\ v_{12} & v_{22} \\ v_{13} & v_{23} \\ v_{14} & v_{24} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 2}$$

とかけるが直交性から

$$\sum_{j=1}^4 v_{1j}^2 = 1, \quad \sum_{j=1}^4 v_{2j}^2 = 1, \quad \sum_{j=1}^4 v_{1j}v_{2j} = 0$$

が成り立つ。この3つの方程式があると  $\mathbb{R}^8$  の表面を  $8-3$  次元に束縛する。実際に smooth でコンパクトな埋め込まれた5次元部分多様体が  $\mathbb{R}^8$  の中につくられる。これらは Stiefel 多様体と呼ばれる。式 17.2 にみられるように  $g$  の働きが幾何を決める重要な働きをする。

### 17.2.2 Stiefel manifolds

$k$  次元の直交座標を持つベクトル場を  $n$  次元のユークリッド空間  $\mathbb{R}^n, k \leq n$  を考えよう。 $k$  次元の線形部分空間ができることになる。

しかし、ここではさらに拡張した  $\mathbb{R}^{n \times k}$  の空間を考え、これを **Stiefel manifold**,  $V_k(\mathbb{R}^n)$  で表す。例えば  $k=1$  であれば Stiefel manifold は  $\mathbb{R}^n$  内の単位球と同じである。また、 $k=n$  であればこの多様体はこれら単位球の  $k$  次直交群と考えることができる。

そこで直交空間として Stiefel manifold  $V_k(\mathbb{R}^n)$  の接空間を2つの新しい指針を用いて調べることにする。まず、偏微分方程式として

$$\mathbf{y}_x = \mathbf{A}\mathbf{y}, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (17.3)$$

を考える。ただし、ここでは  $\mathbf{A}$  は  $n \times n$  の実行列とする。

0と1で境界条件は  $x=0$  と  $k=n-l, x=1$  において  $\text{rank}(\mathbf{E}) = k$  となり、次の条件を満たす  $\mathbf{E}$  を考える。

$$\mathbf{E}^T \mathbf{y}(x)|_{x=1} = \mathbf{a}, \quad \mathbf{E} \in \mathbb{R}^{n \times k}, \quad \mathbf{a} \in \mathbb{R}^k \quad (17.4)$$

ここで  $\mathbf{y}_1(x), \dots, \mathbf{y}_k(x)$  は式 17.3 を満足し、 $x=0$  で  $\mathbf{y}_i(0)$  とし、 $j=1, \dots, k$  は正規直交系をなし、 $n \times k$  の行列  $\mathbf{Y}(x)$  を

$$\mathbf{Y}(x) = [|\mathbf{y}_1(x)| \cdots |\mathbf{y}_k(x)|]$$

とする。  $\mathbf{Y}(x)$  は式 17.3 から次を満たす。

$$\mathbf{Y}_x = \mathbf{A}\mathbf{Y} \quad (17.5)$$

同時に  $x = 0$  での境界条件を満たす。これらから定ベクトルを  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^{k \times 1}$  として式 17.4 から  $x = 1$  での境界条件から

$$\mathbf{E}^T \mathbf{Y}(1) \mathbf{c} = \mathbf{a} \quad (17.6)$$

を満たす。それぞれの  $x$  について直交性から行列  $\mathbf{Y}(x)$  の列については線形独立で  $k$  次元の空間を張っている。そこで  $\mathbf{h}(x)$  を  $k \times k$  の逆をもつ行列とすると、各  $x$  について  $n \times k$  行列が

$$\mathbf{Z}(x) = \mathbf{Y}(x) \mathbf{h}(x) \quad (17.7)$$

とかけることになる。ここで  $\mathbf{Z}$  が正方行列とは限らないことに注意する。

これは各座標  $x$  について  $n \times k$  行列の同じ空間を張ることになる。基本的なアイデアはこの連続的で直交関係を維持した  $\mathbf{h}(x)$  を選ぶことにある。よって  $\mathbf{Z}(x)$  の列を直交化させるので次のような微分関係を満足する。式 17.5 から

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \mathbf{Z}(x) &= \mathbf{Y}'(x) \mathbf{h}(x) + \mathbf{Y}(x) \mathbf{h}'(x) \\ &= \mathbf{A} \mathbf{Y}(x) \mathbf{h}(x) + \mathbf{Y}(x) \mathbf{h}(x) \mathbf{h}(x)^{-1} \mathbf{h}'(x) \end{aligned}$$

ここで微分関係を含んだ  $k \times k$  の行列

$$\mathbf{g}(x) = \mathbf{h}(x)^{-1} \mathbf{h}'(x) \quad (17.8)$$

とおくことで

$$\frac{d}{dx} \mathbf{Z}(x) = \mathbf{A} \mathbf{Z}(x) + \mathbf{Z}(x) \mathbf{g}(x) \quad (17.9)$$

と表すことができる。このアイデアの結果  $\mathbf{Z}(x)$  の微分を固有方程式とにわけることができた。式 17.8 は  $\mathbf{h}(x)$  の変化をあらわしているので  $\mathbf{h}(0) = \mathbf{I}_k$  とおけば

$$\frac{d}{dx} \mathbf{h}(x) = \mathbf{h}(x) \mathbf{g}(x)$$

となる。よって式 17.7 から  $\mathbf{Y}(1) = \mathbf{Z}(1) \mathbf{h}(1)^{-1}$  とおいて

$$\mathbf{E}^T \mathbf{Z}(1) \mathbf{h}(1)^{-1} \mathbf{c} = \mathbf{a}$$

が成り立つことになる。問題は  $\mathbf{g}(x)$  をどう決めるかである。

そこで  $\mathbf{Z}(x)$  の列ベクトルが直交性をみとすから、その部分空間への射影をつくるというアイデアを Drury(1980) が考えた。そこで次の偏微分方程式を

$$\mathbf{Z}_x = \mathbf{A} \mathbf{Z}$$

射影成分をとることで次のように置き換える。

$$\mathbf{Z}_x = \left( \mathbf{I}_n - \mathbf{Z} \mathbf{Z}^T \right) \mathbf{A} \mathbf{Z} \quad (17.10)$$

または次のように式 17.9 の形に表すことができる。

$$\mathbf{Z}_x = \mathbf{A} \mathbf{Z} - \mathbf{Z} \mathbf{Z}^T \mathbf{A} \mathbf{Z}$$

つまり式 17.9 は微分演算子の固有方程式に局所座標を回転させることで修正されることになる。

これによって式 17.9 から  $\mathbf{g}(x)$  は次のようにかける。

$$\mathbf{g}(x) = -\mathbf{Z}(x)^T \mathbf{A} \mathbf{Z}(x) \quad (17.11)$$

さらに Dauey(1983) は数値的な条件から次のように修正した。(参考: さらにそのご Dieci らにより修正が重ねられた)



$$\mathbf{g}(x) = -(\mathbf{Z}^T \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}(x)^T \mathbf{A} \mathbf{Z}(x) \quad (17.12)$$

ここでとにかく、式 17.9 の下で不変な多様体として  $f(\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}^T \mathbf{Z}$  を考える。  
式 17.9 があるので

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \mathbf{f}(\mathbf{Z}) &= \dot{\mathbf{Z}}^T \mathbf{Z} + \mathbf{Z}^T \dot{\mathbf{Z}} \\ &= (\mathbf{A} \mathbf{Z} + \mathbf{Z} \mathbf{g})^T \mathbf{Z} + \mathbf{Z}^T (\mathbf{A} \mathbf{Z} + \mathbf{Z} \mathbf{g}) \\ &= \mathbf{Z}^T \mathbf{A}^T \mathbf{Z} + \mathbf{g}^T \mathbf{Z}^T \mathbf{Z} + \mathbf{Z}^T \mathbf{A} \mathbf{Z} + \mathbf{Z}^T \mathbf{Z} \mathbf{g} \end{aligned}$$

式 17.11 を用いるとこの式は

$$\mathbf{Z}^T \mathbf{Z} = \mathbf{I}_k$$

であれば

$$\frac{d}{dx} \mathbf{f}(\mathbf{Z}) = 0$$

となる。また、初期状態として  $\mathbf{Z}(0)$  が直交関係を満たす列を  $\mathbf{Z}(0)$  内にもっていれば  $\mathbf{Z}(x)$  もまた、全ての  $x$  において直交性を持つ。しかし、一方で  $\mathbf{Z}(x)$  の列を回転させるとこの直交性がわずかにこわれてしまうことを Dauey は示した。これは式 17.10 の射影でも同じように直交性は壊されることを意味する。しかし、線形独立ではあるわけである。そこで後に示すように式 17.12 が Grassmanian manifold の接空間への射影として必要になったわけである。

Stiefel manifold  $V_k(\mathbb{R}^n)$  において  $k$  を  $\mathbb{R}^n$  上の直交ベクトルとする。この多様体は fibre bundles の土台となるので重要である。ユークリッド空間において部分多様体  $\mathbb{R}^{n \times k}$  を  $n \times k$  を実として次のように内積を定義しよう。

$$\langle \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle = \text{Tr}(\mathbf{U}^T \mathbf{V}), \quad \mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n \times k}$$

Stiefel manifold は

$$V_k(\mathbb{R}^n) = \{ \mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n \times k} : \mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{I}_k \}$$

で表される。これはもし  $k = 1$ 、 $V_1(\mathbb{R}^n)$  を考えれば単位球  $\mathbb{R}^n$  を表している。ところが  $k > 1$  を考えるとこれは通常の球とはことなる性質が見えてくる。

そこで  $Sym_k(\mathbb{R})$  を  $k \times k$  対称行列の全てを表すと

$$\dim(Sym_k(\mathbb{R})) = \frac{1}{2} k(k+1)$$

となる。また写像  $\Phi$  を

$$\Phi : \mathbb{R}^{n \times k} \mapsto Sym_k(\mathbb{R})$$

とすると  $\mathbf{U} \in V_k(\mathbb{R}^n)$  として

$$\Phi(\mathbf{U}) = \mathbf{U}^T \mathbf{U} - \mathbf{I}_k$$

である。よって  $\mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{I}$  の時

$$V_k(\mathbb{R}) = \Phi^{-1}(\mathbf{0}) = \{ \mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n \times k} \}$$

さらに微分を次で定義する。

$$D\Phi(\mathbf{U})\mathbf{V} = \frac{d}{d\epsilon} \Phi(\mathbf{U} + \epsilon\mathbf{V})|_{\epsilon=0} = \mathbf{V}^T \mathbf{U} + \mathbf{U}^T \mathbf{V}$$

ただし、 $\mathbf{U} \in Sym_k(\mathbb{R})$  である。

$$D\Phi(\mathbf{U}) : \mathbb{R}^{n \times k}|_{\mathbf{U}} \rightarrow Sym_k(\mathbb{R}), \quad \mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n \times k}$$

$$D\Phi(\mathbf{U})\mathbf{V} = 2\mathbf{w}$$

とすると

$$\mathbf{V} = \mathbf{U}\mathbf{w}$$

とおくと

$$\mathbf{V}^T\mathbf{U} + \mathbf{U}^T\mathbf{V} = 2\mathbf{w} \in \text{Sym}_k(\mathbb{R})$$

