

## 概要

本部では場の理論を復習する。さらに観測の問題の基本になる粒子性と波動性を Green 関数を用いて説明していく。これまでの電磁気学、古典物理学をふまえてこれまでの微分幾何、ファイバー束、ホモロジーの考えとゲージ対称性との関係を学び、幾何学的な位相を中心に物理学の対称性と保存則について考え、現代物理学の基礎となる場の理論、経路積分の基本を学び直していきたい。特に前半部分では量子論の波動的側面を考察する。

後半では粒子的側面と場として考え方を中心に見る。これらから量子論を全体的にとらえて、第9部につなげていく。

本部は未完成部分が多く、今後加筆修正する予定である。参考文献を見て学習に役立ててほしい。

# 1 準備

古典論と量子論の決定的な違いは演算子の非可換なところにある。これと関係した基本的公式を中心にを示す。さらにこの交換関係は運動力学だけでなく、場の理論を構築する基本的な柱の1つである。ここでは前部までの内容をふまえて、場の量子論を中心に学習していく。基礎的な復習も必要な場面でおこなうが、相対論的量子力学の教科書程度を読破していることが望ましい。はじめに今後有用になる、いくつかの数学的な道具を準備しておく。

## 1.1 直交変換

### 定義 1. 直交変換

$d$ 次元ユークリッド空間  $\mathbb{R}^d$  を考える。直交座標  $x^\mu = (x^0, \dots, x^{d-1})$  をとる。 $\mathbb{R}^d$  には平坦な計量を表す次の行列

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

が定義できて、線要素が

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = (dx^0)^2 + \cdots + (dx^{d-1})^2$$

で表される。座標変換  $x^\mu \rightarrow x'^\mu$  に対して

$$g_{\mu\nu} \rightarrow g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\rho \partial x^\sigma}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} g_{\rho\sigma} \quad (1.1)$$

のように2回テンソルのように変換した。この時、一般的な座標の1次変換

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$$

において次のように計量の形を変えない変換を直交変換という。

$$g_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma = g_{\rho\sigma}$$

この変換では距離の2乗と内積は保たれる。

また、ベクトル  $x^\mu, y^\mu$  のなす角

$$\cos \theta = \frac{xy}{(x^2)^{1/2} (y^2)^{1/2}}$$

も不変になる。

**定義 2.** 直交群  $O(d)$

直交変換全体で群をなし、直交群  $O(d)$  という。また、無限小変換で生成される部分群は正規直交群といい  $SO(d)$  という。これは

$$\begin{aligned}x'^{\mu} &= x^{\mu} + \epsilon_{\nu}^{\mu} x^{\nu} \\ \Lambda_{\nu}^{\mu} &= \delta_{\nu}^{\mu} + \epsilon_{\nu}^{\mu}\end{aligned}$$

とすると無限小パラメタ  $\epsilon_{\mu\nu}$  について

$$\epsilon_{\mu\nu} + \epsilon_{\nu\mu} = 0$$

がなり立ち、添え字  $\mu\nu$  について反対称である。

第 2 部の正準変換の母関数について 2 階の場合、次のように学んだ。以下簡単に引用しておく。

.....  
 $\Omega$  の変化を考えると 1 つは相空間の座標  $\xi^i$  の変化に依存するため、もう 1 つは座標系の変化によるものである。

この座標と内部空間の変化を場の理論では考慮する必要がある。

よって  $\Omega_{IJ}$  は座標変換では共変な 2 階テンソルになる。従って両方の変化を考えると

$$\delta\Omega_{IJ} = \partial_I\alpha_J - \partial_J\alpha_I \tag{1.2}$$

として

$$\delta\Omega_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{\delta}{\delta\xi^i(\mathbf{x})}\alpha_j(\mathbf{x}') - \frac{\delta}{\delta\xi^j(\mathbf{x}')}\alpha_i(\mathbf{x}) \tag{1.3}$$

を得る。ただし  $\Omega$  の変化量は他の  $\Omega$  で記述されるとし、次のような和で表されるとする。

$$\alpha_I = a^K\Omega_{KI} \tag{1.4}$$

これは相空間の座標  $\xi$  の微小変化において

$$\xi^i \rightarrow \xi^i + a^i(\xi^i) \tag{1.5}$$

として、次のように空間を積分した結果である。

$$\alpha_i(\mathbf{x}) = \int_V d^3x' a^k(\mathbf{x}')\Omega_{ki}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) \tag{1.6}$$

変換性を保つためには式 1.4 が次のように書かれることが条件になる。

$$\alpha_I = a^K\Omega_{KI} = -\partial_I G \tag{1.7}$$

ただし、 $G$  は相空間の変数に依存する。 $G$  のことを正準変換の母関数という。また前回の球面上の積分でみたように局所的に  $G$  が存在しても大局的に存在できるとは限らない。さらに相空間が自明ではないトポロジーを持つ場合も  $\delta\Omega = 0$  となる一般的な解が存在する。この場合については後節に考える。

前節でみたように全微分項  $\partial_{\mu}F^{\mu}$  をラグランジアンに加えた場合運動方程式には変化はない。

しかし変換性から  $\Theta, A_I$  は次のような変換をうける。

$$\Theta \rightarrow \Theta + \delta \int d^3x F^0 \tag{1.8}$$

$$A_I \rightarrow A_I + \partial_I \int d^3x F^0 \tag{1.9}$$

となるがこれは満たしていることがわかる。ここで  $\Omega$  の逆元は次で定義できる。

$$(\Omega^{-1})^{IJ}\Omega_{IJ} = \delta_K^I$$

これを用いて、次のように展開できる。

$$\int_V d^3x' (\Omega^{-1})^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \Omega_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'') = \delta_j^i \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'')$$

$\Omega_{IJ}$  の可逆性は物理的に重要である。可逆ではない場合、ラグランジアンは特異 (**singular**) であるという。その 1 例がゲージ対称性である。ゲージ理論はゲージ固定という手法で余分な自由度を除外することができた。 $\Omega$  が逆行列を持てば式 1.4 から係数が次のように決められる。

$$a^I = (\Omega^{-1})^{IJ} \partial_I G \quad (1.10)$$

式 1.5 のもとでの汎関数微分演算子を次のようにおく。

$$V_a = a^I \partial_I$$

この変換の交換関係は次のようになる。

$$[V_a, V_b] = (a^J \partial_J b^I - b^J \partial_J a^I) \partial_I \quad (1.11)$$

さらに次のように相空間の母関数  $F(\pi, \varphi), G(\pi, \varphi)$  をもってくると 1.10 と同様に

$$a^I = (\Omega^{-1})^{IJ} \partial_I G$$

$$b^I = (\Omega^{-1})^{IJ} \partial_I F \quad (1.12)$$

が成り立つとすると、

$$\begin{aligned} a^J \partial_J b^I - b^J \partial_J a^I &= [(\Omega^{-1})^{JL} \partial_J (\Omega^{-1})^{IK} - (\Omega^{-1})^{JK} \partial_J (\Omega^{-1})^{IL}] \partial_L F \partial_K G \\ &+ (\Omega^{-1})^{JL} (\Omega^{-1})^{IK} [\partial_L F \partial_J \partial_K G - \partial_J \partial_K F \partial_L G] \end{aligned}$$

となるが

$$\begin{aligned} (\Omega^{-1})^{JL} \partial_J (\Omega^{-1})^{IK} - (\Omega^{-1})^{JK} \partial_J (\Omega^{-1})^{IL} &= (\Omega^{-1})^{IM} (\Omega^{-1})^{JL} (\Omega^{-1})^{NK} \times [\partial_N \Omega_{MJ} + \partial_J \Omega_{NM}] \\ &= -(\Omega^{-1})^{IM} (\Omega^{-1})^{JL} (\Omega^{-1})^{NK} \partial_M \Omega_{JN} \\ &= (\Omega^{-1})^{IM} \partial_M (\Omega^{-1})^{KL} \end{aligned}$$

となる。これを代入して

$$a^J \partial_J b^I - b^J \partial_J a^I = (\Omega^{-1})^{IM} \partial_M [(\Omega^{-1})^{KL} \partial_K G \partial_L F]$$

$a, b$  は無限小変換を表していたいた。そこで  $a \leftrightarrow F, b \leftrightarrow G$  としてポアソン括弧  $\{ \}$  を用いて

$$\begin{aligned} \{F, G\} &= (\Omega^{-1})^{IJ} \partial_I F \partial_J G \\ &= \int \int d^3x d^3x' (\Omega^{-1})^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \frac{\delta F}{\delta \xi^i(\mathbf{x})} \frac{\delta G}{\delta \xi^j(\mathbf{x}')} \end{aligned}$$

で定義すると位相空間の座標変分のポアソン括弧は

$$\{\xi^i(\mathbf{x}), \xi^j(\mathbf{x}')\} = (\Omega^{-1})^{IJ} \quad (1.13)$$

を表すことになる。

..... 以上。

ここでは複素空間に拡張し、さらに量子論に拡張するため Poisson 括弧は、交換関係に置き換えればよい。よって、場合方向微分演算子

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

とするとこの場合の無限小変換の生成子は式 1.2 から

$$M^{\mu\nu} = i(x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu) \quad (1.14)$$

となる。

この交換関係は式 1.11 に対応して、

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = i(g^{\nu\rho} M^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho} M^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma} M^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma} M^{\nu\rho}) \quad (1.15)$$

となり、リー群のリー代数  $\mathfrak{so}(d)$  の交換関係を満たしている。

また、一様な並進変換

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + a^\mu$$

を行っても計量に変化はない。この無限小変換の演算子は正準運動量に対応して、

$$P = -i\partial^\mu$$

となり、 $M^{\mu\nu}$  と  $P^\mu$  は交換関係 1.15 が成り立つと共に

$$\begin{aligned} [P^\mu, M^{\rho\sigma}] &= i(g^{\mu\rho} P^\sigma - g^{\mu\sigma} P^\rho) \\ [P^\mu, P^\nu] &= 0 \end{aligned}$$

が成り立つ。

直交変換と並進変換がつくる変換群はユークリッド変換群と呼ばれる。

$d$ 次元時空の計量  $g_{\mu\nu}$  がユークリッド空間の計量において  $p$  個の負符号を持った場合  $(p, q)$  型の不定計量と呼ばれる。

$$q = d - p$$

この場合も計量を ' 持つ線形変換群は  $O(p, q)$  と呼ばれ第 5 部の相対論でみたよう  $r$  に  $O(1, 3)$  はローレンツ群になる。

さらにローレンツ変換と並進変換とを合わせたものをポアンカレ群という。

## 1.2 Lorentz Invariance[63]

4次元ローレンツ変換  $L$  とその逆行列を  $\tilde{L}$  で表すと

$$L\tilde{L} = 1$$

または

$$L_{\mu\nu}\tilde{L}_{\nu\lambda} = \delta_{\mu\lambda}$$

$$L_{\mu\nu}L_{\lambda\nu} = \delta_{\mu\lambda}$$

とかけ。ローレンツ変換は回転行列で表すことができたので速度を  $v$  とした時、

$$\sin \theta \equiv \frac{iv}{c\beta}$$

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

とおけば

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \frac{1}{\beta}$$

である。速度は  $x^3$  方向であれば

$$L = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

になる。

次に 4 次元の空間で次のような反転をつくる行列を定義しておく

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, L_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, L_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

また、 $\theta = i\alpha$  とおいて

$$\sin \theta = \frac{1}{2i} (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = \frac{1}{2i} (e^\alpha - e^{-\alpha})$$

とおく。一般的なローレンツ変換  $L$  は 3 自由度のパラメタで表される空間内の回転になったので次の関係が成り立つ。

$$L(\phi) = \left[ L \left( \frac{\phi}{n} \right) \right]^n$$

これは一般的な空間回転に成り立つが内部の回転の刻み角と全体の回転回数を結ぶおもしろい関係になっている。

そこで  $n \rightarrow \infty$  を考えると

$$\sin \left( \frac{\phi}{n} \right) \rightarrow \frac{\phi}{n}$$

$$\cos \left( \frac{\phi}{n} \right) \rightarrow 1$$

となるので、式 1.16 に代入すると、次のような関係が成り立つ。

$$L\left(\frac{\phi}{n}\right) = \begin{bmatrix} 1 & \phi/n & 0 & 0 \\ -\phi/n & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{\phi}{n}\right)^2\right)$$

$$= I + \left(\frac{\phi}{n}\right)L_3 + \mathcal{O}\left(\left(\frac{\phi}{n}\right)^2\right)$$

また、肩に行列を持つ指数関数においても

$$\left[1 + \frac{\alpha}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]^n = e^\alpha + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$$

が成り立つので  $n \rightarrow \infty$  を考えると

$$L(\phi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ L\left(\frac{\phi}{n}\right) \right]^n = e^{\phi L_3}$$

が成り立ち、さらに

$$e^{\phi L_3} e^{\phi L_3} = e^{2\phi L_3}$$

が成り立つ。また、一般的な回転行列を次のようにおくと

$$R = e^{\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 + \alpha_3 L_3} = e^{\alpha_i L_i}$$

$\alpha$  が小さい時は

$$R = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_3 & -\alpha_2 & 0 \\ -\alpha_3 & 1 & \alpha_1 & 0 \\ \alpha_2 & -\alpha_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

のようになる。この時、実際に  $\mathbf{r}$  がこの  $R$  の回転を受けたとき、適当な平面を選べば次のように回転角  $\Delta$  をとることができる。

$$\Delta = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}$$

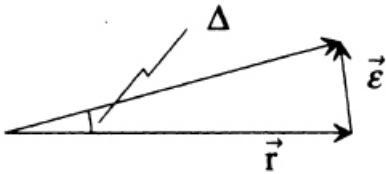


図 1.1: [63] より

変換れた速度  $V$  は

$$V = e^{\beta_i M_i}$$

となる。

位置と速度が独立しているとして  $\alpha_i, \beta_i$  は別成分でおくべきで、一般的なローレンツ変換はこれら  $\alpha_i, \beta_i, i = 1, 2, 3$  の 6 つの変数をつかい

$$L = e^{\alpha_i L_i + \beta_i M_i}$$

で表すことができる。これは次のような行列を定義することで

$$\alpha_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_3 & -\alpha_2 & \beta_1 \\ -\alpha_3 & 1 & \alpha_1 & -\beta_2 \\ \alpha_2 & -\alpha_1 & 1 & \beta_3 \\ -\beta_1 & \beta_2 & -\beta_3 & -1 \end{bmatrix}, \quad K_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & L_3 & -L_2 & M_1 \\ -L_3 & 1 & L_1 & -M_2 \\ L_2 & -L_1 & 1 & M_3 \\ -M_1 & M_2 & -M_3 & -1 \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

$$L = e^{\frac{1}{2}\alpha_{\mu\nu}K_{\mu\nu}}$$

と表すことができる。

ただし、 $\alpha_i$  は数値だが、 $K_{\mu\nu}$  は行列であることに注意する。ここで  $K, \alpha$  は共に反対称である。

$$\alpha_{\mu\nu} = -\alpha_{\nu\mu}, \quad K_{\mu\nu} = -K_{\nu\mu}$$

また、1.18 から、次の対応がある。

$$\alpha_1 \leftrightarrow \alpha_{23}$$

$$\alpha_2 \leftrightarrow \alpha_{31}$$

$$\alpha_3 \leftrightarrow \alpha_{12}$$

$$\beta_1 \leftrightarrow \alpha_{14}$$

$$\beta_2 \leftrightarrow \alpha_{24}$$

$$\beta_3 \leftrightarrow \alpha_{34}$$

ローレンツ変換の一般的な性質を見るためにまず

$$L(\gamma) = L(\beta)L(\alpha)$$

を考える。このとき最低次をみて

$$\gamma_{ij} = \beta_{ij} + \alpha_{ij} + \text{terms}(\text{higher})$$

これは  $A, B$  が行列である場合に次の展開が数値のように簡単にはいかないことと関連し、後節式 1.23 の Cambell\_Baker\_Hausdroff の定理から

$$C = A + B + \frac{1}{2}[A, B] + \dots$$

であれば

$$e^C = e^A e^B$$

が成り立つ。式 1.17 の定義では

$$[L_1, L_2] = -L_3$$

また、

$$[K_{ab}, K_{cd}] = c_{abcd}^{ij} K_{ij}$$

が成り立つ。

### 1.3 ガウス積分

$n$  次元実ベクトルを  $x$ 、エルミート行列を  $A$  とすると

$$\int dx_1 \cdots dx_n \exp(-x^T A x) = \sqrt{\left(\frac{\pi^n}{\det A}\right)}$$

$n$  次元複素ベクトル  $z$  の時は

$$\int dz_1 d\bar{z}_1 \cdots dz_n d\bar{z}_n \exp(iz^\dagger A z) = \frac{(2\pi)^n}{\det A}$$

となる。これを無限次元に拡張すると実ボソニックな場を  $\phi_i(x)$  について

$$\int D\phi \exp(-\phi_i A^{ij}(x, y) \phi_j(y)) = C \sqrt{\left(\frac{1}{\det A}\right)}$$

複素ボソニック場  $\phi_i$  についても

$$\int D\phi D\bar{\phi} \exp(-i\bar{\phi}_i A^{ij}(x, y) \phi_j(y)) = C' \frac{1}{\det A}$$

となる。この時の定数  $C, C'$  は無限になる。しかし、規格化の際に同じ定数で割る。

### 1.4 レビ・チビタテンソル

- 2 階の場合

次のように定義する。

$$\epsilon_{ij} \begin{cases} 1 & \text{if } (i, j) = (1, 2) \\ -1 & \text{if } (i, j) = (2, 1) \\ 0 & \text{if } i = j \end{cases}$$

これは次のように反対称行列で表すことができる。

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- 3 階の場合

Levi-Civita 疑テンソルが 3 階であれば次の値をとることになる。

$$\epsilon_{ijk} \begin{cases} 1 & (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2) \\ -1 & (1, 3, 2), (3, 2, 1), (2, 1, 3) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

さらに次のように添え字が同じになるとクロネッカー  $\delta$  ができる。

$$\sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl} \quad (1.19)$$

$$\sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} \epsilon_{ljk} = 2\delta_{il} \quad (1.20)$$



$$\sum_{i,j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} \epsilon_{ijk} = 6 \quad (1.21)$$

例えば正方 3 次行列  $A$  についての行列式は

$$\det A = \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} a_{i1} a_{j2} a_{k3}$$

と書くことができる。また、3 次元ベクトル  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  の外積も次のように成分表示ができる。

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = \sum_{jk} \epsilon_{ijk} a_j b_k$$

- 高階の場合

偶置換 *even*、奇置換 *odd* として

$$\epsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} = \epsilon^{i_1 i_2 \dots i_n} = \begin{cases} 1 & \text{even} \\ -1 & \text{odd} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

またエディントンの公式としてクロネッカーデルタを拡張し、

$$\delta_{i_1 i_2 \dots i_m}^{j_1 j_2 \dots j_m} \equiv \det \begin{bmatrix} \delta_{i_1}^{j_1} & \delta_{i_2}^{j_1} & \dots & \delta_{i_m}^{j_1} \\ \delta_{i_1}^{j_2} & \delta_{i_2}^{j_2} & \dots & \delta_{i_m}^{j_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{i_1}^{j_m} & \delta_{i_2}^{j_m} & \dots & \delta_{i_m}^{j_m} \end{bmatrix}$$

を定義すると

$$\epsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} = \delta_{i_1 \dots i_n}^{1 \dots n}$$

$$\epsilon^{i_1 i_2 \dots i_n} = \delta_{1 \dots n}^{i_1 \dots i_n}$$

が成り立ち

$$\epsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} \epsilon^{j_1 j_2 \dots j_n} = \delta_{i_1 i_2 \dots i_n}^{j_1 j_2 \dots j_n}$$

であり、有用な次の公式が成り立つ。

$$\sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_k=1}^n \epsilon_{i_1 i_2 \dots i_k, i_{k+1} \dots i_n} \epsilon^{i_1 i_2 \dots i_k, j_{k+1} \dots j_n} = k! \delta_{i_{k+1} \dots i_n}^{j_{k+1} \dots j_n}$$

$$\sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_n=1}^n \epsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} \epsilon^{i_1 i_2 \dots i_n} = n!$$

## 1.5 Trotter の公式

$A, B$  を複素正方行列として次のような展開を考える。  $x$  を変数として

$$e^{x(A+B)} = e^{t_1 A} e^{t_2 B} \dots e^{t_M A} + O(x^{m+1})$$

パラメタ  $\{t_j\}$  が決まれば行列要素を求めることができる。このような展開を指数摂動展開という。変数  $x$  が小さくない場合は、次の恒等式

$$e^{x(A+B)} = \left( e^{\frac{x}{n}(A+B)} \right)^n$$

において  $t = x/n$  とおき、  $|x/n| \ll 1$  として展開すると低次のところで

$$\exp \left[ \frac{x}{n} (A+B) \right] = e^{t_1 A} e^{t_2 B} \dots + O(x/n)^{m+1}$$

となるので

$$e^{x(A+B)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( e^{\frac{x}{n} A} e^{\frac{x}{n} B} \right)^n \quad (1.22)$$

これは  $x = 1$  とすれば

$$e^{A+B} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( e^{\frac{A}{n}} e^{\frac{B}{n}} \right)^n$$

とかくこともできる。

## 1.6 Cambell-Barker-Hausdorff の公式

$A, B$  を複素正方行列として

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2!} [A, [A, B]] + \frac{1}{3!} [A, [A, [A, B]]] + \dots \quad (1.23)$$

$$e^A e^B = \exp \left[ A + B + \frac{1}{2!} [A, B] + \frac{1}{12} [A - B, [A, B]] + \dots \right]$$

とかける。これを見るために

$$\begin{aligned} e^{tX} e^{tY} &= \left\{ 1 + tX + \frac{1}{2} (tX)^2 + \frac{1}{6} (tX)^3 + \dots \right\} \times \left\{ 1 + tY + \frac{1}{2} (tY)^2 + \frac{1}{6} (tY)^3 + \dots \right\} \\ &= 1 + t(X+Y) + \frac{1}{2} t^2 (X^2 + 2XY + Y^2) + \dots \end{aligned}$$

である。そこで展開式の特徴から

$$\begin{aligned} e^{tX} e^{tY} &= e^{h(tX, tY)} \\ h(tX, tY) &= \sum_{\nu=1}^{\infty} t^\nu h_\nu(X, Y) \end{aligned}$$

とおくことができそうで、

$$\begin{aligned} \exp \left( \sum_{\nu=1}^{\infty} t^\nu h_\nu(X, Y) \right) &= 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} t^\nu h_\nu(X, Y) + \frac{1}{2} \left( \sum_{\nu=1}^{\infty} t^\nu h_\nu(X, Y) \right)^2 + \dots \\ &= 1 + t h_1(X, Y) + \frac{1}{2} t^2 \{ 2h_2(X, Y) + h_1^2(X, Y) \} + \dots \end{aligned}$$

と展開する。係数比較により、

$$h_1(X, Y) = X + Y$$

$$\begin{aligned} h_2(X, Y) &= \frac{1}{2} (X^2 + 2XY + Y^2 - h_1^2) \\ &= \frac{1}{2} (X^2 + 2XY + Y^2 - (X + Y)^2) \\ &= \frac{1}{2} [X, Y] \end{aligned}$$

のように対応する。より高次の項も同様にして

$$e^A e^B = \exp \left[ A + B + \frac{1}{2!} [A, B] + \frac{1}{12} [A - B, [A, B]] + \dots \right]$$

が示された。これを

$$e^{A/M} e^{B/M} = \exp \left[ \frac{1}{M} (A + B) + \frac{1}{M^2} \left( \frac{1}{2!} [A, B] \right) + \frac{1}{M^3} \left( \frac{1}{12} [A - B, [A, B]] \right) + \dots \right]$$

と書き換えて  $M$  を大きくして 1 次までの近似をとれば Trotter の公式になる。

有用な応用としてベーカー・ハウズドルフの補助定理がある。

$G$  がエルミートであれば

$$\exp(iG\phi) A \exp(-iG\phi) = A + i\theta [G, A] + \left( \frac{i^2\theta^2}{2!} \right) [G, [G, A]] + \dots + \left( \frac{i^n\theta^n}{n!} \right) [G, [G, \dots [G, A] \dots]] + \dots$$

が成り立つ、よって

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{iS_z\phi}{\hbar}\right) S_x \exp\left(\frac{-iS_z\phi}{\hbar}\right) &= S_x + \left(\frac{i\phi}{\hbar}\right) [S_z, S_x] + \left(\frac{1}{2!}\right) \left(\frac{i\phi}{\hbar}\right)^2 [S_z, [S_z, S_x]] \\ &+ \left(\frac{1}{3!}\right) \left(\frac{i\phi}{\hbar}\right)^3 [S_z, [S_z, [S_z, S_x]]] + \dots \end{aligned}$$

となるが各項に

$$\begin{aligned} [S_z, S_x] &= i\hbar S_y \\ [S_z, [S_z, S_x]] &= \hbar^2 S_x \\ [S_z, [S_z, [S_z, S_x]]] &= i\hbar^3 S_y \end{aligned}$$

を代入すると結局  $x, y$  成分が残り

$$\exp\left(\frac{iS_z\phi}{\hbar}\right) S_x \exp\left(\frac{-iS_z\phi}{\hbar}\right) = S_x \cos \phi - S_y \sin \phi \quad (1.24)$$

と表される。

## 1.7 転送行列法

第 3 部で見た Ising モデルは有効ハミルトニアンをつくりやすく 2 体モデルとして利用できるが、通常は 4 体モデルになったりして複雑になる。こうした場合でも有用なのが次に示す転送行列法である。単純な計算方法を知る以上に物理的な理論にも見通しを与える。

まず、古典的な 1 次元 Ising モデルを考え、ハミルトニアンは隣接相互作用のみとし、

$$H = -J \sum_{i=1}^N \sigma_i \sigma_{i+1}$$

とおく。ただし、スピン行列は

$$\sigma_i = \pm 1$$

周期的境界条件は

$$\sigma_{N+1} = \sigma_1$$

とするので分配関数は

$$Z(N) = \text{Tr} e^{-\beta H} = \sum_{\sigma_1} \cdots \sum_{\sigma_N} e^{-\beta H} = \sum_{\sigma_1} \cdots \sum_{\sigma_N} \prod_i e^{\beta J \sigma_i \sigma_{i+1}}$$

となるが、これは次の行列

$$A = \begin{pmatrix} e^{\beta J} & e^{-\beta J} \\ e^{-\beta J} & e^{\beta J} \end{pmatrix}$$

とおけば

$$Z(N) = \sum_{\sigma_1} \cdots \sum_{\sigma_N} A_{\sigma_1 \sigma_2} A_{\sigma_2 \sigma_3} \cdots A_{\sigma_N \sigma_{N-1}} = \text{Tr} (A^N)$$

となる。つまり、分配関数は行列積の対角和になる。従って  $A$  の固有値を

$$\lambda_{\pm} = e^{\beta J} \pm e^{-\beta J}$$

となるから

$$Z(N) = \lambda_+^N + \lambda_-^N$$

となる。 $\lambda_+ > \lambda_-$  とすると

$$Z = \lim_{N \rightarrow \infty} Z(N) = \lim_{N \rightarrow \infty} = 2 (\cosh \beta J)^N$$

が得られる。量子論の場合と比べれば

量子的な揺らぎがないので行列の成分は 2 つに圧縮されていることである。

先の鈴木-Trotter 変換と同様に

$$\tau = \frac{\beta}{M}$$

のように分割をとると、分配関数はこの  $M$  を指数にして、

$$Z(M) = \text{Tr} \left( \prod_{i=1}^M e^{-\tau H} \right)$$

とおく、量子 Ising 系と同様に鈴木-Trotter 変換で現れた  $M$  個の演算子の間に完全系

$$\sum_{\alpha} |\alpha\rangle \langle \alpha| = \mathbf{1}$$

を代入し、

$$Z(M) = \sum_{\alpha^1} \cdots \sum_{\alpha^M} \prod_i \langle \alpha^{i+1} | e^{-\tau H} | \alpha^i \rangle$$

でとなる。これは Trotter 軸に沿って、あるスピン配置の状態  $|\alpha^i\rangle$  を別の状態  $|\alpha^{i+1}\rangle$  に転送する実空間転送行列  $T_{real}$  が

$$T_{real} = e^{-\tau H}$$

であることを意味している。したがって一般に

$$Z(M) = \sum_{\alpha} \langle \alpha | (T_{real})^M | \alpha \rangle = T_r (T_{real})^M$$

が成り立つ。

例えば次のように偶数ボンドと奇数ボンドにハミルトニアンを分割すると

$$H = H_1 + H_2, \quad H_1 = \sum_{i \in A} V_i, \quad H_2 = \sum_{i \in B} V_i$$

これはチェス盤分割 CBD (checkerboard\_decomposition) と呼ばれる。

量子モンテカルロ法ではこの方式がよくとられる。Hausdorff の公式から

$$\exp \{-\tau (H_1 + H_2)\} = e^{-\frac{1}{2}\tau H_1} e^{-\tau H_2} e^{-\frac{1}{2}\tau H_1} + O(\tau^3)$$

という対称的な分割を導入する。この転送行列も

$$T_{real} = T_1^{\frac{1}{2}} T_2 T_2^{\frac{1}{2}}$$

ただし、

$$T_1 = \prod_{i \in A} t_i, \quad T_2 = \prod_{i \in B} t_i, \quad t_i = e^{-\tau V_i}$$

と分割する。 $t_i$  は量子 *ising* 模型では  $4 \times 4$  の局所転送行列である。よてこのチェス盤分割の分配関数が

$$Z_{CBD}(M) = \sum_{\alpha^1} \cdots \sum_{\alpha^M} \prod_i^M \langle \alpha^{2i+1} | T_2 | \alpha^{2i} \rangle \langle \alpha^{2i} | T_1 | \alpha^{2i-1} \rangle$$

となる。これは下図のように  $T_1$  (白色) と  $T_2$  (黒色) がならずチェッカーボードである。

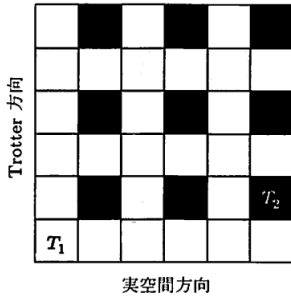


図 1.2: [93] より

このチェス盤は転送行列の転送方向を Trotter 方向ではなくて、仮想スピンを実空間方向に転送してもよい。これを量子転送法と呼ぶこともある。

仮想方向の転送行列を  $T_{virtual} = U_2 U_1$  とすると、システムサイズ  $N$  の関数である分配関数が

$$Z(N) = T_r (T_{virtual})^{N/2}$$

で表される。これが古典系ではこのような自由度がない。

CBD の他に実空間分解 RSD (real\_space\_decomposition) などの方法もある。

## 1.8 ポアソンの括弧

第4部でポアソンの括弧と正準方程式の関係をみた。ふりかえると位相空間における力学量  $f(q, p)$  の運動方程式を

$$\begin{aligned}\frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \\ &= \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q^i}\end{aligned}$$

として、次でポアソン括弧として定義した。

$$\frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q^i} \equiv \{f, H\}_p$$

このポアソン括弧は反対称行列  $\Omega$  を用いて次のように簡単に多次元化できる。

$$\begin{aligned}\{f, g\}_p &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial q^i} & \frac{\partial f}{\partial p_i} \end{pmatrix} \Omega \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial q^i} \\ \frac{\partial g}{\partial p_i} \end{pmatrix} \\ \Omega &= \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

ポアソン括弧で正準方程式も簡単に次のように表現できる。

$$\begin{aligned}\dot{q}^i &= \{q^i, H\}_p \\ \dot{p}_i &= \{p_i, H\}_p\end{aligned}$$

また次の関係式も成り立つ。

$$\begin{aligned}\{q^i, q^j\}_p &= \{p_i, p_j\}_p = 0 \\ \{q^i, p_j\}_p &= \delta_j^i\end{aligned}$$

式 3.96 から新たに  $\Theta$  を微分 1 形式として、一般に空間 3 次元とすると

$$\Theta = \int d^3x \xi_i(\phi, \mathbf{x}) \delta \xi^i(\mathbf{x})$$

とおく。このとき、 $\xi$  は  $(\pi_r, \psi_r)$  の位相空間を指定する。 $A_i$  はスカラー場であれば

$$\xi^i(\pi_r, \psi_r)$$

$$A_i(\pi_r, 0)$$

とおけるので正準形式での微分 1 形式は正準 1 形式と呼ばれ

$$\Theta = \int d^3x A_i(\phi, \mathbf{x}) \delta \xi^i(\mathbf{x}) \quad (1.25)$$

とおける。さらに正準 2 形式として改めて  $\Omega$  を正方行列とし

$$\Omega_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{\delta}{\delta \xi^i(\mathbf{x})} A_j(\mathbf{x}') - \frac{\delta}{\delta \xi^j(\mathbf{x})} A_i(\mathbf{x}') \quad (1.26)$$

を定義する。これを省略形として  $I(i, \mathbf{x}), J(j, \mathbf{x}')$ ,  $\partial_I = \frac{\delta}{\delta \xi^i}$  を用いて  $\Omega_{IJ}$  で表現すると、これをシンプレクティック構造と呼ぶこともある。これから第4部の相対論で導いたピアンキの恒等式を満足する。

$$\partial_I \Omega_{JK} + \partial_J \Omega_{KI} + \partial_K \Omega_{IJ} = 0 \quad (1.27)$$

これは接続の際に重要な役割を果たした。相空間の幾何学的な構造を特徴付けている。

量子化をしても、この  $\Omega$  が不変になることを要請しよう。  $\Omega$  の変化の原因は式 1.25 から  $\xi$  の変化と座標変化の2つが考えられるから  $\Omega_{IJ}$  は2階共変テンソルの変換則に従うべきで、次のような  $\xi$  の無限小変換を考え、

$$\xi^{i'} = \xi^i + a^i(\xi)$$

その変化量を取った時に 1.26 から

$$\delta \Omega_{IJ} = \partial_I \alpha_J - \partial_J \alpha_I \quad (1.28)$$

となる。

$$\alpha_I = a^K \Omega_{KI}$$

である。

座標表示では

$$\delta \Omega_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \left[ \frac{\delta}{\delta \xi^i(\mathbf{x})} \alpha_j(\mathbf{x}') - \frac{\delta}{\delta \xi^j(\mathbf{x})} \alpha_i(\mathbf{x}') \right]$$

$$\alpha_i(\mathbf{x}) = \int_V d^3 \mathbf{x}' a^k(\mathbf{x}') \Omega_{ki}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$$

のようになる。そこで  $\Omega$  が無限小変換で不変であるためには次のようにおけることが必要になる。

$$\alpha_I \equiv a^K \Omega_{KI} = -\partial_I G$$

これを式 1.28 に代入すると

$$\delta \Omega_{IJ} = -\partial_I \partial_J G + \partial_J \partial_I G = 0$$

となり、  $\Omega$  が不変になる。これが、現実の物理の例では座標と運動量のように対応する。

このような相空間上に作られる  $G$  は正準変換の母関数と呼ばれる。

また、これからラグランジアンに全微分  $\partial_\mu F^\mu$  を付け加えても運動方程式は変化しない。しかし、式 1.25 の正準1形式は

$$\Theta' = \Theta + \delta \int_V d^3 \mathbf{x} F^0$$

に変化する。しかし、正準2形式ではこれらの変化は相殺し、  $\Omega$  は不変になる。これから一般にラグランジアンへの全微分項の追加は正準変換になるといえる。

ここで  $\Omega$  の逆元  $(\Omega^{-1})^{IJ}$  について考えると、

$$(\Omega^{-1})^{IJ} \Omega_{JK} = \delta_K^I \quad (1.29)$$

を満たすことになる。和の規則が省力されていることを考えると、この空間積分は

$$\int_V d^3 x' (\Omega^{-1})^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \Omega_{jk}(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') = \delta_k^i \delta^{(3)}(x - x'')$$

と書くことができ、これはフーリエ変換と見ることもできる。また、  $\Omega_{IJ}$  に逆が存在しない場合のラグランジアンは特異 (singular) であるという。

これは次章のゲージ理論とつながりを持ち、余分な自由度をゲージ変換で除去することで特異でない  $\Omega$  を定義できるようになる。

$\Omega$  の逆元が存在する場合

$$a^I = (\Omega^{-1})^{IJ} \partial_J G \quad (1.30)$$

のようにフーリエ逆変換から係数を取得するのと同様に  $a^I$  を求めることができる。この  $(\Omega^{-1})^{IJ}$  は後に見るように物理的に意味のあるものになる。

よって、母関数  $G$  が与えられれば微小変換が定義できる。

例えば無限小変換

$$\xi^{I'} = \xi^I + a^I(\xi) \quad (1.31)$$

は次の汎関数微分演算子から作られる。

$$V_a = a^I \partial_I \quad (1.32)$$

この時、この変換の交換関係をとると

$$[V_a, V_b] = (a^J \partial_J b^I - b^J \partial_J a^I) \partial_I$$

となる。これに式 1.30 を代入すると

$$\left( (\Omega^{-1})^{JL} \partial_J (\Omega^{-1})^{IK} - (\Omega^{-1})^{JK} \partial_J (\Omega^{-1})^{IL} \right) \partial_L F \partial_K G + (\Omega^{-1})^{JL} (\Omega^{-1})^{IK} (\partial_L F \partial_J \partial_K G - \partial_J \partial_K F \partial_L G)$$

となるがピアンキの恒等式 1.27 と式 1.29 から

$$\partial_I \Omega_{JK} = -(\partial_J \Omega_{KI} + \partial_K \Omega_{IJ})$$

$$\partial_M (\Omega^{-1})^{KL} = -(\Omega^{-1})^{JL} (\Omega^{-1})^{NK} \partial_M \Omega_{JN}$$

の関係を用いると

$$\begin{aligned} (\Omega^{-1})^{JL} \partial_J (\Omega^{-1})^{IK} - (\Omega^{-1})^{JK} \partial_J (\Omega^{-1})^{IL} &= (\Omega^{-1})^{IM} (\Omega^{-1})^{JL} (\Omega^{-1})^{NK} \times (\partial_N \Omega_{MJ} + \partial_J \Omega_{NM}) \\ &= -(\Omega^{-1})^{IM} (\Omega^{-1})^{JL} (\Omega^{-1})^{NK} \times \partial_M \Omega_{JN} \\ &= (\Omega^{-1})^{IM} \partial_M (\Omega^{-1})^{KL} \end{aligned}$$

よって

$$a^J \partial_J b^I - b^J \partial_J a^I = (\Omega^{-1})^{IM} \partial_M \left( (\Omega^{-1})^{KL} \partial_K G \partial_L F \right) \quad (1.33)$$

とまとめることができる。そこで一般に第 4 部でも触れたポアソン括弧を次で定義すれば、第 4 部から

$$(\Omega^{-1})^{ij} = \{\varphi_r(\mathbf{x}), \pi_r(\mathbf{x}')\} == \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

だったから

$$\begin{aligned} \{F, G\} &\equiv (\Omega^{-1})^{IJ} \partial_I F \partial_J G \\ &= \int d^3 \mathbf{x} \int d^3 \mathbf{x}' (\Omega^{-1})^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \frac{\delta F}{\delta \xi^i(\mathbf{x})} \frac{\delta G}{\delta \xi^j(\mathbf{x}')} \end{aligned} \quad (1.34)$$

$$= \int_V d^3 \mathbf{x} \left( \frac{\delta F}{\delta \varphi_r(\mathbf{x})} \frac{\delta G}{\delta \pi_r(\mathbf{x}')} - \frac{\delta F}{\delta \pi_r(\mathbf{x})} \frac{\delta G}{\delta \varphi_r(\mathbf{x}')} \right) \quad (1.35)$$

となった。

先のまとめの式 1.33 は次のように表すことができる。

$$a^J \partial_J b^I - b^J \partial_J a^I = (\Omega^{-1})^{IM} \partial_M \{F, G\}$$

例えば座標そのもののポアソン括弧が

$$\{\xi^i(\mathbf{x}), \xi^j(\mathbf{x}')\} = (\Omega^{-1})^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$$



と表すことができる。よって式 1.31 から

$$a^I = (\Omega^{-1})^{IJ} \partial_I G = \delta \xi^I = \{\xi^I, G\} \quad (1.36)$$

となり、微小変化の生成はポアソン括弧で表すことができる。この関係は正準方程式がポアソン括弧で表すことができることを示し、

実際に、第 4 部では  $G$  から生成されるハミルトニアン・ベクトル場  $v_G$  の 1 形式を  $dF = \langle \Omega|_o, v_F \rangle$  とすると

$$\{F, G\} = \langle \Omega|_{v_g}, v_F \rangle = \langle dF|_{v_G} \rangle$$

のように 1 形式と接ベクトルの内積表現になり、リー微分  $\mathcal{L}$  を用いて

$$\{F, G\} = v_G[F] = \mathcal{L}_{v_G}(F)$$

と表すと。これはベクトル場  $v_G$  の積分に沿った関数  $F$  の変化率とみることができ

$$\begin{aligned} \frac{dF}{ds} &= \frac{\partial F}{\partial s} + \frac{\partial F}{\partial z^\mu} \frac{dz^\mu}{ds} \\ &= \frac{\partial F}{\partial s} + v_G[F] \\ &= \frac{\partial F}{\partial s} + \{F, G\} \end{aligned}$$

となることから相空間上でポアソン括弧で正準方程式を表すと

$$\begin{aligned} \frac{dz^\mu}{dt} &= \Omega^{\mu\nu} \frac{\partial H}{\partial z^\nu} = v_H[z^\mu], \quad (\mu = 1, 2, 3 \dots 2n) \\ &= \{z^\mu, H\} \end{aligned}$$

のようにハミルトニアンとのポアソン括弧をつくれればよいことになった。

## 2 Clifford 代数

ここで反対称の関係を持つ量子量を扱うために Clifford 代数を学ぶ。

### 2.1 定義

はじめに  $\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x, y) | x, y \in \mathbf{R}\}$  の空間を考える。

例えば 2 次元であれば Clifford 代数の要素をユークリッド基底  $\{e_1, e_2\}$  で表すと

- 1 scalar
- $e_1, e_2$  vector
- $e_{12}$  bivector

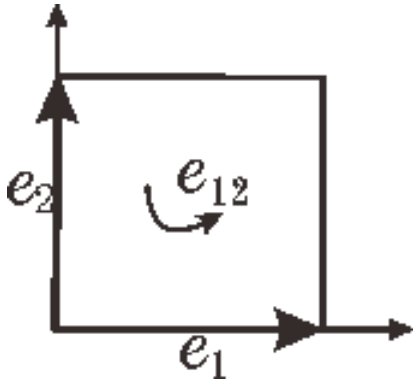


図 2.1: 平面上のクリフォード代数の基底

この4つの要素がクリフォード代数  $Cl_2(R^2)$  (平面上) の基底をなす。よって任意のベクトル  $u$  は次のように表される。

$$u = u_0 + u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_{12} e_{12}$$

従って  $Cl_2$  は4次元の線形実空間をなし、基底は次のような群をつくる。

$$\begin{array}{cccc} & e_1 & e_2 & e_{12} \\ e_1 & 1 & e_{12} & e_2 \\ e_2 & -e_{12} & 1 & -e_1 \\ e_{12} & -e_2 & e_1 & 1 \end{array}$$

よって  $e_{12} = e_1 \wedge e_2$  とみなすことができる。そこで  $Cl_2$  上の2つのベクトルについて

$$\begin{aligned} a &= a_1 e_1 + a_2 e_2 \\ b &= b_1 e_1 + b_2 e_2 \end{aligned}$$

について内積と外積を

$$a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

$$a \wedge b = (a_1 b_2 - a_2 b_1) e_{12}$$

で定義すると新たにベクトルの積として

$$\begin{aligned} ab &= (a_1 e_1 + a_2 e_2)(b_1 e_1 + b_2 e_2) \\ &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) e_{12} \\ &= a \cdot b + a \wedge b \end{aligned} \tag{2.1}$$

を定義する。このとき  $a \cdot b = b \cdot a$ ,  $a \wedge b = -b \wedge a$  だから

$$\begin{aligned} ba &= a \cdot b - a \wedge b \\ a \cdot b &= \frac{1}{2}(ab + ba) \\ a \wedge b &= \frac{1}{2}(ab - ba) \end{aligned}$$

が成り立つ。さらに平行、 $a \parallel b$  ならば

$$ab = ba$$

また、垂直、 $a \perp b$ ならば

$$ab = -ba$$

である。

次の図のようなベクトル  $a, b$  を考え、 $b$  に対し  $a$  の平行、鉛直成分を  $a_{\parallel}, a_{\perp}$  とすると

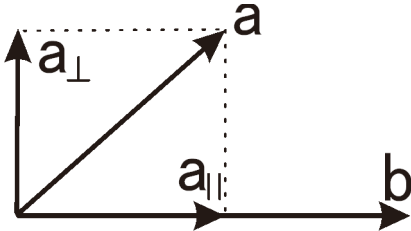


図 2.2: ベクトル  $b$  を基準にした  $a$  ベクトルの直交分解

$$a_{\parallel} = (a \cdot b) \frac{b}{|b|^2} = (a \cdot b) b^{-1}$$

$$\begin{aligned} a_{\perp} &= a - a_{\parallel} = a - (a \cdot b) b^{-1} \\ &= (ab - b \cdot a) b^{-1} = (a \wedge b) b^{-1} \end{aligned}$$

と内積、外積で表すことができる。

さらに次の関係が成り立つ。

$$(a \wedge b) b^{-1} = -(b \wedge a) b^{-1}$$

$$|a \perp b| = |a \wedge b| = |a||b| \sin \phi$$

## 2.2 反転

第1部では2節メビウス変換で反転  $T(z) = \frac{1}{\bar{z}}$  を見てきた。そこで  $0 < \phi < 180^\circ$  として図のようにベクトル  $a$  についての反転をクリフォード代数で考える。

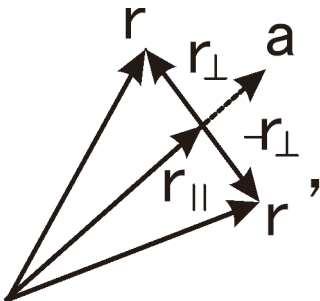


図 2.3:  $a$  ベクトルに対する反転

$$\begin{aligned} r &= r_{\parallel} + r_{\perp} \\ r' &= r_{\parallel} - r_{\perp} \end{aligned}$$

とすると次のような関係がある。

$$\begin{aligned} r' &= (r \cdot a)a^{-1} - (r \wedge a)a^{-1} \\ &= (r \cdot a - r \wedge a)a^{-1} \\ &= (a \cdot r + a \wedge r)a^{-1} \\ &= ara^{-1} \end{aligned}$$

これからさらに

$$\begin{aligned} r' &= ara^{-1} \\ &= (2a \cdot r - ra)a^{-1} \\ &= 2\frac{a \cdot r}{a^2}a - r \end{aligned}$$

となり、直線に対する反転を表す。

### 2.3 斜交座標

次に第1部で紹介した斜交座標をクリフォード代数であつかうことを考えよう。

図のような斜交座標によれば  $Ob = Pa, Oa = Pb$  なので

$$OA = Oa + Ob \cos \alpha$$

$$OB = Ob + Oa \cos \alpha$$

と表すことができる。これが共変と反変成分の関係に対応する。

これから余弦定理からOPの長さを次のように表す。

$$OP = \sqrt{Oa^2 + Ob^2 + 2Oa \cdot Ob \cos \alpha} = \sqrt{(OA^2 + OB^2 - 2OAOB \cos \alpha) / \sin^2 \alpha} \quad (2.2)$$

これに先の式を代入すると混合表示で

$$OP = \sqrt{Oa \cdot OA + Ob \cdot OB} \quad (2.3)$$

を得る。

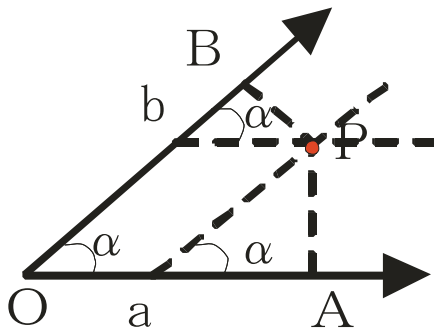


図 2.4: 斜交座標

ここで反変、共変成分を次のように定義する。

$$Oa = x^1, Ob = x^2 \quad (2.4)$$

$$OA = x_1, OB = x_2 \quad (2.5)$$

さらに計量テンソルを次のように定義する。

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & \cos\alpha \\ \cos\alpha & 1 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

はじめの式はまとめて次のように表現できる。(ただし、同じ添え字については和をとるものとする。)

$$x_i = g_{ij}x^j \quad (2.7)$$

さらに計量テンソルの逆行列が存在すれば

$$g^{ij} = g_{ij}^{-1} = \frac{1}{\sin^2\alpha} \begin{pmatrix} 1 & -\cos\alpha \\ -\cos\alpha & 1 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

のように定義して

$$x^i = g^{ij}x_j \quad (2.9)$$

であり

$$g^{ij}g_{ik} = \delta_k^j \text{ (クロネッカー)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

となる。これからOPの長さとして

$$x^2 = g_{ij}x^i x^j = g^{ij}x_i x_j \quad (2.11)$$

はスカラーである。

多様体上で考えると反変ベクトルは接ベクトル、共変ベクトルが余接ベクトルに対応した。これらの基底は  $\{e_i\}, \{\theta^i\}$  で表され

$$e_i \theta^j = \delta_i^j$$

であり、座標表示で  $\{\partial/\partial x^i\}, \{dx^i\}$  となる。

これをクリフォード空間で考えてみる。

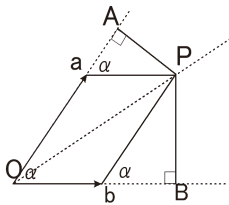


図 2.5:

$$AP = (P \wedge A)A^{-1}$$

$$BP = (P \wedge B)B^{-1}$$

$$P^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha = (A^2 + B^2 - 2A \cdot B \cos \alpha) / \sin^2 \alpha$$

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & \cos \alpha \\ \cos \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

さらに連続的に反転を繰り返す場合も次のような表現で表すことができる。

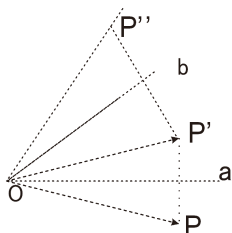


図 2.6: 連続変換

$$\begin{aligned} r'' &= br'b^{-1} = b(ara^{-1})b^{-1} = (ba)r(ba)^{-1} \\ &= BrB^{-1} \end{aligned}$$

この変換は同じ表現で表すことができる。第 1 部で見たように 2 回の反転が回転をつくる。

## 2.4 回転

2次元平面  $e_1 - e_2$  で任意のベクトルは  $r = x_1e_1 + x_2e_2$  と表すことができる。クリフォード空間では  $e_{12}$  は虚数単位  $i$  とみなせる。

そこで次のようにおく。

$$e_{12} = i$$

任意の  $\phi$  の回転はオイラーの式から

$$re^{i\phi} = r \cos \phi + ri \sin \phi$$

となるがここで注意がいる。  $e_{12} = -e_{21}$  なので回転の向きが関与し

$$ri = e_{12}(x_1e_1 + x_2e_2) = x_1e_{12}e_1 + x_2e_{12}e_2 = -x_1e_2 + x_2e_1$$

$$ir = (x_1e_1 + x_2e_2)e_{12} = x_1e_1e_{12} + x_2e_2e_{12} = x_1e_2 - x_2e_1$$

よって、  $ri = -ir$  となるのである。よって

$$e^{-i\phi}r = r \cos \phi - ir \sin \phi = r \cos \phi + ri \sin \phi = re^{i\phi}$$

となるのである。これは  $z = e^{i\phi}$  とすると

$$rz = z^{-1}r, \quad zrz = r$$

平面上のベクトル

$$ri \perp r$$

であり、 $i$  は平面上での  $\pi/2$  の回転になっている。 $e_{12}$  が反時計回り、 $e_{21}$  は時計回りの回転である。そこで

$$s = e^{i\phi/2}, s^{-1} = e^{-i\phi/2}$$

とおくと  $e^{-i\pi} = -1$ ,  $z = e^{i\phi} = s^2$  だから次の図のように

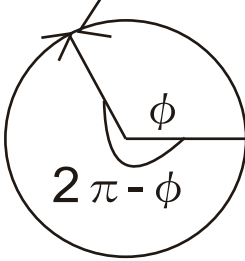


図 2.7: 回転の向き

$$-s = e^{-i(2\pi-\phi)/2} = -e^{i\phi/2}$$

$$s^{-1}rs = (-s)^{-1}r(-s)$$

が成り立つ。

$R(2)$  上でクリフォード代数  $Cl_2$  を考える場合次のような行列表現が便利である。

$$e_1 \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, e_2 \simeq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$R(2)$  上でクリフォード代数を考える場合次のような行列表現が便利である。

さきほどの定義から

$$e_{12} = e_1e_2 \simeq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

となる。

## 2.5 4元数

複素数を拡張し、次の4元数を考える。

$$q = w + ix + jy + kz \in \mathbf{R} \oplus \mathbf{R}^3 = \mathbf{H}$$

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

$$ij = k = -ji, jk = i = -kj, ki = j = -ik \quad (2.12)$$

$i, j, k$  は次の Pauli 行列になる。

$$i \simeq \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, j \simeq \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, k \simeq \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

従ってこれらは環の構造を持ち、純虚数部分が0であれば4元数はスカラーである。これを実数  $\mathbf{R}$  は環  $\mathbf{H}$  の中心であるといい複素数  $\mathbf{C}$  は商群  $\mathbf{R}/\mathbf{Q}$  と  $\mathbf{C}/\mathbf{R}$  との間の写像が存在する。

そこでこの4元数をもとに  $a_0, b_0 \in \mathbf{R}$  として

$$a = a_0 + \mathbf{a}$$

$$b = b_0 + \mathbf{b}$$

とかくことができ  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  は純虚数に対応し、

$$\mathbf{a} = ia_1 + ja_2 + ka_3$$

$$\mathbf{b} = ib_1 + jb_2 + kb_3$$

でありクリフォードの積は

$$ab = a_0b_0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + a_0\mathbf{b} + \mathbf{a}b_0 + \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

となる。また、ベクトル部分

$$\mathbf{ab} = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

が成り立つ。

ベクトル部分の内積はスカラー、外積の成分は次のように3次元の実空間を張る。

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{i}(a_2b_3 - a_3b_2) + \mathbf{j}(a_3b_1 - a_1b_3) + \mathbf{k}(a_1b_2 - a_2b_1)$$

そこでクリフォード積を利用して次のように表現することがある。

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -\langle \mathbf{ab} \rangle_0 = -\frac{1}{2}(\mathbf{ab} + \mathbf{ba})$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \langle \mathbf{ab} \rangle_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{ab} - \mathbf{ba})$$

次に4元数を

$$q = w + ix + jy + kz$$

$$u = u_0 + iu_1 + ju_2 + ku_3$$

とおくと次の行列方程式は

$$qu = v$$

次のようになる。

$$\begin{pmatrix} w & -x & -y & -z \\ x & w & -z & y \\ y & z & w & -x \\ z & -y & x & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

同様に順序をかえると式 2.12 から

$$uq = v'$$



次のようになる。

$$(u_0, u_1, u_2, u_3) \begin{pmatrix} w & -x & -y & -z \\ x & w & -z & y \\ y & z & w & -x \\ z & -y & x & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w & -x & -y & -z \\ x & w & z & -y \\ y & -z & w & x \\ z & -y & -x & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v'_0 \\ v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{pmatrix}$$

これから  $\mathbf{H}$  上の右作用、左作用の演算子が定義できて

$$R_q(u) = uq \quad L_q(u) = uq$$

と表現する。この演算子は

$$R_i R_j R_k = I, \quad L_i L_j L_k = -I$$

を満たす。これは転置すると次のように反転する。

$$R_i^T R_j^T R_k^T = -I, \quad L_i^T L_j^T L_k^T = I$$

次のように 4 次元の空間を考える。

$$L_q \in \{\mathbf{R}(4) | q \in \mathbf{H}\}$$

$$R_q \in \{\mathbf{R}(4) | q \in \mathbf{H}\}$$

$$L_a R_b = R_b L_a$$

4 元数  $\mathbf{H}$  は次のような次元の性質がある。

$$(\dim \mathbf{H})^2 = \dim \mathbf{R}(4)$$

$$\mathbf{R}(4) \simeq \mathbf{H} \otimes \mathbf{H}^*$$

また  $U \in \mathbf{R}(4)$  とすると

$$U + U^T = \alpha I, \quad U^T U = \beta I$$

となるので  $U$  は  $\mathbf{H} \text{ or } \mathbf{H}^*$  に属することになる。

また  $\mathbf{H}$  上には左線形空間と右線形空間を次のように定義することができる。 $\lambda, \mu \in \mathbf{H}, \mathbf{x} \in V$  として

$$V \times \mathbf{H} \rightarrow V, \quad (\mathbf{x}, \lambda) \rightarrow \mathbf{x}\lambda$$

$$\mathbf{H} \times V \rightarrow V, \quad (\lambda, \mathbf{x}) \rightarrow \lambda\mathbf{x}$$

よって右線形空間であれば

$$L(\mathbf{x}\lambda) = (L(\mathbf{x}))\lambda$$

が成り立つ。次の関係に注意する。

$$(x\lambda)y = x(\lambda y) \neq x(y\lambda) = (xy)\lambda$$

## 2.6 3次元ユークリッド平面

3次元のユークリッド平面  $R^3$  として基底を  $\{e_1, e_2, e_3\}$  とする。この基底は

$$|e_i|^2 = 1, \quad e_i e_j = -e_j e_i$$

をみたす。この時、クリフォード代数  $Cl_3$  は次の8つの要素を持つ。

$$1, e_1, e_2, e_3, e_1 e_2, e_1 e_3, e_2 e_3, e_1 e_2 e_3$$

今後これを

$$1, e_1, e_2, e_3, e_{12}, e_{13}, e_{23}, e_{123}$$

のように表す。

ここで  $2 \times 2$  の行列の基底を Pauli 行列を用いて新たに

$$\sigma_1 \simeq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 \simeq \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

とするとこれらを基底とする2次元複素空間  $C(2)$  と  $Cl_3$  は次のように類似した要素を持つ。

$$\mathbf{C}_2 : \begin{cases} I \\ \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \\ \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23} \\ \sigma_{123} \end{cases}, \quad \mathbf{Cl}_3 : \begin{cases} 1 \\ e_1, e_2, e_3 \\ e_{12}, e_{13}, e_{23} \\ e_{123} \end{cases}$$

したがって例えば次のような合成を考える。

$$u_1 = \frac{1}{4}(5\sigma_1 + 3\sigma_{12}), \quad u_2 = \sigma_2, \quad u_3 = \frac{1}{4}(5\sigma_3 - 3\sigma_{23})$$

この場合でも次の関係が見たされる。

$$u_{jk} + u_{kj} = 2\delta_{jk}I$$

$Cl_3$  の要素である  $e_{123}$  は  $e_1, e_2, e_3$  と交換し、次のようにおける。

$$e_{123} \simeq \sigma_{123} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

とみなせるので

$$x + ye_{123} \simeq \begin{pmatrix} x + iy & 0 \\ 0 & x + iy \end{pmatrix}$$

となる。次のようにスカラーと3つのベクトルにより表現できる。

$$\mathbf{R} \oplus \bigwedge^3 \mathbf{R}^3 = \{x + ye_{123} \in |x, y \in \mathbf{R}\}$$

結局  $Cl_3$  の全ての要素は交換し、 $\sigma_{123} = iI, e_{123}^2 = -1$  となるので  $Cl_3$  の中心は複素空間  $C$  に写像される。

$$\text{Cen}(Cl_3) = \mathbf{R} \oplus \bigwedge^3 \mathbf{R}^3 \simeq \mathbf{C} \tag{2.13}$$

## 2.7 部分代数

クリフォード代数は偶奇に分けることができる。要素  $1, e_{12}, e_{13}, e_{23}$  は偶要素と呼ばれる。これは

$$q_{even} = w + xe_{23} + ye_{31} + ze_{12} \simeq \begin{pmatrix} w + iz & ix + y \\ ix - y & w - iz \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R} \oplus \bigwedge^2 \mathbf{R}^3 &= \{w + xe_{23} + ye_{31} + ze_{12}\} \\ &\simeq \{wI + xi\sigma_1 + yi\sigma_2 + zi\sigma_3\} \end{aligned}$$

のように表すことができ、積について閉じている。そこでこれを  $Cl_3$  の偶部分代数と呼ばれ  $Cl_3^0$  と表現する。これは 4 元数  $\mathbf{H}$  と次のような対応がある。

$$\begin{cases} \mathbf{H} & Cl_3^0 \\ i & -e_{23} \\ j & -e_{31} \\ k & -e_{12} \end{cases}$$

まとめるとクリフォード代数  $Cl_3$  は 2 つの部分代数があり、 $\mathbf{C}, \mathbf{H}$  の中心に写像される。

- $ab = ba$  for  $a \in \mathbf{C}$  and  $b \in \mathbf{H}$
- $Cl_3$  は実代数  $\mathbf{C}, \mathbf{H}$  から生成される。
- $(\dim \mathbf{C})(\dim \mathbf{H}) = \dim Cl_3$

つまり

$$\mathbf{C} \otimes \mathbf{H} \simeq Cl_3$$

である。また  $Cl_3$  は独立した次のような次元を持つので  
scalar:  $\langle u \rangle_0$ , vector:  $\langle u \rangle_1$ , bivector:  $\langle u \rangle_2$ , volume element:  $\langle u \rangle_3$  として

$$u = \langle u \rangle_0 + \langle u \rangle_1 + \langle u \rangle_2 + \langle u \rangle_3 \in Cl_3$$

とするとこれらの符号の反転のしかたから共役の取り方が複数あり、

$$\hat{u} = \langle u \rangle_0 - \langle u \rangle_1 + \langle u \rangle_2 - \langle u \rangle_3 \text{ grade involution}$$

$$\tilde{u} = \langle u \rangle_0 + \langle u \rangle_1 - \langle u \rangle_2 - \langle u \rangle_3 \text{ reversion}$$

$$\bar{u} = \langle u \rangle_0 - \langle u \rangle_1 + \langle u \rangle_2 - \langle u \rangle_3 \text{ Clifford conjugation}$$

がある。これらは

$$\bar{u} = (\tilde{u})^\wedge = (\hat{u})^\sim$$

という関係があり、 $a, b, c, d \in \mathbf{C}$  として次のようになり、

$$u \simeq \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \hat{u} \simeq \begin{pmatrix} d^* & -c^* \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}, \tilde{u} \simeq \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix}, \bar{u} \simeq \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

クリフォード共役は実の関係であり逆  $u^{-1}$  に類似し、リバーズ  $\tilde{u}$  はエルミート共役  $u^\dagger$  と類似している。また次の関係も成り立つことが簡単に確かめられる。

$$\widehat{uv} = \hat{u}\hat{v}, \quad \widetilde{uv} = \tilde{v}\tilde{u}, \quad \overline{uv} = \bar{v}\bar{u}$$

また奇部分代数を

$$q_{\text{odd}} = xe_1 + ye_2 + ze_3 \in Cl_3^1$$

とするとこれは  $\mathbf{R}^3$  のベクトル空間とみなせ、

$$Cl_3 = Cl_3^0 \oplus Cl_3^1$$

が成り立つ。

## 2.8 スピンとクリフォード代数

### 2.9 電磁場

具体的に古典的な電磁場における電子のスピンを考えよう。エネルギーを

$$E = \frac{p^2}{2m} + W$$

として対応原理から

$$E = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad p = -i\hbar \nabla$$

とするとシュレディンガー方程式は

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + W\psi$$

となった。

ここで電磁力を  $F$  として電磁場内の任意のループ  $C$  について常に変位と直交するので

$$\oint_C F \cdot ds = 0$$

である。Stern-Gerlach の実験では電子のスピンへの向きは互いに平行が反平行の 2 種類しかないことがと電磁場の相互作用から導かれた。

シュレディンガー方程式は波動関数  $\psi \in \mathbf{C}$  について

$$\psi : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$$

とすることで導かれる。これはまさに先の式 2.13 に類似している。

確率密度は波動関数の位相変換で不変である。そこで次のような位相変換を考える。

$$\psi(r, t) \rightarrow \psi(r, t)e^{i\alpha(r, t)}, \quad e^{i\alpha(r, t)} \in U(1)$$

これによってシュレディンガー方程式は

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (\psi e^{i\alpha}) = \left( i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) e^{i\alpha} - \hbar \psi e^{i\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial t}$$

$$-i\hbar \nabla (\psi e^{i\alpha}) = (-i\hbar \nabla \psi) e^{i\alpha} + \hbar \psi e^{i\alpha} \nabla \alpha$$

ここで電磁場のスカラー、ベクトルポテンシャル  $(\phi, A)$  について

$$E = -\nabla\phi - \frac{\partial A}{\partial t}, \quad B = \nabla \times A$$

として電場、磁場決め、さらに局所位相  $\alpha(r, t)$  にエネルギーと運動量が

$$e\phi = -\hbar \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \quad eA = -\hbar \nabla \alpha \quad (2.14)$$

と作用するとすると  $p^2\psi$  は

$$\begin{aligned} (-i\hbar\nabla)^2 (\psi e^{i\alpha}) &= (-i\hbar\nabla) ((-i\hbar\nabla\psi) e^{i\alpha} + \hbar\psi e^{i\alpha}\nabla\alpha) \\ &= \left[ -\hbar^2\nabla^2\psi - 2i\hbar^2(\nabla\psi) \cdot (\nabla\alpha) + \hbar^2\psi(\nabla\alpha)^2 - i\hbar^2\psi(\nabla^2\alpha) \right] e^{i\alpha} \\ &= \left[ -\hbar^2\nabla^2\psi + 2i\hbar^2e(\nabla\psi) \cdot A + e^2A^2\psi + i\hbar e(\nabla A)\psi \right] e^{i\alpha} \\ &= \left[ (-i\hbar\nabla - eA)^2\psi \right] e^{i\alpha} \end{aligned}$$

となる。一方で 2.14 から

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \rightarrow i\hbar e^{i\alpha(r,t)} \frac{\partial \psi}{\partial t} - \hbar \dot{\alpha} \psi e^{i\alpha(r,t)} = \left[ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + e\phi \right] e^{i\alpha(r,t)}$$

となるのでシュレディンガー方程式は結局次のように電磁場との相互作用を含む形になる。

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left[ (-i\hbar\nabla - eA)^2 \psi \right] - e\phi\psi$$

そこで一般化運動量を

$$\pi = -i\hbar\nabla - eA$$

とすると

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{2m} (\pi \cdot \pi) \psi - e\phi\psi$$

このとき

$$\psi : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$$

である。つまり後節のゲージ場で詳しくみるが波動関数の局所的な位相変換は電磁場との相互作用を生み出す。位相の変化は確率密度に影響しないが、ゲージ粒子を生んでいる。

添え字 1, 2, 3 の循環について交換積を用いて

$$[\pi_1, \pi_2] = i\hbar B_3, \quad \pi_k = p_k - eA_k$$

この時パウリ行列  $\sigma$  を用いて

$$(\sigma \cdot \pi)^2 = (\pi \cdot \pi) I - \hbar e (\sigma \cdot B)$$

これを先の式に代入すると

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{2m} ((\pi \cdot \pi) I - \hbar e (\sigma \cdot B)) \psi - e\phi\psi \quad (2.15)$$

となり、左辺第 2 項はパウリのスピン項である  $(\hbar e (\sigma \cdot B)/2m)$ 。ただし今度の写像は

$$\psi : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}^2$$

である。

そこでクリフォード代数  $Cl_3$  との対応を考えよう。そのためにまず、次のような外積を考える。

$e^2(A \wedge A) = \hbar^2(\nabla \wedge \nabla) = (\nabla\psi) \wedge A + A \wedge (\nabla\psi) = 0$  となるので  $\mathbf{e}_{123} = i$  と同一視できたから  $\nabla \wedge A = \mathbf{e}_{123}(\nabla \times A)$  として

$$\begin{aligned}
(\pi \wedge \pi) \psi &= [(-i\hbar\nabla - eA) \wedge (-i\hbar\nabla - eA)] \psi \\
&= i\hbar e \nabla \wedge (A\psi) + i\hbar e A \wedge (\nabla\psi) \\
&= i\hbar e [(\nabla \wedge A)\psi + (\nabla\psi) \wedge A + A \wedge (\nabla\psi)] \\
&= i\hbar e [\mathbf{e}_{123}(\nabla \times A)] \psi \\
&= -\hbar e (\nabla \times A) \psi \\
&= -\hbar e B \psi
\end{aligned}$$

となり、磁場  $B$  を自然に導くことができる。よって式 2.15 は

$$\begin{aligned}
i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} &= \frac{1}{2m} ((\pi \cdot \pi) + (\pi \wedge \pi)) \psi - e\phi\psi \\
&= \frac{1}{2m} (\pi\pi) \psi - e\phi\psi
\end{aligned}$$

であり、まさに式 2.1 のクリフォード積で表すことができる。  
実際に  $\pi^2$  を計算してみると

$$\begin{aligned}
\pi^2 \psi &= (-i\hbar\nabla - eA)(-i\hbar\nabla - eA) \psi \\
&= -\hbar^2 \nabla^2 \psi + i\hbar e \nabla(A\psi) + i\hbar e A \nabla \psi + e^2 A^2 \psi \\
&= -\hbar^2 \nabla^2 \psi + i\hbar e (\nabla A) \psi + i\hbar e A \nabla \psi + i\hbar e A \nabla \psi + e^2 A^2 \psi \\
&= -\hbar^2 \nabla^2 \psi + i\hbar e (\nabla A) \psi + 2i\hbar e A \nabla \psi + e^2 A^2 \psi \\
&= -\hbar^2 \nabla^2 \psi + i\hbar e (-\nabla \wedge A + \nabla \cdot A) \psi + 2i\hbar e (-A \wedge \nabla + A \cdot \nabla) \psi + e^2 A^2 \psi \\
&= -\hbar^2 \nabla^2 \psi + i\hbar e (\nabla \cdot A) \psi + 2i\hbar e (A \cdot \nabla) \psi + i\hbar e (\nabla \wedge A) + e^2 A^2 \psi \\
&= [-\hbar^2 \nabla^2 + e^2 A^2 + i\hbar e (\nabla \cdot A + 2A \cdot \nabla)] \psi + i\hbar e \mathbf{e}_{123} (\nabla \times A) \psi \\
&= [-\hbar^2 \nabla^2 + e^2 A^2 + i\hbar e (\nabla \cdot A + 2A \cdot \nabla)] \psi - \hbar e (\nabla \times A) \psi \\
&= [-\hbar^2 \nabla^2 + e^2 A^2 + i\hbar e (\nabla \cdot A + 2A \cdot \nabla)] \psi - \hbar e B \psi
\end{aligned}$$

## 2.10 スピン演算子

非相対論においてスピンの 2 成分を縦ベクトルで表すと

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^2, \quad \psi_1, \psi_2 \in \mathbf{C}$$

これを次のように正方行列に置き換える。

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 & 0 \\ \psi_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$u \in \mathbf{C}(2)$  としてこれをこの正方行列に作用させても

$$\begin{pmatrix} u_{12} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 & 0 \\ \psi_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi'_1 & 0 \\ \psi'_2 & 0 \end{pmatrix}$$

と第1列以外が0になる。そこで  $\mathbf{C}(2)$  の部分空間  $S$  としてこれを最小左イデアルという。

$$u\psi \in S \text{ for all } u \in \mathbf{C}(2) \text{ and } \psi \in S$$

これは次のような表現ができる。

$$f = \frac{1}{2}(I + \sigma_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, f^2 = f$$

として

$$\psi \in Mf, M \in \mathbf{C}(2)$$

そこで次のような同値関係を  $Cl_3$  と  $\mathbf{C}(2)$  の間につくる

$$\mathbf{e}_1 \simeq \sigma_1, \mathbf{e}_2 \simeq \sigma_2, \mathbf{e}_3 \simeq \sigma_3$$

$S$  を実線形空間として、その基底を

$$\begin{aligned} f_0 = f &= \frac{1}{2}(1 + \mathbf{e}_3) \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ f_1 = \mathbf{e}_{23}f &= \frac{1}{2}(\mathbf{e}_{23} + \mathbf{e}_2) \simeq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ f_2 = \mathbf{e}_{31}f &= \frac{1}{2}(\mathbf{e}_{31} - \mathbf{e}_1) \simeq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ f_3 = \mathbf{e}_{12}f &= \frac{1}{2}(\mathbf{e}_{12} + \mathbf{e}_{123}) \simeq \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.16}$$

となる。、 $S$  を複素線形空間として場合の基底は

$$\begin{aligned} g_1 = f &= \frac{1}{2}(1 + \mathbf{e}_3) \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ g_2 = \mathbf{e}_1f &= \frac{1}{2}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3) \simeq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となり正方行列次のように表される。

$$\psi = \psi_1g_1 + \psi_2g_2 = \begin{pmatrix} \psi_1 & 0 \\ \psi_2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{C}(2)f, \psi_1, \psi_2 \in \mathbf{C}$$

これをクリフォード代数で表すと

$$\psi = \psi_1g_1 + \psi_2g_2 \in Cl_3f, \psi_k = Re(\psi_k) + Im(\psi_k)\mathbf{e}_{123}$$

となる。このようにクリフォード代数は行列演算を代数的に扱える。

この  $f$  を用いて理想的なスピンを  $S = Cl_3f$  と表す。ただし  $f = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{e}_3)$  である。

$Cl_3$  の部分集合を  $\mathbf{F}$  として

$$\mathbf{F} = fCl_3f \simeq \left\{ \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, c \in \mathbf{C} \right\}$$

$Cl_3$  は部分環をなすので

$$af = fa \quad a \in \mathbf{F}$$

であり、0でない  $a \in \mathbf{F}$  について

$$ab = f$$

を満たす  $b \in \mathbf{F}$  が一意に決まる。また

$$f_3^2 = -f_0$$

となるので

$$\mathbf{F} \simeq \mathbf{C}$$

とみなすことができる。

## 2.11 スカラー積

次のスピノ空間  $S$  について自然にスカラー積が定義できる。

$$S = Cl_3 f \simeq \mathbf{C}(2)f, \quad \phi, \psi \in S$$

$$\tilde{\psi}\phi = \begin{pmatrix} \psi_1^* & \psi_2^* \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 & 0 \\ \psi_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1^*\phi_1 + \psi_2^*\phi_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

部分環  $\mathbf{F}(z \rightarrow z^*)$  として次の写像

$$S \times S \rightarrow \mathbf{F}, \quad (\psi, \phi) \rightarrow \tilde{\psi}\phi$$

を考える。スカラー積は

$$\psi \rightarrow \tilde{\psi}, \quad \psi \in S, \quad \lambda \in \mathbf{F}$$

という対応を考え、右から左への準線形写像を考える。この時、 $\lambda \rightarrow \tilde{\lambda}$  は部分代数  $\mathbf{F}$  の複素共役に対応する。

$$(\psi\lambda)^\sim = \tilde{\lambda}\tilde{\psi}$$

ここで  $\psi \in S = Cl_3$  と  $u \in Cl_3$  との積は右  $\mathbf{F}$  の線形変換

$$S \rightarrow S, \quad \psi \rightarrow u\psi$$

に対応して

$$(u\psi)^\sim(u\psi) = \tilde{\psi}\phi \text{ for All } \psi, \phi \in S$$

スカラー積  $\tilde{\psi}\phi$  の群は  $2 \times 2$  の行列は次の可換群と同相である。

$$U(2) = \{u \in \mathbf{C}(2) | u^\dagger u = I\}$$

次にクリフォード共役を  $u \rightarrow \bar{u}$  とするとクリフォード代数では数になるので

$$\bar{\psi}\phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\psi_2 & \psi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 & 0 \\ \psi_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \psi_1\phi_2 - \psi_2\phi_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$a \in Cl_3$ ,  $a\bar{\psi}\phi \in \mathbf{F}$  であり  $a = \mathbf{e}_1$  or  $a = \mathbf{e}_{31}$  に対応し、写像は次のようになる。

$$S \times S \rightarrow \mathbf{F}, \quad (\psi, \phi) \rightarrow a\bar{\psi}\phi$$

そこでスカラー積は次のようになる。

$$a\bar{\psi}\phi \simeq \tau(\psi)^\top J \tau(\phi)$$

これは次と同相で

$$\{u \in Cl_3 | \bar{u}u = 1\}$$

結局スカラー積  $a\bar{\psi}\phi$  は  $2 \times 2$  の行列は次の特殊群と同相になる。

$$Sp(2, \mathbf{C}) = \{u \in \mathbf{C}(2) | u^\top J u = J\}$$



## 2.12 偶演算子

理想的なスピンとして

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 & 0 \\ \psi_2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{C}(2)f$$

を考えるとミニマムな左イデアルの偶要素として次を考える。

$$\Psi = 2 \text{even}(\psi) \simeq \begin{pmatrix} \psi_1 & -\psi_2^* \\ \psi_2 & \psi_1^* \end{pmatrix}$$

$$\Psi = \psi + \hat{\psi} \in Cl_3^+, \quad \psi \in Cl_3f$$

また、古典的なベクトル  $\mathbf{s} = s_1 \mathbf{e}_1 + s_2 \mathbf{e}_2 + s_3 \mathbf{e}_3$  として  $\psi \in \mathbf{C}^2$  として次のように成分を表すことができる。

$$s_1 = \psi^\dagger \sigma_1 \psi, \quad s_2 = \psi^\dagger \sigma_2 \psi, \quad s_3 = \psi^\dagger \sigma_3 \psi$$

一方で  $\psi \in Cl_3f$  とすると

$$s_1 = 2 \langle \tilde{\psi} \mathbf{e}_1 \psi \rangle_0, \quad s_2 = 2 \langle \tilde{\psi} \mathbf{e}_2 \psi \rangle_0, \quad s_3 = 2 \langle \tilde{\psi} \mathbf{e}_3 \psi \rangle_0$$

となる。これから次のように表すこともできる。

$$\mathbf{s} = 2 \langle \psi \mathbf{e}_3 \tilde{\psi} \rangle_1$$

これを  $\Psi \in Cl_3^+$  で表すと

$$\mathbf{s} = \Psi \mathbf{e}_3 \tilde{\Psi}$$

これを  $\Psi \in \mathbf{C}^2$  で表すと

$$\mathbf{s} = \Psi \sigma_3 \Psi^\dagger$$

となる。

## 2.13 4次元

次に  $Cl_4 \text{ of } \mathbf{R}^4$  の空間を考える。Clifford 代数の要素をユークリッド基底  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  で表すと

- 1 scalar
- $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$  vectors
- $\mathbf{e}_{12}, \mathbf{e}_{13}, \mathbf{e}_{14}, \mathbf{e}_{23}, \mathbf{e}_{24}, \mathbf{e}_{34}$  bivectors
- $\mathbf{e}_{123}, \mathbf{e}_{134}, \mathbf{e}_{124}, \mathbf{e}_{234}$  3-vectors
- $\mathbf{e}_{1234}$  volume element

となる。これらの基底は4元数を用いた次の表現と同値である。

$$e_1 \simeq \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 \simeq \begin{pmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 \simeq \begin{pmatrix} 0 & -k \\ k & 0 \end{pmatrix}, \quad e_4 \simeq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$i \simeq \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, j \simeq \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, k \simeq \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

であったことを考えると偶部分代数の  $Cl_4^0$  は直和  $\mathbf{H} \oplus \mathbf{H}$  と同相になる。

また bivector は 3 次元の場合と異なる。3 次元では 2 つのベクトル積から bivector が作られた。

これは 3 次元のベクトルはすべて平面上にあった。これを simple\_bivector という。

4 次元の場合はそうならない。しかし、2 つのベクトル積の和が simple\_bivector となることはある。たとえば次は simple\_bivector ではない。

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= e_{12} + e_{34} \in \bigwedge^2 \mathbf{R}^4 \\ &\simeq \begin{pmatrix} -ij & 0 \\ 0 & -ij \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

単純であれば 2 乗したものは正になるがこの場合

$$\mathbf{B}^2 = -2 + 2e_{1234} \simeq 4 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

である。よってこれは  $\mathbf{R}^2$  の平面の中に収まらない。

またこの  $\mathbf{B}$  は次のように表すことができる。

$$\mathbf{B} = e_{12} + e_{34} = \frac{1}{2} \{ (e_1 + e_3)(e_2 + e_4) + (e_1 - e_3)(e_2 - e_4) \}$$

## 2.14 ミンコフスキー空間

次に  $Cl_{3,1}, \mathbf{R}^{3,1}$  を考える。基底は次のような条件を満たす。

$$e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = 1, e_4^2 = -1, e_{ij} = -e_{ji}$$

この場合の基底は 16 あり、16 次元になる。4 × 4 の  $\mathbf{R}(4)$  と同相になる。

## 2.15 グラスマン-ケーリー代数

グラスマン-ケーリーのシャッフル積を次のように定義する

$$u \vee v = ((ue_{12\dots n}^{-1}) \wedge (ve_{12\dots n}^{-1})) e_{12\dots n}$$

これは結合則を満たし、独立した計量をとる。しかし、方向に依存し、もっとも低次元の外積のようにふるまう。逆は次のようになる。

$$u^{\vee(-1)} = ((ue_{12\dots n}^{-1})^{\wedge(-1)}) e_{12\dots n}$$

線形変換  $L$  のもとで

$$\bigwedge L(u \vee v) = \bigwedge L(u) \vee \bigwedge L(v) / \det(L)$$

となる。幾何的にはシャッフル積をクリフォード積で定義すると自然にグラスマン-ケーリー代数を導く。

## 2.16 構成

一般的に  $Cl_{p,q}$  を構成していく。  $R$  をある次元の実空間としてベクトル空間  $X \in R$  を考える。非縮退の共役を  $\bar{x}$  として

$$\bar{x}x = x^{(2)} = x \cdot x$$

となる。また  $\mathbf{R}^3$  が 4 元数の部分空間とみなすと  $X \in C$  として

$$x^2 = -x^{(2)} = -x \cdot x \quad (2.17)$$

となる。そこで  $X$  を有限次元の実 4 元数空間とする。  $x^2 = -x^{(2)}$  を満たす代数の次元は前節でみたように

$$2^{\dim X}$$

となる。縮退のない共役関係として

$$Cl(X) \rightarrow Cl(X); a \rightarrow a^-$$

とすると  $x \in X$  として

$$\begin{aligned} x^- &= -x \\ x \cdot x &= x^- x \end{aligned}$$

が成り立つ。また次のベクトル空間をパラベクトル空間と呼ぶことにする。

$$\mathbf{R} \oplus X$$

この空間では次のような代数が成り立つ。  $\lambda \in \mathbf{R}, x \in X$  として

$$\lambda^2 + x \cdot x = \lambda^2 - x^2 = (\lambda - x)(\lambda + x) = (\lambda + x)^-(\lambda + x)$$

のように書ける。直交した基底からなるベクトル空間  $X \in \mathbf{R}^p, \mathbf{R}^q \mathbf{R}^r$  は実ベクトル空間としての次元  $\mathbf{R}^{p+q+r}$  を持ち、  $p = -1, q = 1, r = 0$  をとる。この基底によりクリフォード代数は  $Cl_{p,q,r}$  のように表現され、反交換の対称性として普通は

$$0 = x \cdot y = \frac{1}{2} \{ (x + y) \cdot (x + y) - x \cdot x - y \cdot y \}$$

とかけるが、クリフォード代数では 2.17 より

$$0 = -xy - yx = -(x + y)^2 + x^2 + y^2$$

となる。4 元空間では  $\mathbf{R}^{p,q,0}$  は  $\mathbf{R}^{p,q}$  と表されクリフォード代数では  $Cl_{p,q}$  に相当する。

同様に 4 元空間では  $\mathbf{R}^{0,n}$  は  $\mathbf{R}^n$  と表されクリフォード代数では  $Cl_{0,n}$  に相当する。

しかし、これは  $Cl_n$  ではないことに注意がいる。4 元空間では  $r = 0$  の縮退のない空間では正の指数は等しくなり、  $p = q$  となる。

$W$  を実 4 元空間  $X$  の線形部分空間とする。部分代数である  $Cl(X)$  は  $W$  から生成され、  $Cl(W)$  と表す。縮退のない  $\mathbf{R}^{n,n}$  空間において次の 3 つの行列  $\in \mathbf{R}(2)$  を出発点として考えてみる。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

これらは次の関係を満足する。

1

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^2 = 1, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = 1, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1$$

### 3 場の理論 [63, 64, 65]

高校時代に物質が原子からできていることを習い、原子の電子配置をさらに学習する。このあたりまでは余裕でもその後金属結合や、共有結合などが登場し、sp 混成軌道やらが登場し、ますます混迷を深める。理系を目指す学生の経験してきた道である。しかし、疑問に思うことはなかつたらうか、このあたりの混迷の原因はシンプルな電子のみである。高校物理で学習したクーロン力はわかりやすいが、そもそも表面に電子がうじゃうじゃいるのになぜ原子と原子が引き合うのか、その答えは混迷の中どこに埋もれてしまったのだろうか。ここには場の考えが必要になり、実はすでに量子論が介在している。

単純な振動をして、水面をたたく小型の装置をつくり、これを広い水槽に数個浮かべる。お互いには斥力しか働かないので、電子のように反発するだろう。しかし、大量の装置を投入したらどうなるだろうか。ここには波の定常波が背景にでき、装置の中には互いに引き合うものが出てくる。場が装置と相互作用するわけである。

#### 3.1 歴史的概要

場とはなにか、 $\phi(x)$  なるものがこの先多く登場する。

この位置  $x$  に付随する関数は理論物理を学ぼうとする若者にとっては襲いかかるゴーストのように感じるかもしれない。

量子論的にはこの場を 2 乗して、正值を得るとそれが位置  $x$  に存在する確率になるというからくりである。

正確にはこれの転置複素共役との積を全空間で積分し、確率が得られるから、場そのもの次元は体積の平方根の逆数になる。従って、エネルギーや、運動量になつたりすることはない。 $\phi(x)$  そのものが物理量を特徴つけることはない。

場の理論では古典論に比べて体積の逆数の密度が本質的な役割をする。

このようなものが場であると今は言わざるおえない。

さらに一般化すると、考える体積は多次元であっても、 $\phi(x, p)$  のように運動量と位置をあわせたような位相空間であってもよい。

ただし、場の考え方には連続性があり。 $\phi$  は波のように振る舞う。

極近傍では連続して変化するわけだ。

従って波として考え、 $\phi$  のことを量子論では確率振幅と呼ぶことがある。

高校時代に学習した磁場や電場はなじみ深いとその磁場や電場の強さを決めているのが場になる。

場の考えには必ず決まった領域が必要になると筆者は考える。

それは熱力学のように、断熱された領域で平衡温度が決まると分子速度の分布関数が決まったように、場  $\phi(x)$  も平衡状態の中で決まる分布関数のようなものであ

マクスウエル・ボルツマン分布が現実の 1 粒子の速度を示しているわけではないように  $\phi(x)$  も 1 つの粒子の物理量を決めるものではない。

しかし、量子論での  $\phi(x)$  は 1 つの素粒子にも存在する。

これはある領域に境界条件を課して、その中をみていることになる。この時、1 つの粒子の経路が無限に見える。

しかし、何らかの方法でこ 1 つの粒子の位置を観測すると、領域に課していた境界条件は突如として破棄され、 $|\phi(x)|^2$  は 1 となる。

物理学は今も発展途上にある。これを書いている 2016 現在の話題は重力波を観測しただろうという NEWS があつた。

場の理論の原点は 17 世紀につくられた Newton の運動方程式だろう。

$$F = m\ddot{x}$$

この式で力の釣りの関係から飛躍し、釣り合わない時にはそこに座標により記述される加速度  $\ddot{x}$  が存在し、

これと質量との積が力の合力との釣り合いに等しいとした。

その後、この運動方程式は物理の枠を超えて、人類の文化を大きく変えていくことになる。

しかし、光の速さに近い速度領域でこの式は破綻する。

20世紀末にこれを修正する特殊相対性理論がアインシュタインにより見いだされた。

これにより、時間と空間はほぼ同等に扱う時空という概念が登場し、次の不変量が見つかる。

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

観測系に関係ない真空での光の速さ  $c$  がこの時空を結ぶ定数となる。

同時期に非常に微視的な粒子を扱うと原理的に運動量と位置を同時に正確に決められることができず、限界の目安になるプランク定数  $\hbar$  が見いだされ、パウリにより次の不確定性原理が見いだされた。

$$\Delta p \Delta x \geq \hbar$$

そして、確率密度  $\psi(x)$  を振幅に持つ量子力学が次の対応関係により作られていくわけである。

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{p} \rightarrow -i\hbar \nabla$$

新しく、物理量というものが演算子に対応したことになる。

エネルギーはスカラー演算子、運動量はベクトル演算子に対応する。

それぞれ1成分、3成分をもちろん演算子は微分記号みたいなものだからこれだけでは何も物理的な情報を引き出せない。

演算子が状態ベクトルに作用することで物理量を得るという観測の過程がはじめて取り入れられる。

そのためには演算子は行成分と列成分を合わせ持つ行列でなくてはならない。

これから物理的な固有値  $a$  を得るという行列力学がハイゼンベルグによりはじめられ、Dirac はみごとな書式を生み出した。

$$\langle \alpha | A | \beta \rangle = a \langle \alpha | \beta \rangle$$

一方でこれまでの運動方程式を発展させて、量子論的な方程式を導く試みもなされた。

これはシュレディンガーにより対応規則を平面波  $\psi(x)$  に作用させはじめて次のように定式化された。

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{x}) \right) \psi$$

このシュレディンガー方程式により、確率密度振幅としての波動関数が定着し、電子や原子の挙動が高精度で得られるようになった。

ところがこれは左辺が時間の1次微分、右辺が空間の2次微分が波動関数に作用している。

この点でもはや空間と時間は同等ではなくシュレディンガー方程式は相対論の要請と矛盾している。

そこで相対論の要請を満たすものとして質量  $m$  の自由粒子が4元運動量の関係

$$p^2 = p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 = m^2 c^2$$

にそのまま対応規則を使い、ダランベルシアン  $\square$  を用いて

$$p^2 = p^\mu p_\mu \rightarrow -\hbar^2 \partial^\mu \partial_\mu = -\hbar^2 \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \equiv -\hbar^2 \square$$

となるので自由粒子の運動が

$$p^2 \psi = 0$$

に従うとして

$$\left( \square + \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right) \psi(x) = 0 \tag{3.1}$$

というクライン・ゴールドン方程式が導かれた。この式はローレンツ変換  $\Lambda_\nu^\mu$

$$x'^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu$$

のもとで不変である。ところがこの式に複素共役  $\psi^*$  をかけて交換したものの差をつくると

$$\psi^* \left( \square + \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right) \psi - \psi \left( \square + \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right) \psi^* = \partial^\mu (\psi^* \partial_\mu \psi - \psi \partial_\mu \psi^*) = 0$$

である。これは第4部でみたように確率の保存則を記述する。確率密度を  $\rho$ 、確率の流れを  $\mathbf{j}$  とすると

$$\rho = \frac{i\hbar}{2mc^2} \left( \psi^* \frac{\partial}{\partial t} \psi - \psi \frac{\partial}{\partial t} \psi^* \right), \quad \mathbf{j} = \frac{i\hbar}{2mc^2} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) \quad (3.2)$$

これらの次元は

$$[\psi] = [L^{-3/2}]$$

$$[\hbar] = [ML^2T^{-1}]$$

だから

$$[\rho] = [L^{-3}]$$

$$[\mathbf{j}] = [L^{-2}T^{-1}]$$

となる。しかし式 3.2 はシュレディンガー方程式では

$$H = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{x}) \right) \psi > 0$$

であるため  $\rho$  が負になることはない。しかし、クライン・ゴールドン方程式では

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \psi = 0$$

には  $\pm$  の両方が存在し、 $\rho$  が負になることを認めることになる。

これをそのまま解釈すれば負のエネルギー固有値と負の確率密度というものが存在してしまう。

$$E = \pm \sqrt{\mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4}$$

これらの解決は天才的な Dirac によりなされた。これは後章で考察する。以後では当面スカラー場を中心に考察する。

### 3.2 調和振動子

場の量子論では相対論的な共変性から古典的なエーテルのような媒質を考慮することなく、場の波動関数を作ることができる。

ただし、そのためには無限の自由度を持つヒルベルト空間に無限の調和振動子をおくことが必要で、これが古典的な媒質に相当する。

そこで最も基本的な調和振動子の量子化をする。

$N$  個の調和振動子のハミルトニアンを

$$H = \sum_i^N \frac{1}{2} (p_i^2 + \omega_i^2 q_i^2) \quad (3.3)$$

とおく。この対称的なハミルトニアン<sup>3</sup>の性質から天下りのに

$$a_i = \frac{1}{\sqrt{2\omega_i}} (\omega_i q_i + ip_i)$$

$$a_j^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\omega_j}} (\omega_j q_j - ip_j)$$

とおくと

$$\begin{aligned} [a_i, a_j^\dagger] &= \frac{2i\omega_i}{2\omega_i} (p_i q_j - q_i p_j) \\ &= -i [q_i, p_j] = \delta_{ij} \end{aligned}$$

を満たす。 $-i$ がかかるが $a, a^\dagger$ は $q, p$ と同じ交換関係を満たす。さらに逆に解けば

$$\begin{aligned} q_i &= \frac{1}{\sqrt{2\omega_i}} (a_i + a_i^\dagger) \\ p_j &= -i\sqrt{\frac{\omega_j}{2}} (a_j - a_j^\dagger) \end{aligned} \quad (3.4)$$

となるので、ハミルトニアンは

$$H = \sum_i^N \frac{1}{2} \omega_i (a_i a_i^\dagger + a_i^\dagger a_i) \quad (3.5)$$

と対称性を持ったものに置き換えられた。

古典的なハミルトニアン式 3.3 を量子化するときには位置や運動量は演算子と状態関数の積の形になる。対応規則として

$$p \rightarrow \hat{p} = -i\hbar\nabla$$

これは観測、被観測の関係を取り入れた結果である。

これからあらゆる観測可能な物理量は数学的な固有値と一致することになる。

ハミルトニアンも作用素 $\hat{H}$ として考え、その固有値としてエネルギーを得る。これを表したのがシュレディンガー方程式である。

$$\hat{H}\phi = E\phi$$

これに従って1次元調和振動を考えると対応規則から

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \phi(x) + \frac{m}{2} \omega^2 x^2 \phi(x) = E\phi(x)$$

この式を解くために

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E, \quad \lambda = \frac{m\omega}{\hbar}$$

とすると

$$\phi'' + (k^2 - \lambda^2 x^2) \phi = 0$$

となり、これは **Weber** の微分方程式である。

この解をシミュレーションすると関数 $\phi$ は例えば次のような形になる。

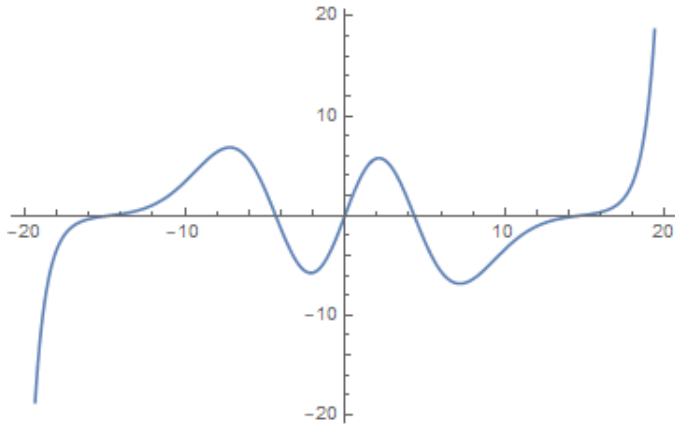


図 3.1:  $k = 0.7484, \lambda = 0.08$  の例

パラメタ  $\lambda$  を大きくすると  
振動部分が減っていく、両端に鋭く立ち上がる（下がる）漸近部分があるのはかわらない。

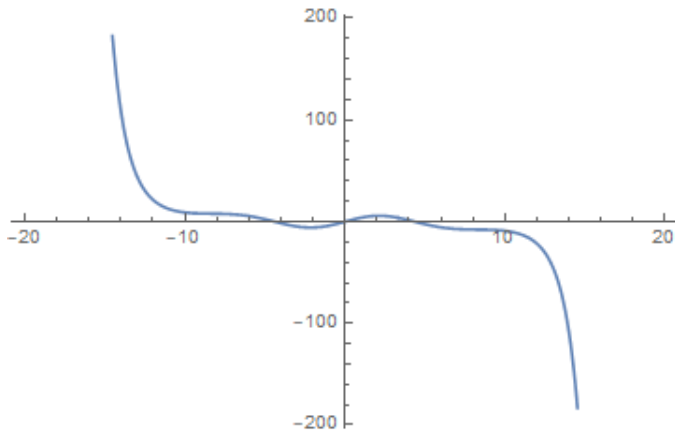


図 3.2:  $k = 0.7484, \lambda = 0.09$  の例

パラメタ  $\lambda$  を小さくすると振動部分が増えて量子化が目立つようになる。

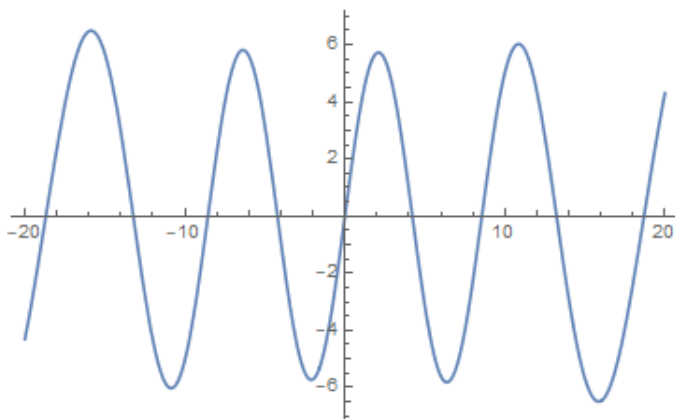


図 3.3:  $k = 0.7484, \lambda = 0.03$  の例

$$y = \lambda x^2$$



と変数変換して

$$\kappa = \frac{k^2}{2\lambda} = \frac{\hbar k^2}{2m\omega} = \frac{E}{\hbar\omega}$$

$$y\phi'' + \frac{1}{2}\phi' + \left(\frac{\kappa}{2} - \frac{1}{4}y\right)\phi = 0$$

となる。

### 3.3 量子作用原理 [26]

第2部で扱ったようにハミルトンの運動方程式が作用原理から導かれた。量子論でも同様になるだろうか。ここでは文献 [26] のシュウウインガーの処方箋に従ってみたい。無限小時間変化の状態ベクトルとの内積はハミルトニアンが時間推進をになったことを考えて。

$$\langle q', t | \left( 1 - \frac{i}{\hbar} dt H(q(t), p(t), t) \right) | q'', t \rangle$$

について考える。ただし、対応規則を状態ベクトルで表し、

$$\frac{\partial}{\partial q'_\alpha} \langle q', t | = \frac{i}{\hbar} \langle q', t | p_\alpha(t)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle q', t | = -\frac{i}{\hbar} \langle q', t | H(q(t), p(t), t) \equiv -\frac{i}{\hbar} \langle q', t | H(t)$$

とする。

### 3.4 消滅・生成 [95]

場の量子論では素粒子の生成や消滅、核子の崩壊などを扱うので、粒子数の保存が破られることが普通になる。

この時、質量の変化とエネルギーの変化を記述するのは相対論である。

従って、場の量子論は相対論的な量子論を考える必要がある。

場と粒子を統一的に考える必要があるので、量子数やスピンによりした粒子を分類し、それに対応した場を用意する必要が出てきた。

文献 [95] には次の図のようにまとめてある。

粒子	場
スピン 0 ボース粒子	$\phi(\mathbf{x}, t)$ , $\phi$ は実スカラー場
荷電スピン 0 ボース粒子	$\phi(\mathbf{x}, t)$ , $\phi$ は複素スカラー場
光子 (スピン 1, 無質量ボース粒子)	$A_\mu(\mathbf{x}, t)$ , 実ベクトル場 (電磁ベクトルポテンシャル)
スピン $\frac{1}{2}$ フェルミ粒子 ( $e^\pm$ , クォークなど)	$\psi_r(\mathbf{x}, t)$ , スピノール場

図 3.4: [95] より ; 場と粒子の対応表

波動関数が確率密度を表し、全空間で 1 に規格化されるとすると  $x(ict, \mathbf{x})$ ,  $k(\omega, \mathbf{k})$  として

$$c \int |\phi|^2 dxdt = 1$$

となるべきだから反粒子とのセットで波動関数をつくると

$$\phi = Ae^{-ikx} + Be^{ikx}$$

とすれば

$$\phi\phi^* = AA^* + BB^* + AB^*e^{-2ikx} + A^*Be^{2ikx}$$

ここで1粒子の場合は  $AA^* = BB^* = A^2$  とし、 $AB^* = A^*B = 0$  とすると規格化条件として  $V$  を基本体積、 $T$  を基本時間として

$$2c|A|^2VT = 1$$

となる。しかし、どんな規格化も観測者の時間に沿ってみるので、ここでは  $T = 1$  として質量ある粒子は  $\omega$  と  $\mathbf{k}$  に次の関係があるとする。

$$\omega(\mathbf{k}) = c\sqrt{\mathbf{k}^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}}$$

$$c = \frac{\omega}{\sqrt{\mathbf{k}^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}}} = \omega_0$$

これらの仮定から実現される通常粒子の規格化定数が

$$A = \frac{1}{\sqrt{2\omega V}}$$

となるので、この通常粒子の波動関数を一般に

$$\phi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\omega V}}e^{-ikx}$$

とおける。

質量  $m$  で相互作用しない中性スピン0のボーズ粒子を考える。4元運動量  $k_\mu$  が1粒子の波動関数  $u_k(x)$  を前節の議論から

$$u_k(x) = \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2k_0V}}$$

とする。場の状態を次のように表す。この節では  $\hbar = c = 1$  の自然単位系を用いる。

- 真空状態、無粒子状態： $|0\rangle$
- 運動量  $\mathbf{k}$ , エネルギー  $k_0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} = \omega_k$  の1粒子状態： $|1_k\rangle = |k\rangle$
- 2粒子状態： $|1_{k_1}, 1_{k_2}\rangle = |k_1, k_2\rangle$
- 多粒子状態： $|n_{k_1}, n_{k_2}, \dots\rangle$

ここで、運動量  $\mathbf{k}$  が固定された状態を考え、粒子数を変化させる、消滅演算子を次のように定義する。

$$a_k |n_k\rangle = \alpha_n |n_k - 1\rangle \tag{3.6}$$

ただし、真空に作用する場合は

$$a_k |0\rangle = 0$$

ただし、

$$\langle 0|0\rangle = 1$$

と定義する。これにより、多粒子状態は次のように正規直交系をつくる。

$$\langle 0|0\rangle = \langle 1_k|1_k\rangle = \langle 2_k|2_k\rangle = \dots = 1$$

$$\langle n_k|n'_k\rangle = 0 \quad (n_k \neq n'_k)$$

これにより、式 3.6 から添え字  $k$  を省略し、

$$\alpha_n = \langle n-1|a|n\rangle$$

ここで次の公式

$$\langle \psi|A\phi\rangle = \langle A^\dagger\psi|\phi\rangle$$

を用いて書き換えると

$$\alpha_n = \langle a^\dagger(n-1)|n\rangle$$

となる。これは  $\langle a^\dagger(n-1)|$  が  $\langle n|$  に比例していないと値をもたない。これから自然に  $a^\dagger$  は生成演算子になり、

$$a^\dagger|n\rangle = \alpha_{n+1}^*|n+1\rangle$$

となることが期待できる。よって 2 つの演算子を順に作用させれば、消滅させて、生成するので

$$a^\dagger a|n\rangle = a^\dagger \alpha_n|n-1\rangle = |\alpha_n|^2|n\rangle$$

$$a^\dagger a|0\rangle = 0$$

となることがわかる。運動量  $\mathbf{k}$  が固定したので状態  $|n\rangle$  を特徴つける量子数は粒子数  $n$  であると推測される。したがって、

$$a^\dagger a|n\rangle = n|n\rangle$$

と考える。つまり、 $a^\dagger a$  のように複素共役ペアな演算子が粒子数状態に作用した時、粒子数が観測される。よって、これを粒子数演算子という。これから係数が

$$\alpha_n = \sqrt{n}$$

であることがわかる。これから消滅・生成演算子が

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \tag{3.7}$$

$$a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \tag{3.8}$$

と定義できる。

留意すべきは  $aa^\dagger$  は粒子数演算子としてはふさわしくない点である。

$$a a^\dagger|n\rangle = \alpha_{n+1}^* a|n+1\rangle = |\alpha_{n+1}|^2|n\rangle$$

$$a a^\dagger|0\rangle = |\alpha_1|^2|1\rangle$$

これは  $a, a^\dagger$  が非可換であることを表して

$$[a, a] = [a^\dagger, a^\dagger] = 0, \quad [a, a^\dagger] = 1, \quad [a^\dagger, a] = -1$$

となる。さらに一般的な運動量  $\mathbf{k}$  を考えると

$$a_k |n_{k1}, n_{k2}, \dots, n_k, \dots\rangle = \sqrt{n_k} |n_{k1}, n_{k2}, \dots, (n-1)_k, \dots\rangle$$

$$a_k^\dagger |n_{k1}, n_{k2}, \dots, n_k, \dots\rangle = \sqrt{n_k + 1} |n_{k1}, n_{k2}, \dots, (n+1)_k, \dots\rangle$$

が成り立ち、交換関係

$$[a_k, a_l] = [a_k^\dagger, a_l^\dagger] = 0, \quad [a_k, a_l^\dagger] = \delta_{kl}, \quad [a_k^\dagger, a_l] = -\delta_{kl} \quad (3.9)$$

が成り立つ。

さらに位置、運動量演算子表現で

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x} - i\hat{p})$$

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x} + i\hat{p})$$

とすると

$$\begin{aligned} [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] &= \frac{1}{2} ([\hat{x}, \hat{x}] - i[\hat{x}, \hat{p}] + i[\hat{p}, \hat{q}] + [\hat{p}, \hat{p}]) \\ &= 1 \end{aligned}$$

である。また、反交換関係

$$\begin{aligned} [\hat{a}, \hat{a}^\dagger]_+ &= \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a} \\ &= \frac{1}{2} (\hat{x}\hat{x} + i\hat{x}\hat{p} - i\hat{p}\hat{x} + \hat{p}\hat{p} + \hat{x}\hat{x} - i\hat{x}\hat{p} + i\hat{p}\hat{x} + \hat{p}\hat{p}) \\ &= \hat{x}\hat{x} + \hat{p}\hat{p} = 1 \end{aligned}$$

とする。

### 3.5 スカラー場 [65][94]

場の量子論を構成するには通常ははじめに対象となる系のラグランジアンを見いだす。これにともない、一般化座標と一般化運動量が決まる。

ここではスカラー場  $\phi$  の方程式を決める。もちろんラグランジアンから作用原理で求めることができるが、いくつかの任意性が残る。

方程式が決まったら完全系を満たすように  $\phi$  を展開する。

以下で見るように平面波に展開するのが普通だが、角運動量で展開することもある。

次に一般化運動量と一般化座標の間に同時刻の交換関係、または反交換関係を設定する。

この交換関係はそのものではあまり意味をもち、以下でみるように演算子として作用させる。

### 3.5.1 平面波展開

はじめにクライン-ゴールドン方程式の平面波展開を具体的にみておこう。

$$\phi = Ae^{-ipx}$$

として次のクライン-ゴールドン方程式に代入すると

$$\begin{aligned} (\square + m^2) Ae^{-ipx} &= 0 \\ -p^2 + m^2 &= -(p^0)^2 + \mathbf{p}^2 + m^2 = 0 \end{aligned}$$

となるので

$$p^0 = \pm\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$$

という関係式が得られる。時間成分について自然に±の2つの解を導く。

はじめに実スカラー場を考えると一般解は適当な係数を  $a(\mathbf{p})$  として

$$\phi(x) = \int d^3\tilde{\mathbf{k}} \left[ a_1(\mathbf{k}) e^{-i(k^0 x^0 - \mathbf{k}\mathbf{x})} + a_2(\mathbf{k}) e^{i(k^0 x^0 + \mathbf{k}\mathbf{x})} \right] \quad (3.10)$$

のように  $\mathbf{k}$  の重ね合わせで表される。波数表示では

$$k^0 \equiv +\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$$

であり、 $d^3\tilde{\mathbf{k}}$  は共変的規格化を表し、これは1粒子状態が

$$\langle \mathbf{p}, s | \mathbf{p}', s' \rangle = (2\pi)^3 2p^0 \delta_{ss'}^3 (\mathbf{p} - \mathbf{p}')$$

とおいて

$$d^3\tilde{\mathbf{k}} \equiv \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2} 2k^0} \quad (3.11)$$

である。次に、3.10の第2項の積分変数を

$$\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$$

に変える。

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \int d^3\tilde{\mathbf{k}} \left[ a_1(\mathbf{k}) e^{-i(k^0 x^0 - \mathbf{k}\mathbf{x})} + a_2(\mathbf{k}) e^{i(k^0 x^0 - \mathbf{k}\mathbf{x})} \right] \\ &= \int d^3\tilde{\mathbf{k}} \left[ a_1(\mathbf{k}) e^{-ikx} + a_2(-\mathbf{k}) e^{+ikx} \right] \end{aligned}$$

となる。ここで  $\phi\phi^*$  は実数であるとする、第2項と第1項は共役になっていないといけない。

そこで改めて

$$a(\mathbf{p}) = a_1(\mathbf{p}), \quad a^*(\mathbf{p}) = a_2(-\mathbf{p}) \quad (3.12)$$

とすれば

$$\phi(x) = \int d^3\tilde{\mathbf{k}} \left[ a(\mathbf{k}) e^{-ikx} + a^*(\mathbf{k}) e^{+ikx} \right]$$

とすることができる。しかし、 $a^*(\mathbf{p}) = a_2(-\mathbf{p})$  の置き換えが成立する  $a$  は制限される。

実スカラー場では複素共役が運動量を反転させる。

この時の4元運動量  $k^\mu$  は

$$k^0 = \omega = \pm\sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2}$$

だったから

$$k^2 \equiv k^\mu k_\mu = (k^0)^2 - \mathbf{k}^2 = m^2$$

である。

従って一般化運動量は式 3.20 から

$$\pi(x) = \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}(x)} \mathcal{L}(x) = \dot{\phi}(x) = -i \int d^3 \tilde{\mathbf{k}} k_0 [a(\mathbf{k}) e^{-ikx} - a^*(\mathbf{k}) e^{+ikx}] \quad (3.13)$$

のように  $k_0 = \omega$  が前に現れ、虚振幅の平面波の符号が反転される。この時、

$$\phi = \phi^*$$

が成り立っていることに注意する。

これに対して複素場を  $\phi(x)$  として平面波展開を考えると、この時は共役解も含まれていたから複素場の場合は  $\phi = \phi^*$  とはならない。

そのため独立した自由度を加えて、

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \int d^3 \tilde{\mathbf{k}} [a(\mathbf{k}) e^{-ikx} + b^*(\mathbf{k}) e^{+ikx}] \\ \phi^*(x) &= \int d^3 \tilde{\mathbf{k}} [b(\mathbf{k}) e^{-ikx} + a^*(\mathbf{k}) e^{+ikx}] \end{aligned} \quad (3.14)$$

とかける。この時の 4 元運動量  $k^\mu$  も

$$k^0 = \omega = \pm \sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2} \quad (3.15)$$

から

$$k^2 \equiv k^\mu k_\mu = (k^0)^2 - \mathbf{k}^2 = m^2 \quad (3.16)$$

と同じようにおけるとする。同様に一般化運動量は式 3.23, 3.24 から

$$\begin{aligned} \pi(x) &= \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}(x)} \mathcal{L}(x) = \dot{\phi}^*(x) = -i \int d^3 \tilde{\mathbf{k}} k_0 [b(\mathbf{k}) e^{-ikx} - a^*(\mathbf{k}) e^{+ikx}] \\ \pi_*(x) &= \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}^*(x)} \mathcal{L}(x) = \dot{\phi}(x) = -i \int d^3 \tilde{\mathbf{k}} k_0 [a(\mathbf{k}) e^{-ikx} - b^*(\mathbf{k}) e^{+ikx}] \end{aligned} \quad (3.17)$$

のように対称性のよい形で表現される。

共変的規格化を用いると、 $\mathbf{p}$  表現での  $a, a^*$  は次の交換関係を満たすことがわかる。

$$[a(\mathbf{p}), a^*(\mathbf{p}')] = (2\pi)^3 2p^0 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \quad (3.18)$$

この  $a, a^\dagger$  を用いて量子化をすることを第 2 量子化と呼ぶ。

### 3.5.2 スカラー場

はじめにスカラー場の量子化を考える。

前節でも登場したクライン-ゴルドン方程式

$$(\square + m^2) \phi(x) = 0$$

を考えて、1 成分の波動場を  $\phi(x)$  とする。ローレンツ変換

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$$

のもとで

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x')$$

と変換された時、ダランベリアンがローレンツ不変だったから

$$(\square + m^2) \phi'(x') = 0$$

が成り立つ。相対論的な不変性の要求はローレンツ変換において

$$\phi(x) = \phi'(x') \quad (3.19)$$

が成り立つ場合で、このような場をスカラー場という。

スカラー場には実数をとる場合と複素数まで拡大する場合がある。

はじめに実スカラー場を考える。この時のラグランジアン密度は

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) - \frac{1}{2} m^2 \phi^2(x)$$

とおけ、一般化運動量とハミルトニアン密度も

$$\pi(x) = \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}(x)} \mathcal{L}(x) = \dot{\phi}(x) \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x) &= \pi(x) \dot{\phi}(x) - \mathcal{L}(x) \\ &= \frac{1}{2} \left[ \pi^2(x) + \sum_{i=1}^3 \partial^i \phi(x) \partial^i \phi(x) + m^2 \phi^2(x) \right] \end{aligned} \quad (3.21)$$

この時、細かくいうと  $c > 0$  の定数をかけた  $c\mathcal{L}$  としても

$$\phi \rightarrow \sqrt{c} \phi \quad (3.22)$$

とすれば、同じ運動方程式をつくることができる。

### 3.5.3 複素スカラー場

次に  $\phi(x)$  が複素数の場合を考える。これを複素スカラー場 (Complex scalar field) という。

この場合は独立な場として  $\phi$  と  $\phi^*$  の 2 種類がある。

それぞれがクラインゴールドン方程式を満たすので

$$\mathcal{L}(x) = c [\partial_\mu \phi^*(x) \partial^\mu \phi(x) - m^2 \phi^*(x) \phi(x)]$$

となる。波動関数を実部と虚部にわけると

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 + i\phi_2)$$

$$\phi^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 - i\phi_2)$$

と変換できたのでラグランジアン密度は

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2} c \sum_i^2 [\partial_\mu \phi_i(x) \partial^\mu \phi_i(x) - m^2 \phi_i^2(x)]$$

となる。今後  $c = 1$  とする。

また、一般化運動量も  $\phi$  共役な  $\pi$ 、 $\phi^*$  と共役な  $\pi_*$  があり

$$\pi(x) = \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}} \mathcal{L}(x) = \dot{\phi}^*(x) \quad (3.23)$$

$$\pi_*(x) = \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}^*} \mathcal{L}(x) = \dot{\phi}(x) = \pi^*(x) \quad (3.24)$$

これからハミルトニアンが

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x) &= \pi(x)\dot{\phi}(x) + \pi_*(x)\dot{\phi}^* - \mathcal{L} \\ &= \pi_*(x)\pi(x) + \sum_{i=1}^3 \partial^i \phi^*(x) \partial^i \phi(x) + m^2 \phi^*(x) \phi(x) \end{aligned} \quad (3.25)$$

となる。

複素場では自由度が2倍に広がる。よって交換関係の組み合わせも増える。

まず、基本的に座標が異なれば交換する。 $x^\mu = (t, \mathbf{x})$  とする。

$$\left[ \pi(x), \phi(x') \right] = \left[ \pi^\dagger(x), \phi(x') \right] = -i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

次は常に交換する。

$$\left[ \pi(x), \pi(x') \right] = \left[ \phi(x), \phi(x') \right] = \left[ \pi(x), \phi^\dagger(x') \right] = \left[ \pi'(x), \phi(x') \right] = 0$$

生成、消滅演算子の関係も式から

$$\left[ a(\mathbf{p}), a^\dagger(\mathbf{p}') \right] = \left[ b(\mathbf{p}), b^\dagger(\mathbf{p}') \right] = (2\pi)^3 2p^0 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \quad (3.26)$$

が得られる。

次は常に交換する。

$$\left[ a(\mathbf{p}), a(\mathbf{p}') \right] = \left[ b(\mathbf{p}), b(\mathbf{p}') \right] = \left[ a(\mathbf{p}), b(\mathbf{p}') \right] = \left[ a(\mathbf{p}), b^\dagger(\mathbf{p}') \right] = 0 \quad (3.27)$$

この時、 $a, b$  は次節で登場する粒子、反粒子の関係になっている。

留意すべきは、生成と消滅が複素共役関係で結ばれていて、反粒子は時間反転で結ばれていることである。つまり、時間推進は  $t$  のパラメタを増やしていくというイメージではなくて、過去と未来からの定常波の重ね合わせのイメージになる。

相対性理論は時間と空間を平等に扱うことを試みたが、明らかに時間に関しては奥深いからくりがまだ残されているわけである。

### 3.5.4 S,H,I 描像

古典論では物質については常にそこに存在するもので観測者の影響を受けることはないが、量子論ではこのへんの事情がかなり異なってくる。場の量はヒルベルト空間内の線形作用素であり、つまり、これが物質を表しているわけではない。この作用素が状態ベクトルと掛けあって、期待値というスカラー量を得る。内積をとる結果が観測値を得ることになるわけである。

前節のフーリエ変換はいわば関数の内積をとることを一般的にしたが、その応用で行列の内積をとることで固有値を得、それが物理量になるわけである。

従って、ある演算（相互作用）をさせないと物理量を得ることができない。この演算の仕方には同じ結果を出すのにいくつかの方法がある、具体的にはシュレディンガー描像 **S**、ハイゼンベルグ描像 **H**、両者を折衷した相互作用描像 **I** である。

そこで特徴的な2つの場、スカラー場を  $\phi(\mathbf{x}, t)$  とスピノール場  $\psi(\mathbf{x}, t)$  とする。尚、ここでは最初自然単位系ではなく、 $c, \hbar$  を用いる。

非相対論的立場でこの2つの場が相互作用している場合は次のように表される。

$$\left( \nabla^2 - \kappa^2 - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \right) \phi(\mathbf{x}, t) = f\psi^*\psi$$



$$\left(i\hbar\partial_t + \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\right)\psi(\mathbf{x}, t) = -f\phi\psi$$

これはハイゼンベルグの運動方程式

$$i\hbar\partial_t\phi(\mathbf{x}, t) = [\phi(\mathbf{x}, t), H] \quad (3.28)$$

$$i\hbar\partial_t\psi(\mathbf{x}, t) = [\psi(\mathbf{x}, t), H]$$

において相互作用を含むハミルトニアン

$$H = \int d^3x \frac{1}{2} \{c^2\pi \cdot \pi + \nabla\phi \cdot \nabla\phi + \kappa^2\phi \cdot \phi\} - \int d^3x f \{\psi^*\psi \cdot \phi\} + \frac{\hbar^2}{2m} \int d^3x \nabla\psi^* \nabla\psi \quad (3.29)$$

を考えて、次の交換、反交換関係を用いると導ける

$$\begin{aligned} [\pi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{x}', t)] &= -i\hbar\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\ \{\psi(\mathbf{x}, t), \psi^*(\mathbf{x}', t)\} &= \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \end{aligned} \quad (3.30)$$

ただし、波動関数は次のように時間項を分離できるとする。

$$\phi(\mathbf{x}, t) = e^{iHt/\hbar}\phi(\mathbf{x}, 0)e^{-iHt/\hbar}$$

$$\psi(\mathbf{x}, t) = e^{iHt/\hbar}\psi(\mathbf{x}, 0)e^{-iHt/\hbar}$$

任意の物理量も

$$F(t) = e^{iHt/\hbar}F(0)e^{-iHt/\hbar}$$

とできるとする。

量子論では時間依存性が場の量が担うのかヒルベルト空間が担うかは自由だというわけである。

これにより、シュレディンガー描像 (Generalized\_Schrodinger\_Picture) とハイゼンベルグ描像 (Generalized\_Heisenberg\_Picture) の立場ができる。

ヒルベルト空間内のベクトルとしてハイゼンベルグ描像では状態ベクトル  $|\Phi_H\rangle$  は時間変化しない。

$$\frac{d}{dt}|\Phi_H\rangle = 0$$

が常に成り立つ。演算子側が時間変化を担うわけである。

これに対しシュレディンガー描像では

$$|\Psi_S(t)\rangle \equiv e^{-iHt/\hbar}|\Phi_H\rangle$$

で定義し、ヒルベルト空間に時間変化するベクトルを置く。これは次のようにシュレディンガー方程式を表している。

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{d}{dt}|\Psi_S(t)\rangle &= H|\Psi_S(t)\rangle \\ i\hbar\frac{\partial}{\partial t}F(0) &= 0 \end{aligned}$$

どちらにしても観測される期待値が

$$\langle\Phi_H|F(t)|\Phi_H\rangle = \langle\Psi_S|F(0)|\Psi_S\rangle$$

となるので、同じ結果を与える。

最後に便利なのは相互作用表示である。次のように時間変化項を分離できるハミルトニアンを考える。

$$H = H_0 + H'$$

例えば式 3.29 の場合、相互作用の部分が分離され、

$$H_0 \equiv \int d^3x \frac{1}{2} \{c^2 \pi \cdot \pi + \nabla \phi \cdot \nabla \phi + \kappa^2 \phi \cdot \phi\} + \frac{\hbar^2}{2m} \int d^3x \nabla \psi^* \nabla \psi$$

$$H' \equiv - \int d^3x f \{\psi^* \psi \cdot \phi\}$$

となる。相互作用描像では演算子にはこのハミルトニアンの定数部分のみを割り当て、

$$\phi_I(\mathbf{x}, t) = e^{iH_0 t/\hbar} \phi(\mathbf{x}, 0) e^{-iH_0 t/\hbar}$$

$$\psi_I(\mathbf{x}, t) = e^{iH_0 t/\hbar} \psi(\mathbf{x}, 0) e^{-iH_0 t/\hbar}$$

とする。この場合のハイゼンベルグの運動方程式は

$$i\hbar \partial_t F_I(t) = [F_I(t), H_0]$$

となる。相互作用描像では時間進展が同時刻であるから式 3.30 が使えて、ヒルベルト空間のベクトル

$$\begin{aligned} |\Psi_I\rangle &\equiv e^{iH_0 t/\hbar} e^{-iHt/\hbar} |\Phi_H\rangle \\ &\equiv e^{iH_0 t/\hbar} |\Psi_S(t)\rangle \end{aligned} \quad (3.31)$$

で相互作用のベクトルを定義する。

この時の期待値は

$$\begin{aligned} \langle \Phi_H | F(t) | \Phi_H \rangle &= \langle \Phi_H | e^{iHt/\hbar} F(0) e^{-iHt/\hbar} | \Phi_H \rangle \\ &= \langle \Phi_H | e^{iHt/\hbar} e^{-iH_0 t/\hbar} e^{iH_0 t/\hbar} F(0) e^{-iH_0 t/\hbar} e^{iH_0 t/\hbar} e^{-iHt/\hbar} | \Phi_H \rangle \\ &= \langle \Psi_I | F_I(t) | \Psi_I \rangle \end{aligned}$$

ただし、

$$F_I(t) = e^{iH_0 t/\hbar} F(0) e^{-iH_0 t/\hbar}$$

となる。よって相互作用描像のシュレディンガー方程式は

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi_I(t)\rangle = H'_I(t) |\Psi_I(t)\rangle \quad (3.32)$$

$$H'_I(t) = e^{iH_0 t/\hbar} H' (0) e^{-iH_0 t/\hbar}$$

とおける。これは相互作用描像では場の量は相互作用のない自由場としてふるまい、時間依存性はヒルベルト空間のベクトルが担うことを意味している。

式 3.31 に見るように、これらの演算は指数関数の積が位相部分の和になる。

基本的には位相をずらす演算子である。

$$U(t) \equiv e^{iH_0 t/\hbar} e^{-iHt/\hbar} = e^{-i(H-H_0)t/\hbar} = e^{-i\Delta H t/\hbar}$$

とすると、この場合は  $\Delta H = H'_I$  だから

$$i\hbar \frac{d}{dt} U(t) = H'_I(t) U(t)$$

を満たす。相互作用表示とハイゼンベルグ表示はこの  $U(t)$  を用いて

$$F(t) = U^{-1} F(t) U$$

とかける。これは相互作用の時間変化を  $U(t)$  がになっているので時間経過を明瞭にするために  $U(t, t_0)$  とおくことが多い。

これを用いてヒルベルト空間の相互作用表示でベクトル変化を表すと

$$|\Psi_I(t)\rangle = U(t, t_0) |\Psi_I(t_0)\rangle$$

のように時間経過の演算子として振る舞うことがわかる。

微視的な粒子の関わる時間は現実的には非常に微小だから  $\mathbf{S}$  行列を

$$S \equiv U(\infty, -\infty)$$

は巨視的な時間で起きる遷移確率振幅と見なすことができる。

そこで一般に座標が例えばローレンツ変換  $\Lambda$  のような変換をうけると

$$x \rightarrow x' = \Lambda x$$

古典場は

$$\phi'_{CL}(x') = D(\Lambda) \phi_{CL}(x) \quad (3.33)$$

のように変換される。しかし、ここまでで見てきたように量子場には演算子と状態ベクトルがあるので注意がいる。

演算子を一般に  $F$  とすると、ハイゼンベルグ描像では

$$F(x) \rightarrow F'(x) = U(\Lambda)^{-1} F(x) U(\Lambda)$$

のように演算子のみ変換し、シュレディンガー描像では

$$|\Phi\rangle \rightarrow |\Phi'\rangle = U(\Lambda) |\Phi\rangle$$

のように変換する。よって  $U$  がユニタリであれば

$$\langle \Phi' | F | \Phi' \rangle = \langle \Phi | U^\dagger(\Lambda) F U(\Lambda) | \Phi \rangle = \langle \Phi | F | \Phi \rangle$$

となり、内積をとってしまえば区別がつかない。

量子力学のエーレンフェストの定理によれば量子論と古典論での観測量を次のような関係にある。

$$\phi_{CL} = \langle \Phi | \phi | \Phi \rangle$$

$$\phi_{CL}^* = \langle \Phi | \phi | \Phi \rangle^* = \langle \Phi | \phi^\dagger | \Phi \rangle$$

となるので式 3.33 より

$$\langle \Phi' | \phi(x') | \Phi' \rangle = D(\Lambda) \langle \Phi | \phi(x) | \Phi \rangle \rightarrow \langle \Phi | U(\Lambda)^{-1} \phi(x') U(\Lambda)^{-1} | \Phi \rangle = D(\Lambda) \langle \Phi | \phi(x) | \Phi \rangle$$

ここで  $D(\Lambda)$  は古典場にも量子場にも作用する座標変換である。この式が任意に成り立つ条件として

$$U(\Lambda) \phi(x) U(\Lambda)^{-1} = D(\Lambda)^{-1} \phi(x') \quad (3.34)$$

となればよいことがわかる。これは座標の変換をもどすことを考えると演算子の変換で置き換えられることを示す。

ハイゼンベルグの描像の逆になっている。

これは次章であつかう C.R.T 変換の基礎になる関係である。

### 3.6 ハイゼンベルグ方程式

#### 3.6.1 ハイゼンベルグ方程式 [65]

シュレディンガー方程式を

$$|\phi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} |\phi(0)\rangle \quad (3.35)$$

とおく。これから演算子  $A$  の状態  $|\phi(t)\rangle$  の期待値が

$$\langle \phi(t) | A | \phi(t) \rangle_t = \langle \phi(0) | e^{\frac{i}{\hbar}Ht} A e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} | \phi(0) \rangle_t \quad (3.36)$$

とかける。よって

$$A(t) = e^{\frac{i}{\hbar}Ht} A e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} \quad (3.37)$$

とおくと cl を古典場として次のようにハイゼンベルグの方程式が導ける

$$\begin{aligned} \frac{dA(t)}{dt} &= \frac{i}{\hbar} H e^{\frac{i}{\hbar}Ht} A e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} - \frac{i}{\hbar} e^{\frac{i}{\hbar}Ht} A H e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} + \left( \frac{\partial A}{\partial t} \right)_{cl} \\ &= \frac{i}{\hbar} e^{\frac{i}{\hbar}Ht} [H, A] e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} + \left( \frac{\partial A}{\partial t} \right)_{cl} \\ &= \frac{i}{\hbar} [H, A(t)] + \left( \frac{\partial A}{\partial t} \right)_{cl} \end{aligned}$$

一般に

$$e^B A e^{-B} = A + [B, A] + \frac{1}{2!} [B, [B, A]] \cdots \quad (3.38)$$

を用いて

$$A(t) = A + \frac{it}{\hbar} [H, A] + \left( \frac{it}{\hbar} \right)^2 [H, [H, A]] / 2! + \left( \frac{it}{\hbar} \right)^3 [H, [H, [H, A]]] / 3! + \cdots \quad (3.39)$$

と展開することができる。

場の演算子の時間発展をみるためにはハイゼンベルグ描像が便利である。そこではじめから

$$\phi_H(t, \mathbf{x}) = e^{iH(t-t_0)} \phi_0 e^{-iH(t-t_0)}$$

とにおいて第 2 量子化を試みる。  $x^0 = t_0$  において

$$\phi_H = \int d^3\tilde{\mathbf{k}} \left[ e^{iH(t-t_0)} a(\mathbf{k}) e^{-iH(t-t_0)} e^{-ikx} + e^{iH(t-t_0)} a^\dagger(\mathbf{k}) e^{-iH(t-t_0)} e^{ikx} \right]_{x^0=t_0}$$

だから、生成、消滅演算子共に

$$a_H(t, \mathbf{p}) = e^{iH(t-t_0)} a(t_0, \mathbf{p}) e^{-iH(t-t_0)} \quad (3.40)$$

のように時間発展するとみなしてよい。

これはある時刻での Fock 空間はその時刻の生成演算子から構成されることになる。

極めて膨大な情報量を示唆することになるが、各時刻毎に無限大の完全系が構成されていないといけない。

特に相互作用がなければ  $a(\mathbf{p}) H_0 = 0$  だから

$$[H_0, a(t_0, \mathbf{p})] = -p^0 a(t_0, \mathbf{p}) \quad (3.41)$$

ここで式 1.23 の有用な次の関係が利用できる。

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2!} [A, [A, B]] + \frac{1}{3!} [A, [A, [A, B]]] + \dots$$

これから次のように複素平面の回転のように扱える。

$$\begin{aligned} a_H(t, \mathbf{p}) &= e^{iH(t-t_0)} a(t_0, \mathbf{p}) e^{-iH(t-t_0)} \\ &= a(t_0, \mathbf{p}) + i(t-t_0) [H_0, a(t_0, \mathbf{p})] + \frac{1}{2} i^2 (t-t_0)^2 [H_0, [H_0, a(t_0, \mathbf{p})]] + \dots \\ &= a(t_0, \mathbf{p}) e^{-ip^0(t-t_0)} \end{aligned} \quad (3.42)$$

同様に

$$a_H^\dagger(t, \mathbf{p}) = a(t_0, \mathbf{p}) e^{ip^0(t-t_0)}$$

となる。これから実スカラー場は

$$\phi_H = \int d^3\tilde{\mathbf{k}} [a(\mathbf{k}) e^{-ikx} + a^\dagger(\mathbf{k}) e^{ikx}] \quad (3.43)$$

また、複素共役の波動関数も含めて複素スカラー場に拡大すると式 3.27 より

$$\phi_H = \int d^3\tilde{\mathbf{k}} [a(\mathbf{k}) e^{-ikx} + b^\dagger(\mathbf{k}) e^{ikx}] \quad (3.44)$$

となる。式 3.41 はいわば、ハイゼンベルグの運動方程式である。

このように交換関係と 3.42 を用いて量子化することはさらに奥深い幾何学的な構造が背景にあることを示唆する。

量子論の場がいくつもの運動量（モード）の重ね合わせになっていることがわかる。

### 3.6.2 ハイゼンベルグ描像

この描像では時間依存性は状態ベクトルではなくて、演算子側に振られる。従って、後の経路積分の考え方を導き安い。

ハイゼンベルグ描像では次のように時間依存部分を分離する。

$$\phi(x) = \phi(\mathbf{x}, t) = e^{iHt} \phi(\mathbf{x}) e^{-iHt}$$

そして一般的な演算子  $\mathcal{O}$  に対してハイゼンベルグ方程式は式 3.28 から

$$i \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{O} = [\mathcal{O}, H]$$

となる。ハイゼンベルグ方程式は交換関係で作れるのが便利である。

従ってクライン・ゴールドン場では自由粒子の場合、ハミルトニアン密度をから次のようにおく

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \pi^2(\mathbf{x}', t) + \frac{1}{2} (\nabla \phi(\mathbf{x}', t))^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2(\mathbf{x}', t) \quad (3.45)$$

よってハイゼンベルグの方程式が 3.21 より式 3.52 の関係を用いると

$$[\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

であったから

$$\begin{aligned}
i\frac{\partial}{\partial t}\phi(\mathbf{x},t) &= \left[ \phi(\mathbf{x},t), \int d^3x' \left\{ \frac{1}{2}\pi^2(\mathbf{x}',t) + \frac{1}{2}(\nabla\phi(\mathbf{x}',t))^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2(\mathbf{x}',t) \right\} \right] \\
&= \left[ \phi(\mathbf{x},t), \int d^3x' \left\{ \frac{1}{2}e^{iHt}\pi^2(\mathbf{x}')e^{-iHt} + \frac{1}{2}\nabla(e^{iHt}\phi(\mathbf{x}')e^{-iHt})\nabla(e^{iHt}\phi(\mathbf{x}')e^{-iHt}) + \frac{1}{2}m^2\phi^2(\mathbf{x}',t) \right\} \right] \\
&= \int d^3x' (i\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\pi(\mathbf{x}',t)) \\
&= i\pi(\mathbf{x},t)
\end{aligned} \tag{3.46}$$

さらに

$$\begin{aligned}
i\frac{\partial}{\partial t}\pi(\mathbf{x},t) &= \left[ \pi(\mathbf{x},t), \int d^3x' \left\{ \frac{1}{2}\pi^2(\mathbf{x}',t) + \frac{1}{2}(\nabla\phi(\mathbf{x}',t))^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2(\mathbf{x}',t) \right\} \right] \\
&= -\frac{1}{2}\int d^3x' (\nabla[\pi(\mathbf{x},t),\phi(\mathbf{x}',t)]\nabla\phi(\mathbf{x}',t) + \nabla\phi(\mathbf{x}',t)\nabla[\pi(\mathbf{x},t),\phi(\mathbf{x}',t)]) \\
&\quad - m^2\phi(\mathbf{x}',t)\delta^{(3)}(\mathbf{x}'-\mathbf{x}) \\
&= -i\left(\int d^3x' (\nabla\delta^{(3)}(\mathbf{x}'-\mathbf{x})\nabla\phi(\mathbf{x}',t))\right) - m^2\phi(\mathbf{x},t) \\
&= -i(\square + m^2)\phi(\mathbf{x},t)
\end{aligned} \tag{3.47}$$

ここで複素場の場合は式 3.23 から一般化運動量も  $\phi$  共役な  $\pi$ 、 $\phi^*$  と共役な  $\pi_*$  があり

$$\pi(\mathbf{x},t) = \frac{\partial}{\partial t}\phi^*(\mathbf{x},t)$$

となることに留意する。ここでは

$$\pi(\mathbf{x},t) = \frac{\partial}{\partial t}\phi(\mathbf{x},t)$$

とできるので

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi = (\nabla^2 + m^2)\phi \tag{3.48}$$