とおけることに注目する。ここで  $\mathbf{U}$  は固定されていて、 $\mathbf{w}$  は  $\text{Sym}_k(\mathbb{R})$  のある要素である。  
 $D\Phi(\mathbf{U})$  の kernel は  $\mathbf{U}$  における  $V_k(\mathbb{R})$  の接平面になる。また  $D\Phi(\mathbf{U})$  の range は法平面になる。

## 18 相対論的力学 [3]

### 18.1 4元速度、加速度

相対論の出発は光速度が一定という原理からくるミンコフスキー空間上の4元不変距離  $\Delta s$  である。  
 ここでは次のように定義しよう。

$$\Delta s^2 = \eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu = -c(\Delta t)^2 + (\Delta \mathbf{x})^2$$

ただし、ここでの  $\eta_{\mu\nu}$  の符号の取り方は、通常の3次元速度  $\mathbf{v} = \Delta \mathbf{x} / \Delta t \ll c$  だから

$$\Delta s^2 < 0$$

となるようにとる。後の部では都合上  $\Delta s^2 > 0$  のようにとる場合があるので留意する。  
 ここで運動体の固有時間を  $\Delta \tau$  として

$$\Delta s^2 = -c^2 (\Delta \tau)^2 = \eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu = -c(\Delta t)^2 + (\Delta \mathbf{x})^2 \quad (18.1)$$

で定義しておく。これは速度  $v$  を持つ系の時間変化との関係が次のローレンツ短縮となることを示す。

$$\Delta \tau = \Delta t \sqrt{1 - \left(\frac{\mathbf{v}}{c}\right)^2}, \quad \Delta \tau < \Delta t$$

つまり、ロケットの中の1分が観測者からは1時間のように見えることがあり得るわけである。  
 この  $\tau$  は式 18.1 からローレンツ不変である。従って次のように質点の4元速度を定義する。

$$u^\mu \equiv \frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau}$$

これは  $x^\mu$  と同じ反変ベクトルである。

さらに次のように時間、空間成分があらわされる。今後  $k = 1, 2, 3$  として

$$v^k \equiv \frac{dx^k}{dt} = \mathbf{v}$$

$$u^k \equiv \frac{dx^k}{d\tau} = \frac{v^k}{\sqrt{1 - \left(\frac{\mathbf{v}}{c}\right)^2}} = \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\mathbf{v}}{c}\right)^2}}$$

$$u^0 = \frac{dx^0}{d\tau} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\mathbf{v}}{c}\right)^2}}$$

であり、次の4元不変速度の関係が成り立つ。

$$\eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -c^2$$

さらに、Newton の処方に従って加速度が定義できるが、古典論と異なり注意がいる。  
明らかに古典論では

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = 0$$

であるが、相対論では  $\sqrt{1 - (\frac{\mathbf{v}}{c})^2}$  因子の時間依存性のために、3 元速度と加速度は直交しない。  
4 元加速度を次で定義する。

$$a^\mu \equiv \frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}$$

従って 4 元速度と 4 元加速度は常に直交する。

$$\eta_{\mu\nu} u^\mu a^\nu \equiv 0$$

さらに、

$$d\tau = \sqrt{1 - \left(\frac{\mathbf{v}}{c}\right)^2} dt$$

として定義から  $\sqrt{1 - (\frac{\mathbf{v}}{c})^2}$  因子の時間依存性のために

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{\mathbf{v}}{c}\right)^2\right)} \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\mathbf{v}}{c}\right)^2}} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\mathbf{v}}{c}\right)^2}} \right) \\ &= \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{\mathbf{v}}{c}\right)^2\right)} \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{\mathbf{v}}{c^2 \left(1 - \left(\frac{\mathbf{v}}{c}\right)^2\right)^2} \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} \\ &= \frac{c^4 \dot{\mathbf{v}}}{(c^2 - \mathbf{v}^2)^2} \\ a^0 &= \frac{1}{c^2 \left(1 - \left(\frac{\mathbf{v}}{c}\right)^2\right)^2} \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} \end{aligned}$$

これは

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{d\tau} + a^0 \mathbf{v}$$

となることを示すので、4 元加速度を空間成分で見ると、時間成分に依存する項がつけ加わる。

この第 2 項は微分前の速度の項がかかることに留意がいる。これが Newton 力学との重要な相違点である。  
従って

$$\frac{d\mathbf{v}}{d\tau} = A \mathbf{e}_a$$

$$\mathbf{v} = V \mathbf{e}_v$$

とすると

$$\mathbf{a} = A \mathbf{e}_a + a^0 \cdot V \mathbf{e}_v$$

となる。つまり、加速度に速度の情報をどれだけ強く残すのかが  $a^0$  成分である。

例えば適当な時間関数の速度を用意しよう。

光速を 1 として、最大でこの値をとり、原点を通り、 $t$  が小さいところでは  $t$  に比例するような関数にしたいので、

$$v(t) = -e^{-t} + 1$$

とする。これを先の  $\mathbf{a}$  に代入し、 $\mathbf{v}, \mathbf{a}$  のグラフを描くと次のようになる。

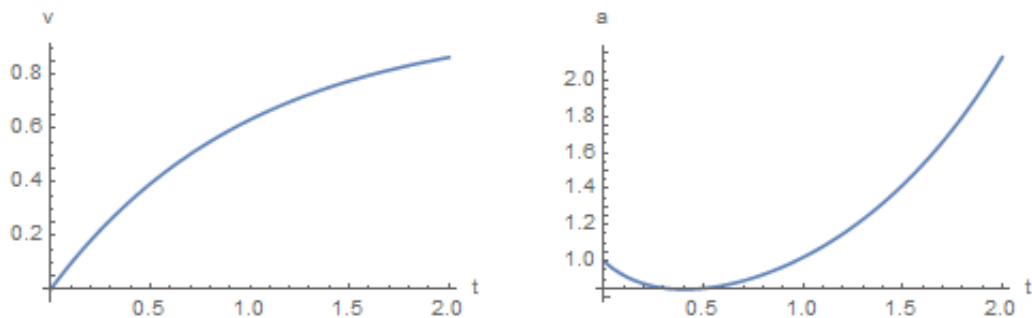


図 18.1:  $v(t) = -e^{-t} + 1$  としたときの  $v, a$  のグラフ

さらに加速度の時間成分  $a^0$  とその微分のグラフを次に表示する。

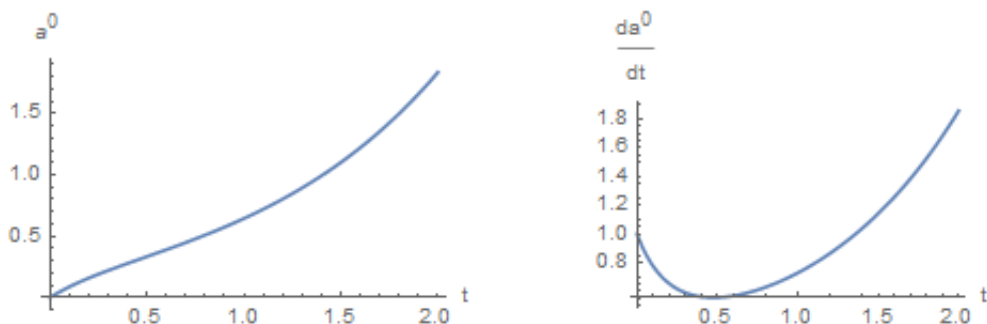


図 18.2:  $a^0, da^0/dt$  のグラフ

このグラフで見ると  $a^0$  を固有時間  $\tau$  で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left[ \frac{1}{c^2 \left(1 - \frac{v}{c}\right)^2} v(t) \cdot \dot{v}(t) \right] &= \frac{c^5 (v(t) (c^2 - v(t)^2) v''(t) + (c^2 + 5v(t)^2) v'(t)^2)}{(c^2 - v(t)^2)^4} \\ &= \frac{c^5}{(c^2 - v(t)^2)^2} \left( \frac{v(t)v''(t)}{(c^2 - v(t)^2)} + \frac{c^2 v'(t)^2 + 5v(t)^2 v'(t)^2}{(c^2 - v(t)^2)^2} \right) \end{aligned}$$

を得る。従って

$$\frac{da^0}{dt} - \mathbf{a} = \frac{c^4 \left( (c^3 + 5cv(t)^2) v'(t)^2 + cv(t) (c^2 - v(t)^2) v''(t) - (c^2 - v(t)^2)^2 v'(t) \right)}{(c^2 - v(t)^2)^4}$$

とまとめられる。 $v$  が小さいと無視できるが、大きくなると第 1 項が残る。

つまり、相対論と古典論との相違は空間と同等に時間成分を持ち上げたことによる。

Newton 力学の時代には物理量の時間成分は全て共通のパラメタとして処理のできる  $t$  であったが、相対論では  $v$  の形に依存して、それぞれ時間成分が現れてくる。

これが波動関数の干渉性とどう関係するかを第 9 部で考察する。

## 18.2 エネルギー・運動量

Newton の運動方程式は

$$\frac{d}{d\tau} p^\mu = F^\mu$$

となり、4元運動量を次で定義する。

$$p^\mu \equiv mu^\mu = m \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

従って、運動量も反変ベクトルである。前節の固有時間と同じように

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} \sqrt{1 - \left(\frac{\mathbf{v}}{c}\right)^2} = \mathbf{K}$$

のように力を定義すると、力積の関係は相対論でもそのまま成り立つ。時間成分については

$$\frac{d}{dt}(cp^0) = cF^0 \sqrt{1 - \left(\frac{\mathbf{v}}{c}\right)^2} = (\mathbf{K} \cdot \mathbf{v})$$

エネルギーの時間変化は仕事率になっている。よって運動量とエネルギーは

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\mathbf{v}}{c}\right)^2}}$$

$$E = cp^0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{\mathbf{v}}{c}\right)^2}}$$

で定義するのが自然である。

この式は  $v \ll c$  であれば

$$E \simeq mc^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots\right) = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \dots$$

となる。運動エネルギーに静止エネルギー  $E_0 = mc^2$  が加わることに留意する。これが相対論の特徴である。さらに次の便利な恒等式

$$u_\mu u^\mu \equiv -c^2$$

があるので

$$p_\mu p^\mu = -(mc)^2$$

となる。これは質量の定義とみなることもできる。

さらに左辺を書き換えると

$$E^2 - c^2 \mathbf{p}^2 = -c^2 (mc)^2$$

となるので、重要な関係式

$$E^2 = c^2(\mathbf{p}^2 + m^2 c^2)$$

を得る。

### 18.3 不変質量

特殊相対性理論では自由粒子のエネルギーは質量  $m$ 、運動量  $p$  として

$$E = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2} \tag{18.2}$$

のように空間成分と時間成分のベクトル和のようにして得られる。根の中の第2項が通常は定数であるために、この値はスカラーとしてみなすことができる。つまり、エネルギーは相対論の世界では

$$E_1 = cp, \quad E_2 = mc^2$$

の二成分を持っているかのように見える。

ローレンツ変換の時に用いた速度比

$$\beta = \frac{v}{c}$$

を用いると

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{cp}{E} = \frac{cp}{\sqrt{(cp)^2 + m^2c^4}} \quad (18.3)$$