であり、時間依存したクライン・ゴルドン方程式である。

式 6.31 からハミルトニアンは

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\mathbf{p}} \left( a_{\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{p}} + \frac{1}{2} [a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}}^\dagger] \right) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\mathbf{p}} \left( a_{\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{p}} + \frac{1}{2} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(0) \right)$$

とかけたから、 $[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})$  から消滅演算子について

$$\begin{aligned}
[a_{\mathbf{p}}, H] &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left( \left( a_{\mathbf{p}} E_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{p}} + \frac{1}{2} (2\pi)^3 a_{\mathbf{p}} E_{\mathbf{p}} \delta^{(3)}(0) \right) - \left( E_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}} + \frac{1}{2} (2\pi)^3 E_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}} \delta^{(3)}(0) \right) \right) \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (E_{\mathbf{p}} [a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}^\dagger] a_{\mathbf{p}}) \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (E_{\mathbf{p}} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) a_{\mathbf{p}}) \\
&= E_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}
\end{aligned}$$

の関係がある。

まとめると消滅・生成演算子のハイゼンベルグ描像は位相関係が

$$e^{iHt} a_{\mathbf{p}} e^{-iHt} = e^{-iE_{\mathbf{p}}t} a_{\mathbf{p}}$$

$$e^{iHt} a_{\mathbf{p}}^{\dagger} e^{-iHt} = e^{+iE_{\mathbf{p}}t} a_{\mathbf{p}}^{\dagger}$$

となる。シュレディンガー描像では正、負の向きの平面波の位相がつく。一方で振幅は次のように交換関係で表現できる。

$$[H, a_{\mathbf{p}}] = -E_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}$$

$$[H, a_{\mathbf{p}}^{\dagger}] = +E_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^{\dagger}$$

これから

$$H a_{\mathbf{p}} = a_{\mathbf{p}} (H - E_{\mathbf{p}})$$

と表すことができる。つまり、ハミルトニアンに消滅演算子を左作用させると、右にエネルギーを1量子減らしたハミルトニアン演算子がかかる。

これはすぐに

$$H^n a_{\mathbf{p}} = a_{\mathbf{p}} (H - E_{\mathbf{p}})^n$$

とすることができる。生成演算子についても同様に

$$H a_{\mathbf{p}}^{\dagger} = a_{\mathbf{p}}^{\dagger} (H + E_{\mathbf{p}})$$

$$H^n a_{\mathbf{p}}^{\dagger} = a_{\mathbf{p}}^{\dagger} (H + E_{\mathbf{p}})^n$$

次のように指数の演算子も対角化できる。

$$e^{iHt} a_{\mathbf{p}} e^{-iHt} = a_{\mathbf{p}} e^{-iE_{\mathbf{p}}t} \quad (3.49)$$

$$e^{iHt} a_{\mathbf{p}}^{\dagger} e^{-iHt} = a_{\mathbf{p}}^{\dagger} e^{iE_{\mathbf{p}}t} \quad (3.50)$$

シュレディンガー描像での式 6.24 から式 3.48 を満たす一般解が次のように求まる。

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} (a_{\mathbf{p}} e^{-ip \cdot x} + a_{\mathbf{p}}^{\dagger} e^{+ip \cdot x}) \quad (3.51)$$

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}_{sc}}{\partial \dot{\phi}(x)} = \partial^0 \phi(x) = -i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{E_{\mathbf{p}}}{2}} (a_{\mathbf{p}} e^{-iq \cdot x} - a_{\mathbf{p}}^{\dagger} e^{+iq \cdot x}) \quad (3.52)$$

これは平面波を表すが、太字ではない  $p, x$  は 4 元値を表すので

$$p \cdot x = E_{\mathbf{p}} \cdot t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}$$

であることに留意する。

このハイゼンベルグ表示を考えるわけだが、第 2 部のハミルトンの原理から、作用を表す

$$\Theta(\phi) = \delta_L \phi(x) \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi)} \right\} + \partial_{\mu} \left\{ \delta_L \phi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi)} + \delta x^{\mu} \mathcal{L} \right\}$$

$$\Theta_H(t) = p_i \delta q^i(t) - H(p, q) \delta t$$

を定義した。

ここでもハミルトニアン  $H$  と、全運動量  $\mathbf{P}$  を成分にもつ拡大した運動量を全

$$P^{\mu} \equiv (H, \mathbf{P})$$

として定義すると 3.49,3.50 から次が期待できる。

$$e^{i\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}} a_{\mathbf{p}} e^{-i\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}} = a_{\mathbf{p}} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \quad (3.53)$$

$$e^{i\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}} a_{\mathbf{p}}^{\dagger} e^{-i\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}} = a_{\mathbf{p}}^{\dagger} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \quad (3.54)$$

つまり、全運動量演算子から固有方程式の固有値のようにある  $\mathbf{p}$  が得られると考えることができる。

さらに、 $P \cdot x = Ht - \mathbf{P} \cdot \mathbf{x}$  のように計量が入るので時間推進を指数側に入れて

$$\begin{aligned} \phi(x) &= e^{i(Ht - \mathbf{P}\cdot\mathbf{x})} \phi(0) e^{-i(Ht - \mathbf{P}\cdot\mathbf{x})} \\ &= e^{iP \cdot x} \phi(0) e^{-iP \cdot x} \end{aligned}$$

とまとまる。数学的には大変見栄えがよいが、物理的には普通ではない。

それは  $p^0$  を常に正とするとクライン・ゴルドン方程式から

式が示すのはある特定の運動量を得ることが時間発展にたいして正負の振動数を持ったモードの波の重ね合わせになる。

つまり、1 粒子モードが正の振動数を持つ振幅が消滅演算子の波と負の振動数を持つ振幅が生成演算子の波の合成になっている。これらを後に考察していく。

### 3.6.3 一般化

ここではさらに量子化を考えてハイゼンベルグ方程式を一般化する。

はじめにスカラー場であれば並進やローレンツ変換に対して不変であり、さらに、

実スカラー場であればさらに位相変換に対しても不変になることを用いる。

一般座標と運動量を  $u_a(x), \pi_a(x)$  として、ネーターの定理における 4 元運動量を正規積を用いて次のように定義する。

$$P^{\mu} = \int d^3\mathbf{x} \mathcal{P}(x) = \int d^3\mathbf{x} : [\pi_a(x) \partial^{\mu} u_a(x) - g^{0\mu} \mathcal{L}(x)] :$$

として、位置、運動量  $u_a, \pi_a$  に式 3.10、3.13 を使うと

$$H = P^0 = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \sum_a : [\dot{\phi}^2(x) + (\nabla\phi(x))^2 + m^2\phi^2(x)] :$$

$$\mathbf{P} = - \int d^3\mathbf{x} : \dot{\phi}(x) \nabla\phi(x) :$$

一方で前節の平面波展開 3.14 から実スカラーの場合は

$$H = \int d^3\tilde{\mathbf{k}} k^0 a^{\dagger}(\mathbf{k}) a(\mathbf{k})$$

$$\mathbf{P} = \int d^3\tilde{\mathbf{k}} \mathbf{k} a^{\dagger}(\mathbf{k}) a(\mathbf{k})$$

であったから、 $a^{\dagger}, a$  は  $k^0$  のエネルギー、 $\mathbf{k}$  の運動量を生成、消滅させていると考え、固有方程式

$$H a^{\dagger}(\mathbf{p}) |0\rangle = p^0 a^{\dagger}(\mathbf{p}) |0\rangle$$

$$\mathbf{P} a^{\dagger}(\mathbf{p}) |0\rangle = \mathbf{p} a^{\dagger}(\mathbf{p}) |0\rangle$$



が成り立つ。複素スカラー場の場合は

$$H = \int d^3\mathbf{k} k^0 [a^\dagger(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) + b^\dagger(\mathbf{k}) b(\mathbf{k})]$$

$$\mathbf{P} = \int d^3\mathbf{k} \mathbf{k} [a^\dagger(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) + b^\dagger(\mathbf{k}) b(\mathbf{k})]$$

である。このとき、相対論の式 3.76 があるので  $a^\dagger, b^\dagger$  どちらからの生成による粒子の質量は  $m$  で負になることはない。

$$H b^\dagger(\mathbf{p}) |0\rangle = p^0 b^\dagger(\mathbf{p}) |0\rangle$$

$$\mathbf{P} b^\dagger(\mathbf{p}) |0\rangle = \mathbf{p} b^\dagger(\mathbf{p}) |0\rangle$$

どちらにしても 4 元表示では次の関係は成立する。

$$p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$$

そこでこの、拡大したハミルトニアンとハミルトニアン密度を次のようにおく、

$$P^\mu = (H, \mathbf{P})$$

$$\mathcal{P}^\mu = (k_0, \mathbf{k}) [a^\dagger(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) + b^\dagger(\mathbf{k}) b(\mathbf{k})]$$

とする。

これから一般化されたハイゼンベルグ方程式が導けて、

$$i\partial^\mu \phi(x) = [\phi(x), P^\mu] \quad (3.55)$$

とすることができる。これはポアソンの方程式の拡大版で一般化されたハイゼンベルグ方程式という。

これから式 3.41 と

$$\phi(x+a) = e^{iPa} \phi(x) e^{-iPa}$$

となり、時空の並進という演算子になっている。

これは演算子  $P$  が並進の演算子であることを表している。  $x=0, a=x$  を選べば

$$\phi(x) = e^{iPx} \phi(0) e^{-iPx}$$

となる。これは散乱振幅を計算する場合に有用である。

### 3.7 粒子統計

古典場から出発して、生成・消滅演算子を導入することで古典的な波動場から量子論的な粒子像を得ることができた。

これは古典場での正、負に進む波から定常波ができるように、複素共役の波から振幅部分の量子化が内積をとると見えるわけだ。しかし、波動関数を内積をとらなければ、波の重ね合わせである。単純に言えばこれは単なる足し算である。しかし、量子化の際にはかけ算が状態ベクトルをつくる。ここに古典論との決定的な相違点が登場する。

量子論ではこの“かける”の操作は同時にできない。順序があるのである。

これは量子力学の枠組みが演算作用に順序をつける構造をもっていることによる。例えばこれまで扱ってきた回転を考える。回転が 1 平面内で行われていけば右周りと左周りは交換する。しかし、この回転はもう一つ

の方向を記述し、ねじのように回転と共に変化していく位置を持つ。逆回転で元にもどれば可換のだが、逆回転で位相が反転する場合は反交換する。

量子化には  $a, a^\dagger$  の交換関係が使われた。そこで次のように複数の生成演算子を作用すると式 3.8 から

$$a^\dagger(\mathbf{p}_1) a^\dagger(\mathbf{p}_2) \cdots a^\dagger(\mathbf{p}_n) |0\rangle$$

において、 $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 = \cdots = \mathbf{p}_n$  としても同じように成り立つ。この場合はこの粒子はボース統計 (**Bose\_statistics**) に従うという。

しかし、次のような反交換関係

$$[a(\mathbf{p}_i), a^\dagger(\mathbf{p}_j)]_+ \equiv a(\mathbf{p}_i) a^\dagger(\mathbf{p}_j) + a^\dagger(\mathbf{p}_j) a(\mathbf{p}_i) = \delta_{ij}$$

を定義して 2 粒子の場合

$$a^\dagger(\mathbf{p}_1) a^\dagger(\mathbf{p}_2) |0\rangle = -a^\dagger(\mathbf{p}_2) a^\dagger(\mathbf{p}_1) |0\rangle$$

が成り立つ。従って、同じ状態に 1 個以上の状態をつくることができない。

$$a^\dagger(\mathbf{p}) a^\dagger(\mathbf{p}) |0\rangle = a^\dagger(\mathbf{p}) |1\rangle = 0$$

つまり、反交換関係を満たす場合は状態は  $|0\rangle, |1\rangle$  しかないことになる。

このような統計をフェルミ統計 (**Fermi\_statistics**) という。

### 3.8 変換性

ここで今後のためにスカラー場において生成・消滅演算子のローレンツ変換や、C.P.T 変換をまとめておこう。

#### 3.8.1 ローレンツ変換

ローレンツ変換

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$$

としてクライン・ゴールドン方程式を満たす古典場のローレンツ変換性は式 3.34 より

$$\phi'(x') = \phi(x)$$

となるべきだから

$$U(\Lambda)\phi(x)U(\Lambda)^{-1} = \phi(x')$$

として、式 3.43 の平面波展開に代入すると

$$\int d^3\tilde{\mathbf{k}} [a(\mathbf{k})e^{-ikx'} + b^\dagger(\mathbf{k})e^{ikx'}] = \int d^3\tilde{\mathbf{k}} [U(\Lambda)a(\mathbf{k})U(\Lambda)^{-1}e^{-ikx} + U(\Lambda)b^\dagger(\mathbf{k})U(\Lambda)^{-1}e^{ikx}] \quad (3.56)$$

となる。これに変数変換

$$k' = \Lambda k$$

を代入しても、体積要素にはローレンツ不変性

$$d^3\tilde{\mathbf{k}} = d^3\tilde{\mathbf{k}'}$$

が成り立つ。式 6.42 から

$$\int d^3\tilde{\mathbf{k}} \equiv \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 (2k^0)} = \frac{1}{2(2\pi)^3} \int d^4k \delta(k^2 - m^2)$$

となる。従って式 3.56 の左辺は  $k' = \Lambda k$  として、その後ローレンツ不変  $kx = k'x'$  を用いれば

$$\begin{aligned} \int d^3\tilde{\mathbf{k}} \left[ a(\mathbf{k})e^{-ikx'} + b^\dagger(\mathbf{k})e^{ikx'} \right] &= \int d^3\tilde{\mathbf{k}}' \left[ a(\mathbf{k}')e^{-ik'x'} + b^\dagger(\mathbf{k}')e^{ik'x'} \right] \\ &= \int d^3\tilde{\mathbf{k}} \left[ a(\mathbf{k}')e^{-ikx} + b^\dagger(\mathbf{k}')e^{ikx} \right] \end{aligned}$$

この結果と式 3.56 の右辺を比べると次のローレンツ変換に対する変換則が得られる。

$$U(\Lambda)a(\mathbf{k})U(\Lambda)^{-1} = a(\mathbf{k}') = a(\Lambda\mathbf{k})$$

$$U(\Lambda)b^\dagger(\mathbf{k})U(\Lambda)^{-1} = b^\dagger(\mathbf{k}') = b^\dagger(\Lambda\mathbf{k})$$

この時、状態の変換性はどうなるかを見るために、運動量が  $\mathbf{p}$  のスカラー粒子  $a$  が 1 個存在する状態を  $|\mathbf{p}\rangle$  として

$$|\mathbf{p}\rangle \rightarrow U(\Lambda)|\mathbf{p}\rangle$$

となるが真空については

$$U(\Lambda)|0\rangle \rightarrow |0\rangle$$

となるので、

$$U(\Lambda)|\mathbf{p}\rangle = U(\Lambda)a^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle = U(\Lambda)a^\dagger(\mathbf{p})U(\Lambda)^{-1}U(\Lambda)|0\rangle = a^\dagger(\Lambda\mathbf{p})|0\rangle$$

となるので

$$|\mathbf{p}\rangle \rightarrow U(\Lambda)|\mathbf{p}\rangle \rightarrow |\Lambda\mathbf{p}\rangle \quad (3.57)$$

となる。

ここで  $|\mathbf{p}\rangle$  の変換を考えるために次のようにおく。

$$|\mathbf{p}\rangle \rightarrow \lambda(\mathbf{p}, \mathbf{p}')|\mathbf{p}'\rangle$$

ローレンツ不変になるためにこの  $\lambda$  をどう決めたらよいだろうか。1 粒子状態でみたように式 6.40

$$(\mathbf{1})_{1particle} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} |\mathbf{p}\rangle \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} \langle\mathbf{p}|$$

とする必要があった。これをみておく。

$$p_\mu p^\mu = m^2, p_0^2 = E_{\mathbf{p}}^2 + m^2$$

となるので

$$\int dp^0 (2\pi) \delta(p^2 - m^2) = \int \frac{dp^0}{2m} (2\pi) \{ \delta(p+m) + \delta(p-m) \} |_{p_0>0} = \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}$$

これから直接次の 4 元積分がローレンツ不変になる。

$$\int d^4p \delta(p_0^2 - \mathbf{p}^2 - m^2) |_{p_0>0} = \int \frac{d^3p}{2p_0} |_{p_0=E_{\mathbf{p}}}$$

式 6.35 のようにローレンツ不変になるのは

$$2E_{\mathbf{p}} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q})$$

であり、規格化された 4 元運動量状態は

$$|p\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} |\mathbf{p}\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} a_{\mathbf{p}}^{\dagger} |0\rangle$$

のようになる。これから、異なった運動量状態の内積をとると、

$$\langle p|q\rangle = 2E_{\mathbf{p}} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q})$$

となり、これがローレンツ不変である。

### 3.8.2 C 変換

前節で反粒子の波動関数をみた。これは複素共役をとることに等しかった。

$$\phi \rightarrow \phi^*$$

従って実スカラー場では反粒子は自分自身でもあることになる。このような粒子を真正中性粒子 (Strictly\_neutral\_particle) という。この変換を  $\mathcal{C}$  で表す。従って実スカラー場は

$$\mathcal{C}\phi(x)\mathcal{C}^{-1} = \phi(x)$$

となる。ミンコフスキー計量では時間成分のみは

$$x^{0*} = -x^0$$

であるので、反粒子の解釈として時間の進行が反転するとされる。

スカラー場の平面波展開をすると生成消滅演算子は  $\mathcal{C}$  変換に対しても不変でないといけない。

$$\mathcal{C}a(\mathbf{p})\mathcal{C}^{-1} = a(\mathbf{p})$$

これに対して複素スカラー場では次のように入れ替えがおきる。

$$\mathcal{C}\phi(x)\mathcal{C}^{-1} = \phi^{\dagger}(x)$$

$$\mathcal{C}\phi^{\dagger}(x)\mathcal{C}^{-1} = \phi(x)$$

さらに  $\phi^{\dagger}$  の平面波展開は式 3.14 より  $e^{-ikx}$  の係数が  $b(\mathbf{k})$ ,  $e^{ikx}$  の係数が  $a^{\dagger}(\mathbf{k})$  になったので

$$\phi^{\dagger}(x) = \int d^3\tilde{\mathbf{k}} [b(\mathbf{k}) e^{-ikx} + a^{\dagger}(\mathbf{k}) e^{+ikx}]$$

とすると

$$\begin{aligned} \mathcal{C}\phi^{\dagger}(x)\mathcal{C}^{-1} &= \int d^3\tilde{\mathbf{k}} [\mathcal{C}b(\mathbf{k}) e^{-ikx}\mathcal{C}^{\dagger} + \mathcal{C}a^{\dagger}(\mathbf{k}) e^{+ikx}\mathcal{C}^{\dagger}] \\ &= \int d^3\tilde{\mathbf{k}} [b^{\dagger}(\mathbf{k}) e^{+ikx} + a(\mathbf{k}) e^{-ikx}] \\ &= \phi(x) \end{aligned}$$

となる。従って

$$\mathcal{C}a(\mathbf{k})\mathcal{C}^{-1} = b(\mathbf{k})$$

$$\mathcal{C}b(\mathbf{k})\mathcal{C}^{-1} = a(\mathbf{k})$$

のように入れ替わっていることがわかる。これから  $\mathcal{C}$  は粒子、反粒子の入れ替えをしていることがわかる。

### 3.8.3 P 変換

スカラーは時空の一点  $x$  にいぞんして決まる。従って次のような符号変換に影響を受けない。

$$x^\mu(t, \mathbf{x}) \rightarrow x'^\mu = \tilde{x}^\mu \equiv (t, -\mathbf{x})$$

従って変換後の波動関数

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x')$$

をクライン・ゴールドン方程式に代入しても

$$\square' \equiv \tilde{\partial}_\mu \tilde{\partial}^\mu = \partial_\mu \partial^\mu = \square$$

$$(\square + m^2) \phi'(x') = 0$$

従ってこの符号を反転する操作を  $P$  とすると2回で元に戻るから

$$P^2 = 1$$

$$P = \pm 1$$

となるので、波動関数は

$$\phi(x) \rightarrow \pm \phi(\tilde{x})$$

となるのでスカラー場の符号反転変換を

$$\mathcal{P}\phi(x)\mathcal{P}^{-1} = \pm \phi(\tilde{x})$$

の2つの変換が考えられる。正の符号はスカラー場と言うのに対し、負の符号をとるものを擬スカラー場 (Pseudo\_scalar) という。

## 3.9 Fock 状態

量子力学の場を構成するのは無限次元の Hilbert 空間であった。これは、いくらでも複数の場を

$$|\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \cdots\rangle$$

のようにつくれる。ただし、これらは個数演算子の固有ベクトル系として完全系をなしていないといけな。これは任意の物理的状態を  $|\Psi\rangle$  とすると次のように展開できることを表す。前節の共役規格化を用いて

$$|\Psi\rangle = \sum_n \int \prod_i^n d^3\mathbf{k}_i |\mathbf{k}_1 \cdots \mathbf{k}_n\rangle \langle \mathbf{k}_1 \cdots \mathbf{k}_n | \Psi\rangle$$

となる。この左辺は

$$\psi_n(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 \cdots, \mathbf{k}_n) = \langle \mathbf{k}_1 \cdots \mathbf{k}_n | \Psi\rangle$$

であり、 $n$  粒子状態の波動関数を表している。これらを重ね合わせの原理に従って全体の波動関数が決められる。

これは多体系の量子論と同等である。ただし、前章で定義した、生成・消滅演算子により、粒子数が変化する。これらの多体系の基底はフォック基底 (Fock\_basis) と呼ばれる。

このフォック基底が張る空間はフォック空間 (Fock\_space) という。

ただし、 $n$  粒子でフォック空間が張られ、 $\Psi_n$  の波動関数があるとする。

この波動関数の振幅が固定されるが位相には自由度が残る。従って、波動性を持ち、干渉がおこる。

ところが、この中の1つの粒子を観測すると、この粒子の波動性が消え、粒子としての座標を決められる。この時、もはや  $\Psi_n$  は量子力学的な純粋状態ではなく、混合状態になる。しかし、内部の  $\Psi_{n-1}$  は純粋状態にある。

実数場  $\phi(t, \mathbf{x})$  についてクライン・ゴルドン方程式は  $\hbar, c$  を用いて

$$\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \phi = 0 \quad (3.58)$$

ラグランジアン密度を

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{1}{2} \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \phi^2 \quad (3.59)$$

として、作用積分の極小条件

$$\delta S = \int d^4x \delta \phi \mathcal{L}(\partial^\mu \phi, \phi) = 0$$

から導けた。ただしここでは

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} &= (1, -1, -1, -1) = g_{\mu\nu} \\ (x^0, x^1, x^2, x^3) &= (ct, \mathbf{x}) \\ \partial_\mu \partial^\mu &= g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = \left(\frac{\partial}{\partial ct}\right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right)^2 \\ d^4x &= d^3x dt \end{aligned}$$

として共役運動量密度を式 3.58 から

$$\Pi(t, \mathbf{x}) = \frac{\delta}{\delta \dot{\phi}(t, \mathbf{x})} \mathcal{L} = \frac{1}{c^2} \dot{\phi}(t, \mathbf{x})$$

とすると、ハミルトニアン密度は式 3.59 から

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \Pi(t, \mathbf{x}) \dot{\phi}(t, \mathbf{x}) - \mathcal{L} \\ &= \frac{1}{2} [c\Pi]^2 + \frac{1}{2} \nabla \phi \nabla \phi + \frac{1}{2} \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \phi^2 \end{aligned} \quad (3.60)$$

となる。体積  $V$  の箱を考えて平面波の正規直交系  $\{u_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})\}$  とすると

$$\int_V d^3x u_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{l}} = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{l}} \quad (3.61)$$

から

$$\begin{aligned} u_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) &= S_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{i\sqrt{2V}} (e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} - e^{-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}), (k_z > 0) \\ u_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) &= C_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2V}} (e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + e^{-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}), (k_z \leq 0) \end{aligned}$$

とすれば、次のように展開できる。

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}}(t) u_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}), \quad c\Pi(t, \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} p_{\mathbf{k}}(t) u_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) \quad (3.62)$$

として、分散関係

$$\omega(\mathbf{k}) = c\sqrt{\mathbf{k}^2 + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2}$$

となるのでハミルトニアン密度の式 3.60 から規格化条件 3.61 を使うと系全体のハミルトニアン  $H$  は

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x \mathcal{H} \\ &= \sum \left\{ \frac{1}{2} c^2 \mathbf{k}^2 + \frac{1}{2} p_{\mathbf{k}}^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right\} \\ &= \sum \left\{ \frac{1}{2} p_{\mathbf{k}}^2 + \frac{1}{2} \omega(\mathbf{k})^2 q_{\mathbf{k}}^2 \right\} \end{aligned} \quad (3.63)$$

となる。これは振動数  $\omega$  の無限個の調和振動子となり、生成、消滅演算子を

$$\begin{aligned} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger &= -i\sqrt{\frac{1}{2\omega}} \cdot p_{\mathbf{k}} + \sqrt{\frac{\omega}{2\hbar}} \cdot q_{\mathbf{k}} \\ \hat{a}_{\mathbf{k}} &= i\sqrt{\frac{1}{2\omega}} \cdot p_{\mathbf{k}} + \sqrt{\frac{\omega}{2\hbar}} \cdot q_{\mathbf{k}} \end{aligned}$$

と表す。これから量子化されたハミルトニアンが

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2} \hbar \omega(\mathbf{k}) \left[ \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} \right] \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \hbar \omega(\mathbf{k}) \left[ \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \right] \end{aligned}$$

交換積を用いて

$$\left[ \hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{l}}^\dagger \right] = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{l}}$$

$$\left[ \hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{l}} \right] = \left[ \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger, \hat{a}_{\mathbf{l}}^\dagger \right] = 0$$

個数演算子の固有状態で表される Fock 空間表示では

$$\left\{ n_1(\mathbf{k}_1), n_1(\mathbf{k}_1), n_1(\mathbf{k}_1), \dots \right\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{n_1}} \frac{1}{\sqrt{n_2}} \frac{1}{\sqrt{n_3}} \dots \right\} \left( a_{\mathbf{k}}^\dagger \right)^{n_1}, \left( a_{\mathbf{k}}^\dagger \right)^{n_2} \left( a_{\mathbf{k}}^\dagger \right)^{n_3} \dots |0\rangle$$

注意点としては、この表示で  $\hbar \mathbf{k}$  の運動量を持つ  $n$  個の粒子状態は

$$|n(\mathbf{k})\rangle = \frac{1}{\sqrt{n(\mathbf{k})!}} \left( \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \right)^{n(\mathbf{k})} |0\rangle$$

また、数演算子  $N$  を用いて、

$$N = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}$$

次のような固有方程式が成り立つ。

$$N |\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n\rangle = n |\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n\rangle$$

これは調和振動子のように  $n$  番目の励起状態と考えるのではなく、 $n$  個の粒子状態と解釈する。

これを **Fock 状態** という。

これにより量子化されたスカラー場の経路積分は先の 1 個の状態を一般化し、

$$\left\langle \{q_{\mathbf{k}}^f\}, t^f \mid \{q_{\mathbf{k}}^i\}, t_i \right\rangle = \int \prod_{\mathbf{k}} \mathcal{D}q_{\mathbf{k}} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{\mathbf{k}} \int_{t_i}^{t_f} dt \left[ \frac{1}{2} \dot{q}_{\mathbf{k}}(t)^2 - \frac{1}{2} \omega(\mathbf{k})^2 q_{\mathbf{k}}^2 \right] \right\}$$

となる。式 3.62 から次の関係

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} \langle \mathbf{x} | \mathbf{k} \rangle \langle \mathbf{k} | t \rangle = \sum_{\mathbf{k}} c q_{\mathbf{k}}(t) u_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} \langle \mathbf{x} | \mathbf{k} \rangle q_{\mathbf{k}}(t)$$

が成り立つ、測度を  $q_{\mathbf{k}}(t)$  から  $\phi(t, \mathbf{x})$  に変数変換すると

$$\mathcal{D}\phi = \det \left[ \langle \mathbf{x} | \mathbf{k} \rangle \prod_{\mathbf{k}} \mathcal{D}q_{\mathbf{k}} \right] \quad (3.64)$$

となるから結局クラインゴルドンの方程式を 4 元空間で積分すると

$$\int_{t_i}^{t_f} d^4x \left[ \frac{1}{2c^2} \dot{\phi}(t, \mathbf{x})^2 - \frac{1}{2} (\nabla\phi(t, \mathbf{x}))^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \phi(t, \mathbf{x})^2 \right] = \sum_{\mathbf{k}} \int_{t_i}^{t_f} dt \left[ \frac{1}{2} \dot{q}_{\mathbf{k}}(t)^2 - \frac{1}{2} \omega(\mathbf{k})^2 q_{\mathbf{k}}^2 \right]$$

調和振動子の積分に置き換わる。ただし、全ての  $\{q_{\mathbf{k}}^i\}$  を  $t = t_i$  で指定することと、

全ての空間点で  $\{\phi_i(\mathbf{x})\}$  を  $t = t_i$  で指定することが同値であることに注意する。

これはスピン角運動量があればスカラー場のローレンツ不変を保てないのでスカラー粒子のスピンは  $\mathbf{0}$  であることを意味する。

### 3.10 置換対称性

#### 3.10.1 置換群

ここでは物理にある 2 つの統計、BOSE と Fermi を統一的に扱う準備として置換群の復習をする。

ここでは置換演算子を  $\hat{P}$  で表すことにする。

まず、次のように巡回群  $C$  を表現する。() 内は小さい順に並べる。

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & k-1 & k \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & k & 1 \end{pmatrix} = (123 \cdots k)$$

置換群  $P$  は次のように巡回群の積で表すことができる。

$$\hat{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 6 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (4)(36)(125) = (36)(125)$$

左から右のペアをとって置換規則をつくる。

入れ替えを互換と呼ぶと、任意の巡回置換は互換の積になる。

ただし、次のようにこの時はペアの中は右から左を対応させる。

$$\hat{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k-2 & k-1 & k \\ 2 & 3 & \cdots & k-1 & k & 1 \end{pmatrix} = (1,2)(1,3)(125) \cdots (1, k-1)(1, k)$$

よってこの互換表現では先の  $P_1$  は

$$\hat{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 6 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (36)(125) = (3,6)(1,2)(1,5)$$

となる。次の場合は

$$\hat{P}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 6 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (364)(125) = (3,6)(3,4)(1,2)(1,5)$$

となる。ここで重要なのは互換の回数である。奇数の積の場合を奇置換、偶数の場合を偶置換という。任意の巡回置換群において、この奇数か偶数かは互換のやり方に依存しない。



### 3.10.2 置換対称性

第6部の伝播関数や、経路積分で、分割時空間毎の演算子を掛ける順番が重要で、多様な方法を見たが、粒子の属性についても物理は特徴的な対称性がある。これらは決して無関係ではない。

はじめに同種粒子の  $N$  粒子系のハミルトニアンを考えよう。他粒子との相互作用を  $V$  として、次のように置く。

$$\hat{H} = \sum_{j=1}^N \left[ \frac{\hat{p}_j^2}{2m} + U(\mathbf{r}_j) \right] + \sum_{i<j} V(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)$$

このハミルトニアンはまとめて次のようにかけるとする。

$$\hat{H} = \sum_{j=1}^N h_j^{(1)} + \sum_{i<j} h_{ij}^{(2)}$$

このハミルトニアンは互換演算子  $\hat{P}$  と可換になり、

$$\hat{P}\hat{H}\hat{P}^{-1} = \hat{H}$$

が成り立つ。ここでは  $\hat{P}$  は互換演算子とする。これを2粒子系で確かめてみると

$$\begin{aligned} \hat{P}_{12}\hat{H}\hat{P}_{12}^{-1} &= \left[ \frac{\hat{p}_2^2}{2m} + \frac{\hat{p}_1^2}{2m} + U(\mathbf{r}_2) + U(\mathbf{r}_1) + V(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|) \right] \hat{P}_{12}\hat{P}_{12}^{-1} \\ &= \hat{H} \end{aligned}$$

となり、ハミルトニアンに変化はない。よって  $\hat{P}$  と  $\hat{H}$  は同時対角化が可能である。

基本的には  $\hat{H}$  に時間依存性がないと置換演算子を作用させても、 $\hat{P}$  の期待値は変化しない。

そこで  $\hat{P}_{12}$  が密度行列や射影行列のように

$$\hat{P}_{12}^2 = I$$

の性質を持つので、この  $\hat{P}_{12}$  演算子の固有値を  $\sigma$  とすると

$$\hat{P}_{12}|\psi\rangle = \sigma|\psi\rangle$$

よって

$$\langle\psi|\hat{P}_{12}^\dagger\hat{P}_{12}|\psi\rangle = \langle\psi|\sigma^*\sigma|\psi\rangle$$

となるので

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= 1 \\ \sigma &= \pm 1 \end{aligned}$$

が成り立ち、さらに第2部でみたように Pauli によってスピンとの関係が

$$\sigma = \begin{cases} +1 & \text{Bose}(\text{spin} = 1, 2, \dots) \\ -1 & \text{Fermi}(\text{spin} = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots) \end{cases}$$

さらにこの互換演算子は任意の置換演算子に拡張でき、前節の結果から、互換演算子の奇、偶数回の積によって次が成り立つ。

$$\sigma^P = \begin{cases} 1 & (P = \text{even}) \\ -1 & (P = \text{odd}) \end{cases}$$

よって  $N$  粒子の場合、置換演算子は次のように作用する。多粒子系を区別するために  $\nu$  の添え字を用意して、

$$\hat{P}\Psi_\nu(x_1, x_2, \dots, x_N) \equiv \Psi_\nu(x_{p_1}, x_{p_2}, \dots, x_{p_N})$$

のように表す。また、この  $\hat{P}$  の固有関数が  $\Psi_\nu$  であるので、固有方程式

$$\hat{P}\Psi_\nu(x_1, x_2, \dots, x_N) = \sigma^P \Psi_\nu(x_1, x_2, \dots, x_N)$$

が成り立つ。これから多粒子系において

$$|x_{p_1}, x_{p_2}, \dots, x_{p_N}\rangle = \sigma^P |x_1, x_2, \dots, x_N\rangle \quad (3.65)$$

が成立する。

### 3.10.3 置換演算子の固有空間

ここで置換演算子の固有空間を作っておく。場の演算子に次の交換関係を

$$\left[ \hat{\psi}(x), \hat{\psi}^\dagger(x') \right]_\sigma \equiv \hat{\psi}(x), \hat{\psi}^\dagger(x') - \sigma \hat{\psi}^\dagger(x'), \hat{\psi}(x) = \delta(x, x') \quad (3.66)$$

$$\left[ \hat{\psi}(x), \hat{\psi}(x') \right]_\sigma \equiv \left[ \hat{\psi}^\dagger(x), \hat{\psi}^\dagger(x') \right]_\sigma = 0 \quad (3.67)$$

であり、ただし、 $x_j = \sum \mathbf{r}_j \alpha_j$  のように多粒子系の位置を定義しておく。これから

$$\delta(x, x') \equiv \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta_{\alpha\alpha'}$$

となる。この交換関係は式 3.9 の関係と同じなので、 $\hat{\psi}(x), \hat{\psi}^\dagger(x)$  は消滅、生成演算子として働く、

$$\hat{\psi}(x) |0\rangle = 0$$

$$0 = \left( \hat{\psi}(x) |0\rangle \right)^\dagger = \langle 0 | \hat{\psi}^\dagger(x)$$

ただし、

$$\langle 0 | 0 \rangle = 1$$

とする。よって多粒子系でエルミート共役な状態が次のように構成できる。

$$|x_1, x_2, \dots, x_N\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{N!}} \hat{\psi}^\dagger(x_1), \hat{\psi}^\dagger(x_2), \dots, \hat{\psi}^\dagger(x_N) |0\rangle$$

$$\langle x_1, x_2, \dots, x_N | \equiv |x_1, x_2, \dots, x_N\rangle^\dagger = \frac{1}{\sqrt{N!}} \langle 0 | \hat{\psi}(x_N), \hat{\psi}^\dagger(x_N), \dots, \hat{\psi}^\dagger(x_1)$$

これから、異なる多粒子系の状態ベクトルは次の規格直交条件を満たす。

$$\langle y_1 y_2 \dots y_M | x_1 x_2 \dots x_N \rangle = \frac{\delta_{MN}}{N!} \sum_P \sigma^P \delta(y_1, x_{p_1}) \delta(y_2, x_{p_2}) \dots \delta(y_N, x_{p_N}) \quad (3.68)$$

例えば  $M = N = 2$  の場合、次のように変形できる。式 3.66 と  $\sigma^2 = 1$  を用いると

$$\begin{aligned} \langle y_1 y_2 \dots y_M | x_1 x_2 \dots x_N \rangle &= \frac{1}{2!} \langle 0 | \hat{\psi}(y_2) \hat{\psi}(y_1) \hat{\psi}^\dagger(x_1) \hat{\psi}^\dagger(x_2) |0\rangle \\ &= \frac{1}{2!} \langle 0 | \hat{\psi}(y_2) \left[ \delta(y_1, x_1) \hat{\psi}^\dagger(x_2) + \sigma \delta(y_1, x_2) \hat{\psi}^\dagger(x_1) + \sigma^2 \hat{\psi}^\dagger(x_1) \hat{\psi}^\dagger(x_2) \hat{\psi}^\dagger(y_1) \right] |0\rangle \\ &= \frac{1}{2!} [\delta(y_1, x_1) \delta(y_2, x_2) + \sigma \delta(y_1, x_2) \delta(y_2, x_1)] \end{aligned}$$

となる。

### 3.10.4 多粒子系のブラケット構成

先に生成、消滅演算子から多粒子系の Fock 空間を構成した。ここで置換対称性を持つ場合について見る。この多粒子系は先の添え字  $\nu$  で区別され、次のようにブラケットベクトルを定義する。

$$|\Psi_\nu\rangle \equiv \int dy_1 \int dy_2 \cdots \int dy_N |y_1 y_2 \cdots y_N\rangle \Psi_\nu(y_1, y_2, \cdots, y_N) \quad (3.69)$$

$$\langle\Psi_\nu| \equiv \int dy_1 \int dy_2 \cdots \int dy_N |y_1 y_2 \cdots y_N\rangle \Psi_\nu^*(y_1, y_2, \cdots, y_N) = (|\Psi_\nu\rangle)^\dagger$$

ただし、ここでは  $y_i = \mathbf{r}_i \alpha_i$  で積分すると  $\mathbf{r}_i$  の積分と  $\alpha_i$  の和を意味するとする。生成、消滅演算子の性質から次のように座標を引き出すことができる。

$$\hat{\psi}(x_1) |\Psi_\nu\rangle = \sqrt{N} \int dy_2 \cdots \int dy_N |y_2 y_3 \cdots y_N\rangle \Psi_\nu(x_1, y_2, y_3, \cdots, y_N)$$

$$\hat{\psi}(x_2) \hat{\psi}(x_1) |\Psi_\nu\rangle = \sqrt{N(N-1)} \int dy_3 \cdots \int dy_N |y_3 y_4 \cdots y_N\rangle \Psi_\nu(x_1, y_2, y_3, \cdots, y_N)$$

$$\hat{\psi}(x_N) \cdots \hat{\psi}(x_2) \hat{\psi}(x_1) |\Psi_\nu\rangle = \sqrt{N!} |0\rangle \Psi_\nu(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_N)$$

ただし、 $\Psi_\nu$  の次元は不変である。観測系の局所座標で  $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_N$  で決められた時に次のように内積から波動関数が決められるようになる。

$$\langle x_1, x_2, x_3, \cdots, x_N | \Psi_\nu\rangle = \Psi_\nu(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_N) \quad (3.70)$$

これから逆に  $|\Psi_\nu\rangle$  が定義できる。

$$|\Psi_\nu\rangle \equiv \int dx_1 \int dx_2 \cdots \int dx_N |x_1 x_2 \cdots x_N\rangle \langle x_1 x_2 \cdots x_N | \Psi_\nu\rangle$$

いいかえると、次のように  $|x_1 x_2 \cdots x_N\rangle$  は置換演算子  $\hat{P}$  の固有空間に対して、完全系になっている。さらに必要なのは  $\hat{P}$  の固有空間ではない任意の関数  $\bar{\Psi}(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_N)$  についても式 3.69 より、

$$|\Psi\rangle = A_N \int dy_1 \int dy_2 \cdots \int dy_N |y_1 y_2 \cdots y_N\rangle \bar{\Psi}(y_1, y_2, \cdots, y_N) \quad (3.71)$$

が成り立つので規格化定数  $A_N$  が決まらないが、積分  $dy_1 \int dy_2 \cdots \int dy_N$  が対称・反対称な部分のみを引き出す。

ただし、 $\bar{\Psi}(x_1, \cdots, x_N)$  は  $\hat{P}$  の固有空間にない、任意の関数とする。

これは非固有関数  $\bar{\Psi}$  を  $\hat{P}$  の固有空間に埋め込む操作とみなすことができる。

これから  $\hat{P}$  の固有関数は次のようになる。式 3.70 と 3.65 から

$$\begin{aligned} \Psi(x_1, x_2, \cdots, x_N) &\equiv \langle x_1, x_2, x_3, \cdots, x_N | \Psi\rangle \\ &= \frac{A_N}{N!} \sum \sigma^P \bar{\Psi}(x_{p_1}, x_{p_2}, \cdots, x_{p_N}) \end{aligned}$$

が成り立つ。

これは先の Fock 状態の式 3.64 の測度を置換対称性で単純にしたものである。

後に粗視化を見るが、非固有空間を粗視化することで、指数写像が得られることを示す。

また、これらのブラケット表示は規格直交関係を次のように表す。

$$\langle\Psi_\mu | \Psi_\nu\rangle = \delta_{\mu\nu}$$

$$\sum_\nu |\Psi_\nu\rangle \langle\Psi_\nu| = I$$

### 3.10.5 同種多粒子系行列要素

前節までの状態ベクトル  $|\Psi_\nu\rangle$  と生成、消滅演算子  $\psi^\dagger, \psi$  を用いて、同種多粒子系の行列要素をあらわそう。ここでは 1 粒子演算子  $\hat{H}^{(1)}$  と 2 粒子演算子  $\hat{H}^{(2)}$  を次のように定義する。

$$\hat{H}^{(1)} \equiv \sum_{j=1}^N \hat{h}_j^{(1)}, \hat{H}^{(2)} \equiv \sum_{i<j}^N \hat{h}_{ij}^{(2)}$$

これから  $\Psi_\nu^*$  と  $\Psi_\nu$  との間の行列要素は次のように積分される。

自身以外は 2 粒子のハミルトニアンを使う。

$$\begin{aligned} \int dx_1 \cdots \int dx_N \Psi_\nu^* \hat{H} \Psi_\nu &= \int dx_1 \langle \Psi_\nu | \hat{\psi}^\dagger(x_1) \hat{h}_1^{(1)} \psi(x_1) | \Psi_\nu \rangle \\ &\quad \times \int dx_1 \cdots \int dx_N \Psi_\nu^* \hat{H}^{(2)} \Psi_\nu \\ &= N \int dx_1 \langle \Psi_\nu | \hat{\psi}^\dagger(x_1) \hat{h}_1^{(1)} \int dy_2 \cdots \int dx_N |y_2 y_3 \cdots y_N\rangle \\ &= \frac{1}{2} \int dx_1 \int dx_2 \langle \Psi_\nu | \hat{\psi}^\dagger(x_1) \hat{\psi}^\dagger(x_2) \hat{h}_{12}^{(2)} \hat{\psi}(x_2) \hat{\psi}(x_1) | \Psi_\nu \rangle \end{aligned}$$

結果は 2 粒子の交換相互作用項を求めればよい。

## 3.11 ネーターの定理

既に第 2 部でハミルトンの原理からネーターの原理を導き、対称性と保存則の関係を示した。

場の理論においてもこの定理は成り立つ。ここで復習をすると共に、場の方程式の対称性と保存則の基本を学ぶ。

### 3.11.1 作用積分

はじめに作用積分を一般化しよう。

まず、 $D = d$  次元のスカラ場を考える。 $\phi^i(x), i = 1, \dots, d$  この場の計量テンソルは次のように対角行列になり、平坦であるとする。

$$\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \text{diag}(-, + \cdots +)$$

また、時間次元は 1、残り  $D-1$  は空間次元であるとする。このような時空はミンコフスキー時空間 (Minkowski space-time) と呼ばれる。第 5 部のローレンツ変換でみたように

この空間の微小変化を  $ds$  として

$$(ds)^2 = ds^2 = -(dx^0)^2 + \sum_i (dx^i)^2 \equiv \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

となる。この空間の計量は

$$\eta_{\mu\nu} \eta^{\nu\rho} = \delta_\mu^\rho$$

を満たす。また、次のローレンツ変換  $\Lambda$  を

$$\Lambda_\rho^\mu \Lambda_\sigma^\nu \eta_{\mu\nu} = \eta_{\rho\sigma}$$

で定義すると別な座標系からは

$$ds^{2'} = \eta_{\mu\nu} \Lambda_\alpha^\mu \Lambda_\beta^\nu dx^\alpha dx^\beta$$

となる。この  $ds^2$  がスカラーとして観測系に依存しないとしよう。この時、

$$ds^{2'} = ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (3.72)$$

と書き直せるのでローレンツ変換  $\Lambda_\nu^\mu$  について次が成り立つ。

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda_\alpha^\mu \Lambda_\beta^\nu = \eta_{\alpha\beta} = (\Lambda^T)_\rho^\alpha \eta_{\rho\sigma} \Lambda_\beta^\sigma$$

両辺の行列式をとると

$$\det \Lambda = \pm 1 \quad (3.73)$$

が得られた。これは行列式が 1 の時は固有ローレンツ変換と呼ばれ恒等変換になる。  
、時間成分で見ると行列式は

$$(\Lambda_0^0)^2 - (\Lambda_0^i)^2 = 1$$

となり、これから

$$\Lambda_0^0 = \pm \sqrt{1 + (\Lambda_0^i)^2}$$

となる。 $\Lambda_0^0$  は次の 2 つの場合がとれて  $(\Lambda_0^i)^2$  は正とすれば

$$\Lambda_0^0 \geq 1 \quad (3.74)$$

$ds^2 < 0$  であれば空間変化  $dx$  は順時とよばれ、時間は正の方向に進み、

$$\Lambda_0^0 > 1$$

であり、 $ds^2 > 0$  であれば空間変化  $dx$  は逆時とよばれ、時間は負の方向に進み、

$$\Lambda_0^0 \leq -1$$

となった。この場合は無限小変換をつくることができない。通常の物理現象が時間の順方向に連続するためには、次の式のように

$\Lambda$  の行列式が +1 を取る固有順次ローレンツ変換

$$\det \Lambda = +1, \quad \Lambda_0^0 \geq 1$$

である必要がある。このような変換群を

$$ISO(d-1, 1)$$

とし、

$$x \rightarrow x' = \Lambda x + a$$

の変換を考えよう。この時、演算子  $(\Lambda_1, a_1)$  と  $(\Lambda_2, a_2)$  を合成すると

$$(\Lambda_1, a_1) \circ (\Lambda_2, a_2) : \Lambda_1(\Lambda_2 x + a_2) + a_1$$

だから

$$(\Lambda_1, a_1) \circ (\Lambda_2, a_2) = (\Lambda_1 \Lambda_2, a_1 + \Lambda_1 a_2)$$

ローレンツ変換

$$x' = \Lambda x$$

により、スカラー場が

$$\psi'(x') = \psi(x)$$

となる。

例えば光速  $c = 1$  とし、 $x^0 = t$  を用いると d'Alembertian 演算子を用いてスカラー場は式 15.25 から次のような Klein-Gordon 方程式で表された。

$$(\square + m^2)\phi^i(x) = 0 \quad (3.75)$$

ただし、

$$\square\phi^i(x) = -(\partial_t\phi)^2 + (\nabla\phi)^2 = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi(x)\partial_\nu\phi(x)$$

である。

すでに第 5 部でこの式の解の 1 つが次のような平面波であることを確かめた。± を進行波の向きとして

$$\phi_\pm = \text{Exp}[\pm i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - Et)]$$

例えば平面波を代入すると

$$-(\partial_t \text{Exp}[\pm i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - Et)])^2 + (\nabla \text{Exp}[\pm i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - Et)])^2 = (E^2 - \mathbf{p}^2)\phi_\pm$$

だから、

$$E = P^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \quad (3.76)$$

とする。量子的な対応規則

$$p = \hbar k$$

を用いれば

$$\omega = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} + m^2)^{1/2}, \quad kx = -k^0 x^0 + \mathbf{k}\mathbf{x}$$

と表すこともできる。

$\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$  だから平面波は正負の振動数を持つ解が得られているが  $d - 1$  次元の空間での次のようなフーリエ変換

$$\phi_+^i(x) = \int \frac{d^{d-1}\mathbf{p}}{(2\pi)^{d-1}2E} e^{i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - Et)} a^i(\mathbf{p}) \quad (3.77)$$

$$\phi_-^i(x) = \int \frac{d^{d-1}\mathbf{p}}{(2\pi)^{d-1}2E} e^{-i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - Et)} a^{i*}(\mathbf{p}) \quad (3.78)$$

を考えると、この重ね合わせ

$$\phi^i(x) = \phi_+^i(x) + \phi_-^i(x)$$

も解になる。ただし、ここでの  $a^i(\mathbf{p})$  とその複素共役  $a^{i*}(\mathbf{p})$  は量子論では消滅、生成演算子である。この場合は自由粒子のラグランジアン密度を

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\psi^i\partial_\nu\psi^i - m^2\psi^i\psi^i \quad (3.79)$$

とすると作用積分  $S[\psi]$  は

$$\begin{aligned} S[\psi] &= \int dt d^{d-1}\mathbf{x} \mathcal{L}(\psi, \partial_u\psi) = \int d^d x \mathcal{L}(\psi, \partial_u\psi) \\ &= -\frac{1}{2} \int d^d x (\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\psi^i\partial_\nu\psi^i + m^2\psi^i\psi^i) \end{aligned} \quad (3.80)$$

で表される。

### 3.11.2 正準量子化

第2部で見た正準化の手続きは量子論でも用いることができる。あまりお勧めではないが、対応関係だけで、ざっとみておくには良い。

空間を微小セル  $\Delta$  に分割してラグランジアンを

$$L = \sum_i \Delta_i \mathcal{L}(\phi(x_i), \dot{\phi}(x_i))$$

とおくと正準運動量は

$$p(x_i) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}(x_i)} = \Delta_x^3 \pi(x_i)$$

とかける。ただし  $\pi(x)$  は正準運動量密度である。

これからポアソン括弧がクロネッカーの  $\delta$  を用いて

$$\{\phi(x_i), p(x_j)\} = \delta(x_i, x_j)$$

であった。これを量子化する場合は交換積を用いて、ここでは  $\hbar$  を表示して、

$$[\phi(x_i), p(x_j)] = i\hbar\delta(x_i, x_j)$$

となる。運動量密度を用いると

$$[\phi(x_i), \Delta_x^3 \pi(x_i)] = i\hbar\delta(x_i, x_j)$$

または

$$[\phi(x_i), \pi(x_i)] = i\Delta_x^{-3}\hbar\delta(x_i, x_j)$$

とかける。ここで

$$\sum_i \Delta_x (\Delta_x^{-3}\delta(x_i, x_j)) = 1$$

となるので

$$[\phi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})] = i\hbar\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (3.81)$$

となり、これを正準量子化と呼んだ。

次にこれをスカラー場で実施する。後節で詳しく考察をするが、この時にフーリエ変換を利用する。

これによって、量子論の運動量と、位置のような正準関係が明瞭になる。

### 3.11.3 古典場

物理学には系の式が変換に対して不変であることは系の対称性と関係していることえを示す重要な定理がある。

これはネーターの定理といい第2部では無限小変換から次のようにネーターカレントを定義して、運動量・エネルギーテンソルの流れを導いた。

古典場でのハミルトン形式、ラグランジアン形式の母関数を

$$\Theta_H(t) = p_i \delta q^i(t) - H(p, q) \delta t$$

$$\Theta_L(t) = p_i(q, \dot{q}) \delta q^i(t) - E(q, \dot{q}) \delta t$$

とすることができた。この4次元表記を考えてみよう。

4次元での作用積分は第2部で触れたように、一般的な場  $\phi$  を次のようにおく

$$\partial_\mu \phi(x) = (\dot{\phi}/c, \nabla \phi)$$

またラグランジアン密度は  $\mathcal{L}$  は

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\partial_\mu \phi(x), \phi)$$

$$L = \int d^3 \mathbf{x} \mathcal{L}(\partial_\mu \phi(x), \phi) \quad (3.82)$$

さらに作用  $J$  は次のようになる。

$$J = \int_\Omega d^4 x \mathcal{L}(\partial_\mu \phi(x), \phi) \quad (3.83)$$

次のように座標と場の無限小変化をおく。

$$x^{\mu'} = x^\mu + \delta x^\mu$$

$$\phi'(x') = \phi(x) + \delta \phi(x)$$

また同じ座標での変化量、リー微分を次のように定義できた。

$$\delta_L \phi(x) = \phi'(x) - \phi(x) = \delta \phi(x) - \delta x^\mu \partial_\mu \phi(x) \quad (3.84)$$

よって

$$\delta J = \int_{\Omega'} d^4 x' \mathcal{L}(\partial'_\mu \phi'(x'), \phi'(x')) - \int_\Omega d^4 x \mathcal{L}(\partial_\mu \phi(x), \phi) \quad (3.85)$$

結果第 2 部でみたように

$$\begin{aligned} \delta J &= \int_\Omega d^4 x \left[ \delta_L \phi(x) \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right\} + \partial_\mu \left\{ \delta \phi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} - \delta x^\nu (\partial_\nu \phi) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} + \delta x^\mu \mathcal{L} \right\} \right] \\ &= \int_\Omega d^4 x \left[ \delta_L \phi(x) \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right\} + \partial_\mu \left\{ \delta_L \phi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} + \delta x^\mu \mathcal{L} \right\} \right] \end{aligned} \quad (3.86)$$

を得る。

この式の括弧内の第 1 項は括弧内の第 1 項はラグランジュの方程式であり、これを 0 とすると変分が 0 である条件はネーターのカレントを  $J^\mu$  として

$$J^\mu = \delta_L \phi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} + \delta x^\mu \mathcal{L} \quad (3.87)$$

とすると、この時空変化に対する保存則は

$$\partial_\mu J^\mu = 0$$

である。これは次のように空間、時間成分に分けることができる。

$$\partial_0 J^0 = \partial_k J^k$$

$$\int d^3 x J^0 = i c \mathbf{J} \quad (3.88)$$

通常  $x \rightarrow \infty$  で  $\mathbf{J}=0$  とするとネーターのカレントの時間成分は全空間で不変になる。

式 3.86 の第 2 括弧を  $\delta J^\mu$ 、エネルギー運動量テンソルを  $T^{\mu\nu}$  とおくと



$$\delta J^\mu = \delta\phi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} - \delta x_\nu T^{\mu\nu} \quad (3.89)$$

ただし

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi - \frac{\delta x^\mu}{\delta x^\nu} \mathcal{L} \quad (3.90)$$

であるが

$$\delta x^\mu = g^{\mu\nu} \delta x_\nu$$

なので

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (3.91)$$

となる。特に空間と時間に分けるとエネルギーは

$$H = \int T^{00} d^3x = \int \mathcal{H} d^3x$$

さらに

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}$$

だから運動量は

$$P^i = \int T^{0i} d^3x = - \int \pi \partial_i \phi d^3x$$

となる。

### 3.11.4 Noether\_charge

前節の対称性と保存則の関係を一般的に導こう。

まず、作用積分  $S[\psi]$  は次のスカラー場  $\psi(x)$  変換に対して不変である。

$$\bar{\psi}(x) = \psi(x) + \alpha \delta\psi(x)$$

この時、

$$S[\psi] = S[\bar{\psi}]$$

だから、作用積分から導かれるラグランジアンについても、あるベクトル場  $X^\mu$  を導入し、

$$\mathcal{L}(\bar{\psi}, \partial_\mu \bar{\psi}) = \mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi) + \alpha \partial_\nu X^\nu$$

となる。式 3.80 からベクトル場の微分が必要になる。

この第 2 項を  $\alpha$  の 1 次までの近似で求めてみると

$$\begin{aligned} \alpha \partial_\nu X^\nu &= \mathcal{L}(\bar{\psi}, \partial_\mu \bar{\psi}) - \mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi) \\ &= \mathcal{L}(\psi(x) + \alpha \delta\psi(x), \partial_\mu \psi(x) + \alpha \partial_\mu \delta\psi(x)) - \mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi) \\ &= \alpha \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} \delta\psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} \partial_\mu \delta\psi \right\} + \mathcal{O}(\alpha^2) \end{aligned}$$

ここで

$$\frac{\delta S}{\delta \psi} = 0$$

をとれば部分積分をとることで、第4部で見た次のオイラーラグランジュの関係式が導かれる。  
よって次の第1項は0となる。

$$\begin{aligned}\alpha\partial_\nu X^\nu &= \alpha\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi}-\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\right)\right\}\delta\psi+\alpha\partial_\mu\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\delta\psi\right\} \\ &= \alpha\partial_\mu\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\delta\psi\right\}\end{aligned}$$

従って

$$\alpha\partial_\mu\left(-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\delta\psi+X^\nu\right)=0$$

となるので

$$\mathcal{J}^\mu\equiv-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\delta\psi+X^\nu$$

でカレントを定義すれば次のカレント保存則が導かれる。

$$\partial_\mu\mathcal{J}^\mu=0$$

このカレントは空間時間で積分すると次の **Noether\_charge**  $Q$  になる。

$$Q=\int_{\mathbb{R}^{d-1}}d^{d-1}\mathbf{x}\mathcal{J}^i$$

一方でガウスの法則を利用するとこの  $Q$  は時間に対して不変になる。次のような時空間の変化を考える。

$$x'^\mu=x^\mu+a^\mu$$

これから場は

$$\bar{\psi}(x)\equiv\psi(x-a)=\psi(x)-a^\mu\partial_\mu\psi(x)+\mathcal{O}(a^2)$$

と近似できる。一方でラグランジアンは

$$\bar{\mathcal{L}}=\mathcal{L}(\psi,\partial_\mu\psi)-a^\nu\partial_\mu(\delta_\nu^\mu\mathcal{L})+\mathcal{O}(a^2)$$

よって第4部のネーターカレントと電荷を

$$J^\mu=\left(g_\nu^\mu L-\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\partial_\nu\phi_i\right)\delta x^\nu+\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\delta\phi_i$$

$$Q=\int dx^3\delta\phi_i\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}=\int dx^3\delta\phi_i\pi_i$$

とおけ、 $\partial_\mu J^\mu=0$  を満たした。、ここでは

$$\delta\psi=-a^\nu\partial_\nu\psi$$

$$X^\mu=-\delta_\nu^\mu a^\nu\mathcal{L}$$

として、ネーターカレントを

$$\mathcal{J}^\mu=-a^\nu\Theta_\nu^\mu$$

とおけばいい。、ただし、 $\Theta_{\mu\nu}$  は

$$\Theta_\nu^\mu=-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\partial_\nu\psi+\mathcal{L}\delta_\nu^\mu\tag{3.92}$$

である。この  $\Theta_{\mu\nu}$  はラグランジアン密度が次のように自由部分と相互作用部分の和でかけるとして

$$\mathcal{L}=\mathcal{L}_{free}+\mathcal{L}_{int}$$

$\mathcal{L}_{free}$  は  $\partial_u\psi$  に依存するのだが、 $\mathcal{L}_{int}$  部分は  $\partial_u\psi$  には独立していると考えれば

$$\Theta_{\mu\nu} = \partial_u\psi\partial_\nu\psi + \eta_{\mu\nu}\mathcal{L}$$

とかける。これは

$$\Theta_{\mu\nu} = \Theta_{\nu\mu}$$

の対称性を満たしている。また、ハミルトニアンとは時間推進の演算子であったから、一般化運動量  $\Pi$  を用いて

$$\Pi \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t\psi)}$$

とすると、第4部でラグランジアンからハミルトニアンの表現に  $H(p, q) = p_i\dot{q}^i - L$  で移行したように式 3.92 から

$$\Theta^{tt} = \mathcal{H} = \Pi\partial_t\psi - \mathcal{L} \quad (3.93)$$

$$\Theta^{ti} = \mathcal{P} = -\Pi\partial^i\psi \quad (3.94)$$

に拡張できる。

よってこれらを空間積分することでハミルトニアンと運動量が

$$H \equiv \int_{\mathbb{R}^{d-1}} d^{d-1}\mathbf{x}\Theta^{tt}$$

$$P^i \equiv \int_{\mathbb{R}^{d-1}} d^{d-1}\mathbf{x}\Theta^{ti}$$

とあらわすことができる。これはエネルギー運動量テンソルとして、エネルギーと運動量を統一できることを示す。

よって次のようにハミルトニアンと運動量は表せることになる。

$$H \equiv \int_{\mathbb{R}^{d-1}} d^{d-1}\mathbf{x}\mathcal{H} = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} d^{d-1}\mathbf{x}\Theta^{tt} = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} d^{d-1}\mathbf{x}(\Pi\partial_t\psi - \mathcal{L}) \quad (3.95)$$

$$P^i \equiv \int_{\mathbb{R}^{d-1}} d^{d-1}\mathbf{x}\mathcal{P} = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} d^{d-1}\mathbf{x}\Theta^{ti} = -\int_{\mathbb{R}^{d-1}} d^{d-1}\mathbf{x}(\Pi\partial^i\psi) \quad (3.96)$$

例えば式 3.79 からラグランジアン密度

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\nabla\psi)^2 - (m\psi)^2$$

を用いるとハミルトニアン密度が

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(\Pi^2 + (\nabla\psi)^2 + (m\psi)^2)$$

のように単純になる。この時、局所的な回転を加えたローレンツ変換を

$$\Lambda_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu + \omega_\nu^\mu, \quad \omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$$

とする。この時のスカラー場の変換は

$$\bar{\psi}(x^\mu) = \psi(x^\mu - \omega_\rho^\mu x^\rho)$$

となる。これは次のような反対称のテンソルのモーメント密度

$$N^{\mu\nu\rho} \equiv x^\nu\Theta^{\mu\rho} - x^\rho\Theta^{\mu\nu} \quad (3.97)$$

を定義すると、Noether\_charge として  $t$  を固定し

$$M^{\nu\rho} \equiv \int_{\mathbb{R}^{d-1}} d^{d-1}\mathbf{x} N^{t\nu\rho}(x) \quad (3.98)$$

が得られる。

ここで疑問に思うかもしれない。 $\Theta_{\mu\nu} = \Theta_{\nu\mu}$  を満たし、対称テンソルであるが、エネルギー運動量テンソルは反対称な成分をもつ。

式 3.93 は対角成分をとるが、これは演算子積とスカラーの差になっている。

$$\Pi\partial_t\psi - \mathcal{L}$$

第 6 部で面積力と体積力について論じ、次の応力テンソルの式を得た。

$$(N_{stress})_i = \epsilon_{ijk} \int_{\nu} x_j t_{kl} n_l dS - \epsilon_{ijk} \int_{\nu} t_{kj} dV$$

同じようにここでのハミルトニアンは 2 つの視点を考慮する必要がある。

エネルギー運動量テンソルを  $T^{\mu\nu}$  としよう。これに次のような反対称テンソルの微分項を付け加えても保存則は成立する。

$$f^{\lambda\mu\nu} = -f^{\mu\lambda\nu}$$

$$T^{\mu\nu} = \Theta^{\mu\nu} + \partial_\lambda f^{\lambda\mu\nu}$$

となる。

### 3.11.5 ネーターの定理

系を記述する作用積分が、ある連続変換に対して不変であれば、この変換に対応した 1 つの保存カレント、保存量が存在する。

これをネーターの定理という。

この一般的な証明を見ておく。保存則は流れの湧きだしと密度の時間変化の関係から連続の式として

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(x) + \text{div}\mathbf{j}(x) = 0 \quad (3.99)$$

で与えられる。量子論の確率解釈を仮定すると、確率密度を  $\rho$ 、確率流密度を  $\mathbf{j}$  と考えれば確率  $P$  は

$$P = \int d^3\mathbf{x}\rho(x)$$

で表されるので、この場合も式 3.99 からガウスの定理を用いて

$$\frac{dP}{dt} = \int d^3\mathbf{x}\frac{\partial}{\partial t}\rho(x) = - \int d^3\mathbf{x}\text{div}\mathbf{j}(x) = - \int dS\mathbf{j}(x) \cdot \mathbf{n}_S$$

のように面積分になる。従って無限遠方での波動関数が 0 になるとすれば  $P$  は時間的に一定になる。

4 元カレント密度を  $j^\mu = (\rho, \mathbf{j})$  とすると確率保存の式は

$$\partial_\mu j^\mu(x) = 0$$

という共変形式で表すことができる。

一般的な無限小変換を

$$x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu$$

$$\delta x^\mu = \sum_{i=1}^n X_i^\mu(x) \delta\omega_i \quad (3.100)$$

で表す。これに対応した場  $u_a(x)$  の変換も

$$\begin{aligned} u'_a(x') &= u_a(x) + \delta u_a(x) \\ \delta u_a(x) &= \sum_{i=1}^n \Psi_{ai}(x) \delta \omega_i \end{aligned} \quad (3.101)$$

と変換されるとする。ここで重要なのは座標変換も、場の変換も微小パラメタ  $\delta \omega_i$  を共通に持つことである。同一の観測者から見ていることを前提とする。この観測者は作用積分を  $I$  として、変換前と変換後の積分領域を  $\Omega, \Omega'$  として

$$\delta I = \int_{\Omega'} d^4 x' \mathcal{L}'(x') - \int_{\Omega'} d^4 x \mathcal{L}(x) = 0$$

の満たす中にあることになる。ラグランジアン密度は

$$\mathcal{L}'(x') \equiv \mathcal{L}(u'_a(x'), \partial'_\mu u'_a(x'))$$

$$\mathcal{L}(x) \equiv \mathcal{L}(u_a(x), \partial_\mu u_a(x))$$

である。一般的な変換はヤコビアンを用いて

$$\int_{\Omega'} d^4 x' \mathcal{L}'(x') = \int_{\Omega} d^4 x \mathcal{L}'(x + \delta x) \left| \frac{\partial(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)} \right|$$

で表すことができるが、微小変化の場合は1次までとれば

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)} \right| &\simeq \left( 1 + \frac{\partial}{\partial x^0} \delta x^0 \right) \left( 1 + \frac{\partial}{\partial x^1} \delta x^1 \right) \left( 1 + \frac{\partial}{\partial x^2} \delta x^2 \right) \left( 1 + \frac{\partial}{\partial x^3} \delta x^3 \right) \\ &= 1 + \partial_\mu \delta x^\mu \end{aligned}$$

とみなせる。よってここでも1次までの近似をとるべきだから

$$\begin{aligned} \delta I &= \int_{\Omega} d^4 x \left[ \mathcal{L}'(x + \delta x) (1 + \partial_\mu \delta x^\mu) - \mathcal{L}(x) \right] \\ &= \int_{\Omega} d^4 x \left[ \mathcal{L}'(x + \delta x) + \mathcal{L}'(x + \delta x) \partial_\mu \delta x^\mu - \mathcal{L}(x) \right] \\ &= \int_{\Omega} d^4 x \left[ \mathcal{L}'(x + \delta x) + \mathcal{L}(x) \partial_\mu \delta x^\mu - \mathcal{L}(x) \right] \\ &= \int_{\Omega} d^4 x \left[ \mathcal{L}'(x + \delta x) - \mathcal{L}'(x) + \mathcal{L}'(x) - \mathcal{L}(x) + \mathcal{L}(x) \partial_\mu \delta x^\mu \right] \\ &= \int_{\Omega} d^4 x \left[ \partial_\mu \mathcal{L}(x) \delta x + \mathcal{L}(x) \partial_\mu \delta x^\mu + \mathcal{L}'(x) - \mathcal{L}(x) \right] \end{aligned} \quad (3.102)$$

ただし、微小変化の場合、同じ慣性系と考えれば'を取る事ができるので

$$\mathcal{L}'(x + \delta x) - \mathcal{L}'(x) = \partial_\mu \mathcal{L}'(x) \delta x = \partial_\mu \mathcal{L}(x) \delta x$$

となるとした。さらに同一引数の差を

$$\bar{\delta} u_a(x) \equiv u'_a(x) - u_a(x)$$

とすると、これは式3.84のリー微分を表す。

変分演算子  $\delta$  と微分演算子  $\partial$  は交換できたからラグランジュ方程式次のを第1項につかうと

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'(x) - \mathcal{L}(x) &= \sum_a \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_a} \bar{\delta} u_a(x) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu u_a(x))} \bar{\delta} (\partial_\mu u_a(x)) \right] \\ &= \sum_a \left[ \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu u_a(x))} \bar{\delta} u_a(x) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu u_a(x))} \partial_\mu \bar{\delta} u_a(x) \right] \end{aligned}$$

これを 3.102 に代入すると

$$\begin{aligned}
& \partial_\mu \mathcal{L}(x) \delta x^\mu + \mathcal{L}(x) \partial_\mu \delta x^\mu + \mathcal{L}'(x) - \mathcal{L}(x) \\
&= \partial_\mu \mathcal{L}(x) \delta x^\mu + \mathcal{L}(x) \partial_\mu \delta x^\mu + \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu u_a(x))} \bar{\delta} u_a(x) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu u_a(x))} \partial_\mu \bar{\delta} u_a(x) \\
&= \partial_\mu (\mathcal{L}(x) \delta x^\mu) + \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu u_a(x))} \bar{\delta} u_a(x) \right)
\end{aligned}$$

とまとめることができ、結局

$$\delta I = \int_\Omega d^4x \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu u_a(x))} \bar{\delta} u_a(x) + \mathcal{L}(x) \delta x^\mu \right] \quad (3.103)$$

となる。さらにリー微分は 1 次までの近似で式 3.101 の展開を用いて

$$\begin{aligned}
\bar{\delta} u_a(x) &= u'_a(x) - u_a(x) = u_a(x - \delta x) + \delta u_a(x - \delta x) - u_a(x) \\
&= u_a(x - \delta x) - u_a(x) + \delta u_a(x) \\
&= -\partial_\mu u_a(x) \delta x^\mu + \sum_{i=1}^n \Psi_{ai}(x) \delta \omega_i \\
&= -\sum_{i=1}^n [\partial_\mu u_a X_i^\mu(x) - \Psi_{ai}(x)] \delta \omega_i
\end{aligned}$$

とまとめることができる。よって式 3.87 に対応して

$$\theta_i^\mu(x) \equiv \sum_a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu u_a(x))} [\partial_\nu u_a X_i^\nu(x) - \Psi_{ai}(x)] - \mathcal{L}(x) X_i^\mu(x) \quad (3.104)$$

を定義すると式 3.103 は

$$\delta I = - \int_\Omega d^4x \sum_{i=1}^n \partial_\mu \theta_i^\mu(x) \delta \omega_i$$

となる。 $\delta \omega_i$  は任意にとれる微小パラメタだから  $\delta I = 0$  となる条件は  $i$  通りあり、

$$\int_\Omega d^4x \partial_\mu \theta_i^\mu(x) = 0$$

でなければならない。空間成分については

$$\int_\Omega d^3\mathbf{x} \partial_u \theta_i^\mu(x) = 0$$

である。よって式 3.88 に対応して

$$\Theta_i \equiv \int d^3\mathbf{x} \theta_i^0(x)$$

が保存量であり、保存則を表す。ここで更に、全体系だけでなく任意の部分系に注目する。これは時間積分から空間積分に注目することになる。この時被積分関数自体で

$$\partial_u \theta_i^\mu(x) = 0$$

が成り立つ必要があり先にみたスカラー場のエネルギー運動量テンソルの例だけでなく、ベクトル場、ディラック場についても満たされている。

この局所系でも成り立つ保存量  $\theta_i^\mu$  がネーターカレントであり、局所系にも対称性があることを示している。

### 3.11.6 並進対称性

通常の4次元時空は一様であると考えれば、並進対称性を持つ。ネーターの定理は、この対称性と保存則を結びつける。

そこで  $\epsilon^\mu$  を並進とし、各4つの成分に対して

$$x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu = x^\mu + g_\nu^\mu \epsilon^\nu \quad (3.105)$$

のような座標変換を考える。場の変化はないとして

$$u'_a(x') = u_a(x)$$

とし、式3.104を場の変化は0なので

$$\delta\omega_i \rightarrow \epsilon^\mu, X_i^\mu(x) \rightarrow g_\nu^\mu, \Psi_{ai} \rightarrow 0$$

と書き換えればよい。座標変化は自然に計量テンソルを用いた。よってこの場合のネーターカレントは

$$\theta_\alpha^\mu(x) = \sum_a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu u_a(x))} \partial_\alpha u_a(x) - g_\alpha^\mu \mathcal{L}(x)$$

これはまさしく3.91のエネルギー・運動量テンソル密度である。上付きに変化させ、第0成分を空間積分すると

$$\begin{aligned} \Theta^\alpha &\equiv \int d^3\mathbf{x} \theta^{0\alpha}(x) = \int d^3\mathbf{x} \left[ \sum_a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\dot{u}_a(x))} \partial^\alpha u_a(x) - g^{0\alpha} \mathcal{L}(x) \right] \\ &= \int d^3\mathbf{x} \left[ \sum_a \pi_a(x) \partial^\alpha u_a(x) - g^{0\alpha} \mathcal{L}(x) \right] \end{aligned}$$

最後の行は共役運動量の定義を用いた。明らかに括弧の中は4元運動量ベクトル密度である。

$$\mathcal{P}^\alpha(x) \equiv \sum_a \pi_a(x) \partial^\alpha u_a(x) - g^{0\alpha} \mathcal{L}(x)$$

第5部でも定義した4元運動量はこのテンソル成分の全空間積分として

$$P^\alpha = \int d^3\mathbf{x} \mathcal{P}^\alpha(x) = \int T^{0i} d^3\mathbf{x} = - \int \pi \partial_i u_a d^3\mathbf{x} \quad (3.106)$$

で与えられる。また、元になった  $\theta^{\mu\nu}$  は正準エネルギー・運動量テンソルで

$$\mathcal{T}^{\mu\nu}(x) = \sum_a \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial (\partial_\mu u_a(x))} \partial^\nu u_a(x) - g^{\mu\nu} \mathcal{L}(x) \quad (3.107)$$

であらわす。これまでの流れからはこれも密度と考えるべきかもしれないが、4次元の場合に、積分する自由度が残されていない。

一般相対論からこの  $\mathcal{T}^{\mu\nu}(x)$  は大局的に時空の曲率から決まる。

空間積分に落とすために1つのパラメタの自由度を時間  $t$  とするのは自然だろう。

しかし、時間には不可逆な連続性が入る必要がある。どうもまだ、未知な構造が必要である。

### 3.11.7 局所位相変換

はじめに次のような局所位相変換を考える。

$$u_a \rightarrow e^{iq_a \theta} u_a \quad (3.108)$$

保存量としてネーターカレントとその空間積分は電荷の流れの類推から次のようになった。

$$\theta^\mu(x) = -i \sum_a q_a \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu u_a(x))} u_a(x) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu u_a^*(x))} u_a^*(x) \right] \quad (3.109)$$

$$Q = -i \int d^3\mathbf{x} \sum_a q_a [\pi_a(x) u_a(x) - \pi_a^*(x) u_a^*(x)] \quad (3.110)$$

これらは複素共役で差をとっているから実スカラー場であれば0になる。

しかし、複素スカラー場であれば  $\theta^\mu$  の空間成分を  $\mathbf{j}$  として空間微分に対しては

$$\mathbf{j}(x) = \theta^i = iq : [[\nabla\phi^\dagger(x)]\phi(x) - \phi^\dagger(x)\nabla\phi(x)] : \quad (3.111)$$

を得る。これは第5部の電磁気で扱った電流密度である。つまり、位相変換の不変性として電荷が現れる。これからも電荷が双対な関係が区別できることと関係していることがわかる。詳しくは次の部で考察したい。一方で時間微分に対しては  $\pi = \dot{\phi}^\dagger, \pi^\dagger = \dot{\phi}$  だから空間積分をすると

$$Q = -iq \int d^3\mathbf{x} : [\dot{\phi}^\dagger(x)\phi(x) - \phi^\dagger(x)\dot{\phi}(x)] :$$

となる。つまり、実スカラー場では電氣的に中性なスカラー粒子、複素スカラー場では荷電スカラー粒子が位相変換により、交換子の係数として現れる。さらに式3.110の第2項がエルミート共役 *h.c.* になっているので、生成・消滅演算子を用いると式3.10の平面波展開から

$$\begin{aligned} Q &= -i \int d^3\mathbf{x} : \dot{\phi}^\dagger(x)\phi(x) : + h.c. \\ &= q \int d^3\mathbf{x} \int d^3\tilde{\mathbf{k}} d^3\tilde{\mathbf{q}} k^0 : [a^\dagger(\mathbf{k})e^{ikx} - b(\mathbf{k})e^{-ikx}] \times [a^\dagger(\mathbf{q})e^{-iqx} + b^\dagger(\mathbf{k})e^{iqx}] : + h.c. \\ &= q \int d^3\tilde{\mathbf{k}} d^3\tilde{\mathbf{q}} k^0 \int d^3\mathbf{x} [a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{q})e^{i(k-q)x} + a^\dagger(\mathbf{k})b^\dagger(\mathbf{q})e^{i(k+q)x} - a(\mathbf{q})b(\mathbf{k})e^{-i(k+q)x} - b^\dagger(\mathbf{q})b^\dagger(\mathbf{k})e^{-i(k-q)x}] + h.c. \end{aligned}$$

積分の実行については  $\delta$  関数を用いて簡単になり

$$Q = \frac{1}{2}q \int d^3\tilde{\mathbf{k}} [a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) + a^\dagger(\mathbf{k})b^\dagger(-\mathbf{k})e^{2ik^0x^0} - a(\mathbf{k})b(-\mathbf{k})e^{-2ik^0x^0} - b^\dagger(\mathbf{k})b(\mathbf{k})] + h.c.$$

となるが *h.c.* の項があるので上記の第2、3項は打ち消し合い

$$Q = q \int d^3\tilde{\mathbf{k}} [a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) - b^\dagger(\mathbf{k})b(\mathbf{k})] = q(N_a - N_b)$$

となり、個数差で表される。波動性がエルミート共役の波の合成  $(\mathbf{k}, -\mathbf{k})$  で消されたことに留意する。よって

$$Qa^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle = +qa^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle$$

$$Qb^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle = -qb^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle$$

となり、これは  $a^\dagger$  が粒子の生成、 $b^\dagger$  が反粒子の生成を担っていることを表す。質量と異なり、電荷の場合、反粒子の符号が変化することに留意する。

### 3.11.8 大局的位相変換

次に KG 方程式に次のように位相変換した波動関数を代入してみる。

$$\phi(\mathbf{x}, t) = e^{-imt} \tilde{\phi}(\mathbf{x}, t)$$



この時 KG 方程式は

$$(\partial_t^2 - \nabla^2 + m^2)\phi = e^{-imt} \left( \ddot{\tilde{\phi}} - 2im\dot{\tilde{\phi}} - \nabla^2 \tilde{\phi} \right) = 0$$

となる。ここで非相対論的な極限

$$|\mathbf{p}| \ll m$$

として

$$|\ddot{\tilde{\phi}}| \ll |m\dot{\tilde{\phi}}|$$

とみなすと左辺の括弧の中が 0 になるから、1 階の微分方程式

$$i \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} = -\frac{1}{2m} \nabla^2 \tilde{\phi}$$

が得られ、これはシュレディンガー方程式である。確率解釈を必要とせず、位相変換から導けることに留意する。

この時のラグランジアンは、非相対論的な極限で

$$\partial_t \phi \ll m\phi$$

とすると、ラグランジアン密度は

$$\mathcal{L} = i\phi^* \dot{\phi} - \frac{1}{2m} \nabla \phi^* \nabla \phi$$

となり、流れも

$$j^\mu = \left( -\phi^* \dot{\phi}, \frac{i}{2m} (\phi^* \nabla \phi - \phi \nabla \phi^*) \right) \quad (3.112)$$

となる。共役運動量は

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = i\phi^*$$

となり、ハミルトニアン密度は

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \nabla \phi^* \nabla \phi$$

であり、

$$H |\mathbf{p}\rangle = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} |\mathbf{p}\rangle$$

が成り立つ。

### 3.11.9 スピン演算子

第 3 部でローレンツ変換

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$$

に対する不変性から角運動量テンソルが導入できた、空間成分を添え字  $i, j = 1, 2, 3$  として空間部分の角運動量を

$$J^1 = J_x = M^{23}$$

$$J^2 = J_y = M^{31}$$

$$J^3 = J_z = M^{12}$$

とおくと、全角運動量は

$$J^i = \int d^3 \mathbf{x} : \left[ x^j \mathcal{P}^k(x) - x^k \mathcal{P}^j(x) + 2 \sum_a \pi_a(x) \Psi_a^{jk}(x) \right] :$$

とかけた。ただし、 $i, j, k$  は循環座標で 3 次元的な全角運動量を表す。スカラー場であれば  $\Psi_a^{jk} = 0$  である。つまり、

$$\mathbf{J} = \int d^3\mathbf{x} [\mathbf{x} \times \mathcal{P}(\mathbf{x})]$$

の外積表現になる。これが全角運動量になるとすれば、軌道角運動量のみしか含まないことになる。

## 4 粗視化と確率解釈 [111][114]

### 4.1 粗視化の原理

古典的な波が媒質の運動であるという考えを相対論が否定した。高校物理で学んだように音のドップラー効果は波源が移動しても

音速は変化しない。これは音は空気分子が媒介しているからで、波源の運動と空気分子の運動は独立しているからである。

しかし、波源に対して観測者が速度を持つと音速は変化する。ところが光は波源に対して観測者が速度を持ってても光速は変化しない。観測者と波源を同等の立場に置いたわけだ。つまり、相対論の世界では光の速さを一定にするように時間と空間が変化するわけである。いいかえれば、時間と空間そのものが媒質になる。

例えば高校物理で波源が右に運動する場合の波面は下図のようになった。

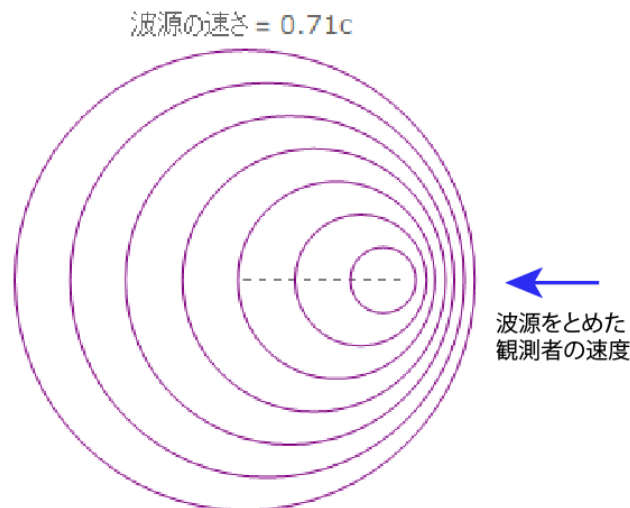


図 4.1: 波源が右に 0.71c で動いた時の波面、これが波源を止めて観測者を逆に運動させた時と等しい。

この時の波の速さに変化していないので

波源より右に静止している観測者は波長が短く、振動数が大きくなる。

光の場合、波源の右にいる観測者が静止している波源に近づいていく時と同じことがおきる。

つまり、波源と観測者との相対速度が問題であって、どちらが波源でどちらが観測者ということは問題でなくなる。

光の場合は観測者が運動しても音波と異なり、波長が変化する。

高校物理で波源が動く時は音速を一定とし、観測者が動く時は波長を一定として下の公式を導いた。

もちろんローレンツ変換とドップラー効果は直接等しくはない。

観測する波長を  $\lambda'$  とすると、ドップラー効果の式は波源の速度と観測者の速度を  $v_s, v_o$  として

$$\lambda' = \frac{c - v_s}{c - v_o} \lambda$$

波源を静止させると

$$\lambda' = \frac{c}{c-v}\lambda$$

となる。一方でローレンツ短縮は第5部でみたように原点において

$$x' = \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}}x$$

となる。立ち上がり方が異なる単調増加関数だが、両者が等しいとすると

$$c^2 - v^2 = (c - v)^2$$

となる。

電磁気についても磁場と電場の相対速度が問題であって、観測者の立場は絶対的なものからはずされたことが相対論につながっていった。筆者は量子論のもつ干渉性が観測、被観測の同等性に1つ重要な見方があると考えている。

つまり、双方向からの波の干渉が定在波をつくることは物質のもつ個性、(量子数等)を伝える前の段階にあることではないかと考える。

量子論的な干渉性、不確定性は双方向性を閉じたループとして見るか、片道ループとして見るかにある。

今後あつかう完全性やデルタ関数はフーリエ級数のように波の足し合わせの結果である。

重要な点はこれを定常波とみる視点からはもはや進行波としての速度ベクトルの情報を失うことになる。

これは1つの観測値を得ることと裏腹にあり、さけることができない。

今後これを粗視化の原理と呼ぶ。

次に見るヒルベルト空間の完全性を用いることは、この粗視化の手続きをしていることになる。

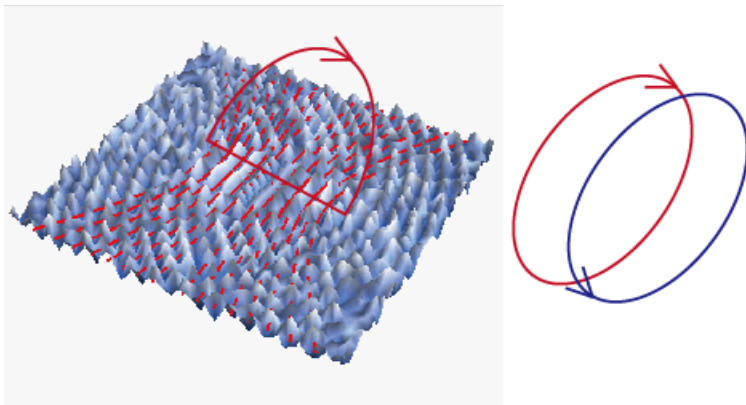


図 4.2: 波源から出ている波はどちらの向きも持っている。

量子論でも波動関数  $\psi$  が登場し、波として時空場を伝達する。伝達速度は光の速さ程度である。

これは非相対論の範囲で次のシュレディンガー方程式を満たす。

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V\psi$$

これが波動方程式であるから、解には位相  $e^{i\theta}$  が含まれ、波としての性質を示す。

ではこれは何の波であろうか。物質が砕けて微細な粒子になり、集団行動をして波をつくるわけではない。

現在の多数の解は確率密度としての波である。

つまり、物質がバラバラになっているわけではなく、その物質がどこにいるのかということがこの波動関数から確率的に決まるとした。

つまり、その物質の時間や空間を位置そのものにこの波は伝達していく。この意味で量子論と相対論は相性がよく、おなじ方向を見ている。

しかし、時間や空間そのものが変化してしまったら、その変化を何で図るのだろうか、もともと、変化そのものを感知できるのかという問題もある。

時間や空間にも階層性や、境界、接続の問題がでてくる。

このあたりは9部にまわして、波動関数を考えることにする。

では古典的な Newton の運動方程式はどこへ行ってしまったかということ、心配しなくても物質をみつめてしまった後には、そのまま成立する。力学系が波動関数  $\psi(\mathbf{r}, t)$  によって表される状態にあると、確率解釈では

$$|\psi(\mathbf{r}, t)|^2 d^3\mathbf{r}$$

がその対象の位置  $\mathbf{r}$  を体積  $d\mathbf{r}^3$  の中で見いだす確率となる。従って波動関数が  $\sqrt{\text{Volume}}$  の次元を持つことがわかる。

筆者は確率解釈をとらない。その理由は第9部で考察するが、波動関数の積が時空体積をつくることには意味がある。

これは双対性と関係している。位置に対して次の運動量空間での波動関数を  $\tilde{\psi}(\mathbf{p}, t)$  とすると

$$|\tilde{\psi}(\mathbf{p}, t)|^2 d^3\mathbf{p}$$

が対象の運動量  $\mathbf{p}$  を体積  $d^3\mathbf{p}$  内に見いだす確率になる。この運動量と位置の関係は不確定性関係

$$\Delta p \cdot \Delta x \geq \hbar$$

をとる。これは後章でみるフーリエ変換で対応している。

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})} \tilde{\psi}(\mathbf{p}, t) d^3\mathbf{p} \quad (4.1)$$

$$\tilde{\psi}(\mathbf{p}, t) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})} \psi(\mathbf{r}, t) d^3\mathbf{r} \quad (4.2)$$

この関係は確率解釈といえない深さがある。詳しくは第9部で考えたい。

一方で、確率解釈をとると波動関数は密度分布のようなものといってよい。

参考文献 [114] は確率解釈を前提とするのでしばらくはこの路線に乗る。

また、ここでは  $\hbar, c$  を表示する標準体系を用いる。

確率解釈では第3部で熱統計力学を学んだことが有用になる。一定温度の熱平衡状態では

$$\frac{1}{2} k_B T$$

を1つの自由度に与えた。これは気体分子の平均の運動エネルギーに等しい

$$\frac{1}{2} m \bar{v}^2$$

つまり、温度はさまざまな運動をもつ粒子の情報をざっくりと捨て、粗視化して、平均の値で置き換えている。

つまり、先の粗視化の原理をスカラー的に古典論では使っていたわけだ。

温度  $T$  で決まるのはこの平均の速さの分布である。

この非相対論的な量子論と熱統計との関連は強力で、後にこれを利用する。

$$\frac{E}{k_B T} \longleftrightarrow i \frac{E t}{\hbar}$$

シュレディンガー方程式も虚数を含むが熱伝導方程式の1つである。従って、シュレディンガー方程式から確率密度は

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

$$\rho_\nu(\mathbf{r}) = |\psi(\mathbf{r})|^2 \quad (4.3)$$

$$\mathbf{J}_\nu(\mathbf{r}) = \frac{\hbar}{2im} \{\psi^* \nabla \psi - (\nabla \psi^*) \psi\} \quad (4.4)$$

を満たす。この  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$  は確率流密度 (probability\_current) という。粒子の生成・消滅を考えないとき、次のように規格化できる。

$$(\psi, \psi)_x = \int |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 d^3\mathbf{r} = 1$$

$$(\tilde{\psi}, \tilde{\psi})_x = \int |\psi(\mathbf{p}, t)|^2 d^3\mathbf{p} = 1$$

これは確率が保存されることを表している。

## 4.2 固有値 [114]

量子論では状態ベクトルに演算子を作用させることで物理量を得る。

この物理量は固有値で実数になる。

そのために演算子はエルミート（自己共役）でないといけない。

例えば運動量演算子の固有方程式は

$$\hat{\mathbf{p}}u_p(\mathbf{r}') = \mathbf{p}u_p(\mathbf{r}') \quad (4.5)$$

これは

$$u_p(\mathbf{r}') = \frac{1}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}} \exp\left(i\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}'}{\hbar}\right) \quad (4.6)$$

$$\hat{\mathbf{p}} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}$$

とすれば確かに成り立つ。

一方で位置座標表示では

$$\hat{\mathbf{r}}\tilde{u}_p(\mathbf{p}') = \mathbf{r}\tilde{u}_p(\mathbf{p}') \quad (4.7)$$

となるが、これが満たされるためには

$$\hat{\mathbf{r}} = -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}'}$$

である。ただし、

$$\tilde{u}_r(\mathbf{p}') = \frac{1}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}} \exp\left(i\frac{-\mathbf{p}' \cdot \mathbf{r}}{\hbar}\right) \quad (4.8)$$

であり、式 4.6 からは

$$\tilde{u}_p(\mathbf{p}') = \frac{1}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}} \exp\left(i\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}'}{\hbar}\right) = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$$

であることに注意する。同様に  $\delta$  関数は偶関数だから

$$\tilde{u}_r(\mathbf{r}') = \frac{1}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}} \exp\left(i\frac{-\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{\hbar}\right) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

であり、今後、有用な関係式

$$(\tilde{u}_r, \tilde{u}_{r'})_p = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), (\tilde{u}_p, \tilde{u}_{p'})_r = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$$

が得られる。また、重ね合わせの状態を

$$\psi_t = \sum_{\mu} c_{\mu}(t) u_{\mu}$$

でよくと、正規直交性と完全性は次で表すことができる。

$$(u_\mu, u_\nu) = \delta_{\mu\nu} \quad (4.9)$$

$$\sum_\nu u_\nu(\mathbf{r})u_\nu^*(\mathbf{r}') = \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (4.10)$$

完全性については複素共役の波重ね合わせであり、これは先の粗視化の原理が当てはまることに注意する。

### 4.3 時間発展

もっとも興味あるのは時間発展である。

シュレディンガー方程式に従って波動関数はハミルトニアンにより最初の状態  $\phi_I$  から時間発展する。

$$\psi_t = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t\right)\phi_I \quad (4.11)$$

これからある時刻  $t$  での確率は

$$|(\phi_I, \psi_t)|^2$$

であるから

$$P(\phi_I \rightarrow \psi_t) = |\phi_I, \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t\right)\phi_I|^2 = 1$$

であり、確率が保存されている。しかし、終状態を  $\phi_F$  として遷移確率を次で定義する。

$$P(\phi_I \rightarrow \phi_F) = |\phi_F, \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t\right)\phi_I|^2 = |(\phi_I, \phi_F)|^2$$

これは時間発展に飛躍があることを示唆する。ある時間後には別な波動関数が合成されていく。

観測が成立するためには必ず相互作用があるので反射、合成がなされる。境界条件も複雑になっていく。時間変化があるということは位相変化が一様でないことになる。

ここでも重要なのは連続的な時間発展が 4.11 の積と形になることである。

これは後に詳しくみるが、第 2 量子化をすると時間発展にも過去から未来と未来から過去の双方向の波があり、

これを足し合わせて、完全性をつかう。したがって時間発展にも粗視化の原理がつかわれる。

### 4.4 期待値 [114]

確率解釈によれば、通常確率論のように期待値を定義できて、それは力学量の観測されるべき値とみなすことができる。

例えば力学量を位置依存した  $F(\mathbf{r})$  と運動量依存した  $G(\mathbf{p})$  とすると、これらの期待値は波動関数に依存する。

$$\langle F \rangle_t = \int F(\mathbf{r})|\psi(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r}^3 = (\psi_t F \psi_t)_x$$

$$\langle G \rangle_t = \int G(\mathbf{p})|\tilde{\psi}(\mathbf{p})|^2 d\mathbf{p}^3 = (\tilde{\psi}_t G \tilde{\psi}_t)_p$$

$x, p$  の表現はフーリエ逆変換で入れ替えることができる。式 4.1, 4.2 より

$$\langle F \rangle_t = \int F(\hat{\mathbf{r}})|\tilde{\psi}(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{p}^3 = (\tilde{\psi} F \tilde{\psi})_p$$

$$\langle G \rangle_t = \int G(\hat{\mathbf{p}})|\tilde{\psi}(\mathbf{p})|^2 d\mathbf{x}^3 = (\psi G \psi)_x$$

ただし、確率解釈をとっているので期待値の正当性は位置測定の試行回数  $N \rightarrow \infty$  の時に満たされる。

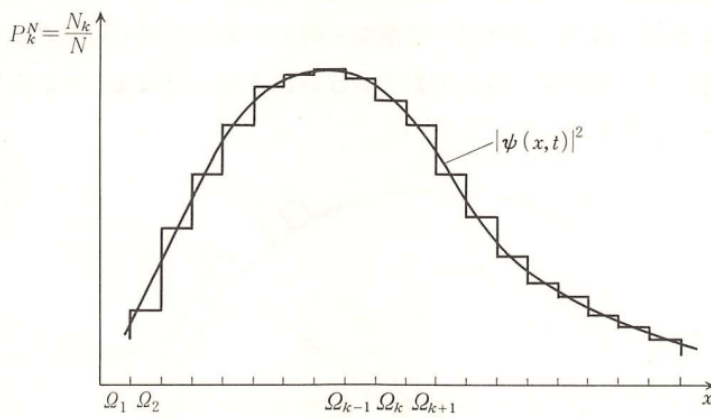


図 4.3: [114] より:位置座標の測定回数と波動関数の関係

つまり、粒子がある区間  $\Omega_k$  にある確率を

$$P_k^N = \frac{N_k}{\sum_{k=1}^{N_x} N_k}$$

で定義するとき、期待値は

$$\langle F(x) \rangle^N = \sum_{k=1}^{N_x} F(x_k) P_k^N$$

である。また、固有値を  $\lambda_\nu$  すると、この固有値に確率を掛けて足し合わせたものが期待値になるから完全性 4.10 が成り立っているなら

$$\langle F \rangle_t = \sum_{\nu} \lambda_{\nu} |c(t)|^2 = (\psi_t, \hat{F} \psi_t)$$

とかける。従って普通の期待値にも粗視化の原理が使われる。

#### 4.5 Dirac の量子条件 [114]

確率論からの 2 乗偏差をつくると

$$(\Delta F)^2 = (\psi, (\hat{F} - \langle F \rangle)^2 \psi) = \langle F^2 \rangle - \langle F \rangle^2$$

$$(\Delta G)^2 = (\psi, (\hat{G} - \langle G \rangle)^2 \psi) = \langle G^2 \rangle - \langle G \rangle^2$$

となる。もし、 $\psi$  の  $\hat{G}$  固有状態だから左辺に  $i\hat{G}, i\hat{F}$  を作用させて引くと

$$i\hat{G}(\Delta F)^2 = (\psi, i\hat{G}((\hat{F} - \langle F \rangle)^2 \psi)) = i\hat{G}(\langle F^2 \rangle - \langle F \rangle^2)$$

$$i\hat{F}(\Delta G)^2 = (\psi, i\hat{F}((\hat{G} - \langle G \rangle)^2 \psi)) = i\hat{F}(\langle G^2 \rangle - \langle G \rangle^2)$$

演算子、 $\hat{F}, \hat{G}$  はどちらかの表現をとると、どちらかが虚数になることに留意すると、

$$\begin{aligned}
\Delta F \Delta G &= \frac{1}{2} (\Delta F \Delta G + \Delta F \Delta G) \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \pm \sqrt{(\psi, (\hat{F} - \langle F \rangle)^2 \psi)} (\psi, (\hat{G} - \langle G \rangle)^2 \psi) \mp \sqrt{(\psi, (\hat{G} - \langle G \rangle)^2 \psi)} (\psi, (\hat{F} - \langle F \rangle)^2 \psi) \right\} \\
&\geq \frac{1}{2} \left| \langle i(\hat{F}\hat{G} - \hat{G}\hat{F}) \rangle \right|
\end{aligned}$$

が大雑把にいえるだろう。これは運動量、位置演算子、で位置表現をとれば次の最小不確定性関係が得られる。

$$\Delta x \Delta p = \frac{1}{2} \left| \left( i \left( \hbar \frac{d}{dr} r \right) \right) \right| = \frac{1}{2} \hbar$$

これが演算子の交換積の大きさ程度であることは需要である。先の粗視化の原理により粗視化される単位が決まることになる。

この領域内は原理的に測定できないので量子論の不確定性関係は初等的な算術平均を用いている。

図 4.1 で見たように、

ループとして見ているときは運動量と、位置は対等になる。しかし、どちらかの空間に観測者は立つので、例えば上のように位置座標をとれば  $r$  表現になる。しかし、この領域はどちらの表現で見ても  $\hbar/2$  程度ということになる。

ただし、この関係をもう少し掘り下げると面白い関係が見える。

そこでまず、第 2 部からポアソンの括弧について復習すると

位相空間における力学量  $f(q, p)$  の運動方程式が

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \\
&= \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q^i}
\end{aligned}$$

となる。ここで次をポアソン括弧として定義した。

$$\frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q^i} \equiv \{f, H\}_p$$

このポアソン括弧は反対称行列  $\Omega$  を用いて次のように簡単に多次元化できる。

$$\begin{aligned}
\{f, g\}_p &= \left( \frac{\partial f}{\partial q^i} \quad \frac{\partial f}{\partial p_i} \right) \Omega \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial q^i} \\ \frac{\partial g}{\partial p_i} \end{pmatrix} \\
\Omega &= \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ポアソン括弧で正準方程式も簡単に次のように表現できた。

$$\begin{aligned}
\dot{q}^i &= \{q^i, H\}_p \\
\dot{p}_i &= \{p_i, H\}_p
\end{aligned}$$

また次の関係式も成り立つ。



$$\begin{aligned}
\{q^i, q^j\}_p &= \{p_i, p_j\}_p = 0 \\
\{q^i, p_j\}_p &= \begin{pmatrix} \frac{\partial q^i}{\partial q^i} & \frac{\partial q^i}{\partial p_i} \end{pmatrix} \Omega \begin{pmatrix} \frac{\partial p_j}{\partial q^i} \\ \frac{\partial p_j}{\partial p_i} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{\partial q^i}{\partial p_i} & \frac{\partial q^i}{\partial q^i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial p_j}{\partial q^i} \\ \frac{\partial p_j}{\partial p_i} \end{pmatrix} \\
&= -\frac{\partial q^i}{\partial p_i} \frac{\partial p_j}{\partial q^i} + \frac{\partial q^i}{\partial q^i} \frac{\partial p_j}{\partial p_i} \\
&= \delta_j^i
\end{aligned}$$

これは交換積との対応は

$$\begin{aligned}
[\hat{q}_i, \hat{p}_j]\psi(q) &= \hat{q}_i \hat{p}_j \psi(q) - \hat{p}_j \hat{q}_i \psi(q) \\
&= q_i \left( \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q_j} \psi(q) \right) - \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q_j} (q_i \psi(q)) \\
&= q_i \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q_j} \psi(q) - \frac{\hbar}{i} \left( \frac{\partial q_i}{\partial q_j} \psi(q) + q_i \frac{\partial}{\partial q_j} \psi(q) \right) \\
&= i\hbar \delta_{ij} \psi(q)
\end{aligned}$$

となるので、ポアソン括弧を  $\{\}_p$  として、

$$[\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\hbar \{\hat{q}_i, \hat{p}_j\}_p$$

が成り立つ。これを **Dirac** の量子条件という。

また、 $a_i$  を実数とし、ユニタリ演算子を運動量演算子の係数として次を定義する。いわば運動量の期待値を位相に持つ演算子である。

$$\hat{U}(a) = \exp\left(\frac{1}{i\hbar} \sum_{i=1}^n a_i \hat{p}_i\right) \quad (4.12)$$

これを次のように位置演算子に作用させることを考える。

$$\hat{U}(a)^{-1} \hat{q}_i \hat{U}(a)$$

すると、一般に演算子  $\hat{A}, \hat{B}$  について次の無限和の公式があった。

$$e^{\hat{A}} \hat{B} e^{-\hat{A}} = \hat{B} + [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{2!} [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \dots \quad (4.13)$$

これに運動量の演算子の期待値と

$$\hat{A} = -\frac{1}{i\hbar} \sum_{i=1}^n a_i \hat{p}_i, \hat{B} = q_i$$

とおくと式  $i$  のみが値を持ち式 4.12 から

$$[\hat{A}, \hat{B}] = a_i$$

となるので無限に和が続いた式 4.13 は最初に 2 項で切れる。

よって次の有限の値が得られる。

$$\hat{U}(a)^{-1} \hat{q}_i \hat{U}(a) = \hat{q}_i + a_i$$

である。面白いことにこれは平行移動を表す。フーリエ変換と粗視化がセットでつかわれ、スカラー値を出していることがわかるだろう。

最小不確定性関係が交換積の有限値を引き出すのである。

次に第5部から交換積の幾何的なイメージを復習する。

多様体上のチャート  $U_i$  上の座標系  $\{x^\mu\}$  を考えて接ベクトルを

$$V = \frac{\partial}{\partial x_1}, W = \frac{\partial}{\partial x_2}$$

とする。無限小の平行四辺形  $\gamma$  が頂点  $O = \{0\}, P = \{\epsilon, 0, \dots, 0\}, Q = \{\epsilon, \delta, 0, \dots, 0\}, R = \{0, \delta, 0, \dots, 0\}$  となるものを考える。

この  $\gamma$  の水平持ち上げを  $\tilde{\gamma}$  とする。  $X, Y \in H_u P$  とし

$$\pi_* X = \epsilon V, \pi_* Y = \delta W$$

となるとすると

$$\pi_* ([X, Y]^H) = \epsilon \delta [X, Y] = \epsilon \delta \left[ \frac{\delta}{\delta x^1}, \frac{\delta}{\delta x^2} \right] = 0$$

とすることができる。つまり図のように  $[X, Y]$  は垂直方向にあり、

平行四辺形のループ  $\gamma$  の持ち上げで  $\tilde{\gamma}$  が  $P$  内では閉じていないことを示している。

この時の開きが同じファイバー上で始点と終点をつなぐ垂直ベクトル  $[X, Y]$  に比例するわけである。

さらに曲率とはこの距離で括弧積からさらに1次微分形式をとり、

$$\Omega(X, Y) = -\omega([X, Y]) = A$$

になる。ただし、  $A \in \mathfrak{g}$  は基本ベクトル場

$$A^\# = [X, Y]$$

をつくる。第5部でみたホロノミーとはこうした閉曲線を水平持ち上げたときの始点と終点とのずれで、これが曲率に依存した。

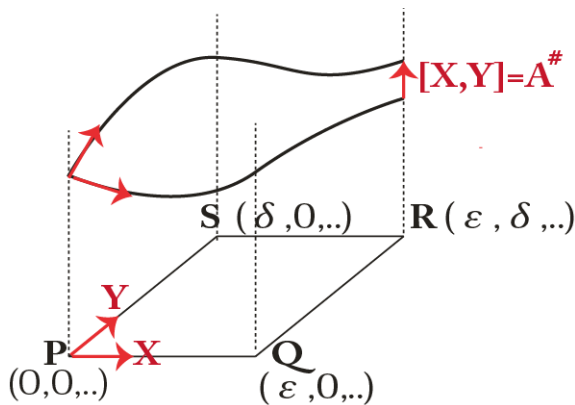


図 4.4: 微小平行四辺形の水平持ち上げ、閉曲線は持ち上げら得ると閉じなくなる。そのずれが基底ベクトルの交換積になる。

## 4.6 密度行列 [114]

はじめに詳しくは第 8、9 部でおこなうが、量子的な粒子の干渉性は純粋状態の特徴になる。これと波としての干渉性を失う混合状態を区別する時に役に立つのが密度行列である。

波の性質を持つ波動関数は特徴的な重ね合わせの原理を持つが、純粋状態を単純に重ね合わせても混合状態になるわけではない。密度演算子  $\hat{\rho}$  は次で定義される。

$$\rho = |\psi\rangle \langle\psi|$$

これは規格化されていて

$$\langle\psi|\psi\rangle = 1$$

であり、行列要素は

$$\hat{\rho} = \sum_i \sum_j c_i c_j^* |u_i\rangle \langle u_j|$$

であり、 $\{|u_i\rangle\}$  が直交基底であるから

$$\rho_{ij} \equiv \langle u_i | \hat{\rho} | u_j \rangle = c_i c_j^* \quad (4.14)$$

であり、純粋状態の状態ベクトルは次のように純粋状態の足し合わせである。

$$|\psi\rangle = \sum_i |u_i\rangle c_i, \quad c_i = \langle u_i | \psi \rangle$$

この密度行列が純粋状態であるときは次のように、射影演算子になる。

$$\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$$

従って純粋状態による、ある力学量  $\hat{F}$  の期待値は

$$\langle F \rangle = \langle \psi | \hat{F} | \psi \rangle = \text{Tr} (\hat{F} \hat{\rho})$$

である。つまり、密度行列を作用させ、対角和をとることで期待値を得られる。

次に状態ベクトル  $|\psi_m\rangle$  を統計的な要素としてみなし、それぞれが重み  $\omega_m$  を持つと考える。この重みを掛けて足し合わせた状態は混合状態である。この状態で期待値を考えると

$$\langle\langle F \rangle\rangle = \sum_m \omega_m \langle \psi_m | \hat{F} | \psi_m \rangle = \text{Tr} (\hat{F} \bar{\rho})$$

ただし、

$$\bar{\rho} = \sum_m \omega_m |\psi_m\rangle \langle \psi_m|$$

である。明らかに

$$\bar{\rho}^2 \neq \bar{\rho}$$

従って  $m = 1$  とすれば

$$\hat{\rho} = \bar{\rho}$$

である。おおきな違いはないではないかと言わないでほしい。式 4.14 は非対角項を持つ。しかし、混合状態の密度行列は

$$\begin{aligned} \bar{\rho} &= \int e^{(k-k')x} dx \sum_{k,k'} |c_k c_{k'}| |u_k\rangle \langle u_{k'}| \\ &= \delta_{kk'} \sum_{k,k'} |c_k c_{k'}| |u_k\rangle \langle u_{k'}| \\ &= \sum_k |c_k|^2 |u_k\rangle \langle u_k| \end{aligned}$$

で非対角項が消えて、干渉性が消失する。この役割は位相積分の結果の  $\delta_{kk'}$  である。これは次の定常波ができることと関係している。また、密度行列の時間発展は純粋状態でも混合状態でも次のようになる。

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{\rho}_t = [\hat{H}, \hat{\rho}_t]$$

#### 4.7 定常状態 [114]

はじめに 1 粒子系の波動力学を復習する。尚、この節では  $\hbar, c$  を表示する標準単位系を用いる。実数ポテンシャル  $V(\mathbf{r})$  を考えて、シュレディンガー方程式

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V\psi = \hat{H}\psi$$

の解を次のように変数分離できる波動関数とする。

$$\psi(\mathbf{r}, t) = u(\mathbf{r})\chi(t)$$

これはシュレディンガー方程式を満たす。

$$\begin{aligned} \hat{H}u &= Eu \\ i\hbar \frac{d\chi}{dt} &= E\chi \end{aligned}$$

解の 1 つは次のようにおける。

$$\chi(t) = C \exp\left(\frac{-iEt}{\hbar}\right) \quad (4.15)$$

これを数学的に眺めると、 $E$  が実数の場合と虚数の場合での振る舞いは大きく異なる。

しかし、最初の式から演算子  $\hat{H}$  がエルミートであれば固有値が実数になることが保証されるので、物理的には安心である。

では境界値問題はどうかろう。

そこで、内部と外部で  $\psi, \phi$  の波動関数を考える。まずエルミートであれば恒等的に 0 になる次の式

$$\Psi = (\phi, \hat{H}\psi) - (\hat{H}\phi, \psi)$$

を考え、この体積積分を、ガウスの定理で表面積分で置き換える。

第一部の境界問題で見たように関数  $u(\mathbf{x})$  が閉曲面、 $S$  の外部領域  $V_1$  で調和、 $S$  を含めて  $C^1$  関数で無限遠で正則であれば

微小面積を  $dS = d^2f$ 、この面積に垂直な方向微分を  $\frac{\partial}{\partial n}$  として

$$\begin{aligned} \int_{V_1} (\nabla u)^2 dV &= \int_S u \frac{\partial u}{\partial n} dS \\ u(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi} \int_S \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) \right) dS \end{aligned}$$

が成り立った。ただし、 $\partial/\partial n$  は  $V_1$  から見て外向きである。

従ってこの場合、

$$\int_V \Psi dV = \oint_S \left( \phi^* \frac{\partial \psi}{\partial n} - \frac{\partial \phi^*}{\partial n} \psi \right) = 0$$

が成り立つ。従って、自己共役であることと、境界に零をおけることは関係してくる。

これは式 4.15 が進行波の重ね合わせの定常波であることを意味する。

連続的な固有値をとることもできるが、ここでは離散的な場合を考えて、

$$\psi(\mathbf{r}, t) = u_\nu(\mathbf{r}) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_\nu t\right)$$

を

$$\hat{H}u_\nu = E_\nu u_\nu$$

の解とおくと

$$|\psi(\mathbf{r}, t)|^2 = |u_\nu(\mathbf{r})|^2$$

となるので、量子論的には粒子の存在密度は時間依存しない。したがってこの状態を定常状態ということが出来る。つまり、エネルギー固有状態は定常状態であるが、この逆も正しいだろうか。

そこで、重ね合わせの原理から

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sum_\nu c_\nu u_\nu(\mathbf{r}) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_\nu t\right)$$

$$u(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}\right)$$

とにおいて存在確率を  $\nu \neq \nu'$  の場合も考慮し、

$$\begin{aligned} P(\mathbf{r}, t) &= |\psi(\mathbf{r})|^2 \\ &= \sum_\nu |c_\nu|^2 |u_\nu(\mathbf{r})|^2 + \sum_\nu \sum_{\nu' \neq \mu} c_\nu c_{\nu'}^* u_\nu u_{\nu'}^* \exp\left(-\frac{i}{\hbar} (E_\nu - E_{\nu'}) t\right) \end{aligned}$$

となる。従って、存在確率が一意に決まるためには

$$E_\nu = E_{\nu'}$$

となる必要があり、固有エネルギーは1つでないといけない。

第2項の存在は量子論の不確定性と関係してくることを文献 [114] では強調している。

つまり、 $\Delta E = E_\nu - E_{\nu'}$  があっても  $t$  が小さいさければ  $P(\mathbf{r}, t)$  の時間変化は見えないだろう。

したがって  $P(\mathbf{r}, t)$  の変化の感知は時間変化とエネルギー変化の積

$$\Delta E \Delta t$$

の大きさに依存する。よってこの積はスカラーであるべきである。

位相の中に入れるためにこの積を  $\hbar$  で割るとエネルギー・時間の不確定性関係

$$\Delta E \Delta t \sim \hbar$$

で結ばれる。これは

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int e^{i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})} \tilde{\psi}(\mathbf{p}, t) d^3 \mathbf{p}$$

の時に位相部分の大きさが1になる。また、

$$u(x) = \exp\left(-i \frac{(p_\nu - p_{\nu'}) \cdot x}{\hbar}\right)$$

としても式を満たすから位相部分の大きさが1になる条件をつけると運動量・位置の不確定性関係

$$\Delta p \Delta x \sim \hbar$$

があることがわかる。

これらは干渉性があれば位相  $\theta$  が消えずに残ることを表し、この位相の最小単位が不確定性を示すことになる。

本論では確率解釈とは異なる考えを第9部で示していききたいが、シュレディンガー方程式から確率密度は

$$\rho_\nu(\mathbf{r}) = |u_\nu(\mathbf{r})|^2 \quad (4.16)$$

$$\mathbf{J}_\nu(\mathbf{r}) = \frac{\hbar}{2im} \left\{ u_\nu^*(\mathbf{r}) \frac{\partial u_\nu}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial u_\nu^*(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} u_\nu(\mathbf{r}) \right\} \quad (4.17)$$

とおくと、時間的に一定であり、

$$\frac{\partial \rho_\nu}{\partial t} = 0$$

から  $S$  を内部領域を含む閉曲面として

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{J} &= 0 \\ \oint_S \mathbf{J}_\nu \cdot d\mathbf{s} &= 0 \end{aligned}$$

となるので、この確率流は湧きだしの無い、磁場のような閉じた流線になる。

## 4.8 平面波の規格化 [114]

これから散乱の量子論を考える時、前節でも運動量を波動関数として平面波で考えることをしてきた。

これはハミルトニアン  $\hat{H}_0$  と運動量  $\hat{\mathbf{p}}$  の同時固有関数を考えることになる。

$$\psi(\mathbf{r}, t) = u_p(\mathbf{r}) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} Et\right) \quad (4.18)$$

$$u_p(\mathbf{r}) = C \exp\left(\frac{i}{\hbar} \mathbf{P} \cdot \mathbf{r}\right) \quad (4.19)$$

この場合の確率密度と、密度の流れは式 4.16、4.17 から

$$\rho_p(\mathbf{r}) = |C|^2, \mathbf{J}_p(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{P}}{m} |C|^2$$

のように時間的だけでなく、空間的にも一定になる。問題は第1部でもみたがこれを全空間で積分すると明らかに発散する。

従って、平面波が空間のあらゆる領域まで広がっているとすると矛盾が生じる。

これから平面波が Hilbert 空間に属していないことがわかる。

前節の粗視化の原理からすると、平面波そのものに乗っている情報はあくまで両者を区別できない。

従って量子論では物理的な情報はどこかに境界をおくことになる。つまり、内部と外部が必要になる。

これにより、平面波ではない波が対象となる。

これは同時に観測、被観測の立場が共にないと物理的な現象をつくれなないことでもある。

この問題は後の第8部でおこない。ここでは平面波の規格化を考えよう。

### 4.8.1 デルタ関数規格化 (delta\_function\_normalization)

これはフーリエ変換から

$$C_d = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \quad (4.20)$$

とすると式 4.19 がデルタ関数の定義そのものになる。

$$u_p(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \mathbf{P} \cdot \mathbf{r}\right)$$

ただし、この時の  $|C_d|^2$  は運動量の逆数の次元を持ち、運動量空間を考えていることに留意する。

一方で無限大を利用しているので、対象は Hilbert 空間というより、超関数として考える必要がある。

### 4.8.2 箱規格化

量子論の入門時によく用いた方法である。1辺  $L$  の 3次元空間では次の周期的境界条件を用いる。

$$\begin{aligned} u(x+L, y, z) &= u(x, y, z) \\ u(x, y+L, z) &= u(x, y, z) \\ u(x, y, z+L) &= u(x, y, z) \end{aligned}$$

従って、運動量、エネルギー共に離散的になり、 $(l, m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \frac{2\pi\hbar}{L} (l, m, n) \\ E_p &= \frac{1}{2m} \left( \frac{2\pi\hbar}{L} \right)^2 (l^2 + m^2 + n^2) \end{aligned}$$

となる。この時の規格化定数  $C$  は

$$C_b = \frac{1}{\sqrt{L^3}}$$

として、規格化された平面波が、位置空間で

$$u_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{L^3}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}\right)$$

となる。この場合は Hilbert 空間に入り、

$$\begin{aligned} (u_{\mathbf{p}}, u_{\mathbf{p}'}) &= \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \\ \sum_{\mathbf{p}} u_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) u_{\mathbf{p}'}^*(\mathbf{r}') &= \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \end{aligned} \quad (4.21)$$

のように完全性を満たす。

### 4.8.3 粒子流強度規格化

もうひとつは、粒子流に注目する方法で次で確率密度と、確率密度流を定義すると

$$\rho_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = |C|^2, \quad \mathbf{J}_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p}}{m^2} |C|^2$$

強度  $N_0$  の粒子流は

$$C \equiv \sqrt{\frac{mN_0}{p}}$$

で定義できて、特に  $N_0 = 1$  の場合を単位流規格化 (unit-flux normalization) という。

実際に散乱断面積の計算に用いると、この方法はやや煩雑になるので、実際には 1,2 の方法を用いて、最後に

$$L \rightarrow \infty$$

をすることが多い。これは熱統計力学が自由度 1 に平衡温度  $T$  の元で

$$\Delta E = \frac{1}{2} k_B T$$

を平等に振った事情とよく似ている。つまり、

$$\Delta p_x = \Delta p_x = \Delta p_x = \frac{2\pi\hbar}{L} \quad (4.22)$$

が各  $(l, m, n)$  方向の最小変化量で、離散状態となる。  
従って、離散運動量はまず、

$$\begin{aligned}\sum_{\mathbf{p}} F(\mathbf{p}) &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(p_x, p_y, p_z) \\ &= \left(\frac{L}{2\pi\hbar}\right)^3 \sum_{p_x=-\infty}^{\infty} \sum_{p_y=-\infty}^{\infty} \sum_{p_z=-\infty}^{\infty} F(p_x, p_y, p_z) \Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z\end{aligned}$$

と書き換える。これは 4.22 を用いて Hilbert 空間の完全性 4.21 を利用したことになる。  
従って、ここで粗視化の原理を用いたことにもなる。つまり、ある情報を捨てて、1つの値を得たわけだ。  
これは双方向の波の干渉の結果である。よって、もはや進行波としての情報を持つことはできない。  
次に  $L \rightarrow \infty$  の操作を行い、連続関数として積分をする。

$$\begin{aligned}\sum_{\mathbf{p}} F(\mathbf{p}) &\rightarrow (L \rightarrow \infty) \\ &= \left(\frac{L}{2\pi\hbar}\right)^3 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(p_x, p_y, p_z) dp_x dp_y dp_z \\ &= \left(\frac{L}{2\pi\hbar}\right)^3 \int F(\mathbf{p}) d^3\mathbf{p}\end{aligned}$$

この時の状態数は微小体積  $d^3\mathbf{p}$  当たりに

$$\rho = \left(\frac{L}{2\pi\hbar}\right)^3 d^3\mathbf{p}$$

の状態がある。従って後によく用いるが微小立体角を  $d\omega$  として、

$$d^3\mathbf{p} = p^2 dp d\omega$$

が成り立つとして、  
単位エネルギー毎の状態数は、単位体積、単位立体角当たり、

$$\begin{aligned}\rho(E_p) dE_p &= \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^3 d^3\mathbf{p}_{d\omega=1} \\ &= \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^3 p^2 dp\end{aligned}$$

となるから、非相対論的には

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

として

$$\frac{dE}{dp} = \frac{p}{m}$$

とすると

$$\rho(E_p) = \frac{p^2}{(2\pi\hbar)^3} \left(\frac{dE_p}{dP}\right)^{-1} = \frac{mp}{(2\pi\hbar)^3}$$

となるので、これを状態密度と定義する。



## 4.9 多粒子系

### 4.9.1 波束

平面波は無限の広がりを持つ。しかし、現実的な波は有限である。

そこで、ここで時空間的に有限の広がりを持つ波を考えよう。

ここでは自由粒子を考え、運動量  $\mathbf{p}$  を持ち、有限領域だけに存在する波動関数を  $\psi(\mathbf{r}, t)$  が波束状態を表すとする。これは平面波  $u_{\mathbf{p}}$  の重ねあわせとして、運動量表示で次のように表す。

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \int a(\mathbf{p}') u_{\mathbf{p}'}(\mathbf{r}) \exp(-E_{\mathbf{p}'} t / \hbar) d^3 \mathbf{p}' \quad (4.23)$$

$$E_{\mathbf{p}'} = \frac{\mathbf{p}'^2}{2m}$$

この表示において、 $\psi(\mathbf{r}), a(\mathbf{p}')$  は 2 乗可積分で、共にヒルベルト空間に属しているとする。

この場合初期条件を選ぶ必要がある。 $t = 0$  での初期波束を次のように決める。

$$\psi_0 = \int a(\mathbf{p}') u_{\mathbf{p}'}(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{p}'$$

この時、振幅の大きさ  $|a(\mathbf{p}')|$  は  $\mathbf{p}$  に鋭いピークがあり、 $\mathbf{p}'$  が  $\mathbf{p}$  から離れると急速に 0 になる関数である。

$$\delta \mathbf{p} \equiv \mathbf{p}' - \mathbf{p}$$

とすると式 4.23 から

$$\psi_0(\mathbf{r}) \simeq A(\mathbf{r}) \exp\left(\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}\right) \quad (4.24)$$

とおく。ただし、振幅は包絡線関数  $A(\mathbf{r})$  とみなせて、重ね合わせの原理から

$$A(\mathbf{r}) \equiv \int_{\delta \mathbf{p}} a(\mathbf{p} + \delta \mathbf{p}) \exp\left(\frac{i}{\hbar} \delta \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}\right) d^3(\delta \mathbf{p}) \quad (4.25)$$

下図左のように関数の領域幅  $\Delta \mathbf{p}$  が狭いとしているので式 4.24 がフーリエ変換と見なせば逆に下図右のように  $\mathbf{x}$  での  $\Delta \mathbf{x}$  は広がるはずである。これは不確定性関係を表すから

$$\Delta x \Delta p_x \sim \hbar$$

という関係がる。

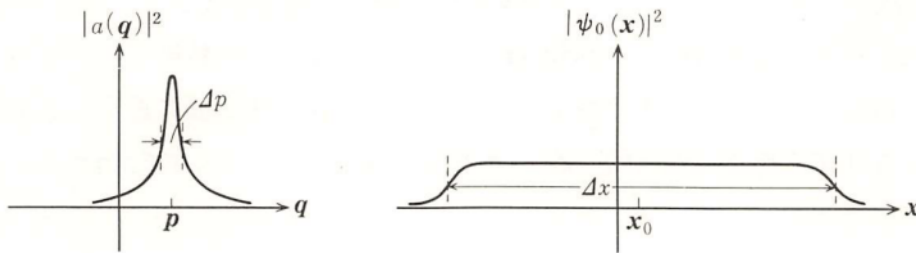


図 4.5: [114] より：波束の広がり

そこでエネルギーも次のように修正する。

$$E_{\mathbf{p}'} \simeq E_{\mathbf{p}} + \left(\delta \mathbf{p} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\right) E_{\mathbf{p}} + \frac{1}{2} \left(\delta \mathbf{p} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\right)^2 E_{\mathbf{p}} + \dots \quad (4.26)$$

従って、群速度を

$$v_g \equiv \frac{\partial E_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{p}}$$

とすると1次までの近似をとれば

$$\mathbf{v}_g t = E_{\mathbf{p}} \cdot t$$

となるので式 4.23 は

$$\psi(\mathbf{r}, t) \simeq A(\mathbf{r} - \mathbf{v}_g t) \exp \left[ \frac{i}{\hbar} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - E_{\mathbf{p}} \cdot t) \right]$$

とかける。この場合は定常波が波束波形を崩さずに進行していると考えられる。この波束の中心の速度が群速度  $v_g$  である。

しかし、波形が崩れると、そう簡単ではない。

群速度に対して、位相速度 (phase velocity)

$$v_p \equiv \frac{E_{\mathbf{p}} \mathbf{p}}{p}$$

とは異なる。詳しくは第9部で考察するが、位相速度と群速度が一致していれば真空中の光速のように分散がない。

これは時間的に波束が形を保って伝播していることを表す。しかし、式 4.26 の展開が2次以降までとると、時間変化に対して波の形がくずれ、時間と共に広がりを持つようになる。

次の図では2次の係数に乱数をかけて、足し合わせてみたものの時間変化である。

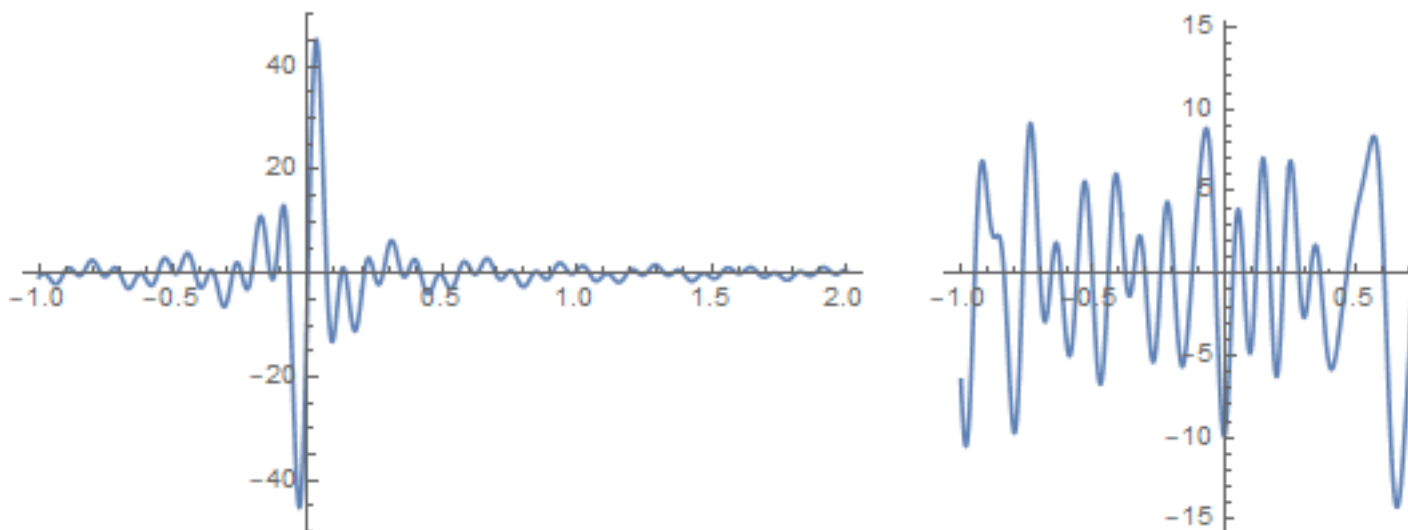


図 4.6: 時間の2次までをとった場合、ただし、係数に乱数をつかっている。

#### 4.9.2 最小波束

1次元非相対論的な自由粒子の場合を考える。従って、シュレディンガー方程式

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

を満たす必要がある。そこで次の波束関数を考える。

式 4.23 から

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int a(p') \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \left( p'x - \frac{p'^2}{2m}t \right) \right] dp' \quad (4.27)$$

とすると両辺共に

$$\frac{1}{2m\sqrt{2\pi\hbar}} \int p'^2 a(p') e^{\frac{i(p'x - \frac{p'^2}{2m}t)}{\hbar}} dp'$$

となる。さらに初期条件として最小波束をとるものとして確率論をとると

$$\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2}$$

を満たすものを考える。これは正規分布のガウス型で平均値を  $\langle p \rangle, \langle x \rangle$ 、分散を  $(\Delta x)^2$  として、

$$f_G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\Delta x)^2}} \exp \left[ -\frac{(x - \langle x \rangle)^2}{4(\Delta x)^2} \right]$$

となるので式 4.27 から  $t = 0$  の時に

$$\psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi(\Delta x)^2}} \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \langle p \rangle x - \frac{(x - \langle x \rangle)^2}{4(\Delta x)^2} \right]$$

が出るように  $a(p)$  を決める。分散を  $(\Delta p)^2$  として運動量表示にかえると

$$a(p) = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi(\Delta x)^2}} \exp \left[ \frac{i}{\hbar} (\langle p \rangle - p) \langle x \rangle - \frac{(p - \langle p \rangle)^2}{4(\Delta x)^2} \right]$$

となるので、式 4.23 に代入すると、1次元であれば

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= \int \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi(\Delta p)^2}} \exp \left[ \frac{i}{\hbar} (\langle p \rangle - p') \langle x \rangle - \frac{(p' - \langle p \rangle)^2}{4(\Delta p)^2} \right] \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \left( p' \langle x \rangle - \frac{p'^2}{2m}t \right) \right] dp' \\ &= \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi(\Delta p)^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[ -\frac{(p' - \langle p \rangle)^2}{4(\Delta p)^2} + \frac{i}{\hbar} \left( \langle p \rangle \langle x \rangle - \frac{p'^2}{2m}t \right) \right] dp' \\ &= \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi(\Delta p)^2}} \exp \left[ -\frac{\langle p \rangle^2}{4(\Delta p)^2} + \frac{i}{\hbar} \langle p \rangle \langle x \rangle \right] \int \exp \left[ \frac{2\langle p \rangle}{4(\Delta p)^2} p' - \left( \frac{1}{4(\Delta p)^2} + \frac{i}{2m\hbar} \right) p'^2 \right] dp \end{aligned}$$

ここで次のガウス積分の公式を使う。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha\xi - \beta\xi^2} d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} e^{-\alpha^2/4\beta}, \quad (|\arg \beta| < \frac{\pi}{2})$$

すると

$$\psi(x, t) = \frac{1}{4\pi^2\sqrt{2\hbar}\sqrt{1 + \frac{2i\Delta p^2 t}{m\hbar}}} \exp \left( -\frac{2\Delta p^2 (m(x - \langle x \rangle)^2 + 2\langle p \rangle \langle x \rangle t) + i\hbar \langle p \rangle^2 t - 2i\hbar \langle p \rangle mx}{2\hbar(m\hbar + 2i\Delta p^2 t)} \right)$$

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= \frac{1}{2\sqrt{2\hbar}\pi^2\sqrt{1 + \frac{2i\Delta x^2 t}{m\hbar}}} \exp \left( -\frac{\langle p \rangle (4\Delta x^2 t + i\hbar(\langle p \rangle t - 2mx))}{2\hbar(m\hbar + 2i\Delta x^2 t)} \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2\hbar}\pi^2\sqrt{1 + \frac{2i\Delta x^2 t}{m\hbar}}} \exp \left( -\frac{2\langle p \rangle \Delta x^2 t}{\hbar(m\hbar + 2i\Delta x^2 t)} \right) \exp \left( -\frac{i\hbar(\langle p \rangle^2 t - 2m\langle p \rangle x)}{2\hbar(m\hbar + 2i\Delta x^2 t)} \right) \end{aligned}$$

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi(\Delta x)^2} \sqrt{1 + i \frac{\Delta p t}{m \Delta x}}} \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \left( \langle p \rangle x - \frac{\langle p \rangle^2}{2m} t \right) \right] \exp \left[ -\frac{\left( x - \langle x \rangle - \frac{\langle p \rangle}{m} t \right)^2}{4(\Delta x)^2 \left( 1 + \frac{\Delta p t}{m \Delta x} \right)} \right]$$

最後の項の位相部分から波束の中心は

$$v = \frac{x}{t} = \frac{\langle p \rangle}{2m}$$

で移動していることがわかる。参考文献にもこの波束の広がりの減少は量子論的な効果であると記述されるものが多いが、

シュレディンガー方程式を出発に選び、最初から分散を与えたのでむしろ統計論的な効果である。

### 4.9.3 古典的多粒子系

非相対論的な  $N$  粒子系の波動関数を

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t)$$

とおけると仮定する。しかし、この時点で  $t$  を全ての粒子で共通させているので、統計的な要素が入っていることに留意する。

第2量子化の後、量子統計を考えるのは第9部でおこなう。

ここでは確率解釈をとると各粒子が時刻  $t$  で空間点  $\mathbf{r}_i$  を中心として体積  $d^3\mathbf{r}_i$  に存在する確率が

$$P_r(N) = |\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t)|^2 d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{r}_2 \dots d^3\mathbf{r}_N$$

とすれば運動量空間がフーリエ変換で

$$\tilde{\psi}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_N) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi\hbar)^{3N}}} \int \dots \int \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t) \cdot \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i \mathbf{r}_i \right] d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{r}_2 \dots d^3\mathbf{r}_N$$

となる。これも各粒子が時刻  $t$  で運動量空間点  $\mathbf{p}_i$  を中心として体積  $d^3\mathbf{p}_i$  に存在する確率が

$$P_p(N) = |\tilde{\psi}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_N, t)|^2 d^3\mathbf{p}_1 d^3\mathbf{p}_2 \dots d^3\mathbf{p}_N$$

となることを仮定する。

これらの仮定から自然に多粒子系の波動関数が作られ、1粒子と同じようにシュレディンガー方程式を満たす。ハミルトニアンを

$$\hat{H}_N = -\sum_{i=1}^N \frac{\hbar^2}{2m} \nabla_i^2 + V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$$

とおく。

例えば2粒子  $a, b$  からなる力学系を取り上げる。質量は  $m_a, m_b$  とし、粒子間距離

$$r = |\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|$$

に依存したポテンシャルを持つとする。

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}_{a,b} \psi$$

$$\hat{H}_{a,b} = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_a^2 - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla_b^2 + V(r) \right]$$

とすると、定常状態は  $\hat{H}_{a,b}$  の固有関数を  $A(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b)$  として、

$$\psi(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b, t) = A(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b) \exp \left( -\frac{i}{\hbar} W t \right) \quad (4.28)$$

のように変数分離形でかける。  
さらに重心座標  $\mathbf{r}_G$  と相対座標  $\mathbf{r}$  を次で定義する。

$$\mathbf{r}_G = \frac{m_a \mathbf{r}_a + m_b \mathbf{r}_b}{m_a + m_b}$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b$$

換算質量  $\mu$  と全質量  $M$  を

$$M = m_a + m_b$$

$$\mu = \frac{m_a m_b}{M}$$

で定義すると、力学と同様に次のように分離できる。

$$A(\mathbf{r}_G, \mathbf{r}) = \Phi(\mathbf{r}_G)u(\mathbf{r})$$

従って、これらは次の固有方程式を満たす。全運動量を  $P$  として

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2M}\nabla_G^2\right)\Phi = \frac{P^2}{2M}\Phi$$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla_r^2 + V(r)\right)u = Eu$$