になる。これは  $p \rightarrow \infty$  で  $\beta \rightarrow 1$  となることを示し、どんなに外からエネルギーを加えても光の速さを超えることができないことを表す。

また、今後は  $c = 1$  として式 18.2 は

$$m^2 = E^2 - p^2 \quad (18.4)$$

となる。これは質量  $m$  はローレンツ不変であり不変距離

$$ds^2 = dt^2 - dx^2$$

に対応している。 $c = 1$  としたことで速度比  $\beta$  はそのまま観測系との間の相対速度に等しい。この時、自由粒子のエネルギーも簡単に

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

を用いて

$$E = \gamma m$$

で表すことができる。これは  $\beta$  が光速に近づくと  $E$  は無限大にまで大きくなることを意味している。

いま、系 A を系 B からみる場合を考えると運動量とエネルギーの間にはローレンツ変換から相対速度とおなじ向きには  $P$ 、相対速度と垂直な向きには  $N$  をつけるとして

$$E_B = \gamma(E_A - \beta p_{AP})$$

$$p_{BP} = -\gamma(\beta E_A - p_{AP}) \quad (18.5)$$

$$p_{BN} = p_{AN}$$

という関係が成り立つ。特にローレンツ変換の中でも等速の関係であればその変換はブーストと呼ぶことがある。

ローレンツ変換では不変距離  $ds$  が重要な役割をしたが、 $A, B$  どちらの系においても質量もローレンツ不変になることをみておこう。

系 A では式 18.4 から

$$m_A = \sqrt{E_A^2 - p_A^2}$$

一方系 B では式 18.5 より  $p_A^2 = p_{AN}^2 + p_{AP}^2$  と  $1/\gamma^2 = 1 - \beta^2$  に注意し、

$$\begin{aligned} m_B &= \sqrt{E_B^2 - p_B^2} \\ &= \gamma \sqrt{(E_A - \beta p_{AP})^2 - (\beta E_A - p_{AP})^2 - \frac{1}{\gamma^2} p_{AN}^2} \\ &= \gamma \sqrt{(1 - \beta^2) E_A^2 - (1 - \beta^2) (p_{AN}^2 + p_{AP}^2)} \\ &= \sqrt{E_A^2 - p_A^2} = m_A \end{aligned}$$

となり、ローレンツ変換でこの質量は変化しない。もちろん相対速度が変化していくと観測する質量も変化するが、 $A$  系からみても  $B$  系からみても変わらない質量がこの  $m^2 = E^2 - p^2$  であり、これを不変質量という。

さらに複数の粒子がある場合を考える。このとき式 18.3 から全粒子の和を  $tot$  の添え字をつけて

$$\beta = \frac{p_{tot}}{E_{tot}}$$

と表すことができる。この速度でブーストした系では重心速度 center of mass ( $cm$  の添え字) は 0 になるので、このような系を重心系という。

この時の不変質量は  $m_1^2 = m_2^2 = E_1^2 - p_1^2 = E_2^2 - p_2^2$  から

$$E_1^2 m_2^2 = E_1^2 E_2^2 - E_1^2 p_2^2 = E_1^2 E_2^2 - (E_2^2 - p_2^2 + p_1^2) p_2^2 = E_1^2 E_2^2 + p_1^2 p_2^2 - 2p_1^2 p_2^2 - E_2^2 + p_2^2$$

ここで  $E_2 = p_2$  とすると  $E_1 = p_1$  だから

$$E_1^2 m_2^2 = E_1^2 E_2^2 + p_1^2 p_2^2 - 2E_1 E_2 p_1 p_2 = (E_1 E_2 - p_1 p_2)^2$$

となるので

$$E_1 m_2 = E_1 E_2 - p_1 p_2$$

$$\begin{aligned} m' &= \sqrt{E_{tot}^2 - p_{tot}^2} = \sqrt{(E_1 + E_2)^2 - (p_1 + p_2)^2} \\ &= \sqrt{(E_2^2 - p_2^2) + E_1^2 + 2E_1 E_2 - 2p_1 p_2 - p_1^2} \\ &= \sqrt{m_2^2 + E_1^2 + 2(E_1 E_2 - p_1 p_2) - p_1^2} \\ &= \sqrt{m_2^2 + E_1^2 + 2E_1 m_2 - p_1^2} \\ &= \sqrt{(E_1 + m_2)^2 - p_1^2} \end{aligned}$$

となる。重心系での全エネルギーを  $E_{cm}$  とすると

$$\begin{aligned} E_{cm} &= \gamma (E_{tot} - \beta p_{tot}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{p_{tot}}{E_{tot}}\right)^2}} \left( E_{tot} - \frac{p_{tot}^2}{E_{tot}} \right) \\ &= E_{tot} \sqrt{1 - \left(\frac{p_{tot}}{E_{tot}}\right)^2} \\ &= \sqrt{E_{tot}^2 - p_{tot}^2} \\ &= m' \end{aligned}$$

となる。重心系では 2 つの粒子は

$$\frac{E_{cm}}{2}$$

のエネルギーを持ち、正面衝突する。従って重心系では全エネルギーが静止エネルギーに等しい。いいかえれば最大で  $E_{cm}$  の質量をもつ粒子を生成できる。

## 18.4 等価原理

時空のある 1 点においてアインシュタインの等価原理は局所的に  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = 0$  とすることができることを示す。この時は式 9.16 から

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\nu\mu}^\lambda$$

の対称性を持つ。

これは  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = 0$  の時、 $\{x^\mu\}$  系と  $\{x^{\mu'}\}$  系について式 9.16 から

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma'} = \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x^{\nu'} \partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^\rho}$$

だけになる。逆に具体的に、 $\{x^\mu\}$  系の原点について

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \frac{1}{2} \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}(0) x^{\alpha} x^{\beta}$$

とおけるが  $\mu = \nu$  であれば座標変換について原点で

$$\begin{aligned} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\nu'}} \Big|_{x=0} &= \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\nu'}} \Big|_{x=0} = \delta_{\nu}^{\mu} \\ \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x^{\nu'} \partial x^{\mu'}} \Big|_{x=0} &= -\frac{1}{2} (\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}(0) + \Gamma_{\nu\mu}^{\rho}(0)) \end{aligned}$$

である。よって式 9.16 から

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^{\rho'}(0) &= \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}(0) - \frac{1}{2} (\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}(0) + \Gamma_{\nu\mu}^{\rho}(0)) \\ &= \frac{1}{2} (\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}(0) - \Gamma_{\nu\mu}^{\rho}(0)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる。よって

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}$$

とすることができる。

これはねじれない場合を考えられる。この場合の指標を区別して  $\omega_{\mu b}^a$  で表すことにする。

## 18.5 エネルギー運動量テンソル

電磁場において  $N$  個の粒子の位置を  $x_n(t)$  で表し、電荷を  $q_n$  とする。

電荷密度は

$$\rho(t, x) = \sum_n q_n \delta^3(x - x_n(t))$$

とおくと、電流密度は次のようになる。

$$j(t, x) = \rho \cdot v_n = \sum_n q_n \delta^3(x - x_n(t)) \cdot \frac{dx_n}{dt}$$

そこで 4 元表示  $J(\rho, j)$  で  $x_n^0 = t_n$  として

$$J^a = \sum_n q_n \delta^3(x - x_n(t)) \cdot \frac{dx_n^\alpha}{dt}$$

となる。従ってある座標系での固有時間を  $\tau$  とすると  $t = x_n^0(\tau)$  において

$$\begin{aligned} J^a &= \sum_n q_n \delta^3(x - x_n(t)) \cdot \frac{dx_n^\alpha}{dt} \\ &= \sum_n q_n \frac{\delta^3(x' - x'_n(\tau)) \frac{dx_n^\alpha}{d\tau} \Big|_{t=x_n^0(\tau)}}{\frac{dt}{d\tau} \Big|_{t=x_n^0(\tau)}} \\ &= \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} \sum_n q_n \delta^3(x' - x'_n(t)) \cdot \frac{dx_n^\alpha}{d\tau} \delta(t - x_n^0(\tau)) d\tau \\ &= \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} \sum_n q_n \delta^4(x^\beta - x_n^\beta(t)) \cdot \frac{dx_n^\alpha}{d\tau} d\tau \end{aligned}$$



これはローレンツ不変になる。従って

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J^0}{\partial t} &= \frac{\partial \rho}{\partial t} = \sum_n q_n \frac{\partial}{\partial t} \delta^3(x - x_n(t)) \\
&= \sum_n q_n \left[ \frac{\partial}{\partial x'_n} \delta^3(x - x_n(t)) \right] \frac{dx'_n}{dt} \\
&= \sum_n q_n \left[ \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x'_n} \delta^3(x - x_n(t)) \right] \frac{dx'_n}{dt} \\
&= - \sum_n q_n \left[ \frac{\partial}{\partial x'} \delta^3(x - x_n(t)) \right] \frac{dx'_n}{dt} \\
&= - \frac{\partial}{\partial x'} \sum_n q_n \delta^3(x - x_n(t)) \frac{dx'_n}{dt} \\
&= - \frac{\partial}{\partial x'} J'
\end{aligned}$$

となる。4元運動量を  $P_n^\alpha(t) = (E_n(t), \mathbf{p}_n(t))$  とすると4元運動量エネルギーの0成分を持つものは全粒子で足し上げて

$$T^{\alpha 0}(t, \mathbf{x}) = \sum_n P_n^\alpha(t) \delta^3(x - x_n(t))$$

と決められる。よって4元運動量エネルギーは一般に、

$$T^{\alpha\beta}(t, \mathbf{x}) = \sum_n P_n^\alpha(t) \delta^3(x - x_n(t)) \frac{dx_n^\beta}{dt} \quad (18.6)$$

とすればよい。ただし、この時間  $t$  については注意がいる。

これはテンソルとして振る舞うのでさらに和の要素が入っていることである。固有時間を用いると

$$\frac{dx_n^\beta}{dt} = \frac{dx_n^\beta}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} \Big|_{t=x_n^0(\tau)}$$

となるが次のように我々は時間に沿って現象を見ることになるので

$$\frac{d\tau}{dt} \Big|_{t=x_n^0(\tau)} = \delta(t - x_n^0(t)) \quad (18.7)$$

とみなすことになる。デルタ関数  $\delta(x)$  がステップ関数  $\theta(x)$  の微分から導いたことを用いると固有時間の性質として、

$$\tau = \theta(t - x_n^0(t)) \quad (18.8)$$

となる。

$$\begin{aligned}
T^{\alpha\beta}(t, \mathbf{x}) &= \sum_n \frac{P_n^\alpha(\tau) \frac{dx_n^\beta}{d\tau} \Big|_{t=x_n^0(\tau)} \delta^3(x^i - x_n^i(t))}{\frac{dt}{d\tau} \Big|_{t=x_n^0(\tau)}} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_n P_n^\alpha(t) \frac{dx_n^\beta}{d\tau} \delta^3(x - x_n(t)) \delta(t - x_n^0(t)) d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_n P_n^\alpha(t) \frac{dx_n^\beta}{d\tau} \delta^4(x^\mu - x_n^\mu(t)) d\tau \quad (18.9)
\end{aligned}$$

これらの成分は

$$T^{\alpha\beta}(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} T^{00} & T^{0j} \\ T^{i0} & T^{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{energy density } \epsilon & \text{energy current } \mathbf{S} \\ \text{mometum density } \mathbf{g} & \text{momentum current stress tensor} \end{pmatrix}$$

とまとめることができる。  
エネルギー保存則は

$$\partial_\beta T^{0\beta} = 0$$

として

$$\partial_0 T^{00} + \partial_j T^{0j} = \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \nabla \mathbf{S} = 0$$

で表される。また、 $x$  方向の運動量保存則は

$$\begin{aligned} \partial_\beta T^{1\beta} &= 0 \\ \partial_0 T^{10} + \partial_j T^{1j} &= \frac{\partial p_x}{\partial t} + \nabla U_x = 0 \end{aligned}$$

が成り立つ。エネルギー、運動量保存則は合わせて

$$\partial_\beta T^{\alpha\beta} = 0$$

とかくことができる。ここで考慮したエネルギー-運動量テンソルは力学的なものなので改めて式 18.6 は

$$\begin{aligned} \partial_\beta T_{MECH}^{\alpha\beta} &= \partial_\beta \left[ \sum_n P_n^\alpha(t) \frac{dx_n^\beta}{dt} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left[ \sum_n P_n^\alpha(t) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)) \right] + \frac{\partial}{\partial x^i} \left[ \sum_n P_n^\alpha(t) \frac{dx_n^i}{dt} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)) \right] \\ &= \sum_n \frac{dP_n^\alpha(t)}{dt} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)) + \sum_n P_n^\alpha(t) \frac{d}{dt} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x^i} \left[ \sum_n P_n^\alpha(t) \frac{dx_n^i}{dt} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)) \right] \\ &= \sum_n \frac{dP_n^\alpha(t)}{dt} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)) + \sum_n P_n^\alpha(t) \left[ \frac{\partial}{\partial x_n^i} \delta^3(\mathbf{x}^j - \mathbf{x}_n^j(t)) \right] \frac{dx_n^i}{dt} \\ &\quad + \sum_n P_n^\alpha(t) \frac{dx_n^i}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial x^i} \delta^3(\mathbf{x}^j - \mathbf{x}_n^j(t)) \right] \\ &= \sum_n \frac{dP_n^\alpha(t)}{dt} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)) + \sum_n P_n^\alpha(t) \left[ \frac{\partial}{\partial x_n^i} \delta^3(\mathbf{x}^j - \mathbf{x}_n^j(t)) \right] \frac{dx_n^i}{dt} \\ &\quad - \sum_n P_n^\alpha(t) \left[ \frac{\partial}{\partial x^i} \delta^3(\mathbf{x}^j - \mathbf{x}_n^j(t)) \right] \frac{dx_n^i}{dt} \end{aligned}$$

3 行目では

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_n^i} \frac{dx_n^i}{dt}$$

としている。最後の 2 項が打ち消しあうので結局、式 18.7 から固有時表現では

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{d\tau} \delta(t - x_n^0(\tau))$$

となるので、式 18.9 から

$$\begin{aligned} \partial_\beta T_{MECH}^{\alpha\beta} &= \sum_n \frac{dP_n^\alpha(t)}{dt} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)) \\ &= \sum_n \frac{dP_n^\alpha(t)}{d\tau} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)) \delta(t - x_n^0(\tau)) \\ &= \sum_n \frac{dP_n^\alpha(t)}{d\tau} \delta^4(x - x_n(t)) d\tau \end{aligned}$$

とあらわすことができる。もし、粒子が電場と相互作用すると

$$\partial_\beta T_{MECH}^{\alpha\beta} \neq 0$$

となる。しかし、改めて電磁場のエネルギーテンソルを加えて、

$$T^{\alpha\beta} = T_{MECH}^{\alpha\beta} + T_{EL}^{\alpha\beta}$$

としておけば保存則は

$$\partial_\beta T^{\alpha\beta} = 0$$

となるので、この時、 $T_{MECH}^{\alpha\beta}$  が自明であれば

$$\partial_\beta T_{EL}^{\alpha\beta} = -\partial_\beta T_{MECH}^{\alpha\beta}$$

から求めることができる。一方で 4 元電磁場を  $F_\beta^\alpha$  とするとローレンツ力は 1.200 から

$$\frac{dP_n^\alpha(t)}{d\tau} = q_n F_\beta^\alpha \frac{dx_n^\beta}{d\tau}$$

となるので

$$\begin{aligned} \partial_\beta T_{EL}^{\alpha\beta} &= -\sum_n \frac{dP_n^\alpha(t)}{dt} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)) \\ &= -\sum_n \frac{dP_n^\alpha(t)}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)) \\ &= -F_\beta^\alpha \sum_n q_n \frac{dx_n^\beta}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)) \\ &= -F_\beta^\alpha \sum_n q_n \frac{dx_n^\beta}{dt} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)) \end{aligned}$$

となるのでカレント  $J^\beta$  を用いて

$$\partial_\beta T_{EL}^{\alpha\beta} = -F_\beta^\alpha J^\beta \tag{18.10}$$

$$J^\beta = \sum_n q_n \frac{dx_n^\beta}{dt} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t))$$

である。Maxwell 方程式を用いると式 1.201 から

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) = \square A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = 0$$

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

また式 1.199 から

$$\square A^\mu = J^\mu$$

よって

$$\begin{aligned} F_\beta^\alpha J^\beta &= F_\beta^\alpha \square A^\beta \\ &= F_\beta^\alpha (\partial_\gamma F^{\gamma\beta}(x) + \partial^\beta \partial_\gamma A^\gamma) \\ &= F_\beta^\alpha (\partial_\gamma F^{\gamma\beta}(x) + \eta_\alpha^\gamma \eta^{\delta\beta} \partial_\beta \partial_\gamma A^\gamma) \\ &= \partial_\beta (F_\gamma^\alpha F^{\gamma\beta} + F^{\gamma\delta} \partial_\gamma A^\delta) \\ &= \partial_\beta (F_\gamma^\alpha F^{\gamma\beta} + F^{\gamma\delta} (\partial_\gamma A^\delta - \partial_\delta A^\gamma)) \\ &= \partial_\beta \left[ F_\gamma^\alpha F^{\gamma\beta} + \frac{1}{4} \eta^{\alpha\beta} F^{\gamma\delta} F_{\gamma\delta} \right] \end{aligned}$$

となるから式 18.10 から

$$T_{EL}^{\alpha\beta} = -F_{\gamma}^{\alpha} F^{\gamma\beta} - \frac{1}{4} \eta^{\alpha\beta} F^{\gamma\delta} F_{\gamma\delta} \quad (18.11)$$

よって次のように 2 つのエネルギー-運動量テンソルが微分形で得られる。

$$\partial_{\beta} T_{MECH}^{\alpha\beta} = \sum_n \frac{dP_n^{\alpha}(t)}{dt} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t))$$

$$\partial_{\beta} T_{EL}^{\alpha\beta} = -F_{\beta}^{\alpha} J^{\beta}$$

これらは次のように運動量が定数でカレントが 0 であれば

$$\begin{aligned} \frac{dP_n^{\alpha}(t)}{dt} &= 0 \\ J^{\beta} &= 0 \end{aligned}$$

次のように全体のエネルギー-運動量が 4 次元時空上で保存されることを示す。

$$\partial_{\beta} (T_{MECH}^{\alpha\beta} + T_{EL}^{\alpha\beta}) = 0$$

$$T^{\alpha\beta} = T_{MECH}^{\alpha\beta} + T_{EL}^{\alpha\beta} = Const.$$

式 18.11 からこのテンソルは  $\alpha, \beta$  の入れ替えに対して対称である。

例えば電磁場の場合次のようになる。式 1.200 から時間成分のエネルギーは

$$\begin{aligned} \epsilon(t, \mathbf{x}) &= T^{00} = -F_{\gamma}^0 F^{\gamma 0} - \frac{1}{4} \eta^{00} F^{\gamma\delta} F_{\gamma\delta} \\ &= -F_{\gamma}^0 F^{\gamma 0} + \frac{1}{4} F^{\gamma\delta} F_{\gamma\delta} \\ &= \mathbf{E}^2 + \frac{1}{4} (2\mathbf{B}^2 - 2\mathbf{E}^2) \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) \end{aligned}$$

となる。また、空間成分の運動量は  $\eta^{i0} = 0$  だから

$$\begin{aligned} \mathbf{s}(t, \mathbf{x}) &= T^{i0} = -F_j^i F^{j0} \quad (i = 1, 2, 3) \\ &= \sum_k \epsilon_{ijk} E_i B_j \\ &= \mathbf{E} \times \mathbf{B} \end{aligned}$$

となる。これから次のアブラハムの定理がいえる。

- もし、 $T^{\alpha\beta}(x)$  がローレンツ場のテンソルであれば

$$\partial_{\beta} T^{\alpha\beta} = 0$$

であり 4 元ベクトルが

$$P^{\alpha} = \int T^{\alpha 0} d^3x$$

で表される。

- もし  $J^\alpha(x)$  がローレンツ場の 4 元ベクトルであれば

$$\partial_\alpha J^\alpha = 0$$

でありローレンツスカラーが

$$Q = \int_{x^0} J^0 d^3x$$

となる。

## 19 Einstein 方程式

古典的な運動において運動方程式は作用  $S$  として

$$S = \int L(q^i, \dot{q}^i, t) dt \quad (19.1)$$

の極値をとる条件  $\delta S = 0$  から次のように導かれた。

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0 \quad (19.2)$$

一般相対論ではこれを時空多様体に拡大し、固有時を  $\tau$  として

$$L = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \quad (19.3)$$

とすれば式 19.2 は  $\Gamma$  を用いて自由粒子の運動方程式が次のように決定される。

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} \quad (19.4)$$

また、世界線の長さを

$$I = \int ds = \int \sqrt{2L} d\tau$$

とするとこの世界線の長さが極値をとる条件は

$$\delta I = \delta \int \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}} d\tau = 0$$

ただし接続は新たに次の記号

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (-\partial_\rho g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu}) \quad (19.5)$$

で定義する。よって

$$\partial_\rho \left( g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right) = (-2g_{\lambda\rho} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu}) \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0$$