とおける。相対運動と重心運動は独立しているので、エネルギー保存則は式 4.28 から

$$W = E + \frac{P^2}{2M}$$

が成り立つ。従って、全運動量を観測する系では全運動量  $\mathbf{P}$  を見るので重心が共役で

$$\Phi(\mathbf{r}_G) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}} \exp\left(\frac{i}{\hbar}\mathbf{P} \cdot \mathbf{r}_G\right)$$

とかけるはずで、これは平面波とみなせる。  
しかし、この式は書き換えれば

$$\Phi\left(\frac{m_a \mathbf{r}_a + m_b \mathbf{r}_b}{m_a + m_b}\right) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}} \exp\left(\frac{i}{\hbar}(m_a \dot{\mathbf{r}}_a + m_b \dot{\mathbf{r}}_b) \cdot \frac{m_a \mathbf{r}_a + m_b \mathbf{r}_b}{m_a + m_b}\right)$$

であり、一切の粗視化は含まれていない。  
従って、ここまででは量子論というより、多粒子系の散乱である。  
従って、波動力学と同様に、次のような相対座標のハミルトニアン

$$H^x = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V(|\mathbf{r}|)$$

を考えて、この固有値問題を考えればよい。

#### 4.9.4 時間不変性

ところが、量子論的な問題は波動関数の内部粒子の交換に現れる。確率論からはこれは統計性の問題になる。  
ボーズ粒子の 2 粒子系では  $a$  粒子が位置  $u_{\nu_1}$  に粒子  $b$  が位置  $u_{\nu_2}$  にある場合の確率振幅は

$$C(\nu_1, \nu_2, t) = \int u_{\nu_2}^*(\mathbf{r}_a)u_{\nu_1}^*(\mathbf{r}_b)\psi(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b, t)d^3\mathbf{r}_a d^3\mathbf{r}_b$$

とおける。これは  $\{u_\nu\}$  が完全正規直交系をなしている。従ってフーリエ展開の係数を求めているのと同じである。

ミクロの同種粒子であるから、この時 1 個、1 個の粒子の区別をしていない。

これが、内側の領域で粗視化をしていることになる。従ってこの係数は粒子の交換について区別できない。

$$C(\nu_1, \nu_2, t) = C(\nu_2, \nu_1, t) \quad (4.29)$$

しかし、実際に観測するのが確率振幅の 2 乗であることを考慮すると

$$C(\nu_1, \nu_2, t) = -C(\nu_2, \nu_1, t) \quad (4.30)$$

であってもよい。従って 2 粒子系では次の関係が成り立つ。

$$\psi(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b, t) = \pm \psi(\mathbf{r}_b, \mathbf{r}_a, t)$$

今、置換演算子を  $\hat{P}$  として粒子  $a, b$  の交換を次のように表す。

$$\hat{P}_{ab}\psi(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b, t) = \psi(\mathbf{r}_b, \mathbf{r}_a, t)$$

これはもう一度作用すると元に戻るの

$$\hat{P}_{ab}^2 = 1$$

$$\hat{P}_{ab} = \pm 1 \quad (4.31)$$

であり、固有値  $\pm 1$  を持つことがわかる。また、この式に  $\hat{P}_{ab}^{-1}$  を作用すると

$$\hat{P}_{ab} = \hat{P}_{ab}^{-1}$$

である。従ってハミルトニアンに作用させると

$$\hat{P}_{ab}\hat{H} = \hat{P}_{ab}^{-1}\hat{H}$$

$$\hat{P}_{ab}\hat{H}\hat{P}_{ab}^{-1} = \hat{P}_{ab}^{-1}\hat{H}\hat{P}_{ab}$$

よって、これらの演算子が正方であればハミルトニアンと可換である。

$$\hat{P}_{ab}\hat{H} = \hat{H}\hat{P}_{ab} \quad (4.32)$$

ハミルトニアンが時間推進を担っていたので、系の時間発展を次のように表す。

$$\psi_t = \exp\left(-\frac{i\hat{H}}{\hbar}t\right)\psi_0$$

ここで式 4.32 が成り立てば

$$\hat{P}_{ab}\psi_t = \exp\left(-\frac{i\hat{H}}{\hbar}t\right)\hat{P}_{ab}\psi_0$$

となる。このようにハミルトニアンと交換する場合はその波動関数は時間推進に対して形を変えない。

これを時間不変性という。置換演算子がこの性質を持っているので、式 4.31 のように

対称、か反対称かの 2 つの統計性が現れる。

これがボース統計と、フェルミ統計である。この詳しい考察は、第 8 部、9 部でおこなう。

#### 4.9.5 量子統計性

確率論からは確率振幅の値が0であるということは、その事象は決して起こらないことを表す。従って式 4.30 の存在は大きく、反対称のフェルミ統計では

$$\nu_1 = \nu_2$$

とすると

$$C = -C$$

となるので

$$C = 0$$

か、 $C$  が位相を反転させるような演算を持たないといけない。2 個の粒子系を考えよう。

古典的な粒子は1つ1つを観測可能とするので、基本的に全て区別ができる。従って反対称性を持つ場合で粒子の状態が  $\alpha, \beta$  の2種類しかなければ、確率振幅は反対称の場合に

$$C(\alpha, \alpha, t) = C(\beta, \beta, t) = 0$$

$$C(\alpha, \beta, t) = -C(\beta, \alpha, t) \neq 0$$

となるので、必ず一方が  $\alpha$  の状態なら片方は  $\beta$  になることを表す。

対称の場合は

$$C(\alpha, \alpha, t) = C(\beta, \beta, t) \neq 0$$

$$C(\alpha, \beta, t) = C(\beta, \alpha, t) \neq 0$$

であり、片方が  $\alpha$  と  $\beta$  にある場合と、共に  $\alpha, \beta$  の3通りがあるので、古典論の場合は  $\alpha$  と  $\beta$  を区別し、合計4通りある。

これに対して、量子論では粒子を区別しないという粗視化が入る。

## 5 スリット回折モデル

### 5.1 有限フーリエ変換

量子論の考え方には波動性が原理的に入るので、特に観測の影響を考えると第1部でみたフーリエ変換が非常に重要になる。

量子論には古典論にはない観測の視点が入る。この時、粒子性、波動性が境界条件から劇的に変化する。

この一貫したメカニズムは未だ完成をしていない。この章でそのとりかかりを見いだしたい。

一般に通常の  $\mathbf{x}$  空間で見える場  $\phi(x)$  は無限の波数  $\mathbf{k}$  空間をフーリエ変換して表されると考えると次になる。

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{4/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(k) e^{-ikx} d^4k \quad (5.1)$$

ほぼ一瞬のうちに  $k$  空間の全領域を積分して位置  $x$  の  $\phi$  が決まるわけだから、どんな仕組みだろうと疑問に思うが、

それは後の課題として、この式は  $\phi$  の特徴の1面を表している。

量子論では少なくともある領域でその領域の運動量を足し合わせて、位置の関数を知る。逆もしかりである。物理量が位置の関数であり、そこに局所座標値をいれればその物理量が正確に決まるというのものとなり、異なった内容になる。これらが物理的な観測の重要な側面になり、足し合わせの領域はどう、決めていくかは

第9部で考察する。重ね合わせの原理は運動量状態について

$$\begin{aligned}\psi(\mathbf{r}, t) &= \int u_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) \tilde{\psi}(\mathbf{p}, t) d^3\mathbf{p} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})/\hbar} \tilde{\psi}(\mathbf{p}, t) d^3\mathbf{p}\end{aligned}$$

となる。高校物理で習ったように波数の近いところで足し合わせればうなりの波形が得られる。フーリエ変換は第1部で見たように、ギブス現象等の問題もあるが、ほとんどの関数の形を作ることができた。

重ね合わせできる振幅の変化は  $\mathbf{p}$  付近ピークを持つ波束として、運動量表現を用いると

$$\begin{aligned}\psi(\mathbf{r}, t) &= \int a(\mathbf{p}') u_{\mathbf{p}'} \exp\left(-i\frac{E_{\mathbf{p}'}t}{\hbar}\right) d^3\mathbf{p}' \\ E_{\mathbf{p}'} &= \frac{\mathbf{p}'^2}{2m}\end{aligned}$$

を選ぶことができる。この時、 $\psi(\mathbf{r}), a(\mathbf{p}')$  は絶対2乗可積分関数になれるので Hilbert 空間に属せる。このような自由粒子の存在は有限幅  $D$  を持つスリットを平面波に与えることと同じであると筆者は考える。そこで、次で古典的なスリット解析を考えてみよう。

始めに初等的に2次元で次のようなスリットを通る波を改めて考えてみよう。図上向きに  $x$  軸をとる。簡単のため時間発展は考えないとする。 $k_x, k_y$  の2次元の波数からなる波を考える。

$$\phi = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = e^{i(k_x x + k_y y)} \quad (5.2)$$

はじめに下図のような平面波の場合、図の  $D$  に観測面を置き、これにそった  $y$  方向の強度を測る。ただし、観測面の  $y$  方向は  $(-d, d)$  にの積分領域を設定する。これはフーリエ変換を用いて、次のように表す。

$$I = \int_{-d}^d \phi e^{-i\kappa y} dy \quad (5.3)$$

たとえば、下図の場合は波の進行方向が  $D$  と垂直のため  $k_y = 0$  が予想できる。

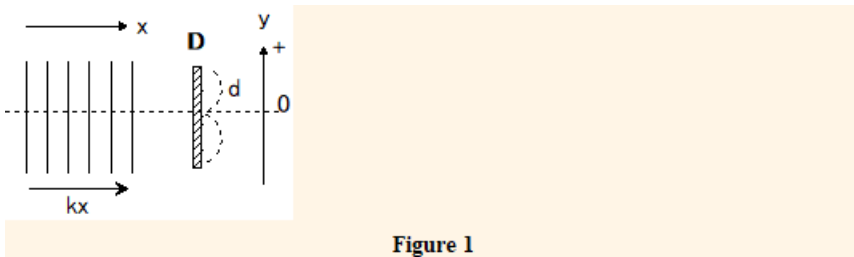


Figure 1

図 5.1: 観測面  $D$  に向かう平面波

しかし、そのためには平面波は  $y$  軸の正負の方向に無限に広がっていることが前提になる。これは点波源から無限に遠方であるともいえる。そこではじめは観測面  $D$  の長さ  $2d$  を無限に延長して考える。

入射  $\phi$  を  $k_y = 0, x = 0$  とすると

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\kappa y} dy = 2\pi\delta(\kappa)$$

となる。これは、無限区間のフーリエ変換ということもできるし、よく用いるデルタ関数の定義でもある。つまり、 $\kappa = 0$  にピークを持つデルタ関数なので  $k_y$  の値は予想通り 0 しかない。

この  $k_y$  の値は次のように観測板を回転させれば 0 以外の値を持たせることができる。



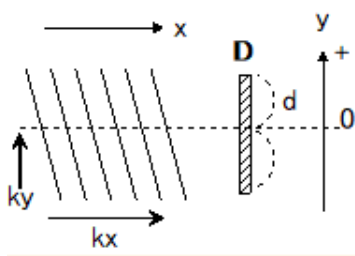


Figure 1

図 5.2: 観測版に斜めに入射する平面波、一定の  $k_y$  成分を持つ

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iy(\kappa - k_y)} dy = 2\pi\delta(k_y - \kappa)$$

この場合のピーク値は次の 1 点である。

$$\kappa = k_y$$

よって  $y$  軸上の全ての領域を観測面とすれば、ある値を見つけることができる。

これは波数空間と位置空間がフーリエ変換で結ばれたので、ある空間で決まった値を得ることは対する空間での無限領域を仮定する。

これは次の図のように、ある物理量の決定のプロセスに無限の領域（あるいは無限とみなせる領域）が必要であることを示す。領域を確定された下では物理量に不確定性が入ってくる。ことが示唆される。

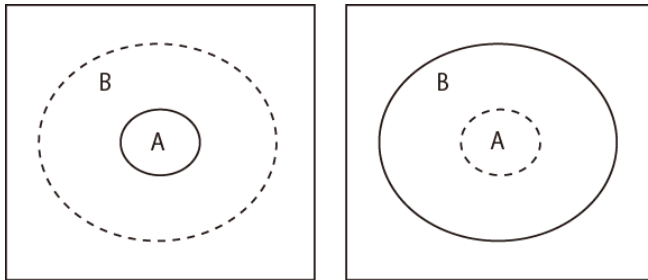


図 5.3: 左: A を確定するために B の領域は無限に広げないといけない。

右: B を限定してしまうと、A の値は確定できない。

空間と物体を分ける意味でも重要な内容なので引き続き、単純なスリットで有限の  $D = 2d$  として考えてみよう。

下図のように  $x$  方向に  $k_x$  の波数を持つ平面波を考える。

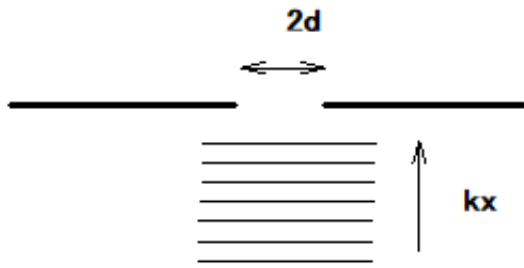


図 5.4: スリットに向かう平面波

スリットを波が通過すると次のように  $k_y$  成分が生まれる。高校物理のホイヘンスの原理が学習した回折現象である。

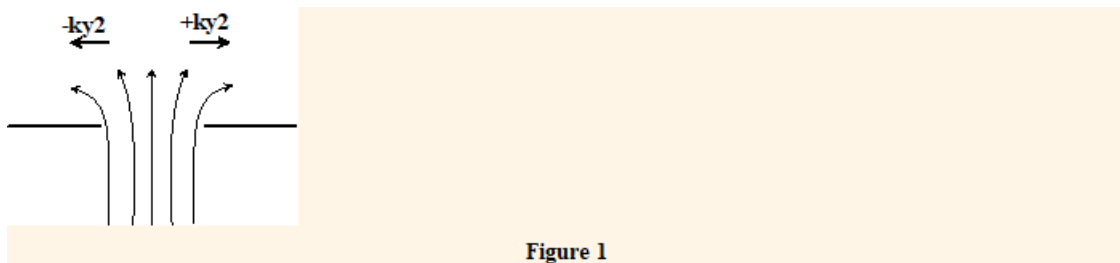


Figure 1

図 5.5: スリットを通過すると回折がおき、 $k_y$  成分が生まれる

式 5.3 を用いて  $x = 0$  での強度を見てみる。

$$I = \int_{-d}^d e^{-i\kappa y} dy \quad (5.4)$$

で  $d = 1$  とすると次のグラフが得られる。

$$I = \frac{2 \sin \kappa}{\kappa} \quad (5.5)$$

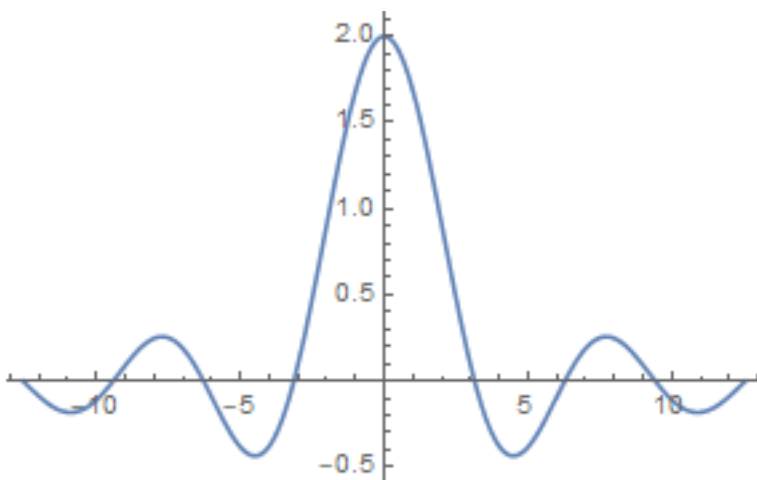


図 5.6:  $d = 1$  とした時の原点での波数  $\kappa$  の強度分布密度

$k_y = 0$  以外のところでも値が周期的に得られている。

つまり、 $y$  の領域を限定して、位置の精度を上げたので、運動量には揺らぎが生じてきた。スリット幅  $\Delta d$  と  $\Delta \kappa$  との間に

$$\Delta d \Delta \kappa \geq \pi \quad (5.6)$$

程度の関係があることを表している。

そこで改めて積分範囲をカットオフした次の有限区間のフーリエ変換を定義しておく

$$\mathcal{F}(\mathbf{k}, d) = \int_{-d}^d \exp[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}] [-i\kappa y] dy \quad (5.7)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_x \cdot x + k_y \cdot y$$

である。これを有限フーリエ変換と呼ぶ。

ここでは入射波  $k_y = 0$  を原点で見た  $x = 0$  としてしたのが式 5.4 である。

$$\mathcal{F}(0, d) = \int_{-d}^d \exp[-i\kappa y] dy$$

では逆フーリエ変換はどうだろうか、完全性が厳密でない場合としてはじめに、逆変換を次のようにあらゆる波数で積分する。

$$\mathcal{I}(\mathcal{F}(\mathbf{k}, d)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\kappa, d) \exp[i\kappa y] d\kappa$$

例えば先の  $d = 1$  の場合は次のようなグラフになる。

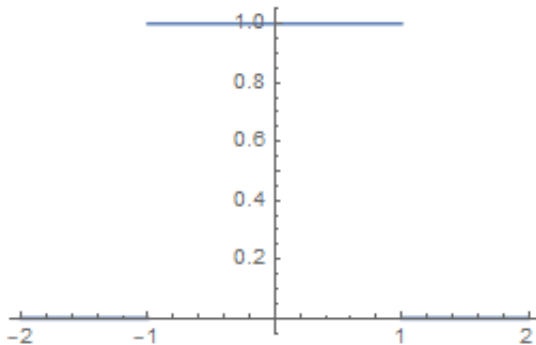


図 5.7: 逆有限フーリエ変換

これはスリット幅を超えて波が回折することがないことを表している。運動量の  $y$  方向への流れはない。

そこで、逆有限フーリエ変換も次のように有限の波数の足し合わせにカットオフを設けて次で定義する。

$$\mathcal{I}(\mathcal{F}(\mathbf{k}, d), \omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\kappa=-\omega}^{+\omega} \mathcal{F}(\kappa, d) \exp[i\kappa y] \quad (5.8)$$

## 5.2 回折波

スリット通過後の波はもはや平面波ではない。 $y$  方向の広がりを持つ。そこでスリット通過後の波を考える。波数  $k$  が一定ではなくなったわけだ。

よって  $y$  方向にもエネルギーを運ぶので、エネルギー保存則を考慮し、次の値が一定になることを仮定しよう。

$$k^2 = k_y^2 + k_x^2$$

スリット通過後の波数は式 5.5 を考慮し、周期性をもつとしよう。  
 さらに式 5.6 から波長に下限があるとして、これをスリット幅にとると

$$\lambda_0 = 2d$$

さらにホイヘンスの原理では  $y$  軸のスリット幅  $2d$  上に素元波が並ぶので、位相を、 $n = 1, 2, \dots$  として位置  $y$  では  $\lambda_n = n\lambda_0$  と置き、

$$\theta_n = \frac{2\pi}{\lambda_n}y = \frac{2\pi}{n\lambda_0}y = \frac{\pi}{nd}y \quad (5.9)$$

とすると、スリット通過後の波数は

$$k'_y = k \sin\left(\frac{\pi}{nd}y\right)$$

$$k'_x = k \cos\left(\frac{\pi}{nd}y\right)$$

入射後の波は式 5.2 から

$$\phi' = \exp\left[ik\left(\sin\left(\frac{\pi}{nd}y\right)x + \cos\left(\frac{\pi}{nd}y\right)y\right)\right] \quad (5.10)$$

とおける。しかし、スリットの効果が観測と関連するためには、まだ不十分で、粗視化の原理を用いるとから、スリット幅内に複数の波が合成されていないといけない。そこで式 5.9 から  $2d$  を  $2n$  等分した  $j$  番目の単位を考える。

$$\Delta y = \frac{d}{n}j$$

これは  $y$  軸方向に素元波が並ぶホイヘンスの素元波の波源を表している。よって  $y$  方向については

$$y \rightarrow y - \Delta y$$

とし、 $y$  を  $-d$  から  $d$  まで足し合わせる操作を加えると

$$\psi = \sum_{j=-n}^n \exp\left(ik\left(x \cos\left(\frac{\pi\left(y - \frac{dj}{n}\right)}{dn}\right) + \left(y - \frac{dj}{n}\right) \sin\left(\frac{\pi\left(y - \frac{dj}{n}\right)}{dn}\right)\right)\right) \quad (5.11)$$

となる。例えば  $d = 10$  として  $n = 20$  と  $n = 100$  すると次の図のようになる。

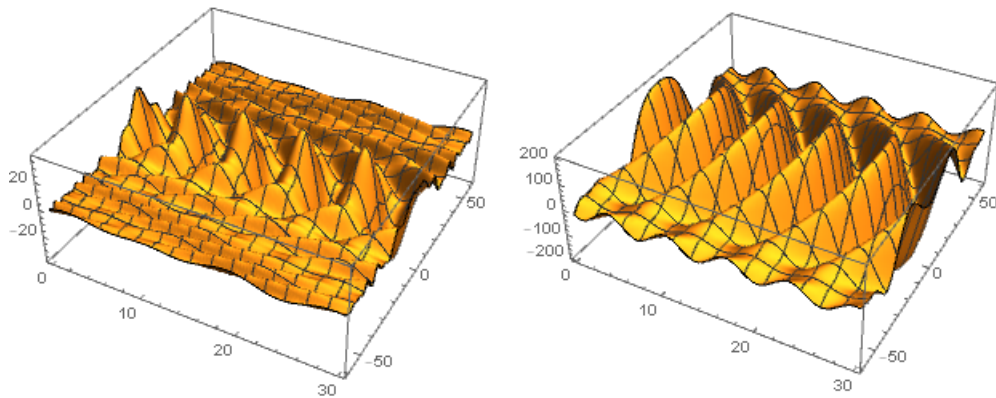


図 5.8: 左:  $\psi$  を  $n = 20$  とした場合、右:  $\psi$  を  $n = 100$  とした場合

回折波は単純な円形波ではない。重ね合わせによって  $y$  軸方向にも強度曲線のような波形になる。1 スリットでも干渉がおきる。

### 5.3 フラウンフォーファー回折

式 5.11 とフラウンフォーファー回折との関係を考えるために幾何光学を復習しておこう。

まず、出発として一般的な **Helmholtz-Kirchhoff** の積分からはじめる。

下図のように大きな空洞があり、その面を  $S_1$  とする。 $S_1$  の一部に穴  $D$  がある。空洞の外には波源  $P$  があって、

そこから放出された波を空洞内部の観測点  $O$  で観測する。 $O$  を中心として半径  $r_2$  の球面を  $S_2$  とする。

$S_1$  と  $S_2$  の間の体積を  $V$  とする。

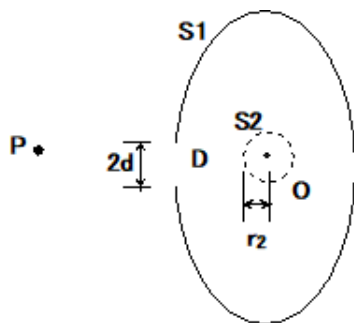


Figure 1

図 5.9: 穴  $D$  のある領域内に観測点  $O$  を置き、波源  $P$  からの波を観測する。

ここで任意の2つの波動関数  $\phi_1, \phi_2$  について Stokes の定理より、

$$\int_{S_1} (\phi_1 \nabla \phi_2 - \phi_2 \nabla \phi_1) dS_1 + \int_{S_2} (\phi_1 \nabla \phi_2 - \phi_2 \nabla \phi_1) dS_2 = \int_V (\phi_1 \Delta \phi_2 - \phi_2 \Delta \phi_1) dV$$

が成り立つ。また、体積  $V$  の中には波源は無いので波数を  $k$  として、ヘルムホルツ方程式は第1部で見たように

$$(\Delta + k^2)\phi_1 = 0$$

$$(\Delta + k^2)\phi_2 = 0$$

なので右辺を0の体積積分は0になる。さらに、左辺は次のように法線ベクトルの向きからまとめることができる。

$$\int_{S_1+S_2} (\phi_1 \nabla \phi_2 - \phi_2 \nabla \phi_1) dS = 0 \quad (5.12)$$

この式の意味するものは非常に深い。

留意すべきは境界面の法線ベクトルの向きで、次の図のようにおかないといけない。

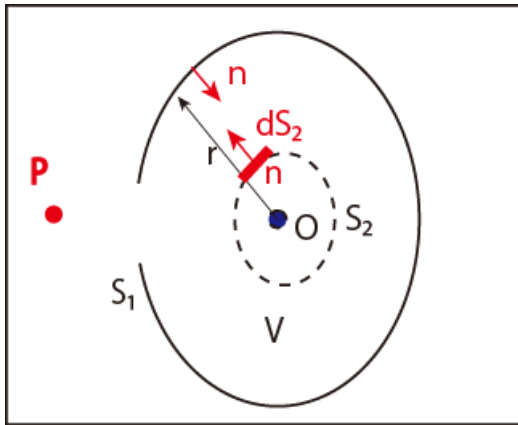


図 5.10: 体積  $V$  を囲む面の法線ベクトルの向きは  $S_1$  は内、 $S_2$  は外を正にとる。

$r$  は観測点  $O$  から  $S_1$  までの距離とする。そこでヘルムホルツ方程式を満たす解を球面波を次でおくと

$$\phi = \frac{1}{r} \exp(ikr)$$

式 5.12 から

$$\int_{S_1+S_2} \left( \phi_1 \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial \phi_1}{\partial n} \right) dS = 0$$

これは次と同等になる。

$$\int_{S_1} \left( \phi_1 \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial \phi_1}{\partial n} \right) dS = - \int_{S_2} \left( \phi_1 \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial \phi_1}{\partial n} \right) dS \quad (5.13)$$

また、法線微分は  $S_1$  が  $O$  点を中心とする球と考えることができるので

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial r}$$

とすることができる。さらに、 $O$  点から  $S_2$  面上の  $dS_2$  に対応した立体角を  $d\Omega$  とする。

$S_2$  面は微小半径  $r_2$  で与えられたと考えることができるので、

$$dS_2 = r_2^2 d\Omega$$

となる。よって、次のように積分を置き換えることができる。

$$\begin{aligned} - \int_{S_2} \left( \phi_1 \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial \phi_1}{\partial n} \right) dS &= - \int_{S_2} \left( \phi_1 \frac{\partial}{\partial r} \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial \phi_1}{\partial r} \right) r_2^2 d\Omega \\ &= - \int_{S_2} \left( \phi_1 \left( \frac{ikr-1}{r^2} \right) e^{ikr} \Big|_{r=r_2} - \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial \phi_1}{\partial n} \Big|_{r=r_2} \right) r_2^2 d\Omega \\ &= - \int_{S_2} \left( \phi_1 ikr_2 e^{ikr_2} - \phi_1 e^{ikr_2} - r_2 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} \right) d\Omega \end{aligned}$$

この後で  $r_2 \rightarrow 0$  とすると結局式 5.13 は

$$\begin{aligned} \int_{S_1} \left( \phi_1 \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial \phi_1}{\partial n} \right) dS &= \int_{S_2} (\phi_1) d\Omega \\ &= 4\pi \phi_1(O) \end{aligned}$$

となる。今後は原点を  $O$  として、区別するので改めて、観測点を今後  $P$  とすると

$$\phi_1(P) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \left( \phi_1 \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial \phi_1}{\partial n} \right) dS \quad (5.14)$$

を得る。これをヘルムホルツ・キルヒホフの積分定理という。

この式はヘルムホルツ方程式の観測点  $P$  での解を表す。

それが、点  $P$  を含む閉曲面  $S_1$  上の関数値  $\phi_1$  が必要であることを示す。

これは素元波がこの  $S_1$  面上から発生し、合成したものである。

従ってホイヘンスの原理を数学的に表現したものである。

従って、この式は前節の式 5.11 と同等である。これを次のキルヒホフの境界条件を例にみていこう。

## 5.4 キルヒホフ境界条件

具体的に境界条件を与えてこの式 5.14 を解いてみよう。

下図のように無限に広いスリットに小さな穴があるとする。

平面波が領域  $S_1$  に入ったとして、この波を  $\phi_1$  とする。

ここでは内部の観測点を  $P$  とし、スリット面に図右のように  $x, y, z$  軸をおく。

スリット面に垂直方向に  $y$  軸をとるのでスリット内の位置  $Q$  の  $y$  成分は原点  $O$  において、0 にみなすことができる、

$$Q(\xi, 0, \eta) = Q(\xi, \eta)$$

で表している。

また、スリット面内での振幅は  $A$  で一定として、ここではまだ平面波のみとすれば

$$\phi_1(O) = Ae^{iky} \quad (5.15)$$

とおけるので、

$$\phi_1 = A, (y=0) \quad (5.16)$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial n} \Big|_{y=0} = \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \Big|_{y=0} = ikA \quad (5.17)$$

とみなせる。

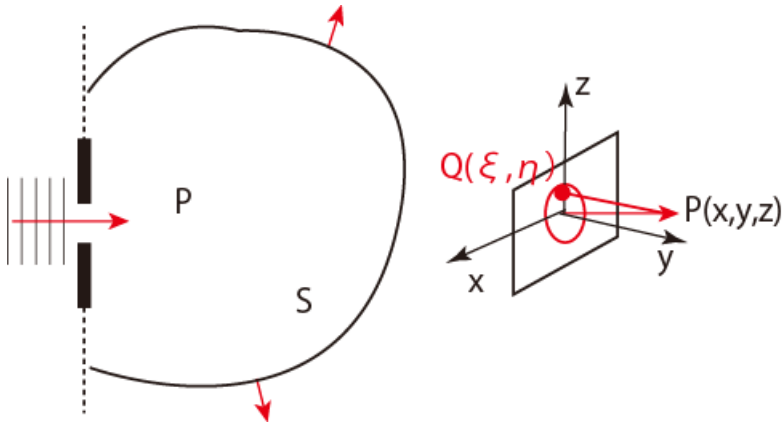


図 5.11: 無限に広いスリットとのそれを覆う、曲面  $S$

このスリットを囲む無限の領域が  $S$  で、この反対側の領域には回折波波  $\phi_1$  は無いものとする。

$$\phi_1 = 0 (\phi_1 \subset S)$$

また、無限遠の  $S$  上においても

$$\phi_1 = 0 (on S)$$

この条件はキルヒホフの境界条件と呼ばれる。

これにより積分をスリットの開口面上に限定することができる。

次に観測点  $P$  で考える。スリットから  $S$  に入る波は球面波とする。上図から  $Q(\xi, y_0, \eta)$  として、

$$\frac{\partial r}{\partial y_0} = \frac{\partial}{\partial y_0} \sqrt{(\xi - x)^2 + (y_0 - y)^2 + (z - \eta)^2} = \frac{y_0 - y}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (y_0 - y)^2 + (z - \eta)^2}} = \frac{y_0 - y}{r} \quad (5.18)$$

となるから、

$$\left. \frac{\partial r}{\partial y_0} \right|_{y_0=0} = -\frac{y}{r} \simeq -1$$

という近似が使える。よって、スリット面での法線方向は閉曲面  $S$  の内側を向くから開口面での法線方向の微分は

$$\left. \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ikr}}{r} \right|_{y_0=0} = \left. \frac{\partial}{\partial y_0} \frac{e^{ikr}}{r} \right|_{y_0=0} = \left. \frac{ike^{ikr} \frac{\partial r}{\partial y_0} r - e^{ikr} \frac{\partial r}{\partial y_0}}{r^2} \right|_{y_0=0} = \left. -\frac{ike^{ikr}}{r} + \frac{e^{ikr}}{r^2} \right|_{y_0=0}$$

を得る。しかし、 $r > 0$  のところでは第 2 項を小さいとして無視できるから、式 5.15 より、

$$\left. \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ikr}}{r} \right|_{y_0=0} \simeq \frac{e^{ikr}}{r^2}$$

式 5.14 から観測点を  $P$  では境界条件 5.16 を使うと

$$\begin{aligned} \phi_1(P) &= \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \left( \phi_1 \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial \phi_1}{\partial n} \right) dS \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \left( -A \frac{ike^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r} ikA \right) dS \\ &= -\frac{ik}{2\pi} \int_S A \frac{e^{ikr}}{r} dS \\ &= -\frac{i}{\lambda} \int_S A \frac{e^{ikr}}{r} dS \simeq -\frac{i}{\lambda r_0} \int_S A e^{ikr} dS \end{aligned}$$



ただし、最後のところの近似は  $r_0$  を開口面付近からの距離として、  
 $dS = d\xi d\eta$  の位置が変化しても  $1/r_0$  は十分ゆっくり変化するので積分の外に出した。  
 これに対し指数の肩にある  $ikr$  の部分は  $r$  の微小変化でも激しい振動を与え得るので外に出さない。  
 また、波長

$$\lambda = \frac{k}{2\pi}$$

とした。次に原点  $O$  と観測点  $P$  との距離を

$$r_0 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

として、開口部は小さいので

$$\xi \ll x, \eta \ll z$$

とし、ベキ展開を利用して、積分を実行する。

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(x-\xi)^2 + y^2 + (z-\eta)^2} \\ &= r_0 + \frac{1}{1!} \left( \frac{\partial r}{\partial \xi} \Big|_{\xi, \eta=0} \xi + \frac{\partial r}{\partial \eta} \Big|_{\xi, \eta=0} \eta \right) + \frac{1}{2!} \left( \frac{\partial^2 r}{\partial \xi^2} \Big|_{\xi, \eta=0} \xi^2 + \frac{\partial^2 r}{\partial \eta^2} \Big|_{\xi, \eta=0} \eta^2 + 2 \frac{\partial^2 r}{\partial \xi \partial \eta} \Big|_{\xi, \eta=0} \xi \eta \right) + \dots \end{aligned} \quad (5.19)$$

となる。ただし、

$$\frac{\partial r}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} \sqrt{(x-\xi)^2 + y^2 + (z-\eta)^2} = \frac{\xi-x}{r}$$

$$\frac{\partial r}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} \sqrt{(x-\xi)^2 + y^2 + (z-\eta)^2} = \frac{\eta-z}{r}$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial \xi^2} = \frac{r - (\xi-x) \frac{\partial r}{\partial \xi}}{r^2} = \frac{r - (\xi-x) \frac{\xi-x}{r}}{r^2}$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial \eta^2} = \frac{r - (\eta-z) \frac{\partial r}{\partial \eta}}{r^2} = \frac{r - (\eta-z) \frac{\eta-z}{r}}{r^2}$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{(\eta-z) \frac{\partial r}{\partial \xi}}{r^2} = \frac{(\eta-z) \frac{\xi-x}{r}}{r^2}$$

であるから

$$\frac{\partial r}{\partial \xi} \Big|_{\xi, \eta=0} = -\frac{x}{r_0}, \quad \frac{\partial r}{\partial \eta} \Big|_{\xi, \eta=0} = -\frac{z}{r_0}, \quad \frac{\partial^2 r}{\partial \xi^2} \Big|_{\xi, \eta=0} = \frac{1}{r_0} - \frac{x^2}{r_0^3}, \quad \frac{\partial^2 r}{\partial \eta^2} \Big|_{\xi, \eta=0} = \frac{1}{r_0} - \frac{z^2}{r_0^3}$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial \xi \partial \eta} \Big|_{\xi, \eta=0} = -\frac{xz}{r_0^3}$$

これらを式 5.19 に代入すると。

$$\begin{aligned} r &= r_0 - \frac{x\xi + z\eta}{r_0} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2r_0} - \frac{x^2\xi^2 + 2xy\xi\eta + z^2\eta^2}{2r_0^2} + \dots \\ &= r_0 - \frac{x\xi + z\eta}{r_0} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2r_0} - \frac{(x\xi + z\eta)^2}{2r_0^2} + \dots \end{aligned}$$

となる。この近似を第 2 項までとったものをフラウンホーファー近似といい、第 3 項までとったものをフレネル近似という。第 1 項の係数が負になることが重要になる。

開口幅は  $P$  までの距離比べて十分小さければフラウンホーファー近似を利用して、この場合

$$\phi_1(P) = -\frac{i}{\lambda r_0} e^{ikr_0} \int_S A(\xi, \eta) e^{-ik(x\xi + y\eta)/r_0} d\xi d\eta$$

ここで指数の肩にある項は

$$\frac{x}{r_0} = \cos \theta, \quad \frac{y}{r_0} = \sin \theta$$

とおけるので

$$\phi_1(P) = -\frac{i}{\lambda r_0} e^{ikr_0} \int_S A(\xi, \eta) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\xi d\eta \quad (5.20)$$

と表せば、これはまさに式 5.7 で定義した波  $\phi_1$  の開口における振幅  $A(\xi, \eta)$  の有限フーリエ変換である。

## 6 粒子と波 [111][86]

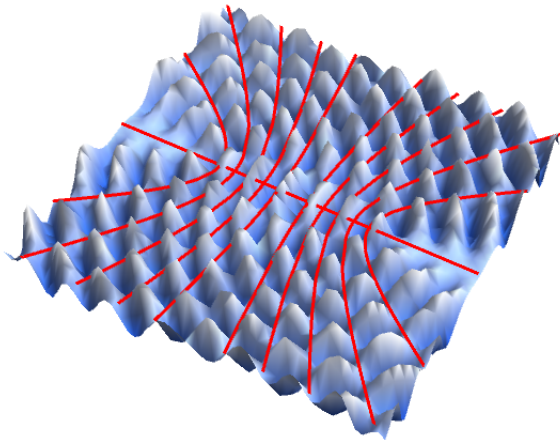


図 6.1: 2 波源のある水面にできる定常波

第 1 部の波動現象ではラプラス方程式を満たす関数系と境界値問題を考察してきた。

連続した波の現象をみてきたが、量子論は波動現象に加えて、粒子性を見ることもある。

これらは同時に両立しないが、観測の問題と時間の問題を含む本論のテーマである。

前節の量子化により、粒子の生成や消滅を担う演算子を導いた。これらが波動関数の振幅に作用する。

しかし、同時に波には位相部分がある。これは波の干渉や、回折を担う。

高校物理で定常波ができると節線、腹線が見えてくることを学んだが、粒子性は安定した振幅から得られるので、この定常波ができていないといけない。

そのために量子論に拡張すると、平面波の重ね合わせが重要になる。

それが、時間を逆行する波と時間を順行する波になったりする。

波の重ね合わせは今現在も量子論を支える根底にある。

このもっとも基礎的な考え方が第 1 部でみたフーリエ変換である。これを場の理論に応用する。

量子論の世界で波動関数は、波としてふるまう。

しかし、同時に粒子性も持つということが特徴で、今後、この問題を考察していく。

以下にも示すように多くの参考文献を含め、文献では確率解釈をとるが、筆者はその立場ではない。

定常波が存在するためには、進行波と反射波が必要でこれは境界があることを意味する。

筆者はこの境界という考えが量子論では単に境界条件として付随するものではなく、本質的な役割を持つと考えている。

つまり、境界のない波は存在できない。無限に長い螺旋を想像すると、ここに一定方向の進行波をつくることができ、境界のない波がつかれるように思えるが、その波は存在できない。波が存在を主張するためには、観測が必要になる。

そのためには最低限の重ね合わせが必要で、それは境界を必要とする。どこかに外部をつくらないと波はできないわけだ。重ね合わせで定常波ができる粒子像と、逆に定常波を打ち消して生じる波動像が共に必要なのである。

粒子の生成と消滅は時間前後でセットで起きる。光子が生成され、空間的に離れた点に向かう。この光子は粒子として、確定した位相を持ち、方向性を持つ。しかし、光子が生成されると同時にその場の波が揺らぐ。この波は空間に等方的に広がる。つまり生成により、単一粒子の散乱がおきる。これは時間の正に進むが、同時に負方向にも伝播がおきるが、これはその時空点から粒子が消滅したとして位相反転して伝わる。同じように回りの場が揺らぎ、その波は時空間に伝播していく。このように量子論の2重性は環境と粒子の両方を考慮してはじめて説明がつく。環境の波は常に特定粒子の生成、消滅に関係なく、揺らいでいる。安定した場では定常波ができていようだろう。この時、物性論のフォノンのように、この波も粒子として見えるわけである。

ここで重要なのはこの章には量子論の確率解釈は必要としていないことである。第9部では確率解釈とその応用を紹介するが、筆者は確率解釈の立場ではない。量子論を正しく相対論に接続していくと、結果として確率解釈ができ、今日の量子コンピューターのような応用ができるようになる。しかし、相対論との関係には紫外発散を含め、多くの課題があり、その解決のためには確率ではなく、波と粒子の両面性をここでみておきたい。

## 6.1 分散関係

第2部で正準化について学んだ。そこでは古典的な作用がラグランジアン  $L$  を

$$L_{cl} = T - V \quad (6.1)$$

で決めたのに対して量子論に適したラグランジアンは場の量の共変性から作られ、例えばスカラー関数  $\phi$  に対してラグランジアン密度は場の量  $\phi$  とその変化量  $\partial_\mu \phi$  の関数として

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left\{ (\partial^\mu \phi)^\dagger (\partial_\mu \phi) - \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \phi^\dagger \phi \right\} \quad (6.2)$$

スカラー場のラグランジアン密度とハミルトニアン密度と一般化運動量を次のようにおく。ここでは  $\hbar = c = 1$  とする。

質量  $m$  の自由粒子を考えると

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi) (\partial^\mu \phi) - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad (6.3)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \pi_\phi \dot{\phi} - \mathcal{L} \\ &= \frac{1}{2} \left( \pi_\phi^2 + (\nabla \phi)^2 + m^2 \phi^2 \right) \\ \pi &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \end{aligned} \quad (6.4)$$

この時、ラグランジアンの中では見られなかった、一般化運動量  $\pi$  が入ってくることに留意する。共役運動量のフーリエ変換から

$$\pi(x) = \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \pi(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}$$

$$\phi(x) = \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \phi(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}$$

共役をとると

$$\pi^*(x) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \pi^*(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \pi^*(-\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} = \pi(x)$$

$$\phi^*(x) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \phi^*(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \phi^*(-\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} = \phi(x)$$

という関係がある。よってフーリエ変換すると、積分範囲も反転するから

$$\phi^*(\mathbf{k}) = \phi(-\mathbf{k})$$

$$\pi^*(\mathbf{k}) = \pi(-\mathbf{k})$$

という関係があることがわかる。

式 6.3 からフーリエ変換の結果を代入すると

$$\begin{aligned} H &= \int d^3\mathbf{x} \mathcal{H} \\ &= \frac{1}{2(2\pi)^6} \int d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{k}_1 d^3\mathbf{k}_2 [\pi(\mathbf{k}_1)\pi(\mathbf{k}_2) + (-\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2 + m^2) \phi(\mathbf{k}_1)\phi(\mathbf{k}_2)] e^{i(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2)\mathbf{x}} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} [\pi(\mathbf{k})\pi(-\mathbf{k}) + (\mathbf{k}^2 + m^2) \phi(\mathbf{k})\phi(-\mathbf{k})] \\ &= \frac{1}{(2\pi^3)} \int d^3\mathbf{k} \frac{1}{2} [|\pi(\mathbf{k})|^2 + \omega_{\mathbf{k}}^2 |\phi(\mathbf{k})|^2] \end{aligned} \quad (6.5)$$

となる。ただし、 $\phi(\mathbf{k})\phi(-\mathbf{k})$  の係数に式 6.3 にはなかった  $-\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2$  の係数がフーリエ変換のために出ていることに注意する。そこで分散関係

$$\omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$$

を定義する。これは波に特有な現象で、フーリエ変換から自然に導いたことが重要である。

これにより、ハミルトニアンには粒子と波の両方のエネルギーが付加される。

式 6.5 を  $\mathbf{k}$  空間に置き換えられたハミルトニアンとすることができるので、式 3.4 の結果を拡張して、

$$\phi(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} (a_{\mathbf{k}} + a_{-\mathbf{k}}^\dagger) = \phi^\dagger(-\mathbf{k}) \quad (6.6)$$

$$\pi(\mathbf{k}) = -i\sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2}} (a_{\mathbf{k}} - a_{-\mathbf{k}}^\dagger) = \pi^\dagger(-\mathbf{k}) \quad (6.7)$$

とおくと、先と同様に交換関係は

$$[a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (6.8)$$

となる。

フーリエ変換により

$$\phi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} (a_{\mathbf{k}} + a_{-\mathbf{k}}^\dagger) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \quad (6.9)$$

$$\pi(\mathbf{x}) = -i \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2}} (a_{\mathbf{k}} - a_{-\mathbf{k}}^\dagger) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \quad (6.10)$$

とかける。これから場の量の交換関係が

$$\begin{aligned} [\phi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{x}')] &= -\frac{i}{2} \int \frac{d\mathbf{k}d\mathbf{k}'}{(2\pi)^6} \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{\omega_{\mathbf{k}'}}} \left( -[a_{\mathbf{k}}, a_{-\mathbf{k}'}^\dagger] + [a_{-\mathbf{k}}^\dagger, a_{\mathbf{k}'}] \right) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x} + \mathbf{k}'\mathbf{x}')} \\ &= i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \end{aligned} \quad (6.11)$$

であり、同じ交換関係である。従って式 6.5 は式 6.7 より

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3 \mathbf{x}}{(2\pi)^3} d\mathbf{k} d\mathbf{k}' e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x} + \mathbf{k}'\mathbf{x}')} \left[ -\frac{\sqrt{\omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}'}}}{2} (a_{\mathbf{k}} - a_{-\mathbf{k}}^\dagger) (a_{\mathbf{k}'} - a_{-\mathbf{k}'}^\dagger) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{-\mathbf{k}\mathbf{k}' + m^2}{2\sqrt{\omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}'}}} (a_{\mathbf{k}} + a_{-\mathbf{k}}^\dagger) (a_{\mathbf{k}'} + a_{-\mathbf{k}'}^\dagger) \right] \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{k}} \left( -\frac{1}{2} (a_{\mathbf{k}} - a_{-\mathbf{k}}^\dagger) (a_{\mathbf{k}'} - a_{-\mathbf{k}'}^\dagger) + \frac{1}{2} (a_{\mathbf{k}} + a_{-\mathbf{k}}^\dagger) (a_{\mathbf{k}'} + a_{-\mathbf{k}'}^\dagger) \right) \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{k}} (a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\dagger + a_{-\mathbf{k}}^\dagger a_{-\mathbf{k}}) \\
&= \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{k}} \left( \frac{1}{2} a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\dagger + \frac{1}{2} a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} \right) \\
&= \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{k}} \left( \frac{1}{2} a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\dagger - \frac{1}{2} a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\dagger + \frac{1}{2} a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\dagger + \frac{1}{2} a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} \right) \\
&= \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{k}} \left( a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} [a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}}^\dagger] \right) \tag{6.12}
\end{aligned}$$

となる。

古典場であれば上式の第 2 項は  $\delta(0)$  とみなせる。ここでは  $[a, a^\dagger] = 1$  を用いて基底状態を足し合わせると

$$\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2} \tag{6.13}$$

が得られる。そこで、この定数を無視できると仮定すると次の交換関係が得られる。

$$\begin{aligned}
[H, a_{\mathbf{k}}^\dagger] &= \omega_{\mathbf{k}} (a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\dagger - a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}}) \\
&= \omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\dagger [a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}}^\dagger] \\
&= \omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\dagger
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[H, a_{\mathbf{k}}] &= \omega_{\mathbf{k}} (a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} - a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}}) \\
&= \omega_{\mathbf{k}} [a_{\mathbf{k}}^\dagger, a_{\mathbf{k}}] a_{\mathbf{k}} \\
&= -\omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}
\end{aligned}$$

これは固有方程式とみなせ、ハミルトニアンと生成・消滅演算子との交換積がエネルギー単位  $\hbar\omega$  を出し入れすることがわかる。

これから生成されるエネルギーがスカラーであるということは重要である。そのため、空間座標には依存しない。

さらにエネルギー運動量テンソルが式 3.107 から

$$T^{\mu\nu}(x) = \sum_a \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial (\partial_\mu \phi_a(x))} \partial^\nu \phi_a(x) - g^{\mu\nu} \mathcal{L}(x)$$

で与えられたので全 4 限運動量  $\mathbf{P}$  は 3.106 から

$$P^\alpha = \int d^3 \mathbf{x} \mathcal{P}^\alpha(x) = \int T^{0\alpha} d^3 \mathbf{x} = - \int \pi \partial_i \phi d^3 \mathbf{x}$$

となった。ここでは  $\partial_i \phi_a = \nabla \phi(\mathbf{x})$  とおけるから式 6.9、6.10 から、運動量  $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{p}$  に置き換えて、

$$\mathbf{P} = - \int d^3\mathbf{x} \pi(\mathbf{x}) \nabla \phi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \mathbf{p} a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} \quad (6.14)$$

となる。この式は物理的な意味を明瞭にしてくれる。

$a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}$  が運動量  $\mathbf{p}$  を持つ粒子の数だとすれば、運動量の期待値を全空間で足し合わせて、全運動量を出している。

こうして求めた全運動量  $\mathbf{P}$  と生成演算子の交換関係から  $a_{\mathbf{p}}^\dagger$  の固有方程式として固有値の運動量  $\mathbf{p}$  を生成している。

これは章頭の図にあるように、点波源が2つ空間的に離れていると、互いの進行波が重なり合い、周囲を波立てさせる。

これ定常波が伝播し、運動量は空間的に広がることになる。

消滅演算子  $a_{\mathbf{p}}$  との交換関係は第2式のように符号を反転する。これらの操作はまさに粒子としての性質である。

$$[\mathbf{P}, a_{\mathbf{p}}^\dagger] = \mathbf{p} a_{\mathbf{p}}^\dagger$$

$$[\mathbf{P}, a_{\mathbf{p}}] = -\mathbf{p} a_{\mathbf{p}}$$

従って真空状態に

$$a_{\mathbf{p}_1}^\dagger a_{\mathbf{p}_2}^\dagger \cdots a_{\mathbf{p}_n}^\dagger |0\rangle$$

が生成する運動量は

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \cdots + \mathbf{p}_n$$

となる。これらは空間座標に依存する。さて、この時、観測者は全ての運動量の和を見るだろうか。

それには式 6.14 のように量子力学的な重ね合わせをとらないといけない。

古典的には複数のボールがそれぞれの運動量を持つ時、1つのボールを見ているか2つのボールを見ているかはお互いに干渉することはないだろう。しかし、量子力学的な状態は干渉し合うわけである。この粒子の交換により周囲の場が波立つことは今後考察を必要とする興味ある課題である。

## 6.2 相対論化

粒子の生成、消滅が波として関係し、周囲の空間に影響することを見た。これは時空を記述する相対論と結びつくはずである。

そこで4次元のミンコフスキー空間に拡張し、相対論の要請を取り入れることを考えよう。

ここでは自然単位系から一時的に標準単位系にして、 $\hbar, c$  をつかうことがある。

$\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}$  はローレンツ不変でなくても、 $kx = k^0 x^0 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}$  がローレンツ不変なので

$$d^4k = d^4k'$$

でローレンツ不変であり、場についても

$$\phi'(x') = \phi(x)$$

のようにローレンツ不変を要求すれば、フーリエ変換の関数  $f(k)$  も

$$f'(k') = f(k)$$

となることになる。これから  $f(k)$  を予想してみると

$$\begin{aligned} f(k) &= \sqrt{2\pi} \delta \left( (k^0)^2 - (k^1)^2 - (k^2)^2 - (k^3)^2 - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) a(k) \\ &= \sqrt{2\pi} \delta \left( k^2 - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) a(k) \\ &= \sqrt{2\pi} \delta \left( (k^0)^2 - \mathbf{k}^2 - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) a(k) \end{aligned} \quad (6.15)$$

となる。ところがアインシュタインの関係式から

$$p_\mu p^\mu = \left( \frac{E}{c} \right)^2 - \mathbf{p}^2 = m^2 c^2$$

さらにド・ブロイの関係

$$\mathbf{k} = \frac{\mathbf{p}}{\hbar}, \quad \omega = \frac{E}{\hbar}$$

から

$$k_\mu k^\mu = (k^0)^2 - \mathbf{k}^2 = \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \quad (6.16)$$

となり、次の仮定

$$\omega(\mathbf{k}) = c \sqrt{\mathbf{k}^2 + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}}$$

を用いる。δ関数の性質

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2a} (\delta(x + a) + \delta(x - a))$$

から式 6.15 は

$$\begin{aligned} f(k) &= \sqrt{2\pi} \delta \left( (k^0)^2 - \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 \right) a(\mathbf{k}) \\ &= \frac{c}{2\omega} \sqrt{2\pi} \left\{ \delta \left( k^0 - \frac{\omega(\mathbf{k})}{c} \right) + \delta \left( k^0 + \frac{\omega(\mathbf{k})}{c} \right) \right\} a(\mathbf{k}) \end{aligned}$$

と先進、遅延の和のようにおける。

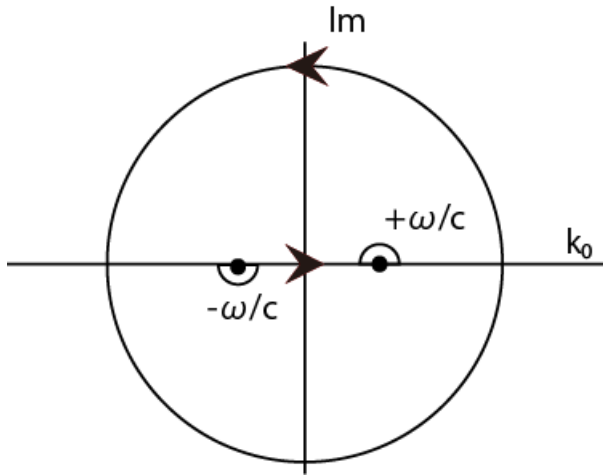


図 6.2: 積分経路の取り方

よって  $k^0$  積分を先にすることが可能になり、

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \int \frac{c}{2\omega} a \left( +\frac{\omega}{c}, k^1, k^2, k^3 \right) e^{-\frac{i\omega}{c}x^0} e^{i(k^1 x^1 + k^2 x^2 + k^3 x^3)} dk^1 dk^2 dk^3 \\ &\quad + \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \int \frac{c}{2\omega} a \left( -\frac{\omega}{c}, k^1, k^2, k^3 \right) e^{+\frac{i\omega}{c}x^0} e^{i(k^1 x^1 + k^2 x^2 + k^3 x^3)} dk^1 dk^2 dk^3 \end{aligned} \quad (6.17)$$

これを4元成分を用いて

$$\begin{aligned}\phi^\mu(x) &= \phi(t, \mathbf{x}) \\ &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \int \left( A^\mu(\mathbf{k}) e^{-i\omega(\mathbf{k})t} + B^\mu(\mathbf{k}) e^{i\omega(\mathbf{k})t} \right) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \frac{cd^3k}{2\omega(\mathbf{k})}\end{aligned}\quad (6.18)$$

となる。空間項は符号が1つでくくれていることに留意する。

次に式5.1に式6.15を代入すると

$$\phi(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \int \delta\left(k_\mu k^\mu - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\right) a(k) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^4k$$

となるので、この両辺を  $x$  で微分するとミンコフスキー空間だから

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \partial/\partial x^0 \\ \partial/\partial x^1 \\ \partial/\partial x^2 \\ \partial/\partial x^3 \end{pmatrix} \phi(x) &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \int \delta\left(k_\mu k^\mu - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\right) a(k) \begin{pmatrix} k^0 \\ ik^1 \\ ik^2 \\ ik^3 \end{pmatrix} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^4k \\ &= \frac{-i}{(\sqrt{2\pi})^3} \int \delta\left(k_\mu k^\mu - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\right) a(k) \begin{pmatrix} k_0 \\ k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^4k\end{aligned}$$

よって

$$\frac{\partial\phi(x)}{\partial x^\mu} = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \int \delta\left(k_\mu k^\mu - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\right) a(k) (-ik_\mu) e^{-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^4k \quad (6.19)$$

とまとめることができる。

ここでダランベルシアン (d'Alembertian) を

$$\begin{aligned}\square &\equiv \frac{\partial^2}{\partial(x^0)^2} - \frac{\partial^2}{\partial(x^1)^2} - \frac{\partial^2}{\partial(x^2)^2} - \frac{\partial^2}{\partial(x^3)^2} \\ &g^{\mu\nu} \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\end{aligned}$$

とし、このスカラー場にダランベルシアンを作用させれば、式6.19をもう一度  $x$  で微分するから

$$\begin{aligned}\square\phi(x) &= g^{\mu\nu} \frac{\partial^2\phi(x)}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \\ &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \int \delta\left(k_\mu k^\mu - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\right) a(k) (-i^2) g^{\mu\nu} k_\mu k_\nu e^{-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^4k \\ &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \int \delta\left(k_\mu k^\mu - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\right) a(k) (-i^2) k_\mu k^\mu e^{-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^4k\end{aligned}$$

だから、次のように定数項を加えると

$$\left(\square + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\right) \phi(x) = \frac{-1}{(\sqrt{2\pi})^3} \int \delta\left(k_\mu k^\mu - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\right) a(k) \left(k_\mu k^\mu - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\right) e^{-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^4k$$

この式はおもしろい形をしていて、 $\delta$ 関数の引数が0にならないと積分の結果は出ないのに、 $\delta$ 関数の外にも同じ式

があるので、恒等的に0にしかならないことがわかる。

従って、常に

$$\left(\square + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\right) \phi(x) = 0 \quad (6.20)$$



が成り立ち著名なクライン-ゴルドン (Klein-Gordon) の方程式が得られた。

この式で  $m = 0$  とすれば単純な波動方程式に移行する。

アインシュタインが夢見た「全ての物理現象は時空、つまりミンコフスキー空間上のローレンツ共変なくつかの場によって記述され、全ての物理法則はこれらの間に成り立つローレンツ共変な式、すなわち場の方程式により記述される。」

がこの KG 方程式により 1 つなされた。この考え方が場の理論と呼ばれるようになる。

もちろん、この式だけでは不十分で、フェルミオンの場合も量子論のシュレディンガー方程式を相対論化するのの後章で紹介する Dirac の登場を待たないといけない。

### 6.2.1 正準関係 [86]

ここではスカラー場 (クライン-ゴルドン場) を考える。

空間ベクトルは  $\mathbf{x}$ , 添え字  $i, j, k$ , 4 元ベクトルは  $x$ , 添え字は  $\mu, \nu, \gamma$  を主に用いる。

この節以後では  $\hbar = c = 1$  の自然単位系を主に用いる。

はじめに、今後重要になるいくつかの関係式をまとめておく。

古典的には、位置と運動量が独立変数として、ハミルトニアンなどを作ってきた。運動量  $p$  と位置  $q$  の間には

$$[p_i, q_j] = i\delta_{ij}$$

$$[p_i, p_j] = [q_i, q_j] = 0$$

が成り立った。この式は、同じ粒子かいなかを区別させる式でもある。つまり、同じ粒子でも観測物理量が複数あり、

それらには同時に決めることが原理的にできないことを量子論は示した。

前章の量子化以後は  $p$  に対して  $\pi$  が  $\phi$  の共役運動量として定義された。この時も 3 次元空間の場合

$$[\phi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

$$[\phi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{y})] = [\pi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})] = 0$$

となった。重要なのはこれらは、重ね合わせの原理が成り立つので、運動量の空間をとると、この空間で足し上げないといけない。

これはいいかえれば次のフーリエ変換による足し合わせになる。

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \phi(\mathbf{p}, t) \quad (6.21)$$

### 6.2.2 粒子性と波動性 [111]

量子力学では波動関数を確率密度として解釈するのが普通であった。しかし、場の理論と相対論ではこの解釈が不十分であることを示す。質量  $m$  の自由粒子の作用とラグランジアンは実スカラー場を  $\phi(x)$  として、

$$S_{sc} = \int d^4x \mathcal{L}_{sc}(x)$$

$$\mathcal{L}_{sc} = \frac{1}{2} ((\partial_\mu \phi(x)) (\partial^\mu \phi)) - \frac{1}{2} m^2 \phi(x)^2$$

とすると、作用原理の極値をとる条件として自由粒子の Klein-Gordon 方程式

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi(x) = 0$$

が得られる。この式は共変的に書かれているので式 3.19 で見たように相対論の要請を満たしている。量子論の対応原理

$$i\partial^0 \leftrightarrow E, \quad -i\partial^i \leftrightarrow p^i$$

があるから、Klein-Gordon 方程式は

$$E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2 \quad (6.22)$$

を満たしている。この式の解は次のような 4 次元平面波の重ね合わせになった。

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} (a_{\mathbf{p}} e^{-ip \cdot x} + a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{+ip \cdot x}) \quad (6.23)$$

$$p \cdot x = E_{\mathbf{p}} t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}$$

$$p^0 = \pm E_{\mathbf{p}} = \pm \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$$

である。この波動関数が多くのモードを持つ運動量の重ね合わせになっていることは重要である。

正、負方向の重ね合わせを表しているが、 $a_{\mathbf{p}} e^{-ip \cdot x}$ ,  $a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{+ip \cdot x}$  の単独としても方程式を満たす。

しかし、以下で示す条件から、この 2 つの波の合成になっていることが重要である。

量子力学の基本原理は波動性と粒子性を共に持っていることだが、その 1 つの理由は、この向かい合う波の存在が定常波をつくり、強め合う、弱め合うの干渉性をもつことである。

同時に振幅に粒子の生成、消滅演算子が入ることで不連続な粒子性も持つ。

散乱体のない、自由粒子なのにも関わらず、反射波が来るのは奇妙に感じるかもしれないが、これは次節移項で示すように粒子の双対性に関係している。

生成  $a_{\mathbf{p}}^\dagger$ 、消滅演算子  $a_{\mathbf{p}}$  とは、この各モードの振幅になっているので、それぞれのモードの運動量を生成、消滅させる。

これを示すために、次のように運動量  $\mathbf{p}$  の共役場  $\pi$  を定義する。

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}_{sc}}{\partial \dot{\phi}(x)} = \partial^0 \phi(x) = -i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{E_{\mathbf{p}}}{2}} (a_{\mathbf{p}} e^{-iq \cdot x} - a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{+iq \cdot x}) \quad (6.24)$$

時間微分により  $\sqrt{E_{\mathbf{p}}}$  が出るのでキャンセルする。

これは式 6.9, 6.10 のように運動量の反転  $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$  をつかうと

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} (a_{\mathbf{p}} + a_{-\mathbf{p}}^\dagger) e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \\ \pi(x) &= -i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{E_{\mathbf{p}}}{2}} (a_{\mathbf{p}} - a_{-\mathbf{p}}^\dagger) e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \end{aligned} \quad (6.25)$$

のようにまとめることができる。ここで正準交換関係 6.11 から向かい合う波の和としたことにより

$$[\phi(t, \mathbf{x}), \pi(t', \mathbf{y})]_{t=t'} = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (6.26)$$

が成り立つ。もし、単独の進行波だとするとこの結果は常に 0 になり、相関をもつことはできない。

これに式 6.23 を代入する。変数を変換して

$$[\phi(\mathbf{p}), \pi(\mathbf{q})]_{x=y} = i\delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \quad (6.27)$$

が成り立つ。式 3.18 のように直接計算すると

$$\begin{aligned}
 [\phi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})] &= \left[ \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} (a_{\mathbf{p}} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{+i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}), -i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{E_{\mathbf{q}}}{2}} [a_{\mathbf{q}} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{y}} - a_{\mathbf{q}}^\dagger e^{+i\mathbf{q}\cdot\mathbf{y}}] \right] \\
 &= \int \frac{d^3p d^3q}{(2\pi)^6} \sqrt{\frac{E_{\mathbf{q}}}{E_{\mathbf{p}}}} \frac{-i}{2} \left( [a_{-\mathbf{p}}^\dagger, a_{\mathbf{q}}] - [a_{\mathbf{p}} a_{-\mathbf{q}}^\dagger] \right) e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} + \mathbf{q}\cdot\mathbf{y})} \\
 &= i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})
 \end{aligned} \tag{6.28}$$

となるためには、式 6.8 のように

$$[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \tag{6.29}$$

となる必要があることがわかる。この式が運動量保存則を担っていることになる。

さらに、

$$[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}] = [a_{\mathbf{p}}^\dagger, a_{\mathbf{q}}^\dagger] = 0 \tag{6.30}$$

も成り立つ

これから自由粒子のハミルトニアンは

$$H = \int d^3x \left( \pi(x) \dot{\phi}(x) - \mathcal{L}_{sc} \right)$$

となるので、生成・消滅演算子を用いて前節 6.12 と同じ要領で次を得る。

$$\begin{aligned}
 H &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\mathbf{p}} \left( a_{\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{p}} + \frac{1}{2} [a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}^\dagger] \right) \\
 &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\mathbf{p}} \left( a_{\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{p}} + \frac{1}{2} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(0) \right)
 \end{aligned} \tag{6.31}$$

を得る。この式の第 1 項は

$$n = a_{\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{p}}$$

を粒子数とみなせば運動量  $\mathbf{p}$  の状態のエネルギーに粒子数をかけたエネルギーの期待値がハミルトニアンであると見なせる。従って、古典的な抽象に粒子の生成、消滅による粒子数という自由度が加えられた場が量子場である。式 6.29 はボーズ統計を表している。

では第 2 項は何を表すか。これは交換項をもち、次節で詳しくみる重ね合わせがつくられ、その結果ある空間部分は何もない真空で

$$\mathbf{p} = \mathbf{q}$$

のところに粒子を見る。重ね合わせの定常波の存在を示唆する。これは第 9 部で考察するが、エンタングルドな状態をつくるのがこの保存則で、逆に

$$\mathbf{p} \neq \mathbf{q}$$

となる境界を生んでいることが重要である。第 9 部でみる量子的な縛りは交換関係に見るサイクルと関係し、これが時空の隔たりによる因果関係とどう対応するかは興味ある課題である。

我々は真空に消滅演算子を作用しても、真空の状態ベクトルに変化を与えないように定義した。なにもないとする真空場は観測の外の場合が全空間で平衡温度になっていることになる。たとえば運動量  $\mathbf{p}$  を持つ 1 粒子状態を真空から次のようにつくることを考える。

$$|\mathbf{p}\rangle = \sqrt{2p_0} a_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle$$

これだけでは我々は観測可能な物理量を得ることができない。つまり、これは 1 つの進行波である。

次に、これに  $\langle 0| \phi(x)$  を作用させると

$$\begin{aligned}
\langle 0 | \phi(x) | \mathbf{p} \rangle &= \langle 0 | \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}'}}} \left( a_{\mathbf{p}'} e^{-ip' \cdot x} + a_{\mathbf{p}'}^\dagger e^{+ip' \cdot x} \right) \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} a_{\mathbf{p}}^\dagger | 0 \rangle \\
&= \langle 0 | \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{2E_{\mathbf{p}}}{2E_{\mathbf{p}'}}} \left( a_{\mathbf{p}'} a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{-ip' \cdot x} + a_{\mathbf{p}'}^\dagger a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{+ip' \cdot x} \right) | 0 \rangle \\
&= \langle 0 | \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{2E_{\mathbf{p}}}{2E_{\mathbf{p}'}}} e^{-ip' \cdot x} \left( a_{\mathbf{p}'} a_{\mathbf{p}}^\dagger + a_{\mathbf{p}'}^\dagger a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{+2ip' \cdot x} \right) | 0 \rangle \\
&= \langle 0 | \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{2E_{\mathbf{p}}}{2E_{\mathbf{p}'}}} e^{-ip' \cdot x} \left( a_{\mathbf{p}'} a_{\mathbf{p}}^\dagger - a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}'} + a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}'} + a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{+2ip' \cdot x} \right) | 0 \rangle \\
&= \langle 0 | \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{2E_{\mathbf{p}}}{2E_{\mathbf{p}'}}} \left( e^{-ip' \cdot x} [a_{\mathbf{p}'}, a_{\mathbf{p}}^\dagger] + a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}'} e^{-ip' \cdot x} + e^{+ip' \cdot x} a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}^\dagger \right) | 0 \rangle \\
&= \langle 0 | \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{2E_{\mathbf{p}}}{2E_{\mathbf{p}'}}} \left( e^{-ip' \cdot x} [a_{\mathbf{p}'}, a_{\mathbf{p}}^\dagger] \right) | 0 \rangle + \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{2E_{\mathbf{p}}}{2E_{\mathbf{p}'}}} \langle 0 | \left( a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}'} e^{-ip' \cdot x} + e^{+ip' \cdot x} a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}^\dagger \right) | 0 \rangle \\
&= \langle 0 | \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{2E_{\mathbf{p}}}{2E_{\mathbf{p}'}}} \left( e^{-ip' \cdot x} [a_{\mathbf{p}'}, a_{\mathbf{p}}^\dagger] \right) | 0 \rangle + \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{2E_{\mathbf{p}}}{2E_{\mathbf{p}'}}} \langle 0 | \left( a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{-\mathbf{p}'} + a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}^\dagger \right) e^{+ip' \cdot x} | 0 \rangle
\end{aligned}$$