として両辺に  $\frac{1}{2} g^{\lambda\rho}$  をかけると

$$\frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \partial_\mu g_{\nu\rho} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = \frac{1}{2}$$

とおける。

ここでリーマンテンソルを定義しておく。

第 2 部の共変微分の交換積を次のように任意のベクトル  $V^\mu$  に作用させる。

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^a = (\partial_\mu \Gamma_{\nu\beta}^\alpha - \partial_\nu \Gamma_{\mu\beta}^\alpha + \Gamma_{\mu\tau}^\alpha \Gamma_{\nu\beta}^\tau - \Gamma_{\nu\tau}^\alpha \Gamma_{\mu\beta}^\tau) V^a \quad (19.6)$$

となるが括弧内を次のように定義しよう。

$$R_{\beta\mu\nu}^\alpha = \partial_\nu \Gamma_{\mu\beta}^\alpha - \partial_\mu \Gamma_{\nu\beta}^\alpha + \Gamma_{\mu\tau}^\alpha \Gamma_{\nu\beta}^\tau - \Gamma_{\nu\tau}^\alpha \Gamma_{\mu\beta}^\tau \quad (19.7)$$

を得る。これは **Riemann-Christoffel 曲率テンソル** と呼ばれる。この意味を考えてみよう。そこで定数  $u, v$  をパラメタとして図のような曲面を考える。

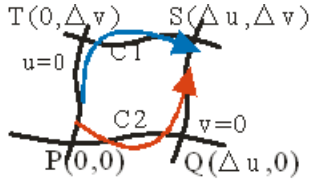


図 19.1: 曲面

図においてP点からS点にベクトル  $V^\mu$  を平行移動する経路を  $C1, C2$  とする。この経路によってベクトルがどう変化するかをみてみよう。

共変微分の定義から  $C1$  に沿った場合は

$$V^\mu(T)_{//} = V^\mu(P) - \Gamma_{\alpha\nu}^\mu(P) V^\nu(P) \frac{\partial x^\alpha}{\partial v} \Delta v$$

$$V^\mu(S)_{//} = V^\mu(T)_{//} - \Gamma_{\beta\nu}^\mu(T) V^\nu(T)_{//} \frac{\partial x^\beta}{\partial u} \Delta u$$

よって  $\Delta$  についての2次以降を無視し、

$$V^\mu(S)_{//} = V^\mu(P) + \Gamma_{\beta\nu}^\mu(T) \Gamma_{\alpha\rho}^\nu(P) V^\rho(P) \frac{\partial x^\alpha}{\partial v} \Delta v \frac{\partial x^\beta}{\partial u} \Delta u - \Gamma_{\beta\nu}^\mu(T) V^\nu(P) \frac{\partial x^\beta}{\partial u} \Delta u$$

点Pでの値に統一する必要があるから

$$\Gamma_{\beta\nu}^\mu(T) = \Gamma_{\beta\nu}^\mu(P) + \partial_\alpha \Gamma_{\beta\nu}^\mu \frac{\partial x^\alpha}{\partial v} \Delta v$$

となるので  $\Delta$  についての2次以降を無視し

$$V^\mu(S)_{//} = V^\mu(P) + \left( \Gamma_{\beta\nu}^\mu(P) \Gamma_{\alpha\rho}^\nu(P) - \partial_\alpha \Gamma_{\beta\rho}^\mu(P) \right) V^\rho(P) \frac{\partial x^\alpha}{\partial v} \Delta v \frac{\partial x^\beta}{\partial u} \Delta u$$

となる。 $C2$  に沿った場合との差は  $C2$  の場合が  $u, v$  についての入れ替えになることを利用し、式 19.7 から

$$V^\mu(C1)_{//} - V^\mu(C2)_{//} = -R_{\rho\alpha\beta}^\mu V^\rho(P) \frac{\partial x^\alpha}{\partial v} \Delta v \frac{\partial x^\beta}{\partial u} \Delta u$$

となる。つまり曲率テンソルに面積要素を掛けたものは右回り経路と左周り経路で平行移動させた時のベクトルの変化量になっている。

次のように面積要素を定義すると

$$\Delta\sigma^{a\beta} = \begin{vmatrix} \Delta_1 x^a & \Delta_1 x^\beta \\ \Delta_2 x^a & \Delta_2 x^\beta \end{vmatrix}$$

$$V^\mu(C1)_{//} - V^\mu(C2)_{//} = -\frac{1}{2} R_{\rho\alpha\beta}^\mu V^\rho(P) \Delta\sigma^{a\beta} \quad (19.8)$$

が存在する。空間であれば曲率は0になるので平行移動したベクトルに差はない。また、経路である  $x_1, nM$  には任意性がある。端点を決めたとしても球面上であれば曲率はいたるところで一定であるから

$$V^\mu(C1)_{//} - V^\mu(C2)_{//} = -2\pi R_\rho V^\rho(P) \quad (19.9)$$

となる。

また図のように円盤上でのベクトルの移動を考えると経路  $C1$  を用いて移動したベクトルは向きが反転するが経路  $C2$  では経路の向きとベクトルの向きが直交しているために移動によって向きは変化しない。しかし、図右のように球面に拡大し、法線ベクトルを許すと経路に沿っての移動で向きを変える。

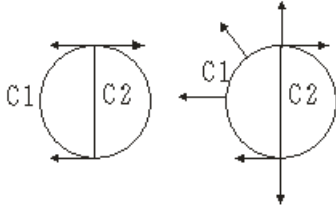


図 19.2: 平面と空間による平行移動の相違

そこで

$$\omega = \xi_1 \wedge \xi_2$$

はベクトルを  $\xi_1, \xi_2$  が作る平面に直交している。

1形式として

$$d\omega = d\xi_1 \wedge \xi_2 - \xi_1 \wedge d\xi_2$$

曲率テンソルは次のような対称性を持っている。

$$R^\mu_{\alpha\beta\gamma} + R^\mu_{\beta\gamma\alpha} + R^\mu_{\gamma\alpha\beta} \equiv 0 \quad (19.10)$$

さらに次の Bianchi の恒等式も成立する。

$$\nabla_\gamma R^\mu_{\nu\alpha\beta} + \nabla_\beta R^\mu_{\nu\gamma\alpha} + \nabla_\alpha R^\mu_{\nu\beta\gamma} \equiv 0 \quad (19.11)$$

また縮約により次のテンソルが得られる。まず Ricci テンソル (Ricci tensor) として次を定義する。

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu} \equiv R^\alpha_{\mu\nu\alpha} \quad (19.12)$$

さらにスカラー曲率として

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

式 19.11 から

$$\nabla_\gamma R^\alpha_{\nu\alpha\beta} + \nabla_\beta R^\alpha_{\nu\gamma\alpha} + \nabla_\alpha R^\alpha_{\nu\beta\gamma} = 0 \quad (19.13)$$

$$-\nabla_\gamma R_{\nu\beta} + \nabla_\beta R_{\nu\gamma} + \nabla_\alpha R^\alpha_{\nu\beta\gamma} \equiv 0$$

これに  $g^{\beta\nu}$  をかけると

$$\nabla_\tau g^{\beta\nu} = 0$$

だから

$$\begin{aligned} -\nabla_\gamma R + \nabla_\beta R^\beta_\gamma + \nabla_\alpha R^\alpha_\gamma &= -\nabla_\gamma R + 2\nabla_\beta R^\beta_\gamma = 0 \\ &= 2\nabla_\alpha \left( R^\alpha_\beta - \frac{1}{2}\delta^\alpha_\beta R \right) = 0 \end{aligned} \quad (19.14)$$

ここで次のようにテンソルを定義すると

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \quad (19.15)$$

式 19.14 は次のように書ける。

$$\nabla_\lambda G^\lambda_\mu = 0 \quad (19.16)$$

このテンソルは Einstein のテンソルと言われ、スカラー曲率  $R$  と共に次のような重要な性質を持つ。

1.  $g_{\mu\nu}$  とその 1 階、2 階微分係数から作られるスカラーは次の形式のものしかない。

$$S(x) = c_1 R(x) + c_2 \quad (19.17)$$

2. 同様に 2 階対称テンソルのうちで次の恒等式を満足するものは

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (19.18)$$

次の形式のものしかない。

$$T^{\mu\nu} = c_1 G^{\mu\nu} + c_2 g^{\mu\nu} \quad (19.19)$$

これらからエネルギー運動量テンソルは保存されるとすれば式 19.18 を満たすべきであるから  $k$  を定数として次のようにおける

$$G^{\mu\nu} = kT^{\mu\nu} \quad (19.20)$$

ただし、式 19.19 の  $c_2$  の項を無視した。よって

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = kT^{\mu\nu} \quad (19.21)$$

を得る。これはアインシュタインの方程式 (Einstein's equation) と呼ばれる。

Ricci テンソルが得られる場合は

$$\nabla_\nu V_\mu = \frac{\partial V_\mu}{\partial x^\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu} V_\lambda \quad (19.22)$$

$$\Gamma^\lambda_{\mu\lambda} = -\frac{1}{2}\partial_\mu g/g = \partial_\mu \log \sqrt{-g}$$

から  $\alpha = \nu$

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\mu = \left( \partial_\mu \Gamma^\mu_{\nu\beta} - \partial_\nu \Gamma^\mu_{\mu\beta} + \Gamma^\mu_{\mu\tau} \Gamma^\tau_{\nu\beta} - \Gamma^\mu_{\nu\tau} \Gamma^\tau_{\mu\beta} \right) V^\mu \quad (19.23)$$

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\mu = R_{\mu\nu} V^\mu \quad (19.24)$$

そこで  $(M, g)$  を  $n$  次元リーマン多様体とし  $M$  の点  $P$  での接空間  $T_P M$  で表すと



$$\xi, \eta \in T_p M$$

としてリッチテンソル  $Ric$  の  $(\xi, \eta)$  における値は次の線形写像のトレースで与えられる。 $R(\xi, \eta)$  を曲率テンソルの  $(\xi, \eta)$  での値として

$$T_p M \rightarrow T_p M; \zeta \mapsto R(\zeta, \eta)\xi$$

これは局所座標を用いて

$$Ric = R_{ikj}^k dx^i \otimes dx^j = R_{ij} dx^i \otimes dx^j \quad (19.25)$$

で表される。さらにこのリッチテンソルを計量  $g$  に関してトレースをとればスカラー曲率が得られる。

$$S = tr_g Ric$$

従って計量の取り方にトレースは依存するので局所座標を用いると

$$S = g^{ij} R_{ij} \quad (19.26)$$

となる。

## 19.1 Einstein-Hilbert 作用

Newton の理論では重力ポテンシャル  $\Phi$  は  $\rho$  を質量密度とすると次の Poisson の方程式に従う。

$$\Delta \Phi = 4\pi G \rho$$

を満たす。ラプラシアン  $\Delta$  については次節で詳しく触れる。19.21 より

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R$$

アインシュタインのテンソル  $G^{\mu\nu}$  とエネルギー運動量テンソルとは次の関係式で結ばれる。

$$G^{\mu\nu} = 8\pi G T^{\mu\nu} \quad (19.27)$$

これを作用原理から導こう。この作用はスカラーとなるべきで  $S$  とおく。

$(M, g)$  を擬 Riemann 空間とする。一般に不変体積要素である次の

$$S = \int \sqrt{-g} d^4 x$$

だけでは作用としては不十分でこれにスカラーテンソル  $R$  をかけたものを作用とおく。

そこで4次元における重力場の **Einstein-Hilbert** 作用を次のようにおく。

$$S_{EH} = \frac{1}{16\pi G} \int R \sqrt{-g} d^4 x \quad (19.28)$$

係数  $\frac{1}{16\pi G}$  は後で示す Newton の場合と整合するために与えた。

まず式 9.17、9.21 より

$$\begin{aligned} \delta(R\sqrt{-g}) &= \delta(g^{\mu\nu} Ric_{\mu\nu}\sqrt{-g}) \\ &= \delta g^{\mu\nu} Ric_{\mu\nu}\sqrt{-g} + g^{\mu\nu} \delta Ric_{\mu\nu}\sqrt{-g} + R\delta\sqrt{-g} \\ &= -g^{\mu\kappa} g^{\lambda\nu} \delta g_{\kappa\lambda} Ric_{\mu\nu}\sqrt{-g} \\ &\quad + g^{\mu\nu} (\nabla_\kappa \delta \Gamma_{\nu\mu}^\kappa - \nabla_\nu \delta \Gamma_{\kappa\mu}^\kappa) \sqrt{-g} + \frac{1}{2} R \sqrt{-g} \delta g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \end{aligned}$$

ここで第2項は全微分だから和をとり

$$g^{\mu\nu} (\nabla_\kappa \delta\Gamma_{\nu\mu}^\kappa - \nabla_\nu \delta\Gamma_{\kappa\mu}^\kappa) \sqrt{-g} = \partial_\kappa (g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\nu\mu}^\kappa \sqrt{-g}) - \partial_\nu (g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\kappa\mu}^\kappa \sqrt{-g})$$

となり、この項は変分に寄与しない。残りの項について

$$\delta S_{EH} = \frac{1}{16\pi G} \int \left\{ -Ric^{\mu\nu} + \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} \right\} \delta g_{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x \quad (19.29)$$

が成り立つので  $\delta S = 0$  を課すと

$$G_{\mu\nu} = Ric_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0$$

アインシュタインテンソルが得られる。

次に物質場を付け加える。この作用を次のようにおく。

$$S_M = \int \mathcal{L}_m(\phi, \partial\phi) \sqrt{-g} d^4x$$

ただし、 $\mathcal{L}_m(\phi, \partial\phi)$  はラグランジアン密度である。

例えば実スカラー場の場合は

$$S_s = -\frac{1}{2} \int [g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + m^2 \phi^2] \sqrt{-g} d^4x$$

であるし、Maxwell 場であれば

$$S_{ED} = -\frac{1}{4} \int [F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}] \sqrt{-g} d^4x$$

今、変分  $\delta g$  のもとでは物質場のみが作用に関わるとすると

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L}$$

なので

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + m^2 \phi^2)$$

とすると

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \mathcal{L} \\ &= \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (g^{\kappa\lambda} \partial_\kappa \phi \partial_\lambda \phi + m^2 \phi^2) \end{aligned}$$

となる。これは

$$S = \int \mathcal{L}_m \sqrt{-g} d^4x$$

として

$$\begin{aligned} \delta S &= \int \delta (\mathcal{L}_m \sqrt{-g}) d^4x \\ &= \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta (\mathcal{L}_m \sqrt{-g})}{\delta g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu}(x) T_{\mu\nu}(x) \end{aligned} \quad (19.30)$$

とおけば共役運動量の定義に似て、運動量エネルギーテンソルは

$$T_{\mu\nu}(x) = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\mathcal{L}_m \sqrt{-g})}{\delta g^{\mu\nu}}$$

である。

$\mathcal{L}$  が  $\partial_\mu \phi$  項を持たない場合は

$$T^{\mu\nu} = -g^{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (19.31)$$

$$\mathcal{L} = -g_{\mu\nu} T^{\mu\nu} \quad (19.32)$$

なので式 9.17 より運動量テンソルは保存される。作用は

$$S_M = \int \mathcal{L}_m \sqrt{-g} d^4x$$

とするとエネルギー運動量テンソルが

$$T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu} = \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}}$$

とすると

$$\begin{aligned} \delta S_M &= - \frac{1}{2} \int \delta(\mathcal{L}_m \sqrt{-g}) d^4x \\ &= - \frac{1}{2} \int [T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}] \sqrt{-g} d^4x \end{aligned} \quad (19.33)$$

無限小変換では  $\delta x^\mu = \xi^\mu$  とすると

$$\delta g^{\mu\nu} = \nabla^\mu \xi^\nu + \nabla^\nu \xi^\mu$$

となるので

$$\begin{aligned} \delta S_M &= - \frac{1}{2} \int \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} d^4x \\ &= - \int \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \nabla^\nu \xi^\mu d^4x \\ &= - \int \sqrt{-g} \nabla_\nu (T_\mu^\nu \xi^\mu) d^4x + \int \sqrt{-g} \xi^\mu \nabla_\nu T_\mu^\nu d^4x \end{aligned}$$

となり、この第1項はベクトル場  $T_\mu^\nu \xi^\mu$  の発散だから積分すると表面積分として0である。

よって第2項から  $\delta S_M = 0$  を満たすことは

$$\nabla_\nu T_\mu^\nu = 0$$

を要請する。アインシュタインのテンソルはビアンキの恒等式から

$$\nabla^\nu G_{\mu\nu} = 0$$

となったので重力のラグランジアン、物質のラグランジアンをそれぞれ  $\mathcal{L}_G = R/2\kappa^2$ ,  $\mathcal{L}_m$  とおけば作用

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} (\mathcal{L}_G + \mathcal{L}_m)$$

はビアンキ恒等式がエネルギー運動量保存となるように選ばれている。

しかし、物質と重力別々については保存されても総和については何も示していない。

重力場は物質場と結合していると考えられるから作用原理は

$$\delta(S_M + S_E) = 0$$

これから Einstein 方程式

$$G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}$$

が求まる。この時、式 19.29 と 19.33 から

$$\delta(S_M + S_E) = \frac{1}{16\pi G} \int \left\{ -Ric^{\mu\nu} + \frac{1}{2} Rg^{\mu\nu} + 8\pi GT^{\mu\nu} \right\} \delta g_{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x$$

だから {} 内が 0 として式 19.27 が導けられる。

## 19.2 弱い重力場

ここで一般相対性理論が Newton の重力とどう関係するかを見てみる。

そこで平坦な時空からわずかにずれて弱い重力の近似を考える。Minkowski 時空の計量を次のように微小項をつけて変化させる。

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

$$h_{\mu\nu} \ll 1$$

局所的な非相対論的速度を

$$U^\alpha \equiv \frac{dx^\alpha}{d\tau}$$

$$U^0 \cong 1$$

$$U^j \cong 0$$

とすると式 19.4 より

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} &\cong -c^2 \Gamma_{00}^\mu U^0 U^0 \\ &\cong -c^2 \Gamma_{00}^\mu \end{aligned} \quad (19.34)$$

$h_{\mu\nu}$  が静的であれば式 19.5 より

$$\Gamma_{00}^0 = 0, \quad \Gamma_{00}^j = -\frac{1}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^j}$$

ここでニュートンポテンシャルを

$$h_{00} = -2\phi/c^2$$

とおけば

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = \nabla\phi = -\nabla G \frac{M}{r} = G \frac{M}{r^2}$$

となり Newton の運動方程式である。

## 20 重力波

### 20.1 測地線

時空間に曲りがあると、平行という概念に修正がある。曲がった曲面の中にいればベクトルの平行移動は曲面に沿って曲がっていくが、時空の曲りを調べるためには時空の曲りに依存せず、直線的にベクトルを平行移動させ、時空に沿った接線との角度を測れば時空の曲りが得られる。もちろん、どうしたら曲りに依存せず、まっすぐベクトルを動かせるかは難問である。アインシュタインはここに等価原理を持ち込み、単純に自由落下させればいいと考えた。

前節から観測系に関係なく

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

が一定になることを見た。そこでパラメタ  $\lambda$  で連続的に記述される物体があり、時空間的に  $ds$  離れた相違点を次のように表す。

$$ds^2 = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} d\lambda^2$$

光円錐において空間部分  $ds^2 > 0$  を考える。

$$ds = (g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu)^{1/2}$$

とし、時間部分  $ds^2 < 0$  では負にならないように運動体に沿った固有時間を  $\tau$  として、

$$c^2 d\tau^2 = -ds^2 = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

ここで  $\lambda = \tau$  に選べば

$$g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = -c^2$$

でありこの値は不変になる。また、相対論の章で見たように 4 元速度を

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

とすれば

$$g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -c^2 \tag{20.1}$$

となる。質量  $m$  の自由粒子の運動は時間部分において境界条件を

$$x^\mu(\tau_A) = x_A^\mu$$

$$x^\mu(\tau_B) = x_B^\mu$$

と、局所座標系で固有時  $\tau$  としてラグランジアン  $L$  を

$$L = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}$$

とかくと世界線の長さ  $S$  は

$$S = \int ds = \int \sqrt{2L} d\tau$$

となるのでこの極値をとる条件から

$$\frac{d^2 x^\mu}{dt^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\nu(c(t))}{dt} \frac{dx^\lambda(c(t))}{dt} = 0$$

が導けたように、ここでは作用を

$$S = -m \int_{\tau_A}^{\tau_B} \sqrt{g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu} d\tau = -mc \int_{\tau_A}^{\tau_B} d\tau$$

とし、測地線の方程式は 4 元速度を用いて式 20.1 から

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu u^\nu u^\rho = 0 \quad (20.2)$$

となる。そこで非常に近い  $x^\mu(\tau) + \xi^\mu(\tau)$  異なる測地線を考え、

$$\frac{d^2 (x^\mu + \xi^\mu)}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu (x + \xi) \frac{d(x^\nu + \xi^\nu) d(x^\rho + \xi^\rho)}{d\tau d\tau} = 0$$

となることから  $|\xi^\mu|$  は小さいとして 2 次以上を落として、この式を展開すると式 20.2 を用いて簡単になり、

$$\frac{d^2 \xi^\mu}{d\tau^2} + 2\Gamma_{\nu\rho}^\mu (x) \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{d\xi^\rho}{d\tau} + \xi^\sigma \partial_\sigma \Gamma_{\nu\rho}^\mu (x) \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} = 0 \quad (20.3)$$

$\xi$  だけずれた時の偏差方程式が得られた。ここでベクトルの共変微分を

$$\frac{DV^\mu}{D\tau} \equiv \frac{dV^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu V^\nu \frac{dx^\rho}{d\tau} \quad (20.4)$$