となるが、

$$\begin{aligned}
a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{-\mathbf{p}'} &= -a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}^\dagger \\
a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{-\mathbf{p}'} a_{\mathbf{p}}^{\dagger -1} &= -a_{\mathbf{p}}^\dagger \\
\left( e^{+ip' \cdot x} a_{\mathbf{p}'}^\dagger \right) &= \left( -e^{-ip' \cdot x} a_{\mathbf{p}'} \right) | 0 \rangle \\
\langle 0 | a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}'} | 0 \rangle &= \langle 0 | a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}^\dagger | 0 \rangle = 0
\end{aligned}$$

によって後ろの2項が抑えられるので式6.29を使うと

$$\begin{aligned}
\langle 0 | \phi(x) | \mathbf{p} \rangle &= \langle 0 | \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{2E_{\mathbf{p}}}{2E_{\mathbf{p}'}}} \left( e^{-ip' \cdot x} [a_{\mathbf{p}'}, a_{\mathbf{p}}^\dagger] \right) | 0 \rangle \tag{6.32} \\
&= \langle 0 | \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} e^{-ip' \cdot x} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) | 0 \rangle \\
&= e^{-ip \cdot x} = \phi(x)
\end{aligned}$$

この期待値が平面波、量子力学の波動関数を表している。つまり、全ての物質は粒子性と波動性をもつ。この結果の  $e^{\pm ip \cdot x}$  が波動性を担い、振幅が生成・消滅演算子が粒子性を担っているとみなせる。

### 6.2.3 1粒子状態 [86]

これまで非常に多くの波数、運動量空間を考えて、これらの重ね合わせで位置を見いだす。ことをみてきた。

ここで、運動量  $\mathbf{p}, \mathbf{q}$  を持つ2粒子状態を考えよう。

$$a_{\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{p}}^\dagger | 0 \rangle$$

もちろん、真空状態は

$$\langle 0 | 0 \rangle = 1$$

とする。また、1粒子状態であれば規格化定数を無視すれば

$$a_{\mathbf{p}}^\dagger | 0 \rangle \propto | \mathbf{p} \rangle \tag{6.33}$$

である。そこで規格化定数を決めることを考えよう。多くは

$$\langle \mathbf{p} | \mathbf{q} \rangle = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \quad (6.34)$$

を用いる。しかし、これはローレンツ不変ではないので不便である。相対論的な要請を受けて不変量を探るために、ローレンツ変換を

$$p'_3 = \gamma(p_3 + \beta E)$$

$$E' = \gamma(E + \beta p_3)$$

とおく、ただし、第5部で見たように

$$\beta = v/c$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

である。第2部の $\delta$ 関数の性質から

$$\delta(f(x) - f(x_0)) = \frac{1}{|f'(x_0)|} \delta(x - x_0)$$

を用いて  $E dE = p_3 dp_3$  として

$$\begin{aligned} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) &= \delta^{(3)}(\mathbf{p}' - \mathbf{q}') \cdot \frac{dp'_3}{dp_3} \\ &= \delta^{(3)}(\mathbf{p}' - \mathbf{q}') \gamma \left(1 + \beta \frac{dE}{dp_3}\right) \\ &= \delta^{(3)}(\mathbf{p}' - \mathbf{q}') \frac{\gamma}{E} (E + \beta p_3) \\ &= \delta^{(3)}(\mathbf{p}' - \mathbf{q}') \frac{E'}{E} \end{aligned}$$

となる。体積はローレンツ不変ではなく  $V/\gamma$  に変化する。しかしこの式は

$$E_{\mathbf{p}} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) = E'_{\mathbf{p}} \delta^{(3)}(\mathbf{p}' - \mathbf{q}')$$

となるので  $E_{\mathbf{p}} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q})$  はローレンツ不変になる。

つまり、相対論的要請を受けると、

$$E_{\mathbf{p}} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \quad (6.35)$$

という量が不変量になる。量子場から

$$\omega_{\mathbf{p}}^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$$

とおいたがここではエネルギーを常に正に保つように式6.22から

$$E_{\mathbf{p}}^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$$

である。そこで、ローレンツ不変性を保つように真空から1粒子状態をつくるために

$$|p\rangle \equiv \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} a_{\mathbf{p}}^{\dagger} |0\rangle \quad (6.36)$$

と定義する。運動量の内積のローレンツ不変な表現は

$$\langle p | q \rangle = 2E_{\mathbf{p}} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \quad (6.37)$$

となる。 $E_{\mathbf{p}}$  がかったものがローレンツ不変を保てることになる。この関係式は今度重要な働きをする。係数2はつけなくても不変性はたもたれる。ただし、これはフーリエ変換であり全空間で積分した結果である。

ただし、佐藤の超関数によりデルタ関数が

$$\delta(x) = \frac{-1}{2\pi i} \left( \frac{1}{x+i0} - \frac{1}{x-i0} \right) \quad (6.38)$$

のように複素空間で表すことができたので、虚軸を時間軸にとり、

$$p_+ = \mathbf{p} + i0$$

$$p_- = \mathbf{p} - i0$$

の重ね合わせとして1粒子状態があることを示している。

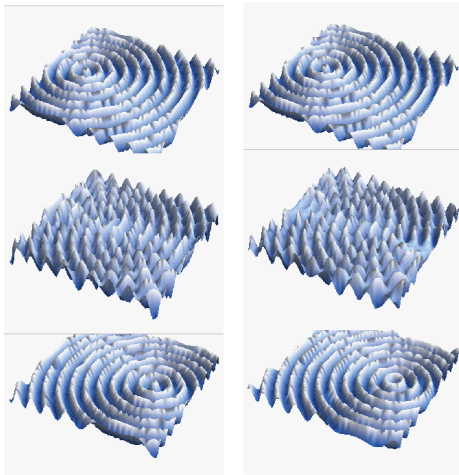


図 6.3: 2つの同位相、逆位相の波源とその定常波

重要なのはローレンツ不変な測度が次の式になることである。

$$\int \frac{d^3p}{2E_{\mathbf{p}}}$$

この証明は次のようになる。

はじめに  $\delta$  関数の性質

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2a} (\delta(x+a) + \delta(x-a))$$

$$\delta(f(x) - f(x_0)) = \frac{1}{|f'(x_0)|} \delta(x - x_0)$$

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} d\omega$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x} \delta(x^2 - a^2) dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x} \frac{\delta(x-a) + \delta(x+a)}{2a} dx \\ &= \frac{e^{-a} + e^a}{2a} \end{aligned}$$

を確認しておく。

Proof. まず、

$$\int d^4p$$

の積分は Lorentz 不変だから 6.22 から

$$p_\mu p^\mu = (p^0)^2 - \mathbf{p}^2 = m^2$$

$$p^0 = \pm E_{\mathbf{p}} = \pm \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$$

となるので  $p^0 > 0$  を選ぶと、デルタ関数の性質から

$$\begin{aligned} \int d^4p \delta\left((p^0)^2 - \mathbf{p}^2 - m^2\right) |_{p^0 > 0} &= \int d^3p \int dp^0 \frac{\delta(p^0 - \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}) + \delta(p^0 + \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2})}{2(\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2})} \\ &= \int \frac{d^3p}{2E_{\mathbf{p}}} \end{aligned} \quad (6.39)$$

となる。 □

前節の式 3.57 からヒルベルト空間上のローレンツ変換  $\Lambda$  はユニタリ変換  $U$  を用いて

$$U(\Lambda) |\mathbf{p}\rangle = |\Lambda\mathbf{p}\rangle$$

のように表すことができた。これは式 6.36 を用いれば

$$|\Lambda\mathbf{p}\rangle = \sqrt{2E_{\Lambda\mathbf{p}}} a_{\Lambda\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle$$

だからユニタリ変換であれば

$$U(\Lambda) \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} a_{\mathbf{p}}^\dagger U^{-1}(\Lambda) |0\rangle = \sqrt{2E_{\Lambda\mathbf{p}}} a_{\Lambda\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle$$

$$U(\Lambda) a_{\mathbf{p}}^\dagger U^{-1}(\Lambda) = \sqrt{\frac{E_{\Lambda\mathbf{p}}}{E_{\mathbf{p}}}} a_{\Lambda\mathbf{p}}^\dagger$$

となる。留意点として、式 6.36 からこの規格化では別な場所とは単位  $2E_{\mathbf{p}}$  で区切られる。例えば 1 粒子状態では

$$(\mathbf{1})_{1particle} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} |\mathbf{p}\rangle \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} \langle \mathbf{p}| \quad (6.40)$$

とおける。これから 1 粒子状態は Hilbert 空間の部分空間での積分で次のように表される。

$$p^2 = (p^0)^2 - \mathbf{p}^2 = m^2 \quad (6.41)$$

$$E_{\mathbf{p}}^2 = (p^0)^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$$

式 6.37 から  $\langle p|q\rangle = 2E_{\mathbf{p}} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q})$  は 1 粒子の場合は

$$\langle \mathbf{p}|\mathbf{p}\rangle = 2E_{\mathbf{p}} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(0)$$

を用いると式 6.40 は次のように 4 次元時空間で表すことができる。

式 6.39 から

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} \langle \mathbf{p} | \mathbf{p} \rangle = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} (2\pi) \delta(0) \quad (6.42)$$

$$\begin{aligned} &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} (2\pi) \delta(p^2 - m^2) |_{p^0 > 0} \\ &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} (2\pi) \frac{1}{2m} (\delta(p+m) + \delta(p-m)) \\ &= A(\mathbf{p}) (e^{+imt} + e^{-imt}) \end{aligned} \quad (6.43)$$

と表すことができる。

この式の第2項の括弧内の時間振動部分は  $p^0 < 0$  としても同じように出てくる。

これは基本的な区切り  $2E_{\mathbf{p}}$  単位の空間積分は時間的に前後の影響を等しく受けることになってしまう。

我々は過去にも未来にも同じように影響を受けることはない、この問題を次節で考えよう。

この積分は Feynman の伝播関数として、Green 関数を用いてもとくことができる。

これは後章で示すので、ここでは時空計量と波動性との関係を考察する。

#### 6.2.4 因果律

アインシュタインによって遠隔的な作用は否定され、下図の光円錐内の領域で因果関係は連続していきける。

前節の問題は真空という非対称な物理を持ってくる必要がある。つまり、真空には消滅演算子はいくら作用しても状態が変わらない。1つでも励起されれば、状態を変える。これは波の固定端反射のように位相変化させる可能性がある。

4元ベクトルは Minkowski 計量を用いて次のように内積がとれる。

$$p \cdot x = E_{\mathbf{p}}t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}$$

よって、4次元では次のようにこの式は  $p = \pm m$  の特異線が引ける。

$$p^2 = (p^0)^2 - \mathbf{p}^2 = m^2$$

であるので次の図のように第5部でみた光円錐内の双曲線空間  $p^0 > 0, p^0 < 0$  に分割される。

相対論はこの光円錐の外の領域での因果関係を禁止する。

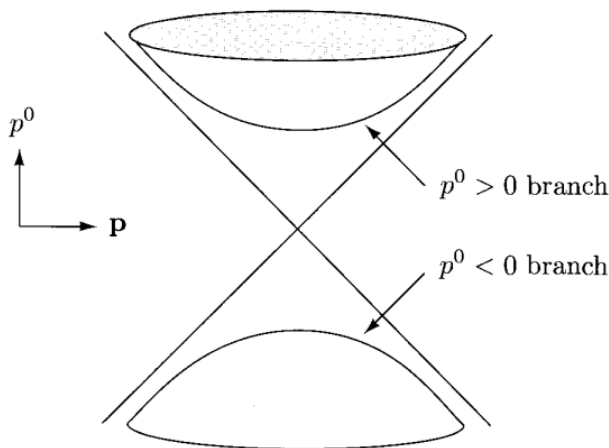


図 6.4: [86] より



よって、式 6.36 から

$$|\mathbf{p}\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} a_{\mathbf{p}}^{\dagger} |0\rangle$$

であり、真空状態に次の式 6.9

$$\phi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} (a_{\mathbf{k}} + a_{-\mathbf{k}}^{\dagger}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$$

を作用させれば次のように 1 粒子が作れる。消滅演算子の振幅が  $|0\rangle$  に作用するために次のように消える。これを真空作用と呼ぶことにする。

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}) |0\rangle &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} (a_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + a_{\mathbf{p}}^{\dagger} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}) |0\rangle \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} |\mathbf{p}\rangle \end{aligned} \quad (6.44)$$

式 6.36 から

$$\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}$$

が  $a_{\mathbf{p}}^{\dagger}$  の作用で  $\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}$  を生じていることに注意する。期待値をとった時にこの振幅部分は残り、粒子としてのエネルギーを持つ。

つまり、エネルギーは波動関数の演算子と状態ベクトルの作用から生まれるのであって、片方では平方根の形になっている。

$$a_{\mathbf{p}}^{\dagger} |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} |\mathbf{p}\rangle$$

この設定では内積をとらないと  $1/2E_{\mathbf{p}}$  が決まらないので積分値は定まらない。

前節でみたようにこれにハミルトニアンを作用させれば式エネルギー  $p^0$  が得られる。

一方で区分けされた領域で周回しないとこの  $E_{\mathbf{p}}$  は定まらない。

ある座標  $\mathbf{x}$  に 1 粒子が生じる期待値は次のようにうまく具合に  $\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}$  はキャンセルする。

$$\begin{aligned} \langle 0 | \phi(\mathbf{x}) | \mathbf{p} \rangle &= \langle 0 | \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} (a_{\mathbf{p}'} e^{i\mathbf{p}'\cdot\mathbf{x}} + a_{\mathbf{p}'}^{\dagger} e^{-i\mathbf{p}'\cdot\mathbf{x}}) \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} a_{\mathbf{p}}^{\dagger} |0\rangle \\ &= e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \end{aligned}$$

この場合は粒子性は消えて、波動性が引き出される。

真空の場合は結果として  $a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^{\dagger}$  の組のみ残り、これは反対向きの進行波  $e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}$  が進行波として残る。

真空ではなく、ある位置の状態に作用させれば

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{p} \rangle = C e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}$$

となる。これが量子力学の波動関数の生まれる由来である。

フーリエ変換の考えを用いたが、確率解釈には一切依存していない。

このように波動関数は Newton の粒子的なイメージとかなり異なり、運動量と位置でまったく別な見え方になる。

因果関係については後章の伝播関数のところで詳しく考察する。

### 6.3 反粒子化

ここで式 6.18 は古典場として、ここではあえて光速  $c$  を表示して、

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \int a(\mathbf{k}) e^{-i\omega(\mathbf{k})t} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \frac{cd^3k}{2\omega(\mathbf{k})} + \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \int b(\mathbf{k}) e^{i\omega(\mathbf{k})t} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \frac{cd^3k}{2\omega(\mathbf{k})} \quad (6.45)$$

とかけた。この場を表す 2 つの平面波は  $t$  の係数に着目すると時間の進み方が反転していることがわかる。波の振幅がヒルベルト空間上において粒子の消滅や生成に関わる。

ことを見たので、時間を反対に進む粒子もこの波動関数は持つことになる。

物理的には通常の時空間で未来→過去に進む粒子を考えることは難しい。

そこで通常ではないこの粒子を反粒子という。この粒子は式を量子化することでより明瞭になる。

この時、振幅  $a(\mathbf{k}), b(\mathbf{k})$  が単なる数ではなく、演算子としてみなす。

つまりフーリエ変換と同様に次のような交換関係があると仮定する。

$$\begin{aligned} [a(\mathbf{k}), a^*(\mathbf{k}')] &\equiv a(\mathbf{k})a^*(\mathbf{k}') - a^*(\mathbf{k}')a(\mathbf{k}) \\ &= \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \frac{2\omega(\mathbf{k})}{c} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [b(\mathbf{k}), b^*(\mathbf{k}')] &\equiv b(\mathbf{k})b^*(\mathbf{k}') - b(\mathbf{k}')b^*(\mathbf{k}) \\ &= \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \frac{2\omega(\mathbf{k})}{c} \end{aligned}$$

ただし、

$$\delta^3(\mathbf{k}) = \delta(k^1)\delta(k^2)\delta(k^3)$$

である。ここで式 6.45 の第 2 項を  $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$  に変更する。これは同じ向きに速さ  $\omega/\mathbf{k}$  で進む波を表す。

$\omega(\mathbf{k}) = c\sqrt{\mathbf{k}^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}}$  だから  $\omega(-\mathbf{k}) = \omega(\mathbf{k})$  として

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \int a(\mathbf{k}) e^{-i\omega(\mathbf{k})t} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \frac{cd^3k}{2\omega(\mathbf{k})} + \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \int b(-\mathbf{k}) e^{i\omega(-\mathbf{k})t} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \frac{cd^3k}{2\omega(-\mathbf{k})} \quad (6.46)$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \int a(\mathbf{k}) e^{-i\omega(\mathbf{k})t} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \frac{cd^3k}{2\omega(\mathbf{k})} + \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \int b(-\mathbf{k}) e^{i\omega(\mathbf{k})t} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \frac{cd^3k}{2\omega(\mathbf{k})} \quad (6.47)$$

ここで解釈として重要な置き換え

$$c^*(\mathbf{k}) \equiv b(-\mathbf{k}) \quad (6.48)$$

とおけば、この複素共役の作用が 1 つの反粒子の生成とみなせる。これを反粒子化と呼ぶ。

$$\begin{aligned} \phi(t, \mathbf{x}) &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \int a(\mathbf{k}) e^{-i\omega(\mathbf{k})t} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \frac{cd^3k}{2\omega(\mathbf{k})} + \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \int c^*(\mathbf{k}) e^{i\omega(\mathbf{k})t} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \frac{cd^3k}{2\omega(-\mathbf{k})} \\ &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \int \frac{cd^3k}{2\omega(\mathbf{k})} \left( a(\mathbf{k}) e^{-i\omega(\mathbf{k})t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + c^*(\mathbf{k}) e^{i\omega(\mathbf{k})t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right) \end{aligned} \quad (6.49)$$

のように 2 つの平面波の重ね合わせになる。しかもこの平面波は過去と未来への伝播している粒子をとみると

$$c^*(\mathbf{k}) = a^*(\mathbf{k})$$

とすることができる。つまり、この定常波は未来への進行波と、過去への進行波が粒子、反粒子として合成される。

我々の空間は通常粒子が過多にある空間で、反粒子は数が少ないという不平等仮説をここで設ける。  
これは粒子生成による波が真空へ向かうとが固定端のように反射する。  
真空については次節で考察する。

我々の空間で、反粒子を見ることは極めて難しい。粒子と反粒子の合成が電磁波として伝搬してしまう。  
 $a^*(\mathbf{k})$  が反粒子を1つ生成する振幅になるので生成演算子と呼ばれる。  
そこでボーズ場を古典的な平面波を類推し次のようにおく。

$$\phi(x) = \phi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \int \frac{d^3k}{2\omega(\mathbf{k})} \left\{ a(\mathbf{k})e^{-i(\omega(\mathbf{k})t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} + a^*(\mathbf{k})e^{+i(\omega(\mathbf{k})t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \right\}$$

これは振幅を複素数に拡張された平面波で古典場という。  
この振幅は次の交換関係を持つ。

$$\left[ a(\mathbf{k}), a^*(\mathbf{k}') \right] = \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') 2\omega(\mathbf{k})$$

となる。

## 6.4 真空状態

ここで極めて重要になる真空状態について考えよう。何もない箱のイメージであった真空は場の理論では一変する。

真空は、極めて重要なもので、その本質はまだ、解明の余地が多くある。

真空については今後何度も考察するが、場の理論での基礎的な真空の考え方をここで学ぶ。

### 6.4.1 数演算子

まず、クライン-ゴルドンの方程式を導くラグランジアンを定義したので、次にハミルトニアンを第2量子化する。

式 3.25 から

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \left[ \dot{\phi}^2(x) + \sum_{i=1}^3 \partial^i \phi(x) \partial_i \phi(x) + m^2 \phi^2(x) \right] \\
&= \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \left[ \sum_{\mu=0}^3 \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi + m^2 \phi^2(x) \right] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\mu=0}^3 \int d^3\tilde{\mathbf{k}} d^3\tilde{\mathbf{q}} k^\mu q^\mu \int d^3\mathbf{x} \\
&\quad \times \left[ -a(\mathbf{k}) a(\mathbf{q}) e^{-i(k+q)x} + a(\mathbf{k}) a^\dagger(\mathbf{q}) e^{-i(k-q)x} + a^\dagger(\mathbf{k}) a(\mathbf{q}) e^{i(k-q)x} - a^\dagger(\mathbf{k}) a^\dagger(\mathbf{q}) e^{i(k+q)x} \right] \\
&\quad + \frac{1}{2} m^2 \int d^3\tilde{\mathbf{k}} d^3\tilde{\mathbf{q}} \int d^3\mathbf{x} \\
&\quad \times \left[ -a(\mathbf{k}) a(\mathbf{q}) e^{-i(k+q)x} + a(\mathbf{k}) a^\dagger(\mathbf{q}) e^{-i(k-q)x} + a^\dagger(\mathbf{k}) a(\mathbf{q}) e^{i(k-q)x} - a^\dagger(\mathbf{k}) a^\dagger(\mathbf{q}) e^{i(k+q)x} \right] \\
&= \frac{1}{2} (2\pi)^3 \int d^3\tilde{\mathbf{k}} d^3\tilde{\mathbf{q}} (k^0 k^0 + \mathbf{k}\mathbf{q}) \\
&\quad \times \left[ -a(\mathbf{k}) a(\mathbf{q}) \delta^3(\mathbf{k} + \mathbf{q}) e^{-i(k^0+q^0)x^0} + a(\mathbf{k}) a^\dagger(\mathbf{q}) \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{q}) e^{-i(k^0-q^0)x^0} \right. \\
&\quad \quad \left. + a^\dagger(\mathbf{k}) a(\mathbf{q}) \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{q}) e^{i(k^0-q^0)x^0} - a^\dagger(\mathbf{k}) a^\dagger(\mathbf{q}) \delta^3(\mathbf{k} + \mathbf{q}) e^{i(k^0+q^0)x^0} \right] \\
&\quad + \frac{1}{2} (2\pi)^3 m^2 \int d^3\tilde{\mathbf{k}} d^3\tilde{\mathbf{q}} \\
&\quad \times \left[ -a(\mathbf{k}) a(\mathbf{q}) \delta^3(\mathbf{k} + \mathbf{q}) e^{-i(k^0+q^0)x^0} + a(\mathbf{k}) a^\dagger(\mathbf{q}) \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{q}) e^{-i(k^0-q^0)x^0} \right. \\
&\quad \quad \left. + a^\dagger(\mathbf{k}) a(\mathbf{q}) \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{q}) e^{i(k^0-q^0)x^0} - a^\dagger(\mathbf{k}) a^\dagger(\mathbf{q}) \delta^3(\mathbf{k} + \mathbf{q}) e^{i(k^0+q^0)x^0} \right]
\end{aligned}$$

となるが、ここで  $k^0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ ,  $q^0 = \sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2}$  だから交換関係を使うと

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2} \int d^3\tilde{\mathbf{k}} \frac{1}{2k^0} \left[ -m^2 a(\mathbf{k}) a(-\mathbf{k}) e^{-2ik^0 x^0} + \left( 2(k^0)^2 m^2 \right) a(\mathbf{k}) a^\dagger(\mathbf{k}) \right. \\
&\quad \left. + \left( 2(k^0)^2 m^2 \right) a^\dagger(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) - m^2 a^\dagger(\mathbf{k}) a^\dagger(-\mathbf{k}) e^{2ik^0 x^0} \right] \\
&\quad + m^2 \left[ a(\mathbf{k}) a(-\mathbf{k}) e^{-2ik^0 x^0} + a(\mathbf{k}) a^\dagger(\mathbf{k}) + a^\dagger(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) + a^\dagger(\mathbf{k}) a^\dagger(-\mathbf{k}) e^{2ik^0 x^0} \right] \\
&= \frac{1}{2} \int d^3\tilde{\mathbf{k}} k^0 \left[ a(\mathbf{k}) a^\dagger(\mathbf{k}) + a^\dagger(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) \right] \\
&= \int d^3\tilde{\mathbf{k}} k^0 a^\dagger(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) + C_0
\end{aligned}$$

ただし、真空項は

$$C_0 \equiv \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{k} k^0 \delta^3(0) \quad (6.50)$$

である。この定数を原点の調整で無視できるとすれば

$$H = \int d^3\tilde{\mathbf{k}} k^0 a^\dagger(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) \quad (6.51)$$

が得られる。ここで数演算子  $N$  を

$$N \equiv \int d^3\tilde{\mathbf{k}} a^\dagger(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) \quad (6.52)$$

また、数密度演算子  $\hat{n}$  を

$$\hat{n} \equiv a^\dagger(\mathbf{k}) a(\mathbf{k})$$

を定義する。この演算子の固有値を  $n$  とすると

$$\langle \psi_n | \hat{n} | \psi_n \rangle = n \langle \psi_n | \psi_n \rangle$$

$$\begin{aligned} \langle \psi_n | N | \psi_n \rangle &= n \langle \psi_n | \psi_n \rangle \\ &= \int d^3 \tilde{\mathbf{k}} \langle \psi_n | a^\dagger(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) | \psi_n \rangle \\ &= \int d^3 \tilde{\mathbf{k}} \langle a(\mathbf{k}) \psi_n | a(\mathbf{k}) \psi_n \rangle \geq 0 \end{aligned} \quad (6.53)$$

となるので固有値は正であり、演算子  $N$  はエルミートである。

$$n \geq 0$$

ただし、ここで内積をとるという操作に物理的な意味が加わることに注意する。  
つまり式 3.18 の交換関係を  $[a^\dagger(\mathbf{k}), a(\mathbf{p})]$  で使うと  $a(\mathbf{p}), a(\mathbf{k})$  は交換するから

$$\begin{aligned} Na(\mathbf{p}) | \psi_n \rangle &= \int d^3 \tilde{\mathbf{k}} a^\dagger(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) a(\mathbf{p}) | \psi_n \rangle \\ &= \int d^3 \tilde{\mathbf{k}} a^\dagger(\mathbf{k}) a(\mathbf{p}) a(\mathbf{k}) | \psi_n \rangle \\ &= \int d^3 \tilde{\mathbf{k}} \left\{ a(\mathbf{p}) a^\dagger(\mathbf{k}) - (2\pi)^3 2k^0 \delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{p}) \right\} a(\mathbf{k}) | \psi_n \rangle \end{aligned}$$

となる。さらに式 6.52 を用いれば結局、

$$\begin{aligned} Na(\mathbf{p}) | \psi_n \rangle &= a(\mathbf{p}) N | \psi_n \rangle - a(\mathbf{p}) | \psi_n \rangle \\ &= (n-1) a(\mathbf{p}) | \psi_n \rangle \end{aligned}$$

とかけると、つまり、式 6.53 は中間粒子の生成と消滅をとめない、粒子数  $n$  を得ている。  
このように、内積を得ることは交換子を挿入し、  
粒子の生成・消滅演算子が 3 回積  $a(\mathbf{p}) a^\dagger(\mathbf{k}) a(\mathbf{k})$  をつくる状態から、元の状態を維持させている。  
消滅・数演算子を定義することは次の節で見ると真空について重要な示唆をあたえる。

#### 6.4.2 真空状態

数演算子から真空を次のように考えることができる。  
つまり、粒子数に下限があるとすれば、数演算子の作用に無関係な状態が存在する。  
これは前節の不等仮説と対応していて、粒子、反粒子が等しい状態が最低エネルギーの状態として存在することになる。

この状態を真空状態 (VacuumState) という。

$$a_{\mathbf{p}} |0\rangle = 0$$

$$N |0\rangle = 0$$

これは式 6.51 のハミルトニアン演算子もほとんど数演算子と同型であるから

$$H |0\rangle = 0$$

とするのには注意がいる。式 6.31 より

$$H = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} E_{\mathbf{p}} \left( a_{\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{p}} + \frac{1}{2} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(0) \right) \quad (6.54)$$

だったから消滅演算子が右にある項は無視できるので

$$H|0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\mathbf{p}} \frac{1}{2} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(0) |0\rangle$$

この積分区間はヒルベルト空間の性質から無限大の足し合わせを許すと明らかに発散する。

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\mathbf{p}} \frac{1}{2} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(0) |0\rangle = \infty |0\rangle$$

この発散は  $\delta$  関数からくるものと積分からくるものがある。

はじめに  $\delta$  関数の計算を考えよう。 $\delta$  関数の定義が

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} d\omega$$

だったから  $\delta^{(3)}(0)$  の定義を次のように  $\mathbf{p} = 0$  に原点しておこなう。

$$\begin{aligned} \delta^{(3)}(0) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L/2}^{+L/2} d^3x e^{i\mathbf{x} \cdot \mathbf{p}} \Big|_{\mathbf{p}=0} = \frac{1}{(2\pi)^3} \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L/2}^{+L/2} d^3x \\ &= \frac{V}{(2\pi)^3} \end{aligned} \quad (6.55)$$

ただし、 $V$  は空間箱の体積である。よってエネルギー密度  $\varepsilon_0$  が

$$\varepsilon_0 = \frac{E_0}{V} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} E_{\mathbf{p}}$$

となる。これでも無限大の足し合わせを許すと発散してしまう。

式 6.55 から  $\varepsilon_0$ ,  $\mathbf{p}$  が非常に大きい振動数か、非常に短い距離の領域となるからこれを紫外発散という。

従って、高振動の部分のカットできる条件があれば有限に抑えることができる。

ここでは式 6.54 の第 2 項は

$$\frac{1}{2} \int d^3p E_{\mathbf{p}} \delta^{(3)}(0)$$

真空状態  $|0\rangle$  が時空そのものに関係し、大局的な状態とつながっていると考え、その結合エネルギーとして背景の中に隠すことにする。

しかし、これらは未解決の問題が多い。

例えばアインシュタイン方程式の宇宙定数を  $\Lambda = E_0/V$  とするとアインシュタインの方程式は

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}$$

として、宇宙定数  $\Lambda$  は

$$\Lambda \sim (10^{-3} \text{eV})^4$$

とみつめることができるが他の結果からしてこの値では小さすぎることがわかっている。

ここではとりあえず、この項を無視して、第 1 項のみをとれば

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{p}}$$

となり、不平等仮説から

$$H|0\rangle = 0$$

が成り立つ。また、 $|0\rangle$  は値 1 を必ずどこかの状態に含み

$$\langle 0|0\rangle = 1$$

を仮定する。

第2項は全空間で積分するときにはやっかいになったが、次のように真空から粒子状態を作るときには極めて重要な役割をする。

この真空状態に今度は生成演算子を作用させた状態に、式 6.51, 6.52 から数演算子とハミルトニアンを作用させると

$$\begin{aligned} Na^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle &= a^\dagger(\mathbf{p}) \int d^3\tilde{\mathbf{k}} \left\{ a^\dagger(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) + (2\pi)^3 2k^0 \delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{p}) \right\} |0\rangle \\ &= a^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle \end{aligned} \quad (6.56)$$

となり、 $a^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle$  を1つの状態とすれば、これは固有値1の恒等演算子とみなせる。さらに

$$\begin{aligned} Ha^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle &= a^\dagger(\mathbf{p}) \int d^3\tilde{\mathbf{k}} k^0 \left\{ a^\dagger(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) + (2\pi)^3 2k^0 \delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{p}) \right\} |0\rangle \\ &= p^0 a^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle \\ &= \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} a^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle \end{aligned} \quad (6.57)$$

である。これは同じ状態で内積をとればエネルギー  $p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$  が生じたことになる。以上から演算子  $a^\dagger$  は真空状態を変化させ、1粒子状態

$$a^\dagger|0\rangle = |1\rangle$$

を生成したとみなせる。

### 6.4.3 正規積

第2項は式 6.50 から定数項として

$$C_0 \equiv \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{k} k^0 \delta^3(0) \quad (6.58)$$

とおくと  $C_0$  は真空のエネルギーと考えることもできる。

つまり、真空状態に

$$H|0\rangle = C_0|0\rangle$$

が成り立つ。前節で真空状態は大局的に連結されている必要があり、これがそのエネルギーとみなせる。このエネルギーは古典論では明らかに  $aa^* - a^*a = 0$  のために現れない、純量子論的なエネルギーである。これが前節で振れたように回転と関係するので  $a, a^\dagger$  をかける順番が重要になる。そこでこの順番を決めるために

**正規積 (Normal product)** とよばれる方法がある。

これは  $::$  で囲むことにより次のように消滅演算子を右にもっていくように並べ替える。

$$: a_1^\dagger a_2 a_3^\dagger := a_1^\dagger a_3^\dagger a_2$$

ただし、フェルミオンの場合には1回入れ替える毎に負符号をつけないといけない。

$$: a_1^\dagger a_2 a_3^\dagger := -a_1^\dagger a_3^\dagger a_2$$

従って、2つの場の正規積は次のように書ける。

$$: \phi(x)\phi(y) := \int d^3\tilde{\mathbf{k}} d^3\tilde{\mathbf{q}} \left[ a(\mathbf{k}) e^{-ikx} + a^\dagger(\mathbf{k}) e^{+ikx} \right] \left[ a(\mathbf{q}) e^{-iqy} + a(\mathbf{q}) e^{+iqy} \right] :$$

$$= \int d^3\tilde{\mathbf{k}} d^3\tilde{\mathbf{q}} \left[ a(\mathbf{k}) a(\mathbf{q}) e^{-i(kx+qy)} + a^\dagger(\mathbf{k}) a(\mathbf{q}) e^{+i(kx-qy)} + a^\dagger(\mathbf{q}) a(\mathbf{k}) e^{-i(kx-qy)} + a^\dagger(\mathbf{k}) a^\dagger(\mathbf{q}) e^{+i(kx+qy)} \right]$$

となる。正規積にすると真空状態に作用させれば、必ず消滅演算子が真空状態に作用するので結果は 0 になる。

$$\langle 0 | : \phi(x_1) \cdots \phi(x_2) : | 0 \rangle = 0$$

となる。そこであえて正規積のハミルトニアンを

$$: H : \equiv \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} \quad (6.59)$$

で定義しておく。これから真空以外の励起状態から固有値をスカラーとして得ることができる。

$$H |\mathbf{p}\rangle = \omega_{\mathbf{p}} |\mathbf{p}\rangle = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} |\mathbf{p}\rangle$$

## 6.5 量子推進

### 6.5.1 位置生成

式 6.14 から全空間運動量が式 6.59 に対応し、

$$\mathbf{P} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \mathbf{p} a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} \quad (6.60)$$

とできる。

この演算子は先に消滅演算子が作用して、次に生成演算子が作用し、1つの運動量  $\mathbf{p}$  がきまるのを全運動量空間で足し合わせる。ことになる。1粒子状態の固有方程式は

$$\mathbf{P} |\mathbf{p}\rangle = \mathbf{p} |\mathbf{p}\rangle \quad (6.61)$$

であり、固有値をベクトルとして得ることができる。

一方で、位置の生成演算子を求めると式 5.1 のフーリエ変換を次のように生成演算子に施すと

$$\psi^\dagger(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \quad (6.62)$$

となる。運動量空間から出発するとまわりくどい表現になっているがこれを真空に作用させれば

$$|\mathbf{x}\rangle = \psi^\dagger(\mathbf{x}) |0\rangle$$

であり、位置ベクトルを式 6.60 に対応して

$$\mathbf{X} = \int d^3x \mathbf{x} \psi^\dagger(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) \quad (6.63)$$

とすることは自然であろう。

我々が通常目にしてる物体では想像できないが、量子的な物体の位置は真空から生成するとこのような波動表現になる。

従って運動量と同等に

$$\mathbf{X} |\mathbf{x}\rangle = \mathbf{x} |\mathbf{x}\rangle = \mathbf{x} \psi^\dagger(\mathbf{x}) |0\rangle \quad (6.64)$$

という固有方程式が成り立つ。

これは次のように波動関数を確率密度とみなせば期待値として、扱うことができる。

$$X^i |\phi\rangle = \int d^3x x^i \phi(\mathbf{x}) |\mathbf{x}\rangle \quad (6.65)$$



である。この時同様に運動量を考えるのだが、位置状態に対しては微分演算子として対応したから、次のように表す。

$$P^i |\phi\rangle = \int d^3x \left( -i \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \right) |\mathbf{x}\rangle \quad (6.66)$$

そこで式 6.60 を使って、真空から位置状態をつくり、

$$\begin{aligned} P^i |\phi\rangle &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} p^i a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} |\phi\rangle \\ &= \int \frac{d^3p d^3x}{(2\pi)^3} p^i a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} \phi(\mathbf{x}) |\mathbf{x}\rangle \\ &= \int \frac{d^3x d^3p}{(2\pi)^3} p^i a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} \phi(\mathbf{x}) \psi^\dagger(\mathbf{x}) |0\rangle \\ &= \int \frac{d^3x d^3p}{(2\pi)^3} p^i a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} \phi(\mathbf{x}) \psi^\dagger(\mathbf{x}) |0\rangle \\ &= \int \frac{d^3x d^3p}{(2\pi)^3} p^i a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} \phi(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} |0\rangle \end{aligned}$$

となるが式 6.62 から

$$[a_{\mathbf{p}}, \psi^\dagger(\mathbf{x})] = e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}$$

であることを利用すると

$$P^i |\phi\rangle = \int \frac{d^3x d^3p}{(2\pi)^3} p^i a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \phi(\mathbf{x}) |0\rangle$$

となる。これが次のようにも表現できる

$$\begin{aligned} P^i |\phi\rangle &= \int \frac{d^3x d^3p}{(2\pi)^3} a_{\mathbf{p}}^\dagger \left( i \frac{\partial}{\partial x^i} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \right) \phi(\mathbf{x}) |0\rangle \\ &= \int \frac{d^3x d^3p}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \left( i \frac{\partial}{\partial x^i} \phi(\mathbf{x}) \right) a_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle \\ &= \int d^3x \left( -i \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \right) |\mathbf{x}\rangle \end{aligned}$$

これは運動量演算子の対応規則である。従って、式 6.23、6.65 から次の関係も導ける。

$$[X^i, P^j] |\phi\rangle = i\delta^{ij} |\phi\rangle$$

ならば次にハミルトニアンを演算子化しよう。スカラー場で、 $\phi$  が時間依存する場合は式 6.62 から

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x \frac{1}{2m} \nabla \psi^* \nabla \psi \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{\mathbf{p}^2}{2m} a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} \end{aligned}$$

となる。

### 6.5.2 時間生成

前節において： $\phi(x)\phi(y)$ ：のようにオーダーをつけるのは人為的な感覚を避けられない。そこで交換積

$$[\phi(x), \phi(y)]$$

が非可換であるスカラー値を生むがそれが通常の場合からは見えないようなしくみがあることを考えてみよう。相対論によれば真空状態のみであればその時空は物質が入らないので平坦になる。しかし、生成演算子作用させた状態では曲率が生じることになる。式 6.58 がかならず真空場に曲率を与えると考える。

第 5 部での基本ベクトル場  $A^\#$  で扱ったように

この生成演算子は垂直方向に持ち上げ、新しい自由度として基本ベクトル場をつくると考えられる。

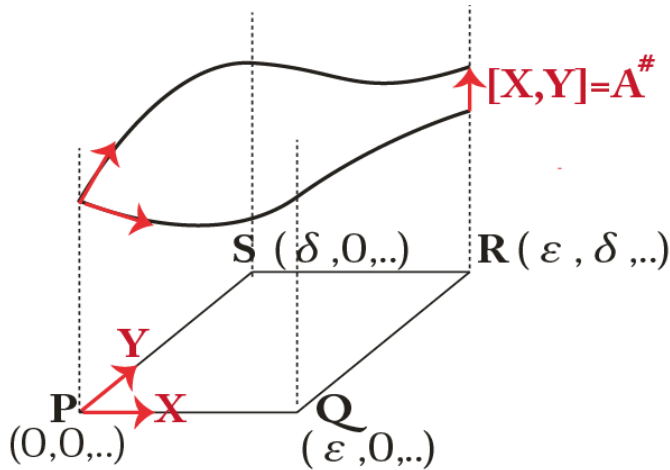


図 6.5: 括弧積と垂直成分

第 5 部でみた曲率  $\Omega(X, Y)$  は Lie 括弧積  $[X, Y]$  の垂直成分を表していた。

この時、 $\omega(X) = \omega(Y) = 0$  だから 1 次微分形式をとり

$$d_p \omega(X, Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X, Y]) = -\omega([X, Y])$$

これがここでの  $p^0$  に対応する。曲率とはこの距離で括弧積から、

$$\Omega(X, Y) = -\omega([X, Y]) = -p^0([X, Y])$$

になる。ただし、 $A \in g$  は基本ベクトル場

$$A^\# = [X, Y]$$

である。

つまり、古典論と異なり、交換関係の作用はある位相領域を 1 周することに等しい。元の位置に戻った時に古典論では差がないのでこのような周回の様子はみえない。

量子論の原理は波の定常波が有限な領域が必要のように、物理量を得るためには周回面が必要になる。後に詳しく考察する。

## 7 粒子と場 [86][95]

前章で粒子と波の関係を考察した。これは場という概念を介在して統一的に説明されるべきである。

これを目指すのが場の量子論で、相対論との問題が現在残されているが、時空を扱う相対論と本来、統一される理論である。本論はその統一をめざしているが、ここではとくに粒子がどのようにその影響を外に伝えていくかを記述する伝播関数に注目して考察していく。これは後章の経路積分につながる。

## 7.1 Green 関数

粒子の散乱理論は Green 関数とのつながりが深い。詳しくは後章で扱うがここでは後の計算の準備のために、第 1 部でみた基礎的な内容を復習しておく。

例えば 1 次元の場合は

$$\langle x|k \rangle = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{ikx}$$

従って波数空間の Green 演算子は連続スペクトルを持つ時

$$G = \int \frac{|k' \rangle \langle k'|}{k^2 - k'^2} dk'$$

となるので Green 関数は

$$\begin{aligned} G(x, x', k) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\langle x|k' \rangle \langle k'|x' \rangle}{k^2 - k'^2} dk' \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(x-x')k'}}{k^2 - k'^2} dk' \end{aligned}$$

これを求める方法は複素  $k$  空間を考え、次のように実軸から微小ずれたところに極をとる方法がとられる。この極を次節では仮想粒子の生成消滅ポイントになる。

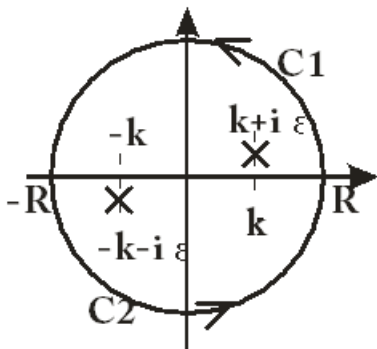


図 7.1: 複素  $k$  空間での極をずらしての積分

$$\begin{aligned} G(x, x', k) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} G(x, x'; \pm(k + i\epsilon)) \\ G(x, x'; \pm(k + i\epsilon)) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(x-x')k'}}{(k' + k + i\epsilon)(k' - k - i\epsilon)} dk' \end{aligned} \quad (7.1)$$

ここで次の留数定理が使える。

$$\oint f(z) dz = 2\pi i \sum_{i=1}^n \text{Res}(a_i)$$

そこで極の  $\pm$  に対応して

$$G^+(x, x', k) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} G(x, x'; (k + i\epsilon))$$

$$G^-(x, x', k) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} G(x, x'; -(k + i\epsilon))$$

とおく。

$x > x'$  の時は上図の上半面の経路  $C1$  を考えると  $+$  極 1 つを含むのでこの積分は

$$f^+(k') = \frac{e^{i(x-x')k'}}{(k'+k+i\epsilon)(k'-k-i\epsilon)}$$

とにおいて

$$\begin{aligned} F^+ &= \int_{C_1} f^+(k') dk' \\ &= \int_{-R}^{+R} f^+(k') dk' + \int_{C_1} f^+(k') dk' \end{aligned}$$

とすると  $x > x'$  だから第 2 項は指数が負の実になり指数関数的に 0 となる。よって第 1 項のみを留数積分すればいい。

$$\begin{aligned} F^+ &= 2\pi i \left[ \frac{(k'-k-i\epsilon)e^{i(x-x')k'}}{(k'+k+i\epsilon)(k'-k-i\epsilon)} \right]_{k'=k+i\epsilon} \\ &= \pi i \frac{e^{i(x-x')(k+i\epsilon)}}{k+i\epsilon} \end{aligned}$$

従って式 7.1 より

$$G(x, x'; (k+i\epsilon)) = -\frac{i}{2} \frac{e^{i(x-x')(k+i\epsilon)}}{k+i\epsilon} \quad (7.2)$$

となる。したがって下半面も同様にして

$$G(x, x'; -(k+i\epsilon)) = -\frac{i}{2} \frac{e^{-i(x-x')(k+i\epsilon)}}{k+i\epsilon} \quad (7.3)$$

を得る。よって極限  $\epsilon \rightarrow 0$  をとると

$$G^\pm = -\frac{i}{2k} e^{\pm ik(x-x')} \quad (7.4)$$

が得られる。分母に  $2k$  が現れるのが後に重要になる。

## 7.2 中間生成粒子 [135]

素粒子の散乱については後章で詳しく考察したいが、素粒子の散乱では粒子と場の相互作用を無視するわけにはいかない。

粒子の生成、消滅は特異的な点を時空間に生じさせるが、これは同時に場に揺らぎを与えて、波を発生させる。

空間と時間において場の伝播が伝播関数によって表現される。これは相対論的に考えないといけない。

はじめに相互作用のハミルトニアンを  $H_{int}$  を次のように相対論に合う 4 元ハミルトニアン  $\mathcal{H}$  で表す。

$$\int H_{int} dt = \int \mathcal{H}_{int} d^4x \quad (7.5)$$

これは全時空間で 4 元化された相互作用のハミルトニアンを足し合わせる操作になる。

時空場で考えるので相対論的共変性が気になる。

そこで相互作用 4 元化ハミルトニアンは一般的に相対論的に共変性を満たすように

$$\mathcal{H}_{int} = g\Psi^*(x)\Psi(x)V(x) \quad (7.6)$$

とおく、この時  $V(x)$  は十分外部にあって、波源への影響を無視できる外場とする。

式 7.5 は通常の 3 次元空間でハミルトニアン $H$ の時間積分が 4 次元空間において、拡張されたハミルトニアン $\mathcal{H}$ の 4 元積分と等しいことを示している。これは

$$H = \mathcal{H}d^3\mathbf{x}$$

である必要があり、 $\mathcal{H}$  は空間的なハミルトニアン密度と考えればよい。

はじめに古典的な時間部分のみを考える。つまり、この散乱ではエネルギー保存則が成り立つとして始状態 (i), 終状態 (f) とし、

$$\Psi_{in}(x) = A_{in}(\mathbf{r})e^{-iE_i t}$$

$$\Psi_{out}^*(x) = A_{out}(\mathbf{r})e^{iE_f t}$$

とおく。つまり時間軸に正負に伝わる平面波に 3 次元空間の座標に依存した振幅をかける。

規格化は

$$\Psi_{out}^* \Psi_{in} = 1$$

$$A_{out}^* A_{in} = 1$$

とする。

これは互いに向き合う平面波になるので、時間積分すると  $\delta$  関数の定義から

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_{out}^* \Psi_{in} dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(E_i - E_f)t} dt \\ &= 2\pi i \delta(E_i - E_f) \end{aligned}$$

となる。ここでの散乱は

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H_{int} \Psi$$

をみたすとして、場の時間発展が

$$\begin{aligned} \Psi(t) &= e^{-iH_{int}(t-t_0)} \Psi(t_0) \\ &\simeq (1 - iH_{int}(t-t_0)) \Psi(t_0) \end{aligned}$$

となるので作用を

$$S_{fi} \sim -i \int H_{int} dt$$

として、散乱振幅を単位行列を除いて表すと

$$\begin{aligned} S_{fi} - \delta_{fi} &= \langle f | -i \int H_{int} dt | in \rangle \\ &= -2\pi i \delta(E_i - E_f) \int A_{out}^*(\mathbf{x}) V(r) A_{in}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \end{aligned}$$

となる。

次に量子化を考える。この時、関数は演算子 (行列) として作用することに留意する。

次の図のような 4 元運動量を持つ散乱を考える。

$$p_1 + p_2 \rightarrow p_3 + p_4$$

これは後章の Feynman 図で表すと、相互作用の仮想粒子を  $\pi$  として次の図で表すことができる。

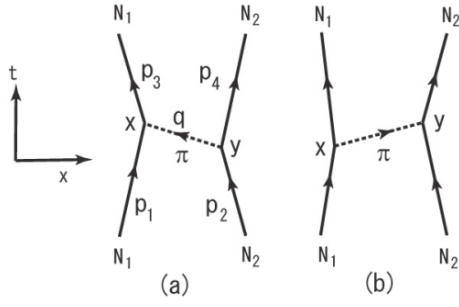


図 7.2: [135] より :  $\pi$  粒子の交換相互作用

上図の (a),(b) は核子 1,2 の立場で見ている。

はじめに核子 1 で見ると、4 元運動量  $p_1$  を持つ粒子が  $x$  地点で相互作用して、 $p_3$  に変化し、外に出る。

この時、はじめにハミルトニアン密度の  $\Psi(x)$  は消滅演算子として、入射してきた  $p_1$  粒子を消して、 $\Psi^*(x)$  が真空から  $p_3$  粒子を生成する。

このためには、場が揺らぎを生じて、もう一つの位置  $y$  にいる粒子  $p_2$  から相互作用をするために粒子  $\pi$  を得る。

これは古典的な力の作用に相当する。

次に図の核子 2 で見ると、古典的には反作用を生じるので位置  $y$  で位置  $x$  から相互作用粒子  $\pi$  を得ることになる。

重要なのはこれが互いに向かい合う波のように振る舞うことである。

この核子 1 の仮想粒子  $\pi$  の 4 元運動量を  $q$  とすると、散乱の行列要素は式 7.6 より、

$$\begin{aligned} \langle f | \mathcal{H}_{int}(x) | i \rangle &= \langle f | g \Psi^\dagger(x) V(x) \Psi(x) | i \rangle \\ &= g \langle p_3 | \Psi^\dagger(x) | 0 \rangle \langle 0 | V(x) | q \rangle \langle 0 | \Psi(x) | p_1 \rangle \\ &= g \exp(-i(p_1 - p_3 + q)x) \end{aligned}$$

となる。一方で、核子 2 も同様に反対方向に仮想粒子を放出する。

$$\begin{aligned} \langle f | \mathcal{H}_{int}(y) | i \rangle &= \langle f | g \Psi^\dagger(y) \Psi(y) V(y) | i \rangle \\ &= g \langle p_4 | \Psi^\dagger(y) | 0 \rangle \langle 0 | V(y) | q \rangle \langle 0 | \Psi(y) | p_2 \rangle \\ &= g \exp(-i(p_2 - p_4 - q)y) \end{aligned}$$

となる。つまり、粒子 1 は内向きの平面波に対応し、ミンコフスキー計量を用いて、

$$e^{-p_1 x} = e^{-i(E_1 t - \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{x})}$$

が対応し、その後は外向き平面波が対応し、同様に

$$e^{-p_3 x} = e^{-i(E_1 t - \mathbf{p}_3 \cdot \mathbf{x})}$$

である。重要なのは図の横方向に粒子の交換があることで、この変化には頂点  $x$  で相互作用の仮想粒子  $\pi$  を生成、吸収があり、

$$e^{\pm i q x} = e^{\pm i(\omega t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})}$$

が対応するが、これに場の相互作用の強さの因子  $g$  がかかる。

この  $\pi$  粒子は生成、消滅がペアになり、外に出て行かない。

連続極限では規格化を考え、次のように運動量  $\mathbf{q}$  での和を積分に変える。  
分母の  $2\omega$  は前章式 6.39 で考察した通りである。

$$\sum_{\mathbf{q}} \rightarrow \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2\omega}$$

が対応する。ただし、質量を  $m$ 、太字を 3 元ベクトルとして、4 元運動量との関係は

$$(q^0)^2 = \mathbf{q}^2 + m^2$$

の関係があるので  $q^0$  が ± の解をとることとなる。そこで

$$q_0 = E_q = \pm\omega, \quad \omega = \sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2} \quad (7.7)$$

とおく。

詳しくは後節で見るので、ここでは図 (a) の散乱要素を計算して外観をつかもう。  
重要なのは、この積分は数学的に実行するのではなく、物理的な因果律が絡む。  
そこで

$$t_x > t_y \text{ or } x^0 - y^0 > 0$$

という条件をここでは強制的に用いる。これは次のステップ関数を導入することに等しい。

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & t_x > 0 \\ 0 & t_x < 0 \end{cases}$$

この時の散乱振幅は

$$S_{fi} = (-ig)^2 \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4x \int d^4y \int \frac{d^3q}{2\omega} \theta(x-y) e^{-i(p_1-p_3)x - i(p_2-p_4)y} e^{-iq(x-y)}$$

となる。さらに図の (b) では反対向きの伝播になるので

$$\begin{aligned} q &\rightarrow -q \\ \theta(x-y) &\rightarrow \theta(y-x) \end{aligned} \quad (7.8)$$

と置き換えればよい。これを逆向き条件と呼ぶ。

この両方の寄与から散乱振幅は 4 元ハミルトニアン  $\mathcal{H}$  と時間順序積  $T$  を用いて

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \langle p_3, p_4 | (-i)^2 \int d^4x \int d^4y T [\mathcal{H}_{int}(x) \mathcal{H}_{int}(y)] | p_1, p_2 \rangle \\ &= -g^2 \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4x \int d^4y e^{-i(p_1-p_3)x - i(p_2-p_4)y} \int \frac{d^3q}{2\omega} \left[ \theta(x-y) e^{-iq(x-y)} + \theta(y-x) e^{iq(x-y)} \right] \end{aligned} \quad (7.9)$$

となる。

ここで式より、ステップ関数は  $k$  は複素数として、

$$\theta(x-y) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ik(x-y)}}{k+i\epsilon} dk \quad (7.10)$$

とおく。確かに DiracDelta 関数を

$$\delta(x-y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(x-y)} dk$$

とした時の積分

$$\theta(x-y) = \int_{-\infty}^{x-y} \delta(\xi) d\xi$$

になっている。また式 7.2 の Green 関数を次のように定義しておく。

$$G^+(x, y; (k+i\epsilon)) = -\frac{i}{2} \frac{e^{i(x-y)(k+i\epsilon)}}{k+i\epsilon}$$

$$G^-(x, y; -(k+i\epsilon)) = -\frac{i}{2} \frac{e^{-i(x-y)(k+i\epsilon)}}{k+i\epsilon}$$

これから次のようにステップ関数との関係があることがわかる。

$$\theta(x-y) = \frac{-1}{\pi} G^-(x, y; -(k+i\epsilon))$$

$$\theta(y-x) = \frac{-1}{\pi} G^+(x, y; (k+i\epsilon))$$

さらに式 7.7 から交換粒子のエネルギーは  $\omega$ 、質量  $m$  として次の関係がる。

$$(q^0)^2 = \omega^2 = \mathbf{q}^2 + m^2$$

$$q^2 = (q^0)^2 - \mathbf{q}^2$$

$$d\omega = dq^0$$

であり、ここでは

$$x-y \rightarrow r$$

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} = q_0 r_0 - \mathbf{q} \cdot \mathbf{r}$$

で置き換える。

式 7.9 の後半部の積分が次のように計算できる。

$$\begin{aligned} \int \frac{d^3 q}{2\omega} [\theta(r)e^{-iqr} + \theta(-r)e^{iqr}] &= \int \frac{d^3 q}{2\omega} \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk [G^+(r, +(k+i\epsilon))e^{-iqr} + G^-(r; -(k+i\epsilon))e^{iqr}] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} d^3 q \int_{-\infty}^{+\infty} dk \frac{i}{2\pi} \frac{1}{2\omega} \left[ \frac{e^{ikr} e^{-iqr}}{k+i\epsilon} + \frac{e^{-ikr} e^{iqr}}{k+i\epsilon} \right] \end{aligned} \quad (7.11)$$

ここで式 7.8 の逆向き条件を第 2 項には適応する。

$$\mathbf{q} \rightarrow -\mathbf{q}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{d^3 q}{2\omega} [\theta(r)e^{-iqr} + \theta(-r)e^{iqr}] &= \int_{-\infty}^{+\infty} d^3 q \int_{-\infty}^{+\infty} dk \frac{i}{2\pi} \frac{1}{2\omega} \left[ \frac{e^{ikr} e^{-i(q_0 r_0 - \mathbf{q} \cdot \mathbf{r})}}{k+i\epsilon} - \frac{e^{-ikr} e^{i(q_0 r_0 + \mathbf{q} \cdot \mathbf{r})}}{k-i\epsilon} \right] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} d^3 q \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \frac{i}{2\pi} \frac{1}{2\omega} \left[ \frac{e^{i(kr - q_0 r_0)}}{k+i\epsilon} - \frac{e^{-i(kr - q_0 r_0)}}{k-i\epsilon} \right] \end{aligned}$$

さらにここで左辺の結果から  $kr = q_0 r_0$  として

$$k \rightarrow q^0 - \omega$$



$$k \rightarrow q^0 + \omega$$

を仮定すると

$$\begin{aligned} \int \frac{d^3q}{2\omega} [\theta(r)e^{-iqr} + \theta(-r)e^{iqr}] &= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d^3q dq^0 e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} e^{-iq_0x_0} \frac{1}{2\omega} \left[ \frac{1}{q^0 - \omega + i\epsilon} - \frac{1}{q^0 + \omega - i\epsilon} \right] \\ &= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dq^4 e^{-iqx} \frac{1}{2\omega} \left[ \frac{1}{q^0 - \omega + i\epsilon} - \frac{1}{q^0 + \omega - i\epsilon} \right] \\ &= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dq^4 e^{-iqx} \frac{1}{2\omega} \left[ \frac{2(\omega - i\epsilon)}{(q^0)^2 - (\omega - i\epsilon)^2} \right] \\ \rightarrow_{\epsilon=0} &= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dq^4 e^{-iqx} \left( \frac{1}{(q^0)^2 - \mathbf{q}^2 - m^2} \right) \\ &= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dq^4 \frac{e^{-iqx}}{q^2 - m^2} \end{aligned}$$

を得る。

$$G(r; \pm(k + i\epsilon)) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{irk'}}{(k' + k + i\epsilon)(k' - k - i\epsilon)} dk'$$

$$\begin{aligned} \int \frac{d^3q}{2\omega} [\theta(r)e^{-iqr} + \theta(-r)e^{iqr}] &= \int \frac{d^3q}{2\omega} \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \left[ \frac{e^{-ikx} e^{-iqr}}{k + i\epsilon} + \frac{e^{-ikx} e^{iqr}}{-k + i\epsilon} \right] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} d^3q \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{-ikx} \frac{i}{2\pi} \frac{1}{2\omega} \left[ \frac{e^{-iqr}}{k + i\epsilon} - \frac{e^{iqr}}{k - i\epsilon} \right] \end{aligned} \quad (7.12)$$

となる。

図のように  $k = k \pm \Delta k$  だけ離れた 2 点に波源をもつ波の重ね合わせを考える。

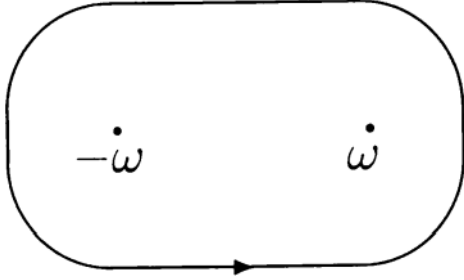


図 7.3: [95] より：複素平面上に正負の振動数を持つ点源を考える。

4 元成分を用いると積分路  $C$  は図のようにとり、

$$(q^0)^2 = \omega^2 = \mathbf{q}^2 + m^2$$

の関係があるので  $q^0$  が  $\pm$  の解をとることとなる。そこで

$$q_0 = \pm\omega, \quad \omega = \sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2}$$

とすれば留数積分から

$$\begin{aligned}
\int_C dq_0 \left( \frac{-i}{q^2 - m^2} \right) e^{-iqr} &= \int_{C_{+\omega}} dq_0 \left( \frac{-i}{(q_0 - \omega)(q_0 + \omega)} \right) e^{-iqr} \\
&\quad + \int_{C_{-\omega}} dq_0 \left( \frac{-i}{(q_0 - \omega)(q_0 + \omega)} \right) e^{-iqr} \\
&= 2\pi i \frac{-i}{2\omega_k} (e^{-iqr} - e^{iqr})
\end{aligned} \tag{7.13}$$

できる。天下降的になるが、これを式 7.9 に用いると

$$\begin{aligned}
\int \frac{d^3q}{2\omega} [\theta(r)e^{-iqr} + \theta(-r)e^{iqr}] &= \int \frac{d^3q}{2\omega} \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \left[ \frac{e^{-ikx} e^{-iqr}}{k + i\epsilon} + \frac{e^{-ikx} e^{iqr}}{-k + i\epsilon} \right] \\
&= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^3q}{2\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{-ikx} \left[ \frac{e^{-iqr}}{k + i\epsilon} - \frac{e^{iqr}}{k - i\epsilon} \right] \\
&= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^3q}{2\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \left[ \frac{e^{-i(kx+q_0x_0)}}{k + i\epsilon} - \frac{e^{-i(kx-q_0x_0)}}{k - i\epsilon} \right] \\
&= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d^3q dq^0 e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} e^{-iq_0x_0} \frac{1}{2\omega} \left[ \frac{e^{-i\omega x}}{\omega + i\epsilon} - \frac{e^{i(q^0+\omega)t}}{\omega - i\epsilon} \right] \\
&= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dq^4 e^{-iqx} \frac{1}{2\omega} \left[ \frac{1}{q^0 - \omega + i\epsilon} - \frac{1}{q^0 + \omega - i\epsilon} \right] \\
&= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dq^4 e^{-iqx} \frac{1}{2\omega} \left[ \left( \frac{2(\omega - i\epsilon)}{(q^0)^2 - (\omega - i\epsilon)^2} \right) \right] \\
\rightarrow_{\epsilon=0} &= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dq^4 e^{-iqx} \left( \frac{1}{(q^0)^2 - \mathbf{q}^2 - m^2} \right) \\
&= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dq^4 \frac{e^{-iqx}}{q^2 - m^2}
\end{aligned}$$

### 7.3 観測的伝播関数

はじめにスカラー場の理論でこの交換子を考えてみよう。場を生成消滅演算子を用いて

$$\phi(x) = \sum_k a_k u_k(x) + \sum_k a_k^\dagger u_k^*(x) \tag{7.14}$$

とする。ただし、固有関数は

$$\begin{aligned}
u_k &= \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\omega_k V}} \\
\omega &= \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}
\end{aligned}$$

である。ここで単に

$$\phi(x) = \sum_k a_k u_k(x)$$

としないことが重要である。場の表現は常に生成演算子と消滅演算子が共に現れる。

これは前節の式 3.51

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} (a_{\mathbf{p}} e^{-ip\cdot x} + a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{+ip\cdot x}) \tag{7.15}$$

の波数表現である。

これから異なる空間位置での交換子が計算できて

$$\begin{aligned} [\phi(x), \phi(y)] &= \sum (u_k(x)u_k^*(y) - u_k^*(x)u_k(y)) \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} (e^{-ik(x-y)} - e^{ik(x-y)}) \end{aligned} \quad (7.16)$$

となる。複素共役を持つ式 7.14 の形にしたために、交換子には向きの異なる 2 つの波が現れる。

古典的には正負に進行する波から定常波が空間全体に広がった様子を表している。

これを 4 次元でみたらどうなるか。

前節で 4 次元に拡張した式 3.77, 3.78 を用いてここでは天下りのだが 2 つの波の合成として次のように定義する。

$$[\phi(x), \phi(y)] = \int_C \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left( \frac{-i}{k^2 - m^2} \right) e^{-ik(x-y)} \equiv \Delta(x, y) \quad (7.17)$$

これが交換子で定義されたことが重要で、分母に特異点があるために留数の和になることが物理的な意味を持つ。

ここでは 1 方向の伝播関数  $D$  と区別することにする。

逆にこの  $k^0$  積分は振動数の積分になるから、これを実施して、交換子となることを見てみよう。

図のように  $k = k \pm \Delta k$  だけ離れた 2 点に波源をもつ波の重ね合わせを考える。

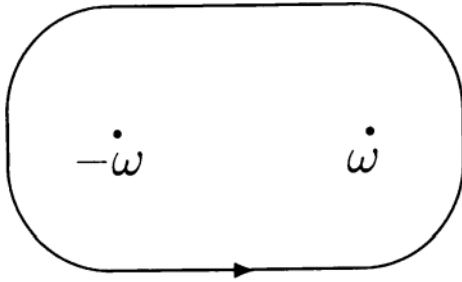


図 7.4: [95] より：複素平面上に正負の振動数を持つ点源を考える。

4 元成分を用いると積分路  $C$  は図のようにとり、

$$(k^0)^2 = \mathbf{k}^2 + m^2$$

の関係があるので  $k^0$  が ± の解をとることなる。そこで

$$k_0 = E_{\mathbf{k}} = \pm \omega_{\mathbf{k}}, \quad \omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$$

とすれば留数積分から

$$\begin{aligned} \int_C dk_0 \left( \frac{-i}{k^2 - m^2} \right) e^{-ik(x-y)} &= \int_{C_{+\omega}} dk_0 \left( \frac{-i}{(k_0 - \omega_{\mathbf{k}})(k_0 + \omega_{\mathbf{k}})} \right) e^{-ik(x-y)} \\ &\quad + \int_{C_{-\omega}} dk_0 \left( \frac{-i}{(k_0 - \omega_{\mathbf{k}})(k_0 + \omega_{\mathbf{k}})} \right) e^{-ik(x-y)} \\ &= 2\pi i \frac{-i}{2\omega_{\mathbf{k}}} (e^{-ik(x-y)} - e^{ik(x-y)}) \end{aligned} \quad (7.18)$$

となる。つまり、2 つの特異点が 1 つの正のエネルギー  $\omega_{\mathbf{k}}$  で粗視化され、2 つの波の合成が見える形になった。

これは  $-\omega, +\omega$  を結ぶ実軸上で 2 つの波源の間とそれ以外を明確に区別することになる。

つまり、端点が存在し、波源の間には定常波が合成され、それを超えると進行波しか見えない。

このように領域に依存するのでこれを観測的伝播関数として次で定義する。

$$\Delta(x, y) \equiv [\phi(x), \phi(y)] = \int_C \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left( \frac{-i}{k^2 - m^2} \right) e^{-ik(x-y)} = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \left( e^{-ik(x-y)} - e^{ik(x-y)} \right) \quad (7.19)$$

これから式 7.16 が得られたことになる。この結果は以下で見るとように 2 点間の 4 元固有距離  $(x - y)$  に依存している。

たとえば  $m = 1, y = 0$  と選んで次の積分の結果をグラフにしてみる。

$$f(x) = \int_0^\infty dk \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} e^{-ikx}$$

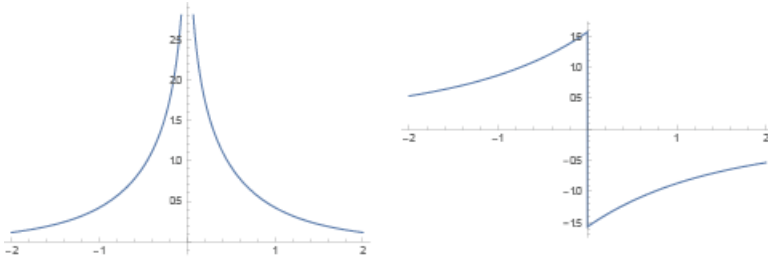


図 7.5:  $f(x)$  の実部分左と虚部分右

これから観測的伝播関数  $\Delta(x, y)$  が実空間では固有距離  $(x - y)^2$  の関数になることがわかる。

次節で詳しく因果関係を見るが、近接作用の原理を採用すれば、空間的な距離があるところでの同時相関は 0 になる。

これは情報が有限速度で伝播していることにもなる。

つまり、空間的に離れた 2 点において  $x^0 = y^0$  の場合は同時刻で交換するので次のように相関はない。

$$\Delta(x, y)|_{x^0=y^0} = 0 \quad (7.20)$$

つまり、同じ  $t$  では次が成り立つ。

$$[\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{x}, t)] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (7.21)$$

となる。この式は有用で同時刻交換関係として今後も利用する機会が多い。

しかし、上図の虚部分では双曲線のように振る舞う。同位相の波面が双曲線を作った古典的な定常波と対応する。

## 7.4 因果関係 [86][113]

### 7.4.1 観測的伝播関数

前節で場の発展と交換積との関係を扱った。量子論では作用の順序が重要であり、これは因果関係とも関係する。

ハイゼンベルグ描像と因果関係を作っているローレンツ変換との関係をみよう。

ただし、ここでは計量を

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

とする。第5部の置き方と符号が反転するので注意する。 $x^0 = t$ である。

$$x^\mu = (x^0, \mathbf{x}), x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu = (x^0, -\mathbf{x})$$

である。従って不変距離は正が通常になる。あえて  $c$  を表示すると時間的領域では

$$x^\mu x_\mu \equiv s^2 = c^2 t^2 - x^2 > 0$$

であることに留意する。

$$x^2 - c^2 t^2 = x'^2 - c^2 t'^2$$

そこで次の図のような光円錐を原点  $O$  としてとる。 $O_1$  は時間的領域、 $O_2$  は空間的領域にあるとする。

$O_2$  の空間的領域にあると空間成分が時間成分より大きいので  $ds^2 = (x - x')^2 < 0$  となるから相対論の要請では

$$[O(x), O_2(x')] = 0, \quad \forall (x - x')^2 < 0 \quad (7.22)$$

となり、 $O$  と  $O_2$  は因果関係をもつことができない。

因果関係を満たすには  $ds^2 > 0$  である  $O_1$  の領域にないといけない。

$$[O(x), O_1(x')] = 0, \quad \forall (x - x')^2 > 0 \quad (7.23)$$

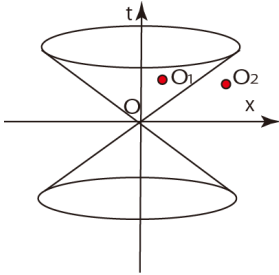


図 7.6: 光円錐内外の観測点  $O_1$  は時間的領域、観測点  $O_2$  は空間的領域にある。

この相対論的な要請を量子場の波動関数で見えていく。式 6.23 から

$$p^0 = \pm E_{\mathbf{p}} = \pm \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$$

前節でもよく用いたように同時刻では次が成り立つ。

$$[\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{x}, t)] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

前節で導いた伝播関数、式 7.16 を改めて次のようにおく。

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} (a_{\mathbf{p}} e^{-ip \cdot x} + a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{+ip \cdot x})$$

として、

$$\Delta(x - y) \equiv [\phi(x), \phi(y)] = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} (e^{-ip(x-y)} - e^{ip(x-y)}) \quad (7.24)$$

これは向かい合う波の存在する先に定義した観測的伝播関数である。

4元表示では式 7.17 で用いた

$$[\phi(x), \phi(y)] = \int_C \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left( \frac{-i}{k^2 - m^2} \right) e^{-ip(x-y)}$$

になる。

この表記に向かい合う波がないように見える。そこでこの式を導いてみよう。

式 6.44 で利用した、真空条件を利用する。

つまり、 $a_{\mathbf{p}}^\dagger, a_{\mathbf{p}} |0\rangle = 0$  だから、式 3.26 の次の関係が重要な働きをする。

$$[a(\mathbf{p}), a^\dagger(\mathbf{p}')] = (2\pi)^3 2p^0 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \quad (7.25)$$

まず式 3.51 より、 $y$  から  $x$  への伝播を次の  $D(x-y)$  を用いて表す。

式 7.25 があるので真空の期待値を計算すると、次のように簡単になる。

$$\begin{aligned} D(x-y) &\equiv \langle 0 | \phi(x)\phi(y) | 0 \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^3 p d^3 p'}{(2\pi)^6} \frac{1}{\sqrt{E_{\mathbf{p}} E_{\mathbf{p}'}}} \langle 0 | a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}'}^\dagger | 0 \rangle e^{-ip \cdot x + ip' \cdot y} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^3 p d^3 p'}{(2\pi)^6} \frac{1}{\sqrt{E_{\mathbf{p}} E_{\mathbf{p}'}}} \langle 0 | (2\pi)^3 2p^0 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') + a_{\mathbf{p}'}^\dagger, a_{\mathbf{p}} | 0 \rangle e^{-ip \cdot x + ip' \cdot y} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} e^{-ip(x-y)} \end{aligned} \quad (7.26)$$

この  $D(x-y)$  を  $y$  から  $x$  への伝播関数 (**propagators**) という。

これと先の観測的伝播関数との関係が

$$[\phi(x), \phi(y)] = \Delta(x-y) = D(x-y) - D(y-x) \quad (7.27)$$

となっていることがわかる。この関係は後に示す観測問題として重要になる。

次節で具体的に検討する。

#### 7.4.2 時間的領域の場合

はじめに時間領域内、つまり光円錐内の  $O_1$  のように  $(x-y)^2 > 0$  の場合を考えよう。

この場合は

$$(x-y)^2 \simeq dt^2 > 0 \quad (7.28)$$

が成り立つ。ここでは単純に時間差のみとして

$$dt = x^0 - y^0 = t, \quad \mathbf{x} - \mathbf{y} = 0$$

とすると等方性から

$$d^3 p = 4\pi p^2 dp$$

を利用すると

$$E^2 = (p^0)^2 = p^2 + m^2$$

$$p^2 = E^2 - m^2$$

から正のエネルギー解  $p^0 = E_{\mathbf{p}} = +\sqrt{p^2 + m^2}$  をとると、 $p = 0$  で  $E = m$  として条件 7.28 から

$$p(x-y) \simeq p^0 t = \sqrt{p^2 + m^2} t$$

とおけるので  $E = \sqrt{p^2 + m^2}$  から

$$dE = \frac{p dp}{\sqrt{p^2 + m^2}}$$

で変数を変換すると  $p = +\sqrt{E^2 - m^2}$  をとると

$$\begin{aligned} D(x-y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} e^{-ip(x-y)} \\ &= \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^{\infty} dp \frac{p^2}{2\sqrt{p^2 + m^2}} e^{-i\sqrt{p^2 + m^2} t} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_m^{\infty} dE p e^{-iEt} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_m^{\infty} dE \sqrt{E^2 - m^2} e^{-iEt} \end{aligned}$$

となるが、これは  $t$  が大きいところで次の図のように時間的に振動する平面波

$$D(x-y) \sim e^{-imt}$$

とみなせる。古典的には角振動数  $m$  の平面波の進行波を表している。

観測的伝播関数では式 7.24 より

$$\Delta(x-y) \sim e^{-imt} - e^{+imt}$$

である。古典的な、定在波を観測する状況と同じで、干渉をみていることになる。

従ってこの時は波の速が見えないで、定常波の節、腹の移動が見えるようになり、粒子性が強調される。

ただ、実際には4次元での波を考察しないとイケない。これは後に考える。

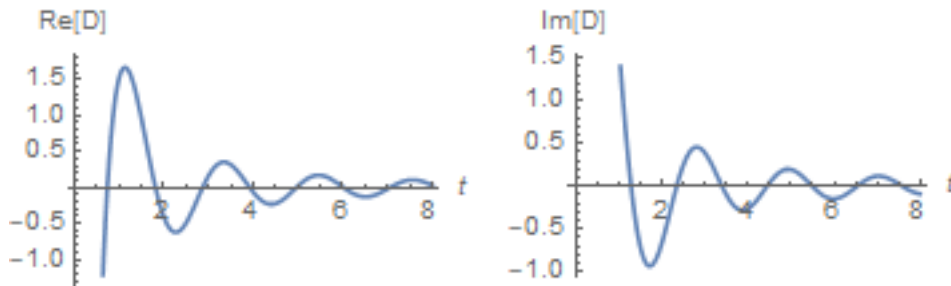


図 7.7:  $D(x-y)$  のふるまい、 $t$  が大きいと  $e^{-imt}$  のようになる

### 7.4.3 空間的領域の場合

次に  $(x-y)^2 < 0$  の場合を考える。

光円錐の外側の空間的領域では  $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$  として

$$(x-y)^2 = ds^2 = (dx^0)^2 - (d\mathbf{x})^2 \simeq -\mathbf{r}^2 < 0$$

であり式 7.27 から

$$[\phi(x), \phi(y)] = D(x-y) - D(y-x) = 0$$

となるので  $\phi(x), \phi(y)$  は相関を持たない。

例えば簡単に下図のように原点を  $x$  にとると  $x \rightarrow y, y \rightarrow x$  の伝播関数の差は図のような虚軸反転をした空間的領域への

伝播になる。

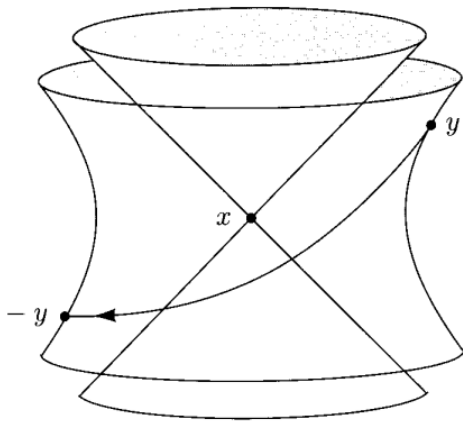


図 7.8: [86] より : 空間領域での大局的な座標の符号変換

これは次の変換で表すことができる。

$$(x - y) \rightarrow -(x - y)$$

図でみるように光円錐の外、つまり空間的領域であれば回転によって移るのでローレンツ変換で可能になる。しかし、時間的領域  $O_1$  にあるとき、どんなローレンツ変換を用いても、光円錐の上の部分から出ることはできない。

よって、この変換を同じ時間的領域でおこなうことはできない。

これはクライン・ゴールドン場では空間的領域ある粒子と相関をとることができない。

ことを意味す、これはボソン粒子を空間的領域で観測できないことになる。

相対論からの要請では現在という時空の位置が点である以上これは避けられない。

いいかえれると、常に現在を選択しないといけない観測者の立場では 1 点収縮した特異点がおかれる状況が必ずあるということである。

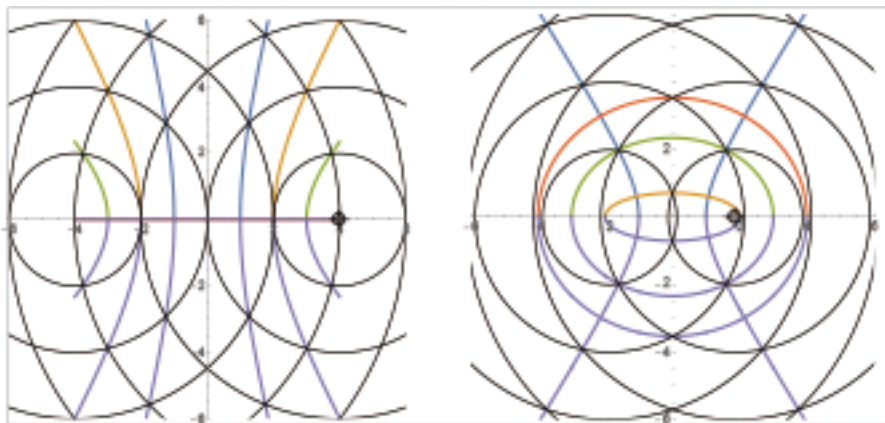


図 7.9: 2つの円形波の干渉

上図のように平面で考えると、2つの円形波の干渉は双曲線を波源の間につくる。

しかし、虚数を許すと図右のように楕円を許し、閉曲線をつくる。

次のように虚成分が大きく影響するとして  $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| > 0$  として、 $(x - y)^2 < 0$  の場合、次のように同時刻で考えよう。

$$x^0 - y^0 = 0, \mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{r}, |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = r$$



とすると同時刻では  $p^0 t = 0$  とおけるので

$$e^{ip \cdot (x-y)} = e^{i(p^0 t - \mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{y}))} = e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}} \quad (7.29)$$

$$e^{-ip \cdot (x-y)} = e^{-i(p^0 t - \mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{y}))} = e^{+i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}} \quad (7.30)$$

に注意して

$$\begin{aligned} -ip \cdot (x-y) &= i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} \\ E_{\mathbf{p}} &= \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \end{aligned}$$

となることに留意し、 $d^3 p$  を虚平面と実軸の立体空間として、次のように虚平面、実軸積分に分ける。

$$d^3 p = 2\pi dp d\mathbf{p}$$

この時、次の実積分は同時刻で  $E_{\mathbf{p}}$  と無関係として  $\mathbf{x}$  を原点にとると  $\mathbf{p}$  を次の有限区間に制限できると仮定する。

従って

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} d\mathbf{p} e^{-ip \cdot (x-y)} &\simeq \int_0^{+p} d\mathbf{p} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}} \\ &= \frac{1}{ir} e^{ipr} \end{aligned}$$

が先に実行できるので

$$\begin{aligned} D(x-y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} e^{-ip \cdot (x-y)} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\pi dp}{(2\pi)^3} \frac{p}{2E_{\mathbf{p}}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\mathbf{p} e^{-ip \cdot (x-y)} \\ &= \frac{-i}{4\pi^2 r} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \frac{p}{2E_{\mathbf{p}}} e^{ipr} \\ &= \frac{-i}{8\pi^2 r} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \frac{p}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}} e^{ipr} \end{aligned}$$

次に、この積分を下図のように虚軸側に  $\pm im$  にずらす。この時

$$\rho \rightarrow -ip$$

で置き換えると

$$\mathbf{p}^2 = p_\mu p^\mu = \rho^2$$

虚軸の上半分の閉区間でおこなうと

$$m \rightarrow im$$

として

$$\begin{aligned}
 D(x-y) &= \frac{-i}{8\pi^2 r} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \frac{p}{\sqrt{p^2 + m^2}} e^{ipr} \\
 &= \frac{2}{8\pi^2 r} \int_m^{+\infty} dp \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 - m^2}} e^{-\rho r}
 \end{aligned}$$

とすると、積分の結果は Bessel 関数になり、 $r \rightarrow \infty$  では

$$D(x-y) \sim e^{-mr}$$

のように急速に減衰する。

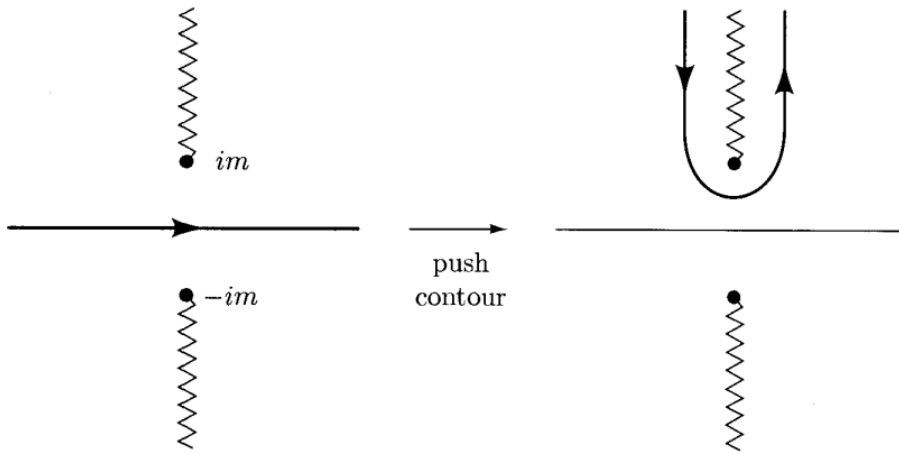


図 7.10: [86] より：空間領域での閉回路積分

しかし、伝播関数だけでは光円錐の外でも振幅は 0 になることはないことに留意がいる。伝播関数は減衰はするが 0 ではない伝播が残ることになる。

一方で、観測的伝播関数では光円錐外の  $O_2$  は

$$\Delta(x-y) = e^{-mr} - e^{-mr} = 0$$

これは古典的には  $x \rightarrow y$  と  $y \rightarrow x$  の進行波が恒等的打ち消しあうことを示す。

光速を超えて情報伝播できないという相対論的な要請を満たすことがわかる。

光円錐の中心がそれぞれの粒子の位置に依存していることに注意しよう。

これは位置の取り方で干渉を見るのか、恒等的な消滅を見るのかが異なることになる。

粒子的には式 6.49 のようにスカラー場は反粒子を同時に持つので粒子、反粒子の対消滅と考えることができる。

つまり、同時刻とは時間の正負の流れが局所的に輪をつくり、同一粒子の粒子反粒子が合成される関係といえる。

かなり都合のよい計算が目立ったが、次節では伝播関数について留数積分を用いると明瞭になる。

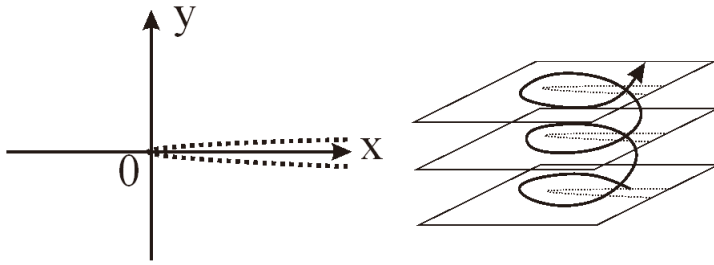


図 7.11: 連続したリーマン葉

## 7.5 Klein-Gordon 伝播関数 [86]

スカラー場の場合は式 7.24 から出発して  $x^0 > y^0$  の時、前節を逆にたどると  $p^0 = \pm E_{\mathbf{p}}$  での留数積分から

$$\begin{aligned}
 \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} \left( e^{-i p \cdot (x-y)} - e^{i p \cdot (x-y)} \right) \\
 &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} e^{-p \cdot (x-y)} \Big|_{p^0=+E_{\mathbf{p}}} + \frac{1}{-2E_{\mathbf{p}}} e^{-i p \cdot (x-y)} \Big|_{p^0=-E_{\mathbf{p}}} \right\} \\
 i f(x^0 > y^0) &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \int \frac{dp_0}{2\pi i} \left( \frac{-i}{k^2 - m^2} \right) e^{-i p \cdot (x-y)} \quad (7.31)
 \end{aligned}$$

となる。これは次下図のように下半分の積分において  $p^0 = \pm E_{\mathbf{p}}$  の極を双方共に拾っているのが観測的である。

これをクライン・ゴールドン伝播関数という。

$$\Delta_{KG} \equiv \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \int \frac{dp_0}{2\pi i} \left( \frac{-i}{k^2 - m^2} \right) e^{-i p \cdot (x-y)}$$

$x^0 < y^0$  の時は上半分の空間側をとるとその閉回路内には特異点がないので複素積分は 0 になる。

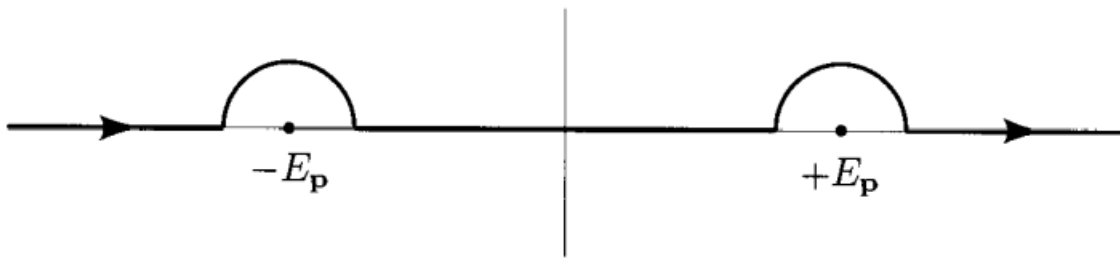


図 7.12: [86] より :

$x^0 > y^0$  の時は式 8.7 と同様に  $p^0 \rightarrow \infty$  で

$$e^{-|Im[p_0](x_0 - y_0)} \rightarrow 0$$

とできるので複素平面の下半分から右周りの経路をとれば実軸のみの寄与を計算できた。

しかし、これは虚軸の過去からの影響のみを考えることになる。そこであからさまにステップ関数を  $\theta$  用いて

$$G_R \equiv \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle$$

としてみる。クライン・ゴールドン演算子にこの  $G_R$  を作用いさせてみるとステップ関数  $\theta$  の微分が  $\delta$  関数だったから

次の有用な関係式 8.36 が導ける。

$$\begin{aligned}
(\partial^2 + m^2) G_R(x - y) &= (\partial^2 \theta(x^0 - y^0)) \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle \\
&\quad + 2 (\partial_\mu \theta(x^0 - y^0)) (\partial^\mu \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle) \\
&\quad + \theta(x^0 - y^0) (\partial^2 + m^2) \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle \\
&= -\delta(x^0 - y^0) \langle 0 | [\pi(x), \phi(y)] | 0 \rangle \\
&\quad + 2\delta(x^0 - y^0) \langle 0 | [\pi(x), \phi(y)] | 0 \rangle \\
&\quad + 0 \\
&= -i\delta^{(4)}(x - y)
\end{aligned} \tag{7.32}$$

ただし、6.25 から

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}_{sc}}{\partial \dot{\phi}(x)} = \partial^0 \phi(x)$$

また 3.47 から 1 次微分は次のように置き換えることを利用した。

$$(\square + m^2) \phi(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \pi(\mathbf{x}, t)$$

従って  $x = y$  では KG 方程式に帰着する。

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi = (\nabla^2 + m^2) \phi$$

そこで  $p$  表現で、 $p = -i\nabla$  だから式 7.32 を  $x = y$  で満たす  $\tilde{G}_R(p)$  を考える。

$$(-p^2 + m^2) \tilde{G}_R(p) = -i \tag{7.33}$$

フーリエ変換の式 5.1 から

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{4/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(k) e^{-ikx} d^4k$$

だったので  $G_R(x - y)$  のフーリエ変換は運動量  $p$  の重ね合わせから

$$G_R(x - y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \tilde{G}_R(p)$$

となるが 7.33 から式 7.31

$$G_R(x - y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2} e^{-ip(x-y)}$$

が導けた。

## 7.6 Feynman 伝播関数 [113][86]

次に伝播関数を 4 元化をにファインマンの伝播関数を時間順序  $T$  積を用いて次のように定義する。運動量の 4 元積分は、以下のように複素積分に置き換えて、留数定理を用いるの方が自然である。

$$D_F(x - y) = \langle 0 | T \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle = \begin{cases} D(x - y) & x^0 > y^0 \\ D(y - x) & x^0 < y^0 \end{cases} \tag{7.34}$$

前節の伝播関数に時間順序を考慮したものである。

これは時間推進を決めてしまえば 4 元進行波で、定常波ではない。

定常波とみなすために時間推進が順と逆が共にあることを仮定して、和を取ることが重要になる。

そこで前節までの議論から、式 7.17 を用いて、観測的ファインマン伝播関数を定義すると

$$\Delta_F(x-y) \equiv \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2} e^{-ip \cdot (x-y)} \quad (7.35)$$

となる。ただし後に見るように実際にはこの分母には仮想的な相互作用として微小項  $\pm i\epsilon$  を加える。

分母に注目すると、実数であれば明らかにこれは  $p = \pm m$  で発散する。

つまり、ファインマンの伝播関数は微小相互作用項

$$H_{int} = e^{\pm i\epsilon t}$$

を 1 次的に加えておいて、後に  $\epsilon \rightarrow 0$  とする。まわりくどいように見えるが、これは仮想的な粒子の存在を意味し、

物理的な内容を表している。

これにより前節の Green 関数のように複素平面を用いて、この積分を留数定理で解こうというわけである。

ただし、これまで用いたように質量殻条件 (mass-shell condition) として

$$p^0 = E_{\mathbf{p}}$$

を利用する。まず、下図のように  $p^0$  を複素平面に拡張する。4 元化したので次に注意する。

$$p^2 = p^\mu p_\mu = m^2 = (p^0)^2 - \mathbf{p}^2$$

$$p_0^2 = E_{\mathbf{p}}^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$$

よって

$$p^2 - m^2 = (p^0)^2 - \mathbf{p}^2 - m^2$$

であるから次のような関係になる。

$$p^0 = \pm E_{\mathbf{p}} = \pm \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$$

これから被積分関数を

$$\frac{1}{p^2 - m^2} = \frac{1}{(p^0)^2 - \mathbf{p}^2 - m^2}$$

$$= \frac{1}{(p^0)^2 - E_{\mathbf{p}}^2}$$

$$= \frac{1}{(p^0 - E_{\mathbf{p}})(p^0 + E_{\mathbf{p}})}$$

この時の留数は  $p^0 = \pm E_{\mathbf{p}}$  において

$$\text{Res} \left[ \frac{1}{(p^0 - E_{\mathbf{p}})(p^0 + E_{\mathbf{p}})} \right] = \pm \frac{-2\pi i}{2E_{\mathbf{p}}}$$

従って、2 つの特異点を実軸上に持つ。

前節の Green 関数の場合と同様に次の図のように積分を実行する。

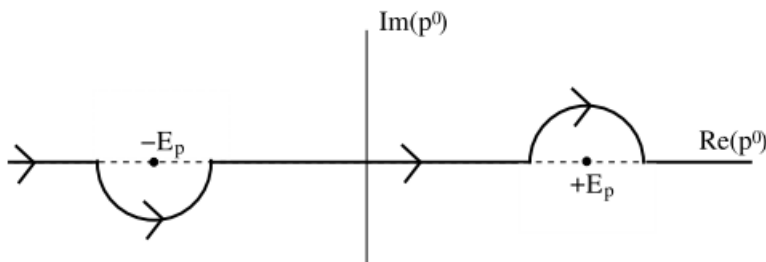


図 7.13: [113] より:Feynman 伝播関数の積分経路;  $x^0 > y^0$  なので時計回り

- $x^0 > y^0$  の場合

積分経路は上図のように時計周りの下平面をとり、特異点は  $+E_p$  のみを拾う。この時、した半分で

$$p^0 \rightarrow -i\infty$$

とするので、虚軸上では

$$e^{-ip^0(x^0-y^0)} \rightarrow 0$$

となり、実軸のみの寄与を考えればよい、よって留数定理から  $p_0 \rightarrow +E_p$  として

$$D_F(x-y) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^4} \frac{-2\pi i}{2E_p} i e^{-iE_p(x^0-y^0)+i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}$$

$x^0 > y^0$  としたから 4 元表示にまとめると

$$p \cdot (x-y) = E_p(x^0-y^0) - \mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{y})$$

で置き換えて、

$$D_F(x-y) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-ip \cdot (x-y)} \quad (7.36)$$

が得られる。

これは式 7.26 に等しく、結果、

$$D_F(x-y) = D(x-y) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-ip \cdot (x-y)}$$

となる。

- $x^0 < y^0$  の場合

積分経路は上図向きと反対で反時計周りの上平面をとり、

$$p^0 \rightarrow +i\infty$$

とするので特異点は  $-E_p$  のみを拾うこととなり、次の過去からの寄与が 0 になる。

$$e^{ip^0(x^0-y^0)} \rightarrow 0$$

とできる。よって留数定理から  $p_0 \rightarrow -E_p$  として

$$\begin{aligned} D_F(x-y) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^4} \frac{2\pi i}{(-2E_p)} i e^{iE_p(x^0-y^0)+i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-iE_p(y^0-x^0)-i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{x})} \end{aligned}$$

$x^0 < y^0$  としたので 4 元表示にまとめると  $p_0 \rightarrow -E_p$  としたので

$$p \cdot (y-x) = -E_p(y^0-x^0) - \mathbf{p} \cdot (\mathbf{y}-\mathbf{x})$$

となるから

$$\begin{aligned}
D_F(x-y) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} i e^{ip \cdot (y-x)} \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} i e^{-ip \cdot (x-y)}
\end{aligned} \tag{7.37}$$

これは

$$D_F(x-y) = D(x-y)$$

にはならない

が得られる。ここで、負のエネルギー  $-E_{\mathbf{p}}$  で置き換えたので反粒子化をおこなうと式 8.11 を用いて

$$\begin{aligned}
D_F(x-y) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} i e^{ip \cdot (x-y)} \\
&= D(y-x)
\end{aligned}$$

となる。ここで重要な問題がある。 $x^0 < y^0$  とするか  $x^0 > y^0$  とするかは普通は排他である。

つまり、どちらかの時間の流れだけをとれば、2つの進行波は干渉しない。定常波をつくるためには過去と未来の時間が行き来していないといけない。つまり、先進、遅延 Green 関数は共に重ね合わさっていないといけない。

#### • Green 関数の場合

ファインマンの伝播関数は順序積  $T$  を用いて、定常波を意識し、

$$\begin{aligned}
\Delta_F &\equiv \langle 0 | T \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle \\
&= \langle 0 | \theta(x^0 - y^0) \phi(x) \phi(y) + \theta(y^0 - x^0) \phi(y) \phi(x) | 0 \rangle
\end{aligned} \tag{7.38}$$

で表す。 $\phi(x)$  の展開式

$$\phi(x) = \sum_k a_k u_k(x) + \sum_k a_k^\dagger u_k^*(x)$$

を用いると

$$\Delta_F(x, y) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} \left[ \theta(x^0 - y^0) e^{-ip \cdot x(x-y)} + \theta(y^0 - x^0) e^{ip \cdot x(x-y)} \right]$$

となる。式 7.18 から  $x^0 > y^0$  の時は  $p_0 = E_{\mathbf{p}}$  の極のみをとり、 $x^0 < y^0$  の時は  $p_0 = -E_{\mathbf{p}}$  の極のみをとり上半面、下半面で閉回路をつくる。式でみたように虚数成分の大きいところで 0 とみなせるので、実数上の積分ができる。

そこで式 8.6 に次の図のように  $\pm i\epsilon$  だけずらし、としてファインマンの伝播関数を次のように改めておく

$$\Delta_F(x, y) \equiv \int_{\text{closed}} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left( \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \right) e^{-ip \cdot (x-y)} \tag{7.39}$$

この時  $p^0$  は

$$p^0 = \pm (E_{\mathbf{p}} - i\epsilon)$$

をとるので、先の図のようにファインマンの伝播関数は上半半分、下半半分の閉経路共に得点を含む。

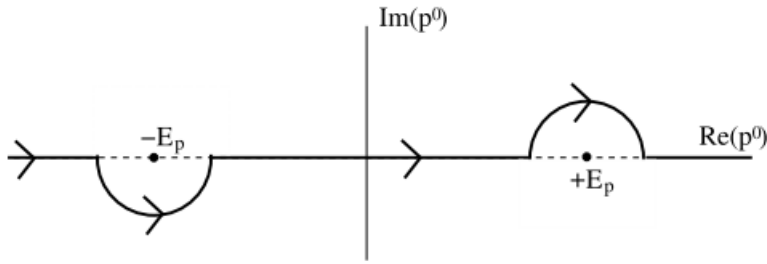


図 7.14: [113] より:Feynman 伝播関数の積分経路;  $x^0 > y^0$  なので時計回り

伝播関数を次のように場合分けして式 7.34 から

$$D_F(x-y) = \begin{cases} D(x-y) & x^0 > y^0 \\ D(y-x) & x^0 < y^0 \end{cases}$$

として、双方を含めるために次のように表す。

$$\begin{aligned} D_F(x-y) &\equiv \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | \phi(x)\phi(y) | 0 \rangle + \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | \phi(x)\phi(y) | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | T\phi(x)\phi(y) | 0 \rangle \end{aligned}$$

KG 方程式から Green 関数は微小定数  $\epsilon$  を加えた次の方程式の解になる。

$$\begin{aligned} (\square + m^2 - i\epsilon) D_F(x-y) &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} (-p^2 + m^2 - i\epsilon) e^{-ip \cdot (x-y)} \\ &= -i\delta^4(x-y) \end{aligned}$$

を満たす。この微小部分は非常に重要な意味がある。最終的には

$$\epsilon \rightarrow 0$$

を実施する。

$$(\square_E + m^2)G(x, y) = \delta^4(x-y)$$

これは観測の効果と関係する。ここではその過程に注目しよう。

この  $\epsilon$  は次の図のように 2 つの特異点が実軸を交差するように現れる。

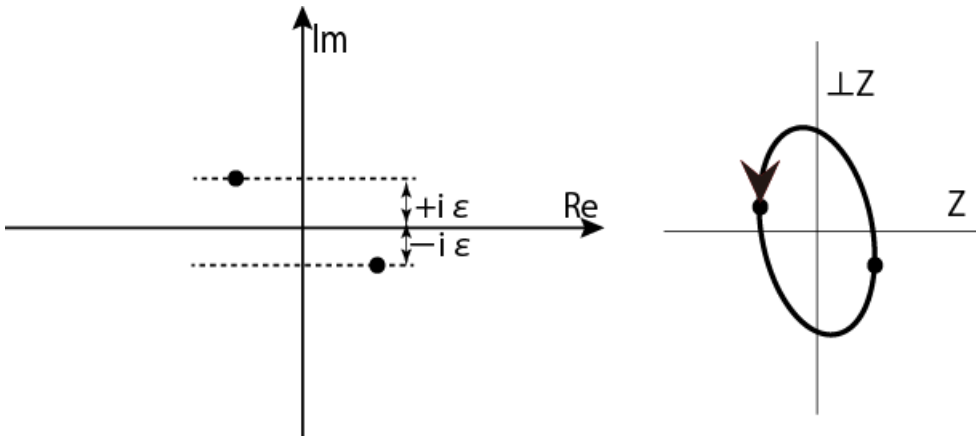


図 7.15: 極を虚軸方向にずらす、左図のように  $p^0$  を複素空間にわけて、2 つの特異点をつくる



そこで、この積分を  $k_0$  を虚軸にとり、虚軸に沿っておこなうことを考える。  
つまり次のように解析的に変形する。

$$G(x, y) = \int_{-i\infty}^{+i\infty} dk_0 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^4} \left( \frac{i}{k^2 - m^2} \right) e^{-ik(x-y)} \quad (7.40)$$

ここでミンコフスキー時空をユークリッド化して、

$$k_0 = ik_4$$

$$x^0 = ix^4$$

とするとこの積分はユークリッド化したグリーン関数を  $G_E$  として

$$\begin{aligned} G(x, y) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left( \frac{1}{k^2 + m^2} \right) e^{ik(x-y)} \\ &= G_E(x, y) |_{x^4=-ix^0, y^4=-iy^0} \end{aligned}$$

とかける。ただし、ユークリッド化により

$$k^2 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} + k_4^2$$

$$k(x-y) = \mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}) + k_4(x^4 - y^4)$$

である。これは伝播関数がユークリッド化により  $x^4, y^4$  の虚数値に解析接続されたと考える。  
これによりクライン・ゴールドン方程式は

$$(\square + m^2) \mathcal{G}(x, y) = -i\delta^4(x-y)$$

に従うとみなせる。

これらの伝播に向きが入る。  $x^0 < y^0$  の時は粒子の伝播は  $x \rightarrow y$  であり、  $x^0 > y^0$  の時は粒子の伝播は  $y \rightarrow x$  である。

そこで経路積分の伝播  $K$  を用いて

$$K(x, y) = \begin{cases} \langle \mathbf{x}, x^0 | \mathbf{y}, y^0 \rangle & (x^0 > y^0) \\ \langle \mathbf{y}, y^0 | \mathbf{x}, x^0 \rangle & (x^0 < y^0) \end{cases}$$

であり、時間推進をハミルトニアンが担ったから 2 点間の確率振幅として

$$K(x, y) = \theta(x^0 - y^0) \langle \mathbf{x} | e^{-iH(x^0 - y^0)} | \mathbf{y} \rangle + \theta(x^0 - y^0) \langle \mathbf{y} | e^{-iH(y^0 - x^0)} | \mathbf{x} \rangle \quad (7.41)$$

となる。

これは  $x \rightarrow y, y \rightarrow x$  の波の合成である。

このように交換子  $[\phi(x), \phi(y)]$  が定常波の合成であると考えるのは興味深い。

交換するような古典論では、たまたま定常波の節の部分を見ているだけだと考えられる。

問題なく、計算するために前節の式 7.39 の Green 関数でみたように  $p^0$  を複素平面で表す。

次の図のように  $\pm i\epsilon$  だけずらし、ファインマンの伝播関数は仮想粒子を取り入れて次のように改めておく。

$$\Delta_F(x-y) \equiv \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (x-y)} \quad (7.42)$$

この式を用いたポテンシャルのある場合の散乱振幅の具体的名計算は後章の散乱理論でおこなう。

これから式 8.36 のように KG 方程式から Green 関数は次の方程式の解になる

$$\begin{aligned} (\partial_t^2 - \square + m^2) D_F(x-y) &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2} (-p^2 + m^2) e^{-ip \cdot (x-y)} \\ &= -i\delta^4(x-y) \end{aligned}$$

を満たすことになる。この後で  $\epsilon \rightarrow 0$  を施す。

これは前節の式 8.43 の 4次元版で片道だけでなく両方向を考えると遅延 Green 関数が<sup>5</sup>

$$G_R = \begin{cases} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} (e^{-ip(x-y)} - e^{ip(y-x)}) & x^0 > y^0 \\ 0 & x^0 < y^0 \end{cases}$$

となる。これは下図左のように

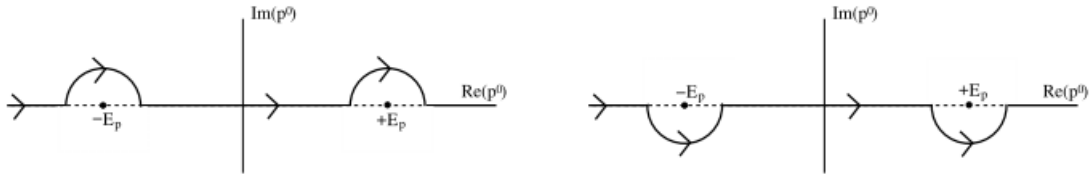


図 7.16: [113] より:遅延 (左)、先進 (右)

Feynman 伝播関数を用いて次のようにかける。

$$G_R = \begin{cases} D(x-y) - D(y-x) & x^0 > y^0 \\ 0 & x^0 < y^0 \end{cases}$$

これらは次の KG 方程式を満足する。

$$\partial^\mu \partial_\mu \phi + m^2 \phi = J(x)$$

ただし、調整のための関数を  $J(x)$  とした。Green 関数の選び方は幾通りもあるが、時間順序をうまく考慮した

$$\langle 0 | T(\phi(x)\phi(y)) | 0 \rangle = G(x, y)$$

を満たすためには Feynman 伝播関数である必要がある。

## 7.7 Fermi 粒子

次にスピン 1/2 をもつフェルミ粒子について考えよう。場の演算子は次のように係数に行列を用いて

$$\psi = \sum_{p,r} \sqrt{\frac{m}{E_p V}} [a_{p,r} u_r(p) e^{-ipx} + b_{p,r}^\dagger v_r(p) e^{ipx}]$$

$$\bar{\psi} = \sum_{p,r} \sqrt{\frac{m}{E_p V}} [a_{p,r}^\dagger \bar{u}_r(p) e^{ipx} + b_{p,r} \bar{v}_r(p) e^{-ipx}]$$

となる。フェルミ粒子では関数  $u_r, v_r$  も成分を持ち、次の反交換関係が成り立つことに留意する。

$$[a_{p,r}, b_{p,r}]_+ = 0$$

さらに時刻  $x^0, y^0$  の大小に関係なく  $x^0 \rightarrow y^0$  が成り立つためには時間順序積は

$$T\psi(x)\psi(y) = \begin{cases} \psi(x)\psi(y) & x^0 > y^0 \\ -\psi(y)\psi(x) & x^0 < y^0 \end{cases}$$

さらに共役演算子についても

$$T\psi(x)\psi(y) = \begin{cases} \psi(x)\psi(y) & x^0 > y^0 \\ -\psi(y)\psi(x) & x^0 < y^0 \end{cases}$$

が成り立つ必要がある。この時の伝播関数は

$$\begin{aligned} S(x, y) &= \langle 0 | T\psi(x)\bar{\psi}(y) | 0 \rangle \\ &= \sum_{p,s} \left( \frac{m}{E_p V} \right) \left[ \theta(x^0 - y^0) u_{sp} \bar{u}_{sp} e^{-ip(x-y)} - \theta(x^0 - y^0) v_{sp} \bar{v}_{sp} e^{ip(x-y)} \right] \end{aligned}$$

となるが、次節で扱う  $\gamma$  行列を式 9.17 から

$$\gamma_\mu = \begin{pmatrix} \sigma_0 & -i\sigma_i \\ i\sigma_i & -\sigma_0 \end{pmatrix}$$

として、

$$\sum_{p,s} u_{sp} \bar{u}_{sp} = \frac{\gamma \cdot p + m}{2m}$$

$$\sum_{p,s} v_{sp} \bar{v}_{sp} = \frac{\gamma \cdot p - m}{2m}$$

となるので  $V \rightarrow \infty$  として和を積分に変えると 3次元運動量空間で

$$\sum_p \frac{1}{V} \rightarrow \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3}$$

$$\begin{aligned} S(x, y) &= \sum_p \left( \frac{1}{2E_p V} \right) \left[ \theta(x^0 - y^0) (\gamma \cdot p + m) e^{-ip(x-y)} - \theta(x^0 - y^0) (\gamma \cdot p - m) e^{ip(x-y)} \right] \\ &= \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \left[ \theta(x^0 - y^0) (\gamma \cdot p + m) - \theta(x^0 - y^0) (\gamma \cdot p - m) e^{ip(x-y)} \right] \end{aligned}$$

これは前節の式 7.39 と同様に極をずらして 4 元表示することができる。

$$\begin{aligned} S(x, y) &= \langle 0 | T\psi(x)\bar{\psi}(y) | 0 \rangle \\ &= i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\gamma \cdot p + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{ip(x-y)} \\ &= (i\gamma \partial + m) G(x, y) \end{aligned} \tag{7.43}$$

興味あることにこの時の伝播関数は

$$(i\gamma \cdot \partial - m) S(x, y) = i\delta^{(4)}(x - y) \tag{7.44}$$

を満たすので、 $(i\gamma \cdot \partial - m)$  の逆演算子になる。これは次章で Green 関数とし詳しく見る。

## 8 Green関数

第1部で扱った Green 関数は境界条件の元で波動の伝播を表していた。この関数は場の理論に応用するとまさに粒子の伝播を記述できるようになる。さらに先進、遅延などの境界条件の取り方は量子論の観測の問題に大きな示唆を与えてくれる。その原点が1962に Kadanoff と Baym によって書かれた Quantum Statistical Mechanics であると思う。はじめにその内容を学習する。

### 8.1 場の演算子 [132]

前節までの内容から場の生成消滅演算子を  $\psi^\dagger, \psi$  として、ある時空点  $(\mathbf{r}, t)$  に粒子を1つ生成したり、消滅したりする。^

巨視的な演算子をこの  $\psi^\dagger, \psi$  を用いて表そうというのが第2量子化の考え方である。

時空点の粒子密度が

$$n(\mathbf{r}, t) = \psi^\dagger(\mathbf{r}, t) \psi(\mathbf{r}, t)$$

で表すことができる。これは、粒子を一つ消去し、直後に粒子を生成することが粒子の密度を表すというアクションであることに留意する。これから全系の粒子数  $N$  は次のように積分する。

$$N(t) = \int d\mathbf{r} \psi^\dagger(\mathbf{r}, t) \psi(\mathbf{r}, t)$$

これからも、 $\psi^\dagger(\mathbf{r}, t) \psi(\mathbf{r}, t)$  は消えたり、ついたり単位空間にどれだけ起きるかを示すことができる。生成と消滅が常にセットになっていない保存量にならない。

同じようにエネルギーを考えることができる。自由粒子の場合は  $\hbar = 1$  として、

$$H_0(t) = \int d\mathbf{r} \frac{\nabla \psi^\dagger \nabla \psi}{2m}$$

である。これは粒子の生成・消滅に伴って、位相変化も与えていることがわかる。

ここでの質量  $m$  は前節の式 6.16 で見たようにアインシュタインとド・ブロイの関係式から時空の計量と関係している。

$$p_\mu p^\mu = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - \mathbf{p}^2 = m^2 c^2$$

$$\mathbf{k} = \frac{\mathbf{p}}{\hbar}, \quad \omega = \frac{E}{\hbar}$$

から

$$k_\mu k^\mu = (k^0)^2 - \mathbf{k}^2 = \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \quad (8.1)$$

となり、これから次の分散を定義した。

$$\omega(\mathbf{k}) = c \sqrt{\mathbf{k}^2 + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}}$$

を用いる。ノルム項がハミルトニアン of 重要な役割になる。

さらに相対的な位置  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$  に関係したポテンシャルが働くと、ハミルトニアンは全体で次のようになる。

$$H(t) = \int d\mathbf{r} \frac{\nabla \psi^\dagger \nabla \psi}{2m} + \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \psi^\dagger(\mathbf{r}, t) \psi^\dagger(\mathbf{r}', t) V(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \psi(\mathbf{r}', t) \psi(\mathbf{r}, t) \quad (8.2)$$

このようなハミルトニアンが決まれば、Heisenberg 表示で、任意の演算子  $X(t)$  に運動方程式が次のように決まる。

$$i \frac{\partial X}{\partial t} = [X(t), H(t)] \quad (8.3)$$

これは時間変化をとることは括弧積  $[\ ]$  を取ることに等しいことを意味する。粒子数やハミルトニアンは先の性質から

$$[H(t), H(t')] = 0$$

$$[N(t), N(t')] = 0$$

であり時間依存しない。この時、式 8.3 を積分して解くことができ、式 3.40 で見たように、一般に次の解が得られる。

$$X(t) = e^{iHt} X(0) e^{-iHt}$$

前節の置換演算子でみたように場の演算子は次の交換関係を満たす。

$$\left[ \hat{\psi}(x), \hat{\psi}^\dagger(x') \right]_\sigma \equiv \hat{\psi}(x), \hat{\psi}^\dagger(x') - \sigma \hat{\psi}^\dagger(x'), \hat{\psi}(x) = \delta(x, x') \quad (8.4)$$

$$\left[ \hat{\psi}(x), \hat{\psi}(x') \right]_\sigma \equiv \left[ \hat{\psi}^\dagger(x), \hat{\psi}^\dagger(x') \right]_\sigma = 0 \quad (8.5)$$

ただし、 $\sigma$  は +1 で Bose 統計に従い、-1 で Fermi 統計に従う。

次に Bose 粒子のスカラー場の伝播を考える。

## 8.2 スカラー場の伝播

第 1 部で扱ったグリーン関数  $G$  を 4 次元に拡大して、スカラー場のクライン・ゴールドン方程式に用いればこの解が

$$G = \int_C \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left( \frac{i}{k^2 - m^2} \right) e^{-ik(x-y)} = -\Delta(x, y) \quad (8.6)$$

となることを用いて第 1 部でやったように得点  $k_0 = \pm\omega_k$  の周りで積分路を上下に分ける。

この時の留数は

$$\text{Res} \left[ \frac{1}{(k^0 - \omega_k)(k^0 + \omega_k)} \right] = \pm \frac{-2\pi i}{2\omega_k}$$

となるので時刻の方向で以下のように場合わけする。

- $x^0 > y^0$  の時

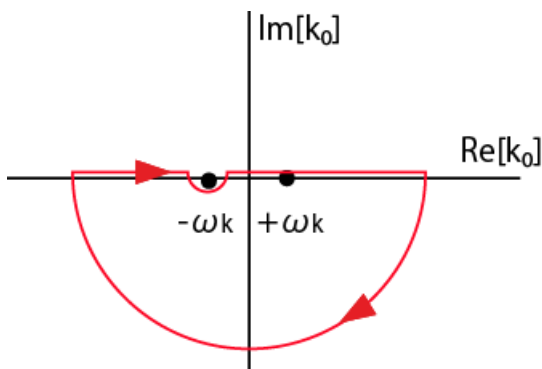


図 8.1: 積分経路  $C_1$

指数部分を展開したとき  $x^0 > y^0$  であれば積分経路は上図のように下半分の時計回りの経路をとる。

$$e^{-|Im[k_0]|(x_0 - y_0)} \rightarrow 0 \quad (8.7)$$

となるので下半分の大半円からの寄与は無視できる。よって、  
遅延グリーン関数  $G_R$  が  $k^0 = +\omega_k$  を含む経路で下半面の時計回りの経路で実軸だけからの寄与になるから

$$\begin{aligned} G_R &= \int_{C_1} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left( \frac{i}{k^2 - m^2} \right) e^{-ik(x-y)} \\ &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^4} \left( \frac{2\pi}{2\omega_k} \right) e^{-ik(x-y)} \\ &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} e^{-ik(x-y)} \end{aligned}$$

と求まる。

$$G_R = \begin{cases} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} e^{-ik(x-y)} & x^0 > y^0 \\ 0 & x^0 < y^0 \end{cases} \quad (8.8)$$

となりステップ関数  $\theta$  を用いると 7.19 を使うことができ

$$G_R(x, y) = \theta(x^0 - y^0) [\phi(x), \phi(y)] \quad (8.9)$$

となる。

- $x^0 < y^0$  の時

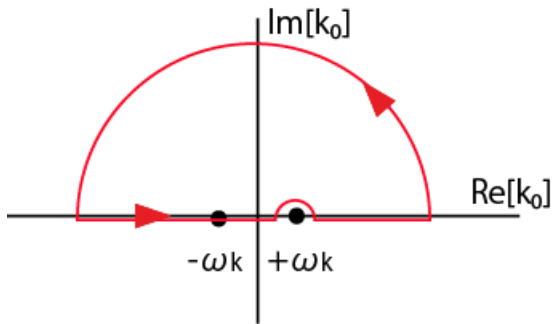


図 8.2: 積分経路  $C_2$

指数部分を展開したとき  $x^0 < y^0$  であれば積分経路は

$$e^{|Im[k_0]|(x_0 - y_0)} \rightarrow 0 \quad (8.10)$$

となるので上半分の大半円からの寄与は無視できる。よって

先進グリーン関数  $G_A$  が  $k^0 = -\omega_k$  を含む経路で上反時計回りの経路で上半面をとれば実軸からの寄与のみになる。

ところが、この場合は負のエネルギー  $-\omega_k$  を持つから式 6.48 でみたように反粒子化をする。

つまり指数部分は  $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}, k^0 \rightarrow -k^0$  として、複素共役をとり、時間を反転させると

$$-ik(x-y) = -i(k^0(x^0 - y^0) - \mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})) \rightarrow i(-k^0(y^0 - x^0) + \mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})) = ik(x-y) \quad (8.11)$$

となるので

$$\begin{aligned}
G_A &= \int_{C_2} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left( \frac{i}{k^2 - m^2} \right) e^{-ik(x-y)} \\
&= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^4} \left( \frac{2\pi}{2\omega_k} \right) e^{ik(x-y)} \\
&= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} e^{ik(x-y)}
\end{aligned}$$

となり

$$G_A = \begin{cases} 0 & x^0 > y^0 \\ \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} e^{ik(x-y)} & x^0 < y^0 \end{cases} \quad (8.12)$$

となりステップ関数  $\theta$  を用いると 7.19 を使うことができ

$$G_A(x, y) = \theta(y^0 - x^0) [\phi(y), \phi(x)] \quad (8.13)$$

と表すこともできる。

### 8.2.1 d次元の場合

例えば d 次元ユークリッド空間におけるスカラー場の伝播関数が次のようにおける。

$$\partial_\mu \partial^\mu D(x) = -\delta^d(x)$$

この解は極座標を用いて  $d \geq 3$  の時

$$D(x) = \frac{1}{(d-2)\Omega_d} \frac{1}{r^{d-2}}$$

となる。ここで  $\Omega_d = 2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$  は d 次元単位球の表面積を表す。  $\Gamma(d)$  はガンマ関数で  $d = 2$  であれば

$$D(x) = \frac{1}{2\pi} \log\left(\frac{1}{r}\right)$$

である。これは第 1 部でみたラプラス方程式の 2 次元の場合で  $\mathbf{r} = 0$  の位置に湧き出し口があることを表すベクトル場を考え、

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

として

$$\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 = 1$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{1}{r}$$

となるので係数 2 が 1 に変化することが次数に影響し、

$$\begin{aligned}
\nabla^2 u &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \left( \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 \right) + \frac{\partial u}{\partial r} \left( \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} \right) \\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial u}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \right) = 0 \\
&= \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{du}{dr} \right) = 0
\end{aligned}$$

となる。これから

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}$$

$$u(r) = c_0 + c_1 \log \frac{1}{r} \tag{8.14}$$

係数を次のように選び、

$$u(r) = -\frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{r}$$

となった。

### 8.3 汎関数微分 [62]

ここで汎関数微分を紹介する。物理として応用する場合、表面は固定しておいて、内部を変化させた時の変化量が知りたい場合に有用である。スカラー場のラグランジアン密度と作用積分を時空体積  $V$  について

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\nabla\psi)^2 - (m\psi)^2$$

$$S = \int_V d^4x \mathcal{L}$$

とする。この時、境界  $S$  を固定して作用の変化量をとると

$$\delta S = \int_V d^4x [-(\square + m^2)\psi] \delta\psi + \oint_{\partial V} d\sigma^\mu (\nabla\psi) \delta\psi$$

となり、第2項は面積分になる。したがって  $\partial V$  上で  $\delta\psi = 0$  となるように選べば  $\delta S = 0$  の要請から次のクライン・ゴールドンの方程式が得られる。

$$(\square + m^2)\psi = 0$$

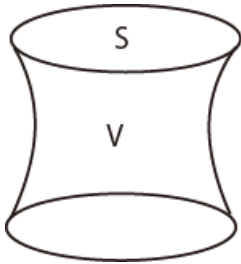


図 8.3: 積分空間

作用  $S$  が場  $\psi(x)$  の汎関数であるとはベクトル合成の関数版のように表すことができる場合をいう。

$$\psi(x) = \sum_n c_n f_n(x)$$

ただし、 $f_n(x)$  は完全系の条件

$$\sum_n f_n(x) f_n^*(x') = \delta(x - x')$$

が満たされているとする。つまり、作用  $S$  は場  $\psi(x)$  の特定の形に依存する。

この時  $\psi(x)$  の変分は

$$\psi(x) + \delta\psi(x) = \sum_n (c_n + \delta c_n) f_n(x)$$



$$\delta\psi(x) = \sum \delta c_n f_n$$

のように係数  $c_n$  の変化に依存する。一般的な汎関数を含む関数を

$$I[\psi] = \int_V d^4x \rho(\psi, \partial\psi, \dots)$$

とおく、この時、 $V$  の境界  $\partial V$  上で  $\delta\psi = 0$  とすれば部分積分が可能になる。この時、

$$\begin{aligned} \delta I[\psi] &= \int_V d^4x \frac{\delta I}{\delta\psi(x)} \delta\psi(x) \\ &= \int_V d^4x \sigma(x) \delta\psi(x) \end{aligned} \quad (8.15)$$

とおくと  $\sigma(x)$  が  $\delta\phi(x)$  の係数になる。これは後に有用になる。例えば

$$\frac{\delta\psi(x)}{\delta\psi(y)} = \delta^4(x-y)$$

であることを利用し

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta\psi(x)} \int_V d^4y \psi^2(y) &= 2\psi(x) \\ \frac{\delta}{\delta\psi(x)} \int_V d^4x (\partial\psi(x))^2 &= 2 \int_V d^4x (\partial_\mu \partial^\mu) = 2(-\square\psi(x)) \end{aligned}$$

となるので

$$\frac{\delta S}{\delta\psi(x)} = -(\square + m^2)\psi(x)$$

ただし、ここでの  $V$  は時空体積であったからこれから実数  $\mathbb{R}$  への写像を定義しておく必要がある。つまり、汎関数微分を考える場合には次のように有限である条件をつける必要がある。

$$\int_V d^4x \psi^2 < \infty, \int_V d^4x (\partial\psi)^2 < \infty$$

## 8.4 ソース関数 [21]

$J$  を  $c$  数として時間推進の演算子を次のように定義する。

$$H^J(t) \equiv H(P, Q) + QJ(t) \quad (8.16)$$

また真空状態を

$$H|0\rangle = E_0|0\rangle \quad (8.17)$$

とすると次を生成母関数という

$$Z^J(t_f, t_i) \equiv \langle 0 | U^J(t_f, t_i) | 0 \rangle \quad (8.18)$$

これを  $J(t)$  を汎関数微分することを考える。

まず、

$$\Delta t = (t_f - t_i)/N \equiv T/N \quad (8.19)$$

$$J_j = J(t_j) \quad (8.20)$$

とすると

$$Z^J(t_f, t_i) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \langle 0 | \left( I - \frac{i}{\hbar} \Delta t (H + J_N Q) \right) \left( I - \frac{i}{\hbar} \Delta t (H + J_{N-1} Q) \right) \cdots \left( I - \frac{i}{\hbar} \Delta t (H + J_1 Q) \right) | 0 \rangle \quad (8.21)$$

と展開できるので  $t_j > t_k$  として次の微分を実行すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Z^J(t_f, t_i)}{\partial J_j \partial J_k} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \langle 0 | \left( I - \frac{i}{\hbar} \Delta t (H + J_N Q) \right) \cdots \\ &\times \left( I - \frac{i}{\hbar} \Delta t (H + J_{j+1} Q) \right) \left( -\frac{i}{\hbar} \Delta t Q \right) \left( I - \frac{i}{\hbar} \Delta t (H + J_{j-1} Q) \right) \\ &\times \cdots \\ &\times \left( I - \frac{i}{\hbar} \Delta t (H + J_{k+1} Q) \right) \left( -\frac{i}{\hbar} \Delta t Q \right) \left( I - \frac{i}{\hbar} \Delta t (H + J_{k-1} Q) \right) \\ &\times \cdots \left( I - \frac{i}{\hbar} \Delta t (H + J_1 Q) \right) | 0 \rangle \end{aligned}$$

ここで  $J \rightarrow 0$  をとると添え字から  $N - (j+1) + 1$ ,  $j - 1 - (k+1) + 1$ ,  $k - 1 - 1 + 1$  間について指数関数の定義

$$U(t, t_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( I - \frac{i}{\hbar} \frac{(t - t_0)}{N} H \right)^N = \text{Exp} \left[ -\frac{i}{\hbar} (t - t_0) H \right] \quad (8.22)$$

を用いて

$$\frac{\partial^2 Z^J(t_f, t_i)}{\partial J_j \partial J_k} \Big|_{j=0} = - \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{\Delta t}{\hbar} \right)^2 \langle 0 | e^{-i\Delta t(N-j)H/\hbar} Q e^{-i\Delta t(j-k-1)H/\hbar} Q e^{-i\Delta t(k-1)H/\hbar} | 0 \rangle \quad (8.23)$$

さらに次のようにおくと

$$\Delta t = t_k - t_{k-1}$$

$$t_j \equiv j \Delta t$$

$$t_{j'} \equiv (k+1) \Delta t = t_{k+1}$$

ハイゼンベルグの演算子から演算子の時間推進が<sup>s</sup>

$$Q(t_k) = e^{iHk\Delta t/\hbar} Q e^{-iHk\Delta t/\hbar} \quad (8.24)$$

となるから 8.23 は

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Z^J(t_f, t_i)}{\partial J_j \partial J_k} \Big|_{j=0} &= - \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{\Delta t}{\hbar} \right)^2 \langle 0 | e^{-i\Delta t N H/\hbar} e^{j\Delta t/\hbar} Q e^{-iHj\Delta t/\hbar} e^{iH(k+1)\Delta t/\hbar} Q e^{-iH(k+1)\Delta t/\hbar} e^{2i\Delta t H/\hbar} | 0 \rangle \\ &= - \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{\Delta t}{\hbar} \right)^2 \langle 0 | e^{-i\Delta t N E/\hbar} Q(t_j) Q(t_{k+1}) e^{2i\Delta t E/\hbar} | 0 \rangle \\ &= - \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{\Delta t}{\hbar} \right)^2 \langle 0 | e^{-i\Delta t(N-2)E/\hbar} Q(t_j) Q(t_{k+1}) | 0 \rangle \end{aligned}$$

ここで

$$Z^{J=0} = \lim_{N \rightarrow \infty} e^{-i\Delta t(N-2)E/\hbar} = e^{-iTE_0/\hbar}$$

とおけば

$$\frac{(i\hbar)^2}{Z^J(t_f, t_i)} \frac{\delta^2 Z^J(t_f, t_i)}{\delta J_j \delta J_{j'}} \Big|_{J=0} = \langle 0 | Q(t_j) Q(t_{j'}) | 0 \rangle$$

となる。

これにより一般的な汎関数微分として振幅が求まった。この  $J(t)$  をソース関数 (source function) という。汎関数微分は

$$\Delta t \ll 1, t_n = n\Delta t (n = 1, 2, \dots), J(n\Delta t) = J_n$$

として

$$\frac{\delta}{\delta J(t)} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\partial}{\Delta t \partial J_n}$$

で表すことができる。これから順序積  $T$  を用いて  $\mathbf{n}$  点関数が求まる。

$$\frac{(i\hbar)^n}{Z^J(t_f, t_i)} \frac{\delta^n Z^J(t_f, t_i)}{\delta J(t_1) \cdots \delta J(t_n)} \Big|_{J=0} = \langle 0 | T Q(t_1) \cdots Q(t_n) | 0 \rangle \quad (8.25)$$

後はフーリエ変換を利用し、エネルギー固有値や期待値が得られる。従って生成母関数を求めることが重要になる

## 8.5 母関数の例

第4部での古典的なハミルトンの関係から正準関係が次のように導けた。

$$dH = \dot{q}^i dp_i - \dot{p}_i dq^i$$

$$\begin{aligned} \dot{q}^i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}^i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{aligned}$$

これから一般的に母関数  $G$  を用いて正準変換を表すと

$$\delta\psi_r(\mathbf{x}) = \frac{\delta G}{\delta\pi_r(\mathbf{x})}, \quad \delta\pi_r(\mathbf{x}) = -\frac{\delta G}{\delta\psi_r(\mathbf{x})} \quad (8.26)$$

となり、正準変換のもとで、関数の変化は先の結果 1.36 から

$$\begin{aligned} \delta F &= a^I \partial_I F = (\Omega^{-1})^{IJ} \partial_J G \partial_I F \\ &= \{F, G\} \end{aligned}$$

となった。以下でいくつかの例を見ておこう。

- $\psi_r(\mathbf{x})$  の変化

変換  $\psi_r \rightarrow \psi_r + a_r(\mathbf{x}), \pi_r \rightarrow \pi_r$  の母関数は

$$G = \int_V d^3\mathbf{x} a_r(\mathbf{x}) \pi_r(\mathbf{x})$$

とすれば式 8.26 より

$$\begin{aligned} \{\psi, G\} &= \int d^3\mathbf{x} \left( \frac{\delta\psi}{\delta\psi_r(\mathbf{x})} \frac{\delta G}{\delta\pi_r(\mathbf{x}')} - \frac{\delta\psi}{\delta\pi_r(\mathbf{x}')} \frac{\delta G}{\delta\psi_r(\mathbf{x})} \right) \\ &= \delta\psi_r(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

- $\pi_r(\mathbf{x})$  の変化

変換  $\pi_r \rightarrow \pi_r + a_r(\mathbf{x}), \psi \rightarrow \psi_r$  の母関数は

$$G = - \int_V d^3\mathbf{x} a_r(\mathbf{x}) \psi_r(\mathbf{x})$$

とすれば式 8.26 より

$$\begin{aligned} \{\pi, G\} &= - \int d^3\mathbf{x} \left( \frac{\delta\pi}{\delta\psi_r(\mathbf{x})} \frac{\delta G}{\delta\pi_r(\mathbf{x}')} - \frac{\delta\pi}{\delta\pi_r(\mathbf{x}')} \frac{\delta G}{\delta\psi_r(\mathbf{x})} \right) \\ &= \delta a_r(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

- 空間並進

変換  $x^i \rightarrow x^i + a^i$  の母関数は  $a$  が定数だから

$$\delta\psi_r = a^i \partial_i \psi_r, \delta\pi_r = a \partial_i \pi_r$$

$$G = \int_V d^3\mathbf{x} a^i \partial_i \psi_r \pi_r = a^i P_i$$

とすれば式 8.26 より

$$\begin{aligned} \{x^i, G\} &= a^i \int_V d^3\mathbf{x} \left( \frac{\delta x^i}{\delta\varphi_r(\mathbf{x})} \frac{\delta P_I}{a^i \partial_i \pi_r} - \frac{\delta x^i}{\delta\pi_r(\mathbf{x})} \frac{\delta P_I}{a^i \partial_i \varphi_r} \right) \\ &= a^i \int_V d^3\mathbf{x} \left( \frac{\delta x^i}{\delta\varphi_r(\mathbf{x})} \delta\varphi_r + \frac{\delta x^i}{\delta\pi_r(\mathbf{x})} \delta\pi_r \right) \\ &= a^i \end{aligned}$$

- 時間並進

変換  $x^0 \rightarrow x^0 + a^0$  の母関数はハミルトニアン  $H(\psi, \pi)$  そのものだから

$$\partial_0 \psi_r = \frac{\delta H}{\delta\pi_r}, \partial_0 \pi_r = -\frac{\delta H}{\delta\psi_r}$$

$$G = H$$

とすれば式 8.26 より

$$\begin{aligned} \{x^0, G\} &= \int d^3\mathbf{x} \left( \frac{\delta x^0}{\delta\psi_r(\mathbf{x})} \frac{\delta H}{\delta\pi_r(\mathbf{x}')} - \frac{\delta x^0}{\delta\pi_r(\mathbf{x}')} \frac{\delta H}{\delta\psi_r(\mathbf{x})} \right) \\ &= \int d^3\mathbf{x} \left( \frac{\delta x^0}{\delta\psi_r} \partial_0 \psi_r + \frac{\delta x^0}{\delta\pi_r} \partial_0 \pi_r \right) \\ &= \delta x^0 \end{aligned}$$

- ローレンツ変換

変換  $x^\mu \rightarrow \Lambda^\mu_\nu x^\nu$  の母関数は

$$M_{\mu\nu} = \int_V d^3x (x_\mu T_{\nu 0} - x_\nu T_{\mu 0})$$

ただしここではスピンなどが付加しない場合を考え、エネルギー-運動量テンソルを次のようにおく。

$$T_\nu^\mu = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} \partial_\nu \psi + \mathcal{L} \delta_\nu^\mu$$

式 8.26 より

$$\{x^\mu, M_{\mu\nu}\} = \int d^3\mathbf{x} \left( \frac{\delta x^\mu}{\delta \psi_r(\mathbf{x})} \frac{\delta M_{\mu\nu}}{\delta \pi_r(\mathbf{x}')} - \frac{\delta x^\mu}{\delta \pi_r(\mathbf{x}')} \frac{\delta M_{\mu\nu}}{\delta \psi_r(\mathbf{x})} \right)$$

時間を次のように置き換える

$$t \rightarrow -it$$

この時、時間推進の演算子を

$$\tilde{U}^j(t_f, t_i) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \left( I - \frac{\Delta t}{\hbar} (H + J_N Q) \right) \left( I - \frac{\Delta t}{\hbar} (H + J_{N-1} Q) \right) \cdots \left( I - \frac{\Delta t}{\hbar} (H + J_1 Q) \right)$$