で定義すると式 20.3 は 2 点間のベクトルと見なせば第 2 部の測地線変移の式から、ベクトル場を  $U, V$  とし、もう一回共変微分することで

$$\nabla_U \nabla_U V^\mu + R_{\sigma\nu\lambda}^\mu U^\sigma U^\lambda V^\nu = 0$$

が成り立つ。ここで空間的な微小変化

$$l^\mu = \frac{dx^\mu}{d\sigma} \delta\sigma$$

$$\frac{dx^\mu}{d\sigma} = V^\mu$$

とする

$$\frac{d^2 l}{d\tau^2} + R_{\sigma\nu\lambda}^\mu l^\nu U^\sigma U^\lambda = 0$$

となったことから式 20.3 は

$$\frac{D^2 \xi^\mu}{D\tau} = -R_{\nu\rho\sigma}^\mu \xi^\rho \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} = -R_{\nu\rho\sigma}^\mu \xi^\rho u^\nu u^\sigma$$

のように非常に近い領域にある測地線変位の式はリーマンテンソルに依存することがわかる。

## 20.2 局所内部空間と自由落下空間

アインシュタインの等価原理によれば重力のない空間はどこでもつくりことができ、地球上でも自由落下すればその中では無重力状態になる。光円錐の空間部分に  $P$  を置き、この時式 20.2 は  $P$  が自由落下をしていれば

$$\left. \frac{dx^2}{d\tau^2} \right|_P = 0$$

を満たす座標系をとれる。これを局所内部空間 (local inertial frame) LIF と呼ぶ。

そこでこの座標系の平坦になる計量を  $\eta_{\mu\nu}$  とし、単位ベクトルを  $e_\alpha, e_\beta, \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$  とし、

$$\eta_{\mu\nu} e_\alpha^\mu e_\beta^\nu = \eta_{\alpha\beta}$$

が成り立つ。外から見れば自由落下していくので  $P$  から  $Q$  まで移動したとして、この空間的な距離を  $s$  とすると、この方向の単位ベクトルを

$$n = (n_0, n_1, n_2, n_3)$$

とすると外の系は

$$x_Q = (sn^0, sn^1, sn^2, sn^3)$$

となる。一方で内部でのこの間の固有時間を  $\tau$  とすれば

$$(\tau n^0, \tau n^1, \tau n^2, \tau n^3)$$

つまり、空間距離はいつでも固有時間に置き換えることが可能だということになる。  
従って

$$g_{\mu\nu}(P) = \eta_{\mu\nu}$$

が成り立ち、

$$\Gamma_{\nu\rho}^{\mu}(P) = 0 \quad (20.5)$$

とすることができる。

先の関係から式 20.2 は 4 元速度として固有時間を用いたものを時間的測地線、空間的測地線による 2 階の項

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2}, \frac{d^2 x^\mu}{ds^2}$$

は消えて、次の項が残る。

$$\frac{dx^\mu}{d\tau} = n^\mu$$

よって式 20.2 は

$$\Gamma_{\nu\rho}^{\mu}(P)n^\nu n^\rho = 0$$

となるので 4 元速度を固定すると式 20.5 が得られる。

局所空間内でこの物体は 1 つの位置とモーメントをある時刻で持つことになる。

そこで 4 元スピンのベクトルを次のようにおく。

$$s^\mu = (0, \mathbf{s})$$

空間 3 成分のスピン  $\mathbf{s}$  の向きはスピン角運動量により保存される。よって基準の座標軸を内部に持つことができる。

従って一般的なスピンのある自由粒子の時間的な測地線の式が式 20.4 の共変微分を参考に

$$\frac{ds^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\nu\rho}^{\mu} s^\nu \frac{dx^\rho}{d\tau} = 0 \quad (20.6)$$

を得る。ここで基準の向きとして

$$\frac{ds^\mu}{d\tau} = 0$$

とおける座標軸をとればよい。この時、時間的測地線に沿うと式 20.6 から式 20.5 が導ける。

$$\Gamma_{\nu\rho}^{\mu}(P) = 0$$

このようにジャイロスコープでマークされた座標軸をもつリーマン座標系をフェルミ正規座標系 (Fermi normal coordinates) という。

これらを利用した技術は無重力状態の人工衛星の中で実現できる。人工衛星を噴射装置で決まった位置に移動し、観測機の中心を決め、細かに、太陽風や微小流星の影響を記録できる。

## 20.3 TT frame

重力の作用を考える時、一般にアインシュタイン作用  $S_E$  と自身の質量作用  $S_M$  を考えて

$$S = S_E + S_M$$

とかく、ただし、式 19.30 より、

$$S_E = \frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R$$

$S_M$  の変分については計量の変化

$$g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$$

の影響を考えればよいから

$$\delta S_M = \frac{1}{2c} \int d^4x \sqrt{-g} T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}$$

となる。

時空の計量については様々な場合が考えられるが、ここでは転置対角成分が 0 になる場合に注目し、これを **TT\_gauge**(transvers-traceless gauge) と呼ぶ。つまり、計量  $h$  について

$$h^{0\mu} = 0, h_{\mu}^{\mu} = 0, \partial^i h_{ij} = 0 \quad (20.7)$$

つまり

$$h^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_{12} & h_{13} \\ 0 & h_{21} & 0 & h_{23} \\ 0 & h_{31} & h_{32} & 0 \end{pmatrix} \quad (20.8)$$

を満たすような計量をユークリッド計量を基準にして加えてみるわけである。

そこで  $\tau = 0$  のとき、試験的に質量  $m$  の物体を重力のない空間に初速 0 で置くことを考える。これを試験物体と呼ぶ。

20.2 は次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^i}{d\tau^2} \Big|_{\tau=0} &= - \left[ \Gamma_{\nu\rho}^i(x) \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} \right]_{\tau=0} \\ &= - \left[ \Gamma_{00}^i(x) \left( \frac{dx^0}{d\tau} \right)^2 \right]_{\tau=0} \end{aligned} \quad (20.9)$$

となる。この時の計量をフラットな部分とわけて次のようにおく。

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

これを利用し、式 10.33 から Christoffel の記号を 1 次までで展開すると

$$\Gamma_{\nu\rho}^{\mu} = \frac{1}{2} \eta^{\mu\sigma} (\partial_\nu h_{\rho\sigma} + \partial_\rho h_{\nu\sigma} - \partial_\sigma h_{\nu\rho})$$

となり、空間部分  $i$  成分と時間部分 00 成分をひろうと式 20.8 から

$$\Gamma_{00}^i = \frac{1}{2} (2\partial_0 h_{0i} - \partial_i h_{00}) = 0 \quad (20.10)$$

となる。これは式 20.9 から

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} = 0$$



を意味するので、全ての時間において

$$\frac{dx^i}{d\tau} = 0$$

となることを意味する。つまり、TTframe において重力波の来る前に静止していたものは重力波が来ても試験物体は静止していることになる。言い換えると、TTframe の座標系は重力波が到達したときにそれ自身が伸張していないといけない。その結果、試験物体の位置がはじめの状態と変化しないことになる。従って、試験物体を基準座標の設定に使える。

例えばある座標 ( $x = 1, y = 0, z = 0$ ) をポイントする。その後重力波が通り過ぎても試験物体は同じ位置を指している。

前節から  $\xi^i$  だけ離れた近接 2 点に試験物体をおくと、重力波が通過しても変わらない。そこで  $\tau = 0$  では  $dx^i/d\tau = 0$

とすれば  $dx^0/d\tau = c$  になるので

$$\frac{d^2\xi^i}{d\tau^2}\Big|_{\tau=0} = - \left[ 2c\Gamma_{0\rho}^i \frac{d\xi^\rho}{d\tau} + c^2\xi^\sigma \partial_\sigma \Gamma_{00}^i \right]_{\tau=0} \quad (20.11)$$

しかし、TTgauge では式 20.10 から  $\Gamma_{00}^i = 0$  とできる。また条件式 20.7 から

$$\Gamma_{0j}^i = \frac{1}{2}\partial_0 h_{ij}$$

とおけるから式 20.11 は次のように簡単になる。

$$\frac{d^2\xi^i}{d\tau^2}\Big|_{\tau=0} = - \left[ \dot{h}_{ij} \frac{d\xi^j}{d\tau} \right]_{\tau=0}$$

また、 $\tau = 0$  においては

$$\frac{d\xi^i}{d\tau} = 0, \quad \frac{d^2\xi^i}{d\tau^2} = 0$$

となるので、これから 2 つの試験物体の離れた距離  $\xi^i$  はいつでも一定である。また、

$$h_{00} = h_{0i} = 0$$

とできるので時間的な固有時間での距離は

$$x^\mu(\tau) = (x^0(\tau), x^i(\tau))$$

とすると  $x^0(\tau) = ct(\tau)$  に注意して

$$\begin{aligned} c^2 d\tau^2 &= c^2 dt^2 - (\delta_{ij} + h_{ij}^{TT}) dx^i(\tau) dx^j(\tau) \\ &= c^2 dt^2 - (\delta_{ij} + h_{ij}^{TT}) \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^j}{d\tau} d\tau^2 \end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、TTgauge では固有時間  $\tau$  は試験物体が時間座標を  $t$  だけ変化する時間にほぼ等しい。

このように TTgauge では重力波が通り過ぎてもほとんど時間的な影響を受けないことに注意する必要がある。次に空間的な距離はどうだろうか。例えば 2 つの事象を  $(t, x_1, 0, 0), (t, x_2, 0, 0)$  とし

$$x_2 - x_1 = L$$

とおく。もちろん、重力波が例えば  $z$  方向に伝搬していくような場合は  $L$  は時間と同じように一定である。しかし、

## 20.4 線形方程式

前節で近い領域の測地線について考えたが、次に計量が少しだけ平坦からずれている場合を考えよう。

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1$$

この時、次のような座標変換を考える。

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x) \quad (20.12)$$

そして同じように微量  $\xi^\mu(x)$  が

$$|\partial_\mu \xi_\nu| \sim |h_{\mu\nu}|$$

程度の場合を考える。

$$g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} g$$

この時式 20.12 より、

$$h'_{\mu\nu}(x') = h_{\mu\nu}(x) - (\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu)$$

## 20.5 Einstein Equation

前章のエネルギー運動量テンソル  $T^{ab}$  は真空の空間であれば

$$T^{ab} = 0$$

前章のアインシュタイン方程式 19.15 から

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R$$

となる。

## 参考文献

- [1] 菅野礼治 ゲージ理論の解析力学 2007
- [2] G.M. ザスラフスキー 三島信彦、齊藤徹也、新藤 茂 訳 1989 カオス-古典および量子力学系-
- [3] 内山龍雄 相対性理論 1977 岩波全書
- [4] Tristan Needham **Visual complex analysis** 1997 培風館
- [5] J.W.Noh, A.Foug'eres, and L.Mandel **Operational approach to the phase of quantum field** 1992 Physical Review A 45
- [6] D.T.Pegg, S.M.Barnett **Phase properties of quantized single-mode electromagnetic field** 1989 Physical Review A 39
- [7] 小林昭七 接続の微分幾何とゲージ理論 1989 裳華房
- [8] 野水克己 現代微分幾何入門 1969 裳華房
- [9] 佐藤光 群と物理 1992 丸善株式会社
- [10] Tristan Needham **Visual Complex Analysis** 1997 OXFORD

- [11] 小沢哲也 曲線・曲面と接続の幾何 1997 倍風館
- [12] 中原幹生 理論物理学のための幾何学とトポロジー I,II 2000 ピアソン・エデュケーション
- [13] 丹羽雅昭 超伝導の基礎 2002 東京電機大学出版局
- [14] 矢吹治一 量子論における位相 1998 日本評論社
- [15] Tai Tsun Wu, Chen Ning Yang **Concept of nonintegrable factors and global formulation of gauge fields** 1975 Physical Review D 12
- [16] R.Glies **Reconstruction of gauge potentials from Wilson loops** 1981 Physical Review D 24
- [17] Pratul Bandyopadhyay **Geometry, Topology and Quantum Field Theory**
- [18] 深谷賢治 双曲幾何 岩波書店 2004
- [19] Shinichi Deguchi Kazuo Fujikawa **Second-quantized formulation of geometric phases** 2005 Physical Review A72
- [20] 大貫義朗 鈴木増雄 柏太郎 経路積分の方法 岩波 現代の物理学
- [21] 柏 太郎 サイエンス社 新版 演習 場の量子論
- [22] J.David Jackson **Classic Electrodynamics** 2001
- [23] 中村 哲・須藤彰三 電磁気学 朝倉書店 2012
- [24] Matthew N.O. **Elements of Eletromagnetic**
- [25] **Lectures on Clifford(Geometric) Algebras and Appliations** Rafal Ablamowicz Garret Sobczyk 2003
- [26] Julian Schwinger シュウインガ—量子力学 Springer 2000
- [27] 野村健太郎 トポロジカル絶縁体・超伝導体の基礎理論 September 11, 2013
- [28] 安藤陽一 トポロジカル絶縁体入門 2014
- [29] Brian R. Greene **STRING THEORY ON CALABI-YAU MANIFOLDS** Columbia University
- [30] 深谷 賢治 ゲージ理論とトポロジー 1995 Springer
- [31] Joseph L.Birman **Geometry, Particles, and Fields** Springer
- [32] Charles Nash Sinddhartha Sen **Topoloy and geometry for Physics** Mineola, New York
- [33] 二木 昭人 微分幾何講義-一般理論と現代物理への応用 サイエンス社
- [34] Andre Weil ケーラー多様体論入門 1958 Springer
- [35] 天野勝利 **Hopf** 代数とは 筑波大学
- [36] 谷村省吾 トポロジー・圏論・微分幾何 サイエンス社 SGC-52
- [37] 坪井 俊 幾何学3 微分形式 東京大学出版

- [38] Louis H.Kauffman **KNOTS AND PHYICS** World Sientific 1993
- [39] 服部昌夫 多様体のトポロジー 岩波 2003
- [40] David W. Lyons **An Elementary Introduction to the Hopf Fibration** Lebanon Valley College
- [41] Nicholas Wheeler **Transformational principles latent in the theory of CLIFFORD ALGEBRAS** Reed College Physics Department 2003
- [42] Mathematica Demonstration Richard Hennigan **Rotating the Hopf Fibration** <http://www.wolfram.com/>
- [43] Ana Cannas da Silva **Lectures on Symplectic Geometry** 2006
- [44] **Rotations of the three-sphere and symmetry of the Cliford Torus** John McCuan and Lafe Spietz October 5,1998
- [45] Maris Ozols **Geometry of qubit** 2007
- [47] Rupert Way **Dynamics in the Hopf bundle, the geometric phase and implications for dynamical systems** University of Surrey U.K 2008
- [48] Chris J Isham **Modern Differential Geometry for Physicists**
- [50] Robert Gilmore **Lie Groups, Lie Algebras,and Some or Their Applications**
- [51] Bo-Yu Hou, Bo-Yuan Hou **DIFFERENTIAL GEOMETRY FOR PHYSICS** World Scientific 1997
- [52] Thomas J.Bridges **The Orr-Sommerfeld equation on a manifold**
- [53] 佐古彰史 超対称性ゲージ理論と幾何学 2007 日本評論社
- [54] 早川尚男 連続体力学 京都大学大学院 平成 17 年
- [55] 岡部洋一 電磁気学 放送大学 2015
- [56] Bjorn Felsager **Geometry,Particles,and Fields** Springer 1997
- [57] 及川正行 偏微分方程式 岩波書店 1955
- [60] 三尾典克 変形体の力学 東京大学
- [61] Daniel Z.Freedman and Antoine Van Proeyen **Supergravity** CAMBRIGE
- [62] V.P Nair **Quantum Field Theory** 2005 Springer
- [63] **Diagrammatica The Path to Feynman Rules** Martinus Veltman 1995 Cambride University Press
- [64] Martin Ammon Johanna Erdmenger **Gauge/Gravity Duality: Foundations and Applications** 2005 Cambride University Press
- [65] Kawamura Yoshiharu 相対論的量子力学 裳華房
- [66] 泰泉寺雅夫 数物系のためのミラー対称性入門 2014 サイエンス社

- [67] 堀川穎二 複素代数幾何学入門 岩波書店
- [68] Shiing-shen Chern **Complex Manifolds Without Potential Theory** 1995 Springer Verlag New York,LLC
- [69] 安藤哲也 コホモロジー 2002 日本評論社
- [70] Joseph Polchinski **String Theory I,II** Cambridge University Press 1998
- [71] 坂本真人 量子力学から超対称性へ SGC ライブラリ 96 2012 サイエンス社
- [72] Barton Zwiebach **A First Course in STRING THEORY** 2009 Cambridge University Press
- [73] 深谷 賢治 編 ミラー対称性入門 2009 日本評論社
- [74] 白水 徹也 アインシュタイン方程式 2012 SGO ライブラリ サイエンス社
- [75] 唐木田健一 ひとりで学べる一般相対性理論 講談社 2015
- [76] 深谷賢治 数学者による数学者のための **StrigDuality** 京都大学
- [77] 坪井 俊 幾何学Ⅷ ホモロジー入門 東京大学出版会
- [78] 佐藤秀司・佐藤周友 代数的サイクルとエタールコホモロジー Springer 2012
- [79] 石橋延幸・村上公一 弦の場の理論 2012 SGO ライブラリ サイエンス社
- [80] 伊藤克司 共形場理論 2011 SGO ライブラリ サイエンス社
- [81] 高柳 匡 ホログラフィー原理と量子エンタングルメント サイエンス社
- [82] 江沢 洋、渡辺敬二、鈴木増雄、田崎晴明 繰り込み群の方法 1999 岩波書店
- [83] 今村 洋介 超弦理論の基礎 2010 SGO ライブラリ サイエンス社
- [84] 江口 徹 菅原 祐二 共形場理論 2015 岩波書店
- [85] 西森 秀総 相転移・臨界現象の統計物理学 倍風館
- [86] Michael E.Peskin, Daniel V.Schroeder **An introduction to quantum Field Theory**
- [87] Charles Kittel and Herbrt Kroemer **THERMAL PHYSICS** W.H.Freeman and Company 1980
- [88] J.J Sakurai **Modern Quantum Mechanics** 1985 The Benbjamin/Cumming Publishng Company,Inc.
- [89] 松田 哲 複素関数 理工系の基礎数学 5 岩波書店 1995
- [90] 小林 昭七 複素幾何 岩波書店 2005
- [91] 早川 尚男 非平衡統計力学 サイエンス社 SGC ライブラリ 2006
- [92] Mukund Rangamani & Tadashi Takayanagi **“Holographic Entanglement Entropy“** 2017
- [93] 松枝 宏明 量子系のエンタングルメントと幾何学 森北出版 2016
- [94] 治部真里 高橋康 添削形式による場の量子論 日本評論社 1997
- [95] V.P. ナイア著 阿部泰裕 磯暁 訳 現代的視点からの場の量子論 Springer 2005

- [96] 大津 元一 現代光科学 ㊦、㊦ 光の物理的基礎 朝倉書店 1994
- [97] 日置 善郎 相対論的量子場 吉岡書店 2008
- [98] 細谷 暁夫 量子コンピューターの基礎 サイエンス社 1999
- [99] Michael A. Nielsen & Isaac L. Chuang **Quantum Computation and Quantum Information** Cambridge University press 2010
- [100] Brian C.Hall Lie Groups,Lie Algebras, and Representations **An Elementary Introduction** Springer 2015
- [101] 谷村省吾 ホロノミーと力学系 名古屋大学
- [102] Raffaele Rani **On Parallel Transport and Curvature** 2009
- [103] 塩濱 勝博, 成 慶明 曲面の微分幾何学 日本評論社 2005
- [104] 大槻 知忠 結び目の不変量 共立出版 2015
- [105] 鈴木 増雄 統計力学 岩波書店 1994
- [106] Anastasios Mallios **MODERN DIFFERENTIAL GEOMETRY IN GAUGE THEORIES** Springer 2009
- [107] **Lectures on Geometry** Edited by N.M,J.WOODHOUSE OXFORD university press 2017
- [108] 田中利夫・村上斉 トポロジー入門 サイエンス社 SGC ライブラリ 42 2005
- [109] 川村嘉春 基礎物理から理解するゲージ理論 サイエンス社 SGC ライブラリ 42 2017
- [110] 細谷 裕 ゲージヒッグス統合理論 サイエンス社 SGC ライブラリ 42 2018
- [111] 堺井義秀 山田憲和 野尻美保子 素粒子物理学 KEK 2012
- [112] 鈴木 増雄 経路積分と量子解析 サイエンス社 2017
- [113] David Tong **Quantum Field Theory** Universith of Cambridge 2006
- [114] 並木美喜雄 大場一郎 散乱の量子力学 岩波書店 1997
- [115] 福田礼次郎 フーリエ解析 岩波書店 1995
- [116] Adam Lupu-Sax **Quantum Scattering Theory and Applications** Harvard University 1998
- [117] 佐藤文隆 児玉英雄 一般相対性理論 岩波書店 1992
- [118] 松本幸夫 多様体の基礎 東京大学出版 1989
- [119] Wulf Rossmann **Lie Groups** OXFORD 2002
- [120] 佐武一郎 リー群の話 日本評論社 1982
- [121] F. シャトラン 行列の固有値 Springer 1988
- [122] 生西明夫 中神㊦臣 作用素環入門 1 岩波 2006
- [123] 黒田成俊 関数解析 共立出版 1980
- [124] 堀田昌寛 量子情報と時空の物理 第2版 サイエンス社 2019
- [125] 砂田利一 行列と行列式 岩波 2003
- [126] 太田 浩一 電磁気学の基礎㊦㊦ 東京大学出版会 2013