ただし、

$$J_j \equiv \tilde{J}(t_j) \equiv J(it_j)$$

- ユークリッド生成母関数

ソース関数が図のように

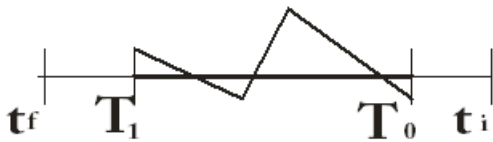


図 8.4: 直線的な変化をする場合

$$J(t) \neq 0; |T_1| \geq |t| \geq |T_0|$$

$$J(t) = 0; |T_1| < |t|, |t| < |T_0|$$

の時次をユークリッド生成関数という。

$$\bar{Z}^J(t_f, t_i) \equiv \text{Tr} \tilde{U}^j(t_f, t_i)$$

## 8.6 N 点関数

ファインマン伝搬関数を後節で詳しく述べるが、ここでは  $T$  順序積を用いた

$$\langle 0 | T \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle$$

のようにかけく。これはさらに  $N$  点グリーン関数に拡張できる。

$$G(x_1, x_2, \dots, x_N) = \langle 0 | T \phi(x_1) \phi(x_2) \cdots \phi(x_N) | 0 \rangle \quad (8.27)$$

これは座標と、粒子に対応するので例えば 4 点関数の場合

$$x_1^0, x_2^0, x_3^0 \rightarrow \infty$$

$$x_4^0 \rightarrow -\infty$$

の極限を考えると、遠い過去に 1 粒子、遠い未来に 3 粒子に変化する粒子の崩壊過程と考えることができる。他にも 2 粒子から 2 粒子への崩壊過程も考えられる。座標を 4 元化することで粒子数の変化も含めることができたわけだ。

全ての場合の  $N$  点関数は次のように生成汎関数  $Z[J]$  表すことができる。

$$Z[J] = \sum_N \frac{1}{N!} \int d^4x_1 d^4x_2 \cdots d^4x_N G(x_1, x_2, \cdots, x_N) J(x_1) J(x_2) \cdots J(x_N) \quad (8.28)$$

とおける。

ただし、各点にかけられた引数としてふるまう関数  $J(x)$  を導入した。これはソース関数とよばれる。

詳しくは後の経路積分であつかう。これは式 8.15 で見たように

全ての  $N$  点関数を網羅するために  $N$  点関数が  $J$  で展開した場合の展開係数になるようにつくる。

この時、 $G$  は汎関数を用いて

$$G(x_1, x_2, \cdots, x_N) = \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \cdots \frac{\delta}{\delta J(x_1)} Z[J]|_{J=0} \quad (8.29)$$

とすることができる。さらに指数関数の定義から式 8.27 を用いて

$$Z[J] = \langle 0 | T \left[ \exp \left( \int J \phi \right) \right] | 0 \rangle$$

とかける。 $J(x)$  で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} &= \sum_N \frac{1}{N!} \int J(y_1) J(y_2) \cdots J(y_N) \langle 0 | T \phi(x_1) \phi(x_2) \cdots \phi(x_N) | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | T \phi(x) e^{\int J \phi} | 0 \rangle \end{aligned} \quad (8.30)$$

である。これに、ダランベリアンを作用させる。空間微分については時間順序積に無関係とすると  $t_i, t'_i$  をそれぞれ  $M$  等分して

最後に  $M \rightarrow \infty$  の極限をとる。 $t_0 = x^0$  として

$$\begin{aligned} \langle 0 | T \phi(x) e^{\int J \phi} | 0 \rangle &= \langle 0 | \exp \left[ \int_{t_{M-1}}^{t_M} dy^0 d^3y J \phi \right] \exp \left[ \int_{t_{M-2}}^{t_{M-1}} dy^0 d^3y J \phi \right] \cdots \exp \left[ \int_{t_0}^{t_1} dy^0 d^3y J \phi \right] \\ &\quad \times \exp \left[ \int_{t'_1}^{t'_0} dy^0 d^3y J \phi \right] \exp \left[ \int_{t'_2}^{t'_1} dy^0 d^3y J \phi \right] \cdots \exp \left[ \int_{t'_M}^{t'_{M-1}} dy^0 d^3y J \phi \right] | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | T \exp \left[ \int_{t_0}^{\infty} dy^0 d^3y J \phi \right] \phi(x) T \exp \left[ \int_{-\infty}^{t_0} dy^0 d^3y J \phi \right] | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | P(\infty, t_0) \phi(x) P(t_0, -\infty) | 0 \rangle \end{aligned} \quad (8.31)$$

となる。ただし、経路  $P$  を 2 端点の関数として

$$P(z^0, y^0) \equiv T \exp \left( \int_{y^0}^{z^0} d^4x J(x) \phi(x) \right)$$

と定義した。これは次の関係を満たす。

$$\frac{\partial}{\partial z^0} P(z^0, y^0) = \int d^3x J(z^0, \mathbf{x}) \phi(z^0, \mathbf{x}) P(z^0, y^0)$$

$$\frac{\partial}{\partial y^0} P(z^0, y^0) = -P(z^0, y^0) \int d^3x J(y^0, \mathbf{x}) \phi(y^0, \mathbf{x})$$

を満たす。かたや式 7.41 を時間微分すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^0} \langle 0 | T \phi(x) e^{J\phi} | 0 \rangle &= \langle 0 | P(\infty, x^0) \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^0} P(x^0, -\infty) | 0 \rangle \\ &+ \int d^3 y J(x^0, \mathbf{y}) \langle 0 | P(\infty, x^0) [\phi(x^0, \mathbf{y}) \phi(x^0, \mathbf{x})] P(x^0, -\infty) | 0 \rangle \end{aligned}$$

余分した項は次のように同時刻の交換子になる。

$$[\phi(x^0, \mathbf{y}) \phi(x^0, \mathbf{x})] = \phi(x) \phi(x^0, \mathbf{y}) - \phi(x^0, \mathbf{y}) \phi(x)$$

よってこの項を 0 とすれば第 1 項のみが残り、

$$\frac{\partial}{\partial x^0} \langle 0 | T \phi(x) e^{J\phi} | 0 \rangle = \langle 0 | P(\infty, x^0) \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^0} P(x^0, -\infty) | 0 \rangle$$

となる。同様に 2 階の時間微分も

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{(\partial x^0)^2} \langle 0 | T \phi(x) e^{J\phi} | 0 \rangle &= \langle 0 | P(\infty, x^0) \frac{\partial^2 \phi(x)}{(\partial x^0)^2} P(x^0, -\infty) | 0 \rangle \\ &+ \int d^3 y J(x^0, \mathbf{y}) \langle 0 | P(\infty, x^0) [\dot{\phi}(x^0, \mathbf{x}), \phi(x^0, \mathbf{y})] P(x^0, -\infty) | 0 \rangle \end{aligned}$$

となる。今度の第 2 項は、微分項を含んだ交換子となるがここでは  $c = 1$  としているので

$$\frac{\partial \phi(x)}{\partial t} = -i\phi(x)$$

より、

$$[\dot{\phi}(x^0, \mathbf{x}), \phi(x^0, \mathbf{y})] = -i\delta^{(3)}(x - y)$$

である。よって

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{(\partial x^0)^2} \langle 0 | T \phi(x) e^{J\phi} | 0 \rangle &= \langle 0 | P(\infty, x^0) \frac{\partial^2 \phi(x)}{(\partial x^0)^2} P(x^0, -\infty) | 0 \rangle - iJ \langle 0 | T e^{J\phi} | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | \left[ T \frac{\partial^2 \phi(x)}{(\partial x^0)^2} \right] | 0 \rangle - iJ(x) Z[J] \end{aligned}$$

となる。従って、

$$(\square_x + m^2) \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} = \langle 0 | T [(\square_x + m^2) \phi(x) e^{J\phi}] | 0 \rangle - iJ(x) Z[J] \quad (8.32)$$

となる。第 1 項についてはクライン・ゴールドンの方程式が成り立てば 0 にできる。よって

$$(\square_x + m^2) \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} = -iJ(x) Z[J] \quad (8.33)$$

が得られる。この方程式が生成汎関数の運動を記述する。N 点グリーン関数を得るためにはこの式を解けばよい。

グリーン関数の性質から規格化定数を  $N$  として一般解は

$$Z[J] = N \exp \left[ \frac{1}{2} \int d^4 x d^4 y J(x) G(x, y) J(y) \right] \quad (8.34)$$

となる。

また、定義から

$$Z[J] = \langle 0 | T \phi(x) e^{J \int d^4 x J \phi} | 0 \rangle \quad (8.35)$$

であったので

$$Z[0] = 1$$

となることから

$$N = 1$$

である。式 8.34 が式 8.33 を満たすことは

$$(\square_x + m^2) G(x, y) = -i\delta^{(4)}(x - y) \quad (8.36)$$

を利用すると

$$(\square_x + m^2) \frac{\delta}{\delta J(x)} \left( \exp \left[ \frac{1}{2} \int d^4x d^4y J(x) G(x, y) J(y) \right] \right) = -iJ(x) \exp \left[ \frac{1}{2} \int d^4x d^4y J(x) G(x, y) J(y) \right]$$

であることがわかる。式 8.28 を  $J$  で 2 次の場合は

$$Z[J] = \exp \left[ \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \langle 0 | G(x, y) J(x) J(y) | 0 \rangle \right]$$

$$G(x, y) = \langle 0 | T \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle$$

となり、これはファインマンの伝播関数である。  $N$  点関数に拡大すると 2 端点であった経路の和は積として

$$G(x_1, \dots, x_N) = G(x_1, \dots, x_{2n}) = \sum_p G(x_{i_1}, x_{i_2}) G(x_{i_3}, x_{i_4}) \cdots G(x_{i_{2n-1}}, x_{i_{2n}})$$

で表される。これは 2 点間の連続回転と対応する。ただし、この  $P$  和は座標  $x_1, x_2, \dots, x_{2n}$  の全ての組み合わせでとる必要がある。

## 8.7 Wick の定理

場の相関関数は場  $\phi$  で構成される演算子  $A_1(x_1), \dots, A_N(x_N)$  の相関として次のように表す。真空の状態  $|0\rangle$  を考えて

$$\langle 0 | T (A_1(x_1) \cdots A_N(x_N)) | 0 \rangle = \frac{1}{Z} \int D\phi A_1(x_1) \cdots A_N(x_N) e^{iS[\phi]} \quad (8.37)$$

ただし、 $T$  は時間順序積で、 $Z$  は分配関数で

$$Z = \int D\phi e^{iS[\phi]}$$

となる。この書式は古典的に  $A_1(x_1) \cdots A_N(x_N)$  の期待値であり、経路積分を表している。

つまり経路積分とは各点の相関関数を意味し、それは局所演算子の期待値を表している。

ただし、時空の各点の相関は時間順序でソートしないとイケない。

ここで場  $\phi(x)$  の  $N$  点相関関数を

$$\langle 0 | T (\phi(x_1) \cdots \phi(x_N)) | 0 \rangle = \frac{1}{Z} \int D\phi \phi(x_1) \cdots \phi(x_N) e^{iS[\phi]} \quad (8.38)$$

とする。これは次のようにソース項付きの分配関数

$$Z[J] = \int D\phi e^{iS[\phi] + i \int d^4x J(x) \phi(x)} \quad (8.39)$$

この時、ソース  $J(x)$  に関して汎関数微分を作用させれば

$$\langle 0 | T (A_1(x_1) \cdots A_N(x_N)) | 0 \rangle = \frac{1}{Z} \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \cdots \frac{\delta}{\delta J(x_N)} Z[J] |_{J=0} \quad (8.40)$$



とすることができる。前節の経路積分と同様に質量  $m$  の自由スカラー粒子の場合、

$$S[\psi] = \frac{1}{2} \int d^d x \{ \partial_\mu \psi \partial^\mu \psi - m^2 \psi^2 \}$$

となる。この粒子は Klein-Gordon 演算子  $\partial^2 + m^2$  を用いて

$$(\partial^2 + m^2) \phi = 0$$

を満たす。従ってこの演算子の Green 関数として  $D_F$  を定義すれば  $d$  次元デルタ関数を用いて

$$(\partial^2 + m^2) D_F = -i\delta^d(x-y) \quad (8.41)$$

を満たす。第 1 部の Green 関数の内容から自由粒子は連続な固有スペクトルを持った規格化された平面波として記述され、

1次元の場合は

$$\langle x|k \rangle = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{ikx}$$

従って波数空間の Green 演算子は連続スペクトルを持つ時

$$G = \int \frac{|k' \rangle \langle k'|}{k^2 - k'^2} dk'$$

となるので Green 関数は

$$\begin{aligned} G(x, x', k) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\langle x|k' \rangle \langle k'|x' \rangle}{k^2 - k'^2} dk' \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(x-x')k'}}{k^2 - k'^2} dk' \end{aligned}$$

これを求める方法は複素  $k$  空間を考え、次のように実軸から微小ずれたところに極をとる。

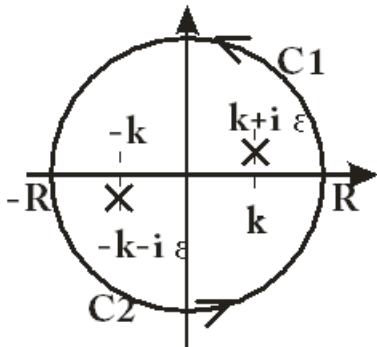


図 8.5: 複素  $k$  空間での極をずらしての積分

$$\begin{aligned} G(x, x', k) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} G(x, x'; \pm(k + i\epsilon)) \\ G(x, x'; \pm(k + i\epsilon)) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(x-x')k'}}{(k' + k + i\epsilon)(k' - k - i\epsilon)} dk' \end{aligned} \quad (8.42)$$

ここで次の留数定理が使える。

$$\oint f(z) dz = 2\pi i \sum_{i=1}^n \text{Res}(a_i)$$

そこで極の土に対応して

$$G^+(x, x', k) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} G(x, x'; (k + i\epsilon))$$

$$G^-(x, x', k) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} G(x, x'; -(k + i\epsilon))$$

とおく。

$x > x'$  の時は上図の上半面の経路  $C_1$  を考えると + 極 1 つを含むのでこの積分は

$$f^+(k') = \frac{e^{i(x-x')k'}}{(k' + k + i\epsilon)(k' - k - i\epsilon)}$$

とおいて

$$\begin{aligned} F^+ &= \int_{C_1} f^+(k') dk' \\ &= \int_{-R}^{+R} f^+(k') dk' + \int_{C_1} f^+(k') dk' \end{aligned}$$

とすると  $x > x'$  だから第 2 項は指数が負の実になり指数関数的に 0 となる。よって第 1 項のみを留数積分すればいい。

$$\begin{aligned} F^+ &= 2\pi i \left[ \frac{(k' - k - i\epsilon)e^{i(x-x')k'}}{(k' + k + i\epsilon)(k' - k - i\epsilon)} \right]_{k'=k+i\epsilon} \\ &= \pi i \frac{e^{i(x-x')(k+i\epsilon)}}{k + i\epsilon} \end{aligned}$$

従って

$$G^+(x, x'; (k + i\epsilon)) = -\frac{i}{2} \frac{e^{i(x-x')(k+i\epsilon)}}{k + i\epsilon}$$

となる。したがって下半面も同様にして

$$G^-(x, x'; -(k + i\epsilon)) = -\frac{i}{2} \frac{e^{-i(x-x')(k+i\epsilon)}}{k + i\epsilon}$$

を得る。よって極限  $\epsilon \rightarrow 0$  をとると

$$G^\pm = -\frac{i}{2k} e^{\pm ik(x-x')}$$

が得られる。これから

$$D_F = -iG^-$$

とおけば後節であつかう **Feynman 伝播関数** が次のように得られる。

$$D_F(x-y) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (8.43)$$

これから変数変換

$$\psi(x) = \psi'(x) - i \int d^d y D_F(x-y) J(y)$$

を行うと分配関数は

$$Z[J] = N' \exp\left(-\frac{1}{2} \int d^d x d^d y J(x) D_F(x-y) J(y)\right)$$

とかける。これは  $N' = \text{odd}$  の場合、式 8.37 式から

$$\langle 0|T(\psi(x_1) \cdots \psi(x_N))|0\rangle = 0 \quad (8.44)$$

であり  $N' = \text{even}$  の場合、

$$\langle 0|T(\psi(x_1)\cdots\psi(x_N))|0\rangle = \sum D_F(x_{i_1} - x_{i_2})\cdots D_F(x_{i_{N-1}} - x_{i_N})$$

となるが、ここでの和は  $\{1, \dots, N\}$  からの対  $(i_1, i_2), \dots, (i_{N-1}, i_N)$  を取る全ての組についての和になる。特に  $N = 2$  の場合は

$$\langle 0|T(\psi(x_1)\psi(x_N))|0\rangle = \sum D_F(x_1 - x_2) \quad (8.45)$$

となる。つまり自由粒子の  $N$  点関数は 2 点関数の積になる。これを **Wick の定理** という。重要な内容をもつので後節で詳しくあつかう。

## 8.8 有限広がり場 [93]

量子論では非可換な代数がよく現れる。第 9 部で扱うエンタングルドな状態でスケール変換との関係を議論する。

ここでは Heisenberg の表示の演算子に対する運動方程式をみることで次節の経路積分で詳しく扱うプロパゲータについて考察する。

最近ではプロパゲーターの虚部が光電子分光スペクトルとして測定可能になり、実験結果がいくつかレポートされている。

はじめに複数個の成分を持つ場の演算子  $\Psi_i$  を用意する。

添え字  $i$  は主に局所場を表すが、やや広がった領域まで拡張できるとする。また、完全性についても近似的に考えることも可とする。

目的の物理量は  $\Psi_i$  の 1 粒子グリーン関数行列で第 1 部で扱ったように

$$S_{ij}(t-t') = \langle R\Psi_i(t)\Psi_j^\dagger(t') \rangle$$

とする。ただしここでの  $\langle \rangle$  は絶対零度では真空期待値、有限温度では統計平均を表す。

添字  $ij$  で場  $\Psi$  を定義する分割された場を表すとし、 $S$  は場の成分数を次元に持つ行列である。

第 1 部 7 章の Green 関数の定義から

$$i\frac{\partial}{\partial t}G(t,t') = \delta(t-t') \quad (8.46)$$

であるが、この時の場の運動方程式を

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi_i = J_i(t) \quad (8.47)$$

とおくと、ここでは広がりを持った量子場を考えるので

$$i\frac{\partial}{\partial t}S_{ij}(t-t') = \delta(t-t')I_{ij} + \langle RJ_i(t)\Psi_j^\dagger(t') \rangle \quad (8.48)$$

と書けることが次のように導ける。

ただし、 $\langle \rangle$  は統計的平均であることに留意し、半交換子

$$\{\Psi_i, \Psi_j^\dagger\} = \Psi_i\Psi_j^\dagger + \Psi_j^\dagger\Psi_i$$

を用いてスペクトルの重み関数を

$$I_{ij} = \langle \{\Psi_i, \Psi_j^\dagger\} \rangle$$

で定義しておく、式 8.47 から

$$\begin{aligned}
i \frac{\partial}{\partial t} \langle R\Psi_i(t)\Psi_j^\dagger(t') \rangle &= i \left( R\Psi_i(t) \frac{\partial}{\partial t} \Psi_j^\dagger(t') + R\Psi_j^\dagger(t) \frac{\partial}{\partial t} \Psi_i(t') \right) + \langle \Psi_j^\dagger(t') R i \frac{\partial}{\partial t} \Psi_i(t) \rangle \\
&= i \frac{R}{\delta t} \left( \Psi_i(t)\Psi_j^\dagger(t) + \Psi_j^\dagger(t)\Psi_i(t) \right) + \langle \Psi_j^\dagger(t') R i \frac{\partial}{\partial t} \Psi_i(t) \rangle \\
&= \delta(t-t') I_{ij} + \langle R\Psi_j^\dagger(t') J_i(t) \rangle \\
&= \delta(t-t') I_{ij} + \langle R J_i(t) \Psi_j^\dagger(t') \rangle
\end{aligned} \tag{8.49}$$

となり、虚成分からスペクトルの重みが得られる。

この式を変形して

$$\langle R J_i(t) \Psi_j^\dagger(t') \rangle \equiv \Sigma \left( i \frac{\partial}{\partial t}, -i\nabla \right) \langle R\Psi_i(t)\Psi_j^\dagger(t') \rangle \tag{8.50}$$

とかけたとする。すると Green 関数のフーリエ変換から式 8.48 の時間微分を次のように変換する。

$$S(\omega, \mathbf{k}) = \{\omega - \Sigma(\omega, \mathbf{k})\}^{-1} I(\mathbf{k})$$

さらに自己エネルギー行列として

$$M_{ij} \equiv \langle \{ J_i, \Psi_j^\dagger \} \rangle$$

$$\delta(t-t') M_{ij} \equiv \Sigma \left( i \frac{\partial}{\partial t}, -i\nabla \right) \delta(t-t') I_{ij}$$

を定義しておいて、式 8.50 を  $t'$  で微分すると式 8.49 の変形を利用して

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t'} \langle R J_i(t) \Psi_j^\dagger(t') \rangle &= \delta(t-t') \frac{\partial}{\partial t} I_{ij} + \langle R J_i(t) \frac{\partial}{\partial t'} \Psi_j^\dagger(t') \rangle \\
&= \delta(t-t') M_{ij} + \langle R J_i(t) J_j^\dagger(t') \rangle \\
&= \Sigma \left( i \frac{\partial}{\partial t}, -i\nabla \right) \left\{ \delta(t-t') I_{ij} + \langle R\Psi_i(t) J_j^\dagger(t') \rangle \right\}
\end{aligned}$$

ここで自己エネルギー行列の動的補正項は

$$\begin{aligned}
\delta M_{ij}(t-t') &= \langle R J_i(t) J_j^\dagger(t') \rangle_I \\
&= \langle R J_i(t) J_j^\dagger(t') \rangle - \Sigma \left( i \frac{\partial}{\partial t}, -i\nabla \right) \langle R\Psi_i(t) J_j^\dagger(t') \rangle
\end{aligned}$$

となり、既約ではない部分が現れる。よって Green 関数は次のように求まる。

$$S(\omega, \mathbf{k}) = \{\omega - \Sigma(\omega, \mathbf{k})\}^{-1} I(\mathbf{k}) = I(\mathbf{k}) \frac{1}{\omega I(\mathbf{k}) - M(\mathbf{k}) - \delta M(\omega, \mathbf{k})} I(\mathbf{k}) \tag{8.51}$$

となる。

## 8.9 1 粒子 Green 関数

ここでは熱統計力学の力を借りて、量子論との関係を考察していく。

**1 粒子 Green 関数**を半導体を作るときのように多粒子系の平衡状態に一つ粒子を加えるか、粒子をとることによってその場が乱され、その乱れの伝播がどうなるかを表したものと考えることができる。

つまり、多粒子系において、Green 関数とは演算子  $\psi(\mathbf{r}_1, t_1)$  と  $\psi^\dagger(\mathbf{r}_2, t_2)$  の熱力学的な平均として、時間順序積  $T$  用いて次で定義する。

$$G(\mathbf{r}_1, t_1; \mathbf{r}_2, t_2) \equiv \frac{1}{i} \langle T [\psi(\mathbf{r}_1, t_1) \psi^\dagger(\mathbf{r}_2, t_2)] \rangle \tag{8.52}$$

ここでは簡単に 1 粒子系を表すために

$$\mathbf{r}_1, t_1 \rightarrow 1$$

$$\mathbf{r}_2, t_2 \rightarrow 1'$$

と略す、この表記で 1 粒子と 2 粒子 Green 関数は

$$G(1, 1') \equiv \frac{1}{i} \langle T [\psi(1)\psi^\dagger(1')] \rangle \quad (8.53)$$

$$G(1, 2; 1', 2') \equiv \frac{1}{i} \langle T [\psi(1)\psi(2)\psi^\dagger(2')\psi^\dagger(1')] \rangle \quad (8.54)$$

となる。これは次のような規則で Bose 粒子にも Fermi 粒子にも当てはめることができる。

$$T [\psi(1)\psi^\dagger(1')] = \begin{cases} \psi(1)\psi^\dagger(1') & (t_1 > t_{1'}) \\ \pm\psi^\dagger(1')\psi(1) & (t_1 < t_{1'}) \end{cases}$$

ただし、下段の符号 + が Bose 粒子、- が Fermi 粒子である。

この関係は次章の伝播関数の基本になる。つまり、

$t_1 > t_{1'}$  の場合は先に生成演算子が作用して、時空点  $(\mathbf{r}_2, t_2)$  において、粒子を 1 つ生じさせる。

ここから進行波が生じ、時刻  $t_1$  に伝播し、位置  $\mathbf{r}_1$  において粒子が一つ消える。

これは  $t_1 < t_{1'}$  の場合は逆に消滅が先に起きることになる。その後、位置  $\mathbf{r}_2$  において 1 つ粒子が生成される。

前章の粗視化で見たように、過去と未来に特異点となる波源を持つ波があると考えられる。

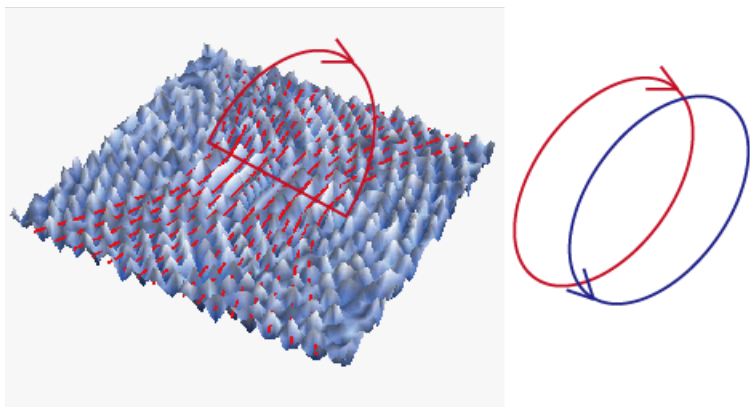


図 8.6: 異なる向きの進行波から定常波ができる

この時、過去と未来に囲まれた領域には進行しない定常波が作られる。

これは式 8.54 のように粒子数が増えたとしても同じように生成と消滅が時間前後でおきる。

### 8.9.1 熱統計的アプローチ

この分配関数は第 6 部の経路積分の Euclid 化で自由粒子の場合に次のような周期  $T$  を置いて

$$T = N\Delta t = t_f - t_i$$

これを境界条件として遷移振幅を外場がない時に

$$\begin{aligned}
\tilde{Z}_T^{J=0}(0) &= \int dq \tilde{K}^{J=0}(q, t_f; q, t_i) \\
&= \int dq_j \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar\Delta t}} dq_j \exp \left[ -\frac{\Delta t}{\hbar} \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{m}{2} \left( \frac{\Delta q_j}{\Delta t} \right)^2 + V(q_j^{(\alpha)}) \right\} \right] \Big|_{q_N=q_f, q_0=q_i} \\
&= \int dq_j dq_j \exp \left[ -\frac{\Delta t}{\hbar} NH \right] \\
&= \text{Tr} e^{-TH/\hbar}
\end{aligned}$$

と書いた。

これは第3部の熱力学で登場した分配関数によく似ている。そこで  $T_{emp}$  を温度として、

$$\frac{T}{\hbar} = \frac{1}{k_B T_{emp}} = \beta$$

と置けば

$$\tilde{Z}_T(0) = e^{-H/k_B T_{emp}}$$

であり分配関数そのものになる。熱力学的な温度が量子論的な時間と関係していることがわかる。

さらに

$$\frac{\hbar}{k_B} = T T_{emp}$$

は明らかに意味のある定数である。

これは単位エントロピー当たりのエネルギー・時間空間の最小単位を表し、温度 × 時間という単位を持つ。最近の物理では時間、エネルギーのスケール変換が重要になっているが、この量がスケールレスとして、筆者は重要な意味を持つと考える。

伝播関数の虚部は光電子分光スペクトルになったから、観測が可能である。

ここではまず単純に1粒子グリーン関数を考える。

この粒子の波動関数を  $\Psi_i$  とし、サイトを表す添え字  $i, j$  をつける。

目的の物理量は  $\Psi_i$  の1粒子グリーン関数行列で式8.52から

$$S_{ij}(t-t') = \langle R\Psi_i(t)\Psi_j^\dagger(t') \rangle$$

とする。ただしここでの  $\langle R\dots \rangle$  は絶対零度では真空期待値、有限温度では統計平均を表す。

添字  $ij$  で場  $\Psi$  を定義する分割された場を表すとし、 $S$  は場の成分数を次元に持つ行列である。

第1部7章のGreen関数の定義から

$$i\frac{\partial}{\partial t}G(t, t') = \delta(t-t') \quad (8.55)$$

であるが、この時の場の運動方程式を

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi_i = J_i(t) \quad (8.56)$$

とおくと、ここでは広がりを持った量子場を考えるので

$$i\frac{\partial}{\partial t}S_{ij}(t-t') = \delta(t-t')I_{ij} + \langle RJ_i(t)\Psi_j^\dagger(t') \rangle \quad (8.57)$$

と書けることが次のように導ける。

ただし、 $\langle \rangle$  は統計的平均であることに留意し、半交換子

$$\{\Psi_i, \Psi_j^\dagger\} = \Psi_i\Psi_j^\dagger + \Psi_j^\dagger\Psi_i$$

を用いてスペクトルの重み行列を

$$I_{ij} = \langle \{\Psi_i, \Psi_j^\dagger\} \rangle$$

で定義しておく、式 8.56 から

$$\begin{aligned}
i \frac{\partial}{\partial t} \langle R\Psi_i(t)\Psi_j^\dagger(t') \rangle &= i \left( R\Psi_i(t) \frac{\partial}{\partial t} \Psi_j^\dagger(t') + R\Psi_j^\dagger(t) \frac{\partial}{\partial t} \Psi_i(t') \right) + \langle \Psi_j^\dagger(t') R i \frac{\partial}{\partial t} \Psi_i(t) \rangle \\
&= i \frac{R}{\delta t} \left( \Psi_i(t)\Psi_j^\dagger(t) + \Psi_j^\dagger(t)\Psi_i(t) \right) + \langle \Psi_j^\dagger(t') R i \frac{\partial}{\partial t} \Psi_i(t) \rangle \\
&= \delta(t-t') I_{ij} + \langle R\Psi_j^\dagger(t') J_i(t) \rangle \\
&= \delta(t-t') I_{ij} + \langle R J_i(t) \Psi_j^\dagger(t') \rangle
\end{aligned} \tag{8.58}$$

となり、虚成分からスペクトルの重みを得られる。

この式を変形して

$$\langle R J_i(t) \Psi_j^\dagger(t') \rangle \equiv \Sigma \left( i \frac{\partial}{\partial t}, -i\nabla \right) \langle R\Psi_i(t)\Psi_j^\dagger(t') \rangle \tag{8.59}$$

とかけたとする。すると Green 関数のフーリエ変換から式 8.57 の時間微分を次のように変換する。

$$S(\omega, \mathbf{k}) = \{\omega - \Sigma(\omega, \mathbf{k})\}^{-1} I(\mathbf{k})$$

さらに自己エネルギー行列として

$$M_{ij} \equiv \langle \{ J_i, \Psi_j^\dagger \} \rangle$$

$$\delta(t-t') M_{ij} \equiv \Sigma \left( i \frac{\partial}{\partial t}, -i\nabla \right) \delta(t-t') I_{ij}$$

を定義しておいて、式 8.59 を  $t'$  で微分すると式 8.58 の変形を利用して

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t'} \langle R J_i(t) \Psi_j^\dagger(t') \rangle &= \delta(t-t') \frac{\partial}{\partial t'} I_{ij} + \langle R J_i(t) \frac{\partial}{\partial t'} \Psi_j^\dagger(t') \rangle \\
&= \delta(t-t') M_{ij} + \langle R J_i(t) J_j^\dagger(t') \rangle \\
&= \Sigma \left( i \frac{\partial}{\partial t}, -i\nabla \right) \left\{ \delta(t-t') I_{ij} + \langle R\Psi_i(t) J_j^\dagger(t') \rangle \right\}
\end{aligned}$$

ここで自己エネルギー行列の動的補正項は

$$\begin{aligned}
\delta M_{ij}(t-t') &= \langle R J_i(t) J_j^\dagger(t') \rangle_I \\
&= \langle R J_i(t) J_j^\dagger(t') \rangle - \Sigma \left( i \frac{\partial}{\partial t}, -i\nabla \right) \langle R\Psi_i(t) J_j^\dagger(t') \rangle
\end{aligned}$$

となり、既約ではない部分が現れる。よって Green 関数は次のように求まる。

$$S(\omega, \mathbf{k}) = \{\omega - \Sigma(\omega, \mathbf{k})\}^{-1} I(\mathbf{k}) = I(\mathbf{k}) \frac{1}{\omega I(\mathbf{k}) - M(\mathbf{k}) - \delta M(\omega, \mathbf{k})} I(\mathbf{k}) \tag{8.60}$$

次に具体例を見る。

## 8.10 グラスマン数

多粒子系のフェルミオンの伝播を考える。フェルミオンは反交換関係を満たし、排他律がある。

これを数学的に表現するのがグラスマン数  $\eta$  である。

これを用いるとディラック方程式が前節のクライン-ゴルドン方程式を導いた処方箋で求めることができる。

グラスマン数は次のベキ零の関係を持つ。

$$\eta^2 = 0$$

これを満たす例は次のような行列である。

$$\eta = p \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8.61)$$

ただし、 $p$  は実数でないといけない。

さらにここでは多数のグラスマン数を考える必要があるので

$$\eta_i \eta_j + \eta_j \eta_i = 0$$

$$\eta(x)\eta(y) + \eta(y)\eta(x) = 0$$

の反交換関係を考える。2乗が0になる性質があるので1つのグラスマン数を変数に持つ関数は

$$f(x, \eta) = f_0(x) + \eta f_1(x)$$

となり、 $N$  個の場合は

$$f(x, \eta) = f_0(x) + \sum_i f_i(x) \eta_i + \frac{1}{2} \sum_{ij} f_{ij}(x) \eta_i \eta_j + \cdots + \frac{1}{N!} \sum_{i_1 i_2 \cdots i_N} f_{i_1 i_2 \cdots i_N}(x) \eta_{i_1} \eta_{i_2} \cdots \eta_{i_N}$$

この関数を  $\eta_i$  で微分する。

$$\frac{\partial f}{\partial \eta_i} = f_i(x) + \sum_{i_2} f_{i i_2} \eta_{i_2} + \cdots + \frac{1}{(N-1)!} \sum_{i_2 \cdots i_N} f_{i i_2 \cdots i_N} \eta_{i_2} \eta_{i_3} \cdots \eta_{i_N}$$

となる。この微分は次の関係を満たす。

$$\frac{\partial}{\partial \eta_i(x)} \frac{\partial}{\partial \eta_j(y)} = - \frac{\partial}{\partial \eta_j(y)} \frac{\partial}{\partial \eta_i(x)}$$

単純でも有用な関係である。

式 7.43 からフェルミオンの伝播関数は式 7.44 を満足するものとして

$$S(x, y) = \langle 0 | T \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle$$

となる。また、第 3 部から古典的な分配関数は

$$Z = \langle e^{-\beta H} \rangle$$

と表すことができた。これから多粒子系のフェルミオン伝播関数は式 8.18 から生成汎関数  $Z[\eta, \bar{\eta}]$  を用いて

$$Z[\eta, \bar{\eta}] = \langle 0 | T \exp \left( \int \bar{\eta} \psi + \bar{\psi} \eta \right) | 0 \rangle$$

となる。フェルミオンの場合は  $\eta, \bar{\eta}$  を考えればよい。

つまり、フェルミオンの  $N$  点関数は式 8.23 から、生成汎関数  $Z[\eta, \bar{\eta}]$  を微分して最後に  $\eta, \bar{\eta} \rightarrow 0$  をすればよい。

この時のソース関数  $\eta, \bar{\eta}$  はスピノルである。

この時、時間順序積を用いて

$$T \bar{\eta}(x) \psi(x) \bar{\psi}(y) \eta(y) = \begin{cases} \bar{\eta}(x) \psi(x) \bar{\psi}(y) \eta(y) & x^0 > y^0 \\ \bar{\psi}(y) \eta(y) \bar{\eta}(x) \psi(x) & y^0 > x^0 \end{cases}$$

となる。これから  $\bar{\eta}(x) \psi(x), \bar{\psi}(y) \eta(y)$  がボソンのように振る舞うことがわかる。

ソース関数が入ることでフェルミオンの時間積に対する負符号が相殺されているのである。詳しくは第 9 章で扱う。



## 9 ディラック場 [28]

### 9.1 スピン

Dirac 方程式はスピンを自然な形で含んでいる。そこでまずスピンについて復習しておく。

前 2 部の角運動量の章でスピン 1/2 の回転を見た。

古典的にはベクトルは向きを持ち、スカラーは 1 次元の値を持つものであった、これを複素空間上での回転としてとらえ、スカラーは実軸上の値に対し、回転角

$$\pi \rightarrow 2\pi$$

に対応した位相空間を考えるとスピンという物理量が現れる。しかし、電流と異なり、スピン流では緩和が起きたりする。

これは簡単には射影がかかっている。例えば空間に軸  $\mathbf{e}$  を決め次のような無限小回転  $R$  を考える。  $I$  を単位行列として

$$R(\theta) = \text{Exp}[i\mathbf{S} \cdot \theta]$$

と表し、無限小回転を

$$R(\theta) = I + i\mathbf{S} \cdot \theta \tag{9.1}$$

と表した時、 $\mathbf{S}$  を場の持つ spin といい  $\mathbf{S}$  により次のように分類できる。

$$\mathbf{S} = \begin{cases} 0 & \text{scalar} \\ \mathbf{T} & \text{vector} \\ \frac{1}{2}\sigma & \text{spinor} \end{cases} \tag{9.2}$$

$\mathbf{T}$  は行列、 $\sigma$  はパウリ行列である。ここでは Spinor の性質を中心にみていく。

まずベクトル場  $A_i(x), B_i(x)$  の変換則をおさらいすると、scalar 積は

$$\mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{B}(x) = A_i(x)B_i(x)$$

となり、vector 積は

$$(\mathbf{A}(x) \times \mathbf{B}(x))_i = \varepsilon_{ijk}A_j(x)B_k(x)$$

のように成分の差の循環が出てくる。また複素空間上ではスカラーをつくる双対なベクトルが定義できるので前部で見たように tensor 場の変換則は

$$T'_{ij}(x') = a_{ik}a_{jl}T_{kl}(x)$$

のようになった。

次に Spinor の変換則を考えよう。まず複素 3 次元の変換  $z$  について

$$z^2 = x_i x_i$$

を満たし、Pauli 行列  $\sigma$  を用いて

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$z = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -x_3 \end{pmatrix} = x_i \sigma_i$$

とし、 $z, z'$  の変換が

$$z' = S(a)zS^{-1}(a)$$

$$z' = x'_i \sigma_i = a_{ij}x_j \sigma_i$$

等長条件から

$$a_{ij}\sigma_i = S(a)\sigma_jS^{-1}(a)$$

$$a_{ij}\sigma_j = S^{-1}(a)\sigma_jS(a) \quad (9.3)$$

を満たす。この 2 行 2 列の  $S(a)$  が Spinor で

$$\psi'_\sigma(x') = S_{\sigma\rho}\psi_\rho(x)$$

のように変換する場である。ただし、

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix}$$

である。Spinor の変換性を求めるために次のような  $x_3$  軸周りの回転を考え 3 行 3 列の行列を

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (9.4)$$

とおくとこの変換は次のように複素行列を指数にもつ関数で表現できる

$$\begin{aligned} S(a)_{x_3} &= \exp\left(i\frac{1}{2}\sigma_3\theta\right) \\ &= I \cos \frac{\theta}{2} + i\sigma_3 \sin \frac{\theta}{2} \end{aligned} \quad (9.5)$$

$I$  は 2 行 2 列の単位行列である。以後回転軸を表す添え字は省略する。また、これは

$$\begin{aligned} S^{-1}(a) &= \exp\left(-i\frac{1}{2}\sigma_3\theta\right) \\ &= I \cos \frac{\theta}{2} - i\sigma_3 \sin \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

となる。これを確かめと式 9.4 から 3 行 2 列の行列として

$$a_{ij}\sigma_i = \begin{cases} \sigma_1 \cos \theta + \sigma_2 \sin \theta & (j=1) \\ -\sigma_1 \sin \theta + \sigma_2 \cos \theta & (j=2) \\ \sigma_3 & (j=3) \end{cases}$$

となり 9.3 が次のように満たされることがわかる。

$$\begin{aligned} S^{-1}(a)\sigma_jS(a) &= \left(I \cos \frac{\theta}{2} - i\sigma_3 \sin \frac{\theta}{2}\right) \sigma_j \left(I \cos \frac{\theta}{2} + i\sigma_3 \sin \frac{\theta}{2}\right) \\ &= \begin{cases} \sigma_1 \cos \theta + \sigma_2 \sin \theta & (j=1) \\ -\sigma_1 \sin \theta + \sigma_2 \cos \theta & (j=2) \\ \sigma_3 & (j=3) \end{cases} \end{aligned}$$

よってスピンの変換は

$$\psi'(x') = \left( I \cos \frac{\theta}{2} + i\sigma_3 \sin \frac{\theta}{2} \right) \psi(x)$$

となる。これは座標の回転が  $2\pi$  でもどるのに対し、その時にスピンの状態は反転し、 $4\pi$  ではじめて元にもどることになる。

式 9.2 から  $T, S$  は次の角運動量の交換関係を満たす。

$$[T_i, T_j] = i\varepsilon_{ijk} T_k$$

$$\left[ \frac{1}{2}\sigma_i, \frac{1}{2}\sigma_j \right] = i\varepsilon_{ijk} \frac{1}{2}\sigma_k$$

これらは角運動量の交換則を満たすことから次のように大きさがきまる。

$$T_1^2 + T_2^2 + T_3^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left( \frac{1}{2}\sigma_1 \right)^2 + \left( \frac{1}{2}\sigma_2 \right)^2 + \left( \frac{1}{2}\sigma_3 \right)^2 = \begin{pmatrix} 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 \end{pmatrix} \quad (9.6)$$

第 3 部の角運動量の議論から角運動量の成分の 2 乗和は固有値

$$\hbar^2 j(j+1)$$

を持ち、状態は  $2j+1$  個あった。先の結果をこれに使うと式 9.2 からスカラーの角運動量は 0、ベクトルでは

$$j(j+1) = 2$$

となるから

$$j = 1, -2$$

$j > 0$  では  $j = 1$  である。

スピンでは

$$j(j+1) = \frac{3}{4}$$

となるから

$$j = \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$$

$j > 0$  では  $j = 1/2$  である。

### 9.1.1 4次元ベクトルと Maxwell 方程式

ベクトル、スカラー、スピン、テンソルはそれぞれの変換性を持っている。これらが混合することも実際にはありえるのでここでベクトルとスカラーの混合の例を見てみよう。

第 2 部の電磁気節で見たようにベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}(x)$  を用いて Maxwell 方程式は

$$\mathbf{H}(x) = \nabla \times \mathbf{A}(x)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(x) + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}(x)}{\partial t} = \nabla \times \left( \mathbf{E}(x) + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}(x)}{\partial t} \right) = 0 \quad (9.7)$$

と表すことができた。よってスカラーポテンシャルを  $\phi(x)$  すると

$$\mathbf{E}(x) = -\nabla\phi(x) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(x)$$

と表すことができた。ここで4次元の変換性を見るために次のベクトルとスカラーの混合した4次元ベクトルを定義する。

$$A_\mu = (A_1(x), A_2(x), A_3(x), i\phi(x)) \quad (9.8)$$

また、4次元の反対称テンソルを

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \begin{pmatrix} 0 & H_3 & -H_2 & -iE_1 \\ -H_3 & 0 & H_1 & -iE_2 \\ H_2 & -H_1 & 0 & -iE_1 \\ iE_1 & iE_2 & -iE_3 & 0 \end{pmatrix} \quad (9.9)$$

で定義できる。これからさらに次の Bianchi 恒等式が成り立つ。

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} F_{\nu\lambda} + \frac{\partial}{\partial x_\nu} F_{\lambda\mu} + \frac{\partial}{\partial x_\lambda} F_{\mu\nu} = 0$$

さらに Maxwell 方程式の残りの2式

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H}(x) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(x) &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(x) \\ \nabla \cdot \mathbf{E}(x) &= 4\pi\rho(x) \end{aligned} \quad (9.10)$$

も4次元ベクトルで表すことができるがそのためには次の定義をする

$$J_\mu = \left( \frac{1}{c} j_1(x), \frac{1}{c} j_2(x), \frac{1}{c} j_3(x), i\rho(x) \right) \quad (9.11)$$

これにより 9.10 は次のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} F_{\mu\nu}(x) = -4\pi J_\nu(x) \quad (9.12)$$

第2部で基底  $e_a$  とその双対基底  $l^a$  ( $a = 1, 2, \dots, n-1$ ) として次のような対称関係が成立した。

$$\nabla_X e_a = e_b \omega_a^b(X) \iff \nabla_X l^a = -\omega_b^a(X) l^b$$

この時 Riemann 接続の接続形式は次の関係を満たした。

$$\Omega^a = dl^a + \omega_b^a \wedge l^b = 0 \quad (9.13)$$

4次元化されたベクトルでは式 9.8, 9.11 の基底が双対であれば式 9.9, 9.12 のどちらかが成り立てば式 9.13 から他方が導ける。

電磁場では第1項から次のように1形式をつくとビアンキ恒等式であり

$$dl_\mu = dF_\mu = \sum_\nu \frac{\partial}{\partial x_\mu} F_{\mu\nu} dx_\nu$$

第2部からは

となる。4次元の等長変換であり、Lorentz 変換に対して不変である。

Maxwell 方程式は

$$\square A_\mu = J_\mu$$

にまとまる。

### 9.1.2 ガンマ行列

3次元のスピンルを4次元に拡張する時に時間座標について注意がいる。4次元の場合は3次元と異なり  $x_0 = ict$  が虚数であるために  $S(a)$  が Unitary ではない。まず3次元の場合は、 $x_i x_i$  の根をとるために2行2列の量

$$z = x_i \sigma_i$$

を定義し、反交換関係が

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}$$

だったから

$$\begin{aligned} z^2 &= x_i \sigma_i x_j \sigma_j \\ &= x_i x_j \sigma_i \sigma_j \\ &= \frac{1}{2} x_i x_j \{\sigma_i, \sigma_j\} \\ &= x_i x_i \end{aligned}$$

である。 $z$  の変換を

$$z' = S(a) z S^{-1}(a)$$

すなわち

$$x'_i \sigma_i = S(a) x_i \sigma_i S^{-1}(a)$$

で定義するとこれは次のように  $z^2$  を不変に保つ。

$$\begin{aligned} z'^2 &= z' z' = S(a) x_i \sigma_i S^{-1}(a) S(a) x_j \sigma_j S^{-1}(a) \\ &= S(a) z^2 S^{-1}(a) = z^2 \end{aligned}$$

そこでこの  $S(a)$  を用いて spinor は

$$\Psi'(x') = S(a) \Psi(x) \tag{9.14}$$

として変換する量である。

この処方に従って4次元に拡張すると、まず

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu} \tag{9.15}$$

を満たす行列を導入する。そこで

$$z \equiv x_\mu \gamma_\mu \tag{9.16}$$

とすると先と同様に  $z^2$  を不変にする。

$$z^2 = x_\mu x_\nu \gamma_\mu \gamma_\nu = \frac{1}{2} x_\mu x_\nu \{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = x_\mu x_\mu$$

さらに次の変換

$$z' = S(a) z S^{-1}(a)$$

式9.16から

$$x'_\mu \gamma_\mu = S(a) x_\mu \gamma_\mu S^{-1}(a)$$

と書くとこれは  $x_\mu x_\mu$  を不変にすることがわかる。

そこで spinor を  $\psi(x)$  として式9.14から

$$\psi'(x') = S(a) \psi(x)$$

とする。このとき  $\gamma_\mu$  を Dirac のガンマ行列という。

$$\gamma_\mu = \begin{pmatrix} \sigma_0 & -i\sigma_i \\ i\sigma_i & -\sigma_0 \end{pmatrix} \quad (9.17)$$

ただし、単位行列を含んだ PauliMatrix を

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (9.18)$$

とする。

### 9.1.3 Spinor 空間 [17]

局所的に Minkowski 空間では時空座標について次を満足する。ただし以後光速  $c = 1$  とする。

$$t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0 \quad (9.19)$$

従って  $t = \pm 1$  であれば単位半球  $\zeta^\pm$  が次を満たす。

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad (9.20)$$

そこで半球の点 P を立体射影を用いて次のように変換する。

$$P(1, x, y, z) \rightarrow P^1(1, x^1, y^1, 0) \quad (9.21)$$

すると複素空間と対応がついて

$$\zeta = x^1 + iy^1 \quad (9.22)$$

とおく。従って一般に  $(1, x, y, z)$  は立体射影  $\Sigma$  を用いて

$$\zeta = \frac{x + iy}{1 - z} \quad (9.23)$$

となるこの関数の複素空間での像は次の図のように等角写像になる。。

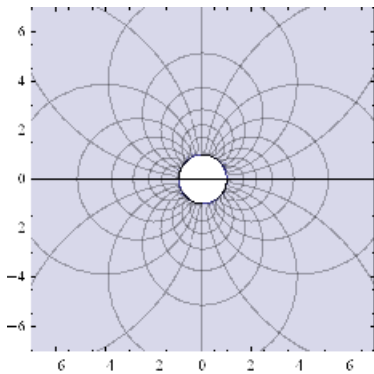


図 9.1:  $\zeta$  を実軸、虚軸上に  $x, y$  を  $-1$  から  $1$  まで変化させて描画させた

これから次のような関係式が得られ、

$$\zeta \bar{\zeta} = \frac{x^2 + y^2}{(1 - z)^2} = \frac{1 + z}{1 - z} \quad (9.24)$$

よって  $\zeta$  から逆に  $x, y, z$  を求められる。

$$x = \frac{\zeta + \bar{\zeta}}{\zeta\bar{\zeta} + 1}, \quad y = \frac{\zeta - \bar{\zeta}}{i(\zeta\bar{\zeta} + 1)}, \quad z = \frac{\zeta\bar{\zeta} - 1}{\zeta\bar{\zeta} + 1} \quad (9.25)$$

立体射影では北極点  $(1, 0, 0, 1)$  は  $\zeta = \infty$  に相当する。そこでこの  $\zeta$  を 2 つの複素数のペアで表すことにする。

$$\zeta = \frac{\xi}{\eta} \quad (9.26)$$

そして次のような線形変換を考える。

$$\begin{aligned} \xi &\rightarrow \xi' = \alpha\xi + \beta\eta \\ \eta &\rightarrow \eta' = \gamma\xi + \delta\eta \end{aligned}$$

ここで  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  は任意の複素数とするが逆行列が存在するために

$$\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0 \quad (9.27)$$

とする。これで次のようにスピン行列を定義する。

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad (9.28)$$

回転を表すためには  $A \in SL(2, C)$  として

$$\det A = 1 \quad (9.29)$$

を満たすとし、次のように変換規則ができる。

$$\begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \quad (9.30)$$

この 2 変数  $(\xi, \eta)$  でスピンを表すことができる。スピンベクトルを  $\kappa$  とすると  $2\pi$  の回転で  $-\kappa$  に変換するので、変換行列  $A$  は次のように書くことができる。

$$A = \begin{pmatrix} a + id & -c + ib \\ c + ib & a - id \end{pmatrix} \quad (9.31)$$

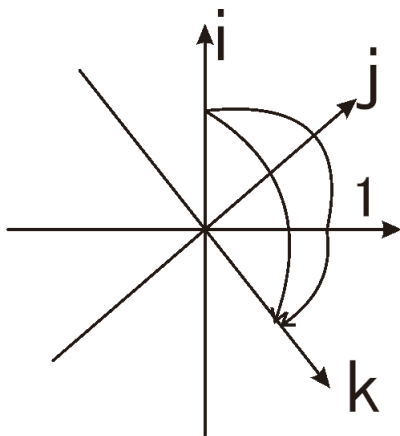


図 9.2: 4 元数  $ij=k$

これは次のような 4 元数  $i, j, k$  を基底に用いて次のようにかける。

$$A = Ia + ib + jc + kd, \quad a, b, c, d \in R \quad (9.32)$$

また基底は次のようにパウリ行列である。

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, j = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (9.33)$$

最も一般的な 4 元数を用いて次のように行列  $A$  を書くことができる。

ただし  $l^2 + m^2 + n^2 = 1$  である。

$$\begin{aligned} A &= I \cos \frac{\theta}{2} + (il + jm + kn) \sin \frac{\theta}{2} \quad a, b, c, d \in R \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) + in \sin(\theta/2) & (-m + il) \sin(\theta/2) \\ (m + il) \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) - in \sin(\theta/2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

つまりこれはリーマン球上での回転行列  $R_\nu^\theta$  に等しい。 $\theta = 2\pi$  によって  $A \rightarrow -A$  になる。スピノールを  $\phi^A (A = 0, 1)$  で表せば  $S_B^A$  を  $2 \times 2$  の複素行列として

$$\phi'^A = \phi^B S_B^A \quad (9.34)$$

$$S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SL(2, C), \quad |S| = 1 \quad (9.35)$$

である。複素共役は次のように表される。

$$\phi'^{A*} = \phi^{B*} \bar{S}_B^A \quad (9.36)$$

である。ただし、

$$\bar{S}_{B^*}^{A^*} = \bar{S}_B^A \quad (9.37)$$

添え字の上げ下げは次のような反対称行列  $\epsilon$  を用いる。

$$\epsilon^{AB} = \epsilon_{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (9.38)$$

$$\phi^A = \epsilon^{AB} \phi_B, \quad \phi_A = \phi^B \epsilon_{BA} \quad (9.39)$$

反対称行列  $\epsilon$  は次のような性質を持っている。

$$\epsilon_{AB} = -\epsilon_{BA}$$

$$\epsilon_{01} = 1$$

$$\epsilon_{AC} \epsilon^{BC} = \delta_A^B$$

さらに有用な関係式として

$$\epsilon^{CD} |S| = \epsilon^{AB} S_A^C S_B^D \quad (9.40)$$



$|S| = 1$  であれば

$$\epsilon^{CD} = \epsilon^{AB} S_A^C S_B^D \quad (9.41)$$

であり

$$\phi_A = S_A^B \phi'_B \quad (9.42)$$

スカラー積は保存され

$$\phi_A \phi^A = \phi_{A'} \phi^{A'} \quad (9.43)$$

が成り立つ。

従って、通常のスピンールの基底は次のようなペアで表現される。

$$\eta_a^A = (\eta_0^A, \eta_1^A) \quad (9.44)$$

$\eta_a^A$  は次の関係を満足する。

$$\eta_a^A \epsilon_{AB} \eta_b^B = \epsilon_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (9.45)$$

$$\eta_a^A \epsilon^{ab} \eta_b^B = \epsilon^{AB} \quad (9.46)$$

従って

$$\eta_0^A = (1, 0); \quad \eta_1^A = (0, 1) \quad (9.47)$$

異なる座標でのスピノールは次の共変微分で表すことができる。

これらは第3部でのリーマン接続を応用することができる。

$$D_\mu \phi_A = \partial_\mu \phi_A - \Gamma_{A\mu}^B \phi_B \quad (9.48)$$

$$D_\mu \phi^A = \partial_\mu \phi^A - \Gamma_{B\mu}^A \phi^B \quad (9.49)$$

ここで  $\Gamma$  は  $2 \times 2$  の複素行列で  $\mu = 0, 1, 2, 3$  であり, spinor\_affine 接続と呼ばれる

これは次の関係を満たす。

$$\Gamma_{B\mu}^A = (S^{-1})_A^D \Gamma_{D\mu}^C S_C^B + \partial_\mu (S^{-1})_{A,\mu}^C S_C^B \quad (9.50)$$

また明らかに

$$\partial_\mu \epsilon_{AB} = 0 \quad (9.51)$$

これから

$$\Gamma_{B\mu}^A \epsilon_{CB} + \Gamma_{B\mu}^C \epsilon_{AC} = 0$$

が成り立ち、通常の接続係数と同様に

$$\Gamma_{A\mu}^A = 0 \quad (9.52)$$

を満たす。

### 9.1.4 磁気双極子モーメント

ディラック方程式を考えるといくつかの重要な内容が導かれる。

磁場中に電子がおかれるとローレンツ力が生じることは既習であるが、ここでは非相対論的な極限として磁気双極子モーメントが生じることをみていく。先のディラック方程式を磁場中のものに置き換えると

$$\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - (e/c)\mathbf{A}$$

と置き換えることに対応した。よって式 9.59 は

$$[\hat{E} - (\boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{c}\mathbf{p} - e\mathbf{A}) + \beta mc^2)]\phi = 0$$

となる。これに先と同様で  $[\hat{E} + (\boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{c}\mathbf{p} - e\mathbf{A}) + \beta mc^2)]$  をかける。

$$\left[ \hat{E}^2 - (\boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{c}\mathbf{p} - e\mathbf{A}))^2 - m^2 c^4 - \hat{E} \boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{c}\mathbf{p} - e\mathbf{A}) + \boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{c}\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \hat{E} \right] \phi = 0$$

を用いると  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ ,  $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$  だから

$$\begin{aligned} (\mathbf{c}\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \times (\mathbf{c}\mathbf{p} - e\mathbf{A}) &= -ce(\mathbf{A} \times \mathbf{p} + \mathbf{p} \times \mathbf{A}) + c^2 \mathbf{p}^2 + e^2 \mathbf{A}^2 \\ &= -ie\hbar c \nabla \times \mathbf{A} + c^2 \mathbf{p}^2 + e^2 \mathbf{A}^2 \\ &= -ie\hbar c \mathbf{B} + c^2 \mathbf{p}^2 + e^2 \mathbf{A}^2 \end{aligned}$$

ここで先の式 9.60, 9.62 の  $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\sigma}'$  の関係

$$(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{X})(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{Y}) = \mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} + i\boldsymbol{\sigma}' \cdot (\mathbf{X} \times \mathbf{Y})$$

を用いると

$$mc^2 = \sqrt{c^2 \mathbf{p}^2 + e^2 \mathbf{A}^2}$$

とすれば

$$(\boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{c}\mathbf{p} - e\mathbf{A}))^2 = (\mathbf{c}\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 - e\hbar c \boldsymbol{\sigma}' \cdot \mathbf{B} + m^2 c^4$$

演算子で置き換えると

$$-\hat{E} \boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{c}\mathbf{p} - e\mathbf{A}) + \boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{c}\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \hat{E} = e\boldsymbol{\alpha} \left[ \hat{E}, \mathbf{A} \right] = ie\hbar \boldsymbol{\alpha} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

に注意して

$$\left[ \hat{E}^2 - (\mathbf{c}\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 - m^2 c^4 + e\hbar c \boldsymbol{\sigma}' \cdot \mathbf{B} \right] \phi = 0$$

である。非相対論の領域であれば  $\hat{E} = \hat{E}' + mc^2$  として

$$\hat{E}^2 - m^2 c^4 \sim 2mc^2 \hat{E}'$$

とすると

$$\hat{E}' \phi = \left[ \frac{1}{2m} \left( \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 - \frac{e\hbar}{2mc} \boldsymbol{\sigma}' \cdot \mathbf{B} \right] \phi$$

である。これは磁気双極子モーメント

$$\frac{e\hbar}{2mc} \boldsymbol{\sigma}'$$

を持つエネルギー

$$H_{dipole} = -\frac{e\hbar}{2mc} \boldsymbol{\sigma}' \cdot \mathbf{B}$$

と相互作用する荷電粒子の方程式になっている。つまり、電子が磁場中にある場合は磁気双極子モーメントを持つように振る舞うことになる。

スピン軌道相互作用 先の磁気モーメントと同様にディラック方程式はスピン軌道相互作用 (spin-orbit\_interaction) を導く。

座標の原点に、ある電荷によってつくられる静電ポテンシャルのみ  $\phi$  で、ベクトルポテンシャルは  $\mathbf{A} = 0$  とする。式 9.59 から

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \phi = (c\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta mc^2 + e\phi) \phi \quad (9.53)$$

先と同様に非相対論的な極限  $mc^2 \gg E', e\phi$  として  $\hat{E} = \hat{E}' + mc^2$  として、波動方程式は式 9.61 から上下の 2 組に分けると符号の違いにより

$$(\hat{E}' - e\phi) \psi_1 - c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}\psi_2 = 0 \quad (9.54)$$

$$(\hat{E}' + 2mc^2 - e\phi) \psi_2 - c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}\psi_1 = 0 \quad (9.55)$$

に分けることができる。これを見ると  $\psi_1$  の方が  $\psi_2$  よりも  $mc^2$  倍だけ大きいことがわかる。よって現実的には  $\psi_1$  のみを考えればよい。式 9.62 から

$$\psi_2 = (\hat{E}' + 2mc^2 - e\phi)^{-1} c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}\psi_1$$

これを式 9.60 に代入すると

$$\hat{E}'\psi_1 = \left( \frac{1}{2m} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) \left( 1 + \frac{\hat{E}' - e\phi}{2mc^2} \right)^{-1} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) + e\phi \right) \psi_1$$

を得る。これを  $(\hat{E}' - e\phi)/2mc^2$  の冪展開すると

$$\left( 1 + \frac{\hat{E}' - e\phi}{2mc^2} \right)^{-1} = 1 - \frac{\hat{E}' - e\phi}{2mc^2}$$

$$\mathbf{p}(e\phi) = (e\phi)\mathbf{p} - ie\hbar\nabla\phi$$

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla\phi)(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) = (\nabla\phi) \cdot \mathbf{p} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot ((\nabla\phi) \times \mathbf{p})$$

となることから

$$\begin{aligned} \hat{E}'\psi_1 &= \left( \left( 1 - \frac{\hat{E}' - e\phi}{2mc^2} \right) \left( \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \right) + e\phi \right) \psi_1 \\ &\quad - \frac{e\hbar^2}{4m^2c^2} (\nabla\phi) \cdot (\nabla\psi_1) + \frac{e\hbar^2}{4m^2c^2} \boldsymbol{\sigma} \cdot ((\nabla\phi) \times \mathbf{p}\psi_1) \end{aligned}$$

さらに

$$(\hat{E}' - e\phi) \mathbf{p}^2 \rightarrow \frac{\mathbf{p}^4}{2m}$$

と置き換える。静電ポテンシャルが球対称であれば

$$\begin{aligned} (\nabla\phi) \cdot \nabla &= \frac{d\phi}{dr} \frac{\partial}{\partial r} \\ \nabla\phi &= \frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr} \mathbf{r} \end{aligned}$$

が成立するのでスピン角運動量演算子  $\mathbf{S} = \frac{1}{2}\hbar\boldsymbol{\sigma}$ , 軌道角運動量  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$  として

$$\hat{E}'\psi_1 = \left( \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + e\phi - \frac{\mathbf{p}^4}{8m^3c^2} - \frac{e\hbar^2}{4m^2c^2} \frac{d\phi}{dr} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{e}{2m^2c^2} \frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr} \mathbf{S} \cdot \mathbf{L} \right) \psi_1$$

これを見ると第 3 項以降が相互作用項で第 3 項は相対論的な質量補正によるものである。

第4項は静電エネルギーの相対論的補正で、最後の第5項

$$H_{SO} = \frac{e}{2m^2c^2} \frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr} \mathbf{S} \cdot \mathbf{L}$$

がスピン軌道相互作用エネルギー (spin-orbit\_interaction\_energy) である。  
この影響が小さいとして摂動論で具体的に計算できることをしめそう。  
角運動量保存則から

$$\mathbf{J}^2 = (\mathbf{L} + \mathbf{S})^2 = \mathbf{L}^2 + \mathbf{S}^2 + 2\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$$

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{S} = \frac{1}{2} (\mathbf{J}^2 - \mathbf{L}^2 - \mathbf{S}^2)$$

の関係があるので全角運動量、軌道角運動量の量子数を  $j, l$  として前部の角運動量の固有値から

$$\langle lj | \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} | lj \rangle = \frac{1}{2} \left[ j(j+1) - l(l+1) - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + 1 \right) \right] \hbar^2$$

である。さらに  $l > 0$  の時に  $j$  が取りうる値は

$$l + \frac{1}{2}, \quad l - \frac{1}{2}$$

しかない。よってこの時の期待値は

$$\langle lj | \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} | lj \rangle = \frac{1}{2} l \hbar^2, \quad -\frac{1}{2} (l+1) \hbar^2$$

の2通りである。この期待値をそれぞれ  $s_{\pm}$  とおこう。

すると電子の波動関数の動径成分  $R_{nl}$  が次のように計算できる。

$$\zeta_{nl} \equiv s_{\pm} \langle R_{nl} | \frac{e}{2m^2c^2} \frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr} | R_{nl} \rangle = s_{\pm} \int_0^{\infty} r^2 dr |R_{nl}|^2 \left( \frac{e}{2m^2c^2} \frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr} \right)$$

ここで  $Z$  を原子番号として静電ポテンシャルを代入すると

$$\phi(r) = -Ze/r$$

だからラゲール多項式の公式から

$$\zeta_{nl} = \frac{s_{\pm} Z e^2}{2m^2 c^2} \int_0^{\infty} \frac{1}{r} R_{nl}^2 dr = \frac{s_{\pm} Z^4 e^2}{2m^2 c^2 a_0^3 n^3 l(l+1/2)(l+1)}$$

ただし、

$$a_0 = \hbar^2 / \mu e^2$$

$$\mu = \frac{M m_e}{M + m_e}$$

である。この結果は原子中のスピン軌道相互作用が原子番号  $Z$  の4乗に比例していることを示している。重い粒子は加速度的に相互作用が大きくなる。

## 9.2 ディラック方程式 [28]

シュレディンガー方程式はローレンツ不変ではないという問題があり、クライン・ゴールドン方程式は負の確率密度を許すという問題があった。

Dirac は量子論的なシュレディンガー方程式を量子化する指針として

- 波動関数の2乗を全空間で積分したものは時間に依存しない定数になる。

- 方程式には時間と空間が相対論的に入っていないといけない（微分次数が同じ）

Diracはこの解決を行列に見いだした。先のクライン・ゴールドン方程式が行列の各成分に成り立てばいいわけである。

では相対論的に量子論を満たす方程式はスピン1/2粒子についてDiracが考案をみていく。  
電子の質量を  $m$  として相対論のエネルギー保存の式である

$$E^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4 \quad (9.56)$$

これとシュレディンガー方程式

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \phi(r, t) = H\phi(r, t) \quad (9.57)$$

を出発点と選ぶ。ローレンツ不変性を保つために適当な数を  $c$  として

$$H = c\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta mc^2 \quad (9.58)$$

とおき、 $\hat{E}$  で演算子を表すとすると

$$[\hat{E} - (c \cdot \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta mc^2)]\phi = 0 \quad (9.59)$$

$$\left[ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + i\hbar c \cdot \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla - \beta mc^2 \right] \phi = 0$$

となる。式 9.56 が 2 次形式だからこれをつくるために強引に式 9.59 に

$$\left[ \hat{E} + (c\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta mc^2) \right]$$

をかけると

$$[\hat{E}^2 - (c \cdot \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta mc^2)^2]\phi = 0$$

成分で展開すると括弧の中は

$$\begin{aligned} & \hat{E}^2 - c^2 (\alpha_x^2 p_x^2 + \alpha_y^2 p_y^2 + \alpha_z^2 p_z^2) \\ & + (\alpha_x \alpha_y + \alpha_y \alpha_x) p_x p_y + (\alpha_y \alpha_z + \alpha_z \alpha_y) p_y p_z + (\alpha_z \alpha_x + \alpha_x \alpha_z) p_z p_x - m^2 c^4 \beta^2 \\ & - mc^3 ((\alpha_x \beta + \beta \alpha_x) p_x + (\alpha_y \beta + \beta \alpha_y) p_y + (\alpha_z \beta + \beta \alpha_z) p_z) = 0 \end{aligned}$$

これが式 9.56 となるためには

$$\alpha_x^2 = \alpha_y^2 = \alpha_z^2 = \beta^2 = 1$$

$$\alpha_y \alpha_z + \alpha_z \alpha_y = \alpha_y \alpha_x + \alpha_x \alpha_y = \alpha_z \alpha_x + \alpha_x \alpha_z = 0$$

$$\alpha_x \beta + \beta \alpha_x = \alpha_y \beta + \beta \alpha_y = \alpha_z \beta + \beta \alpha_z = 0$$

が満たされなければならない。 $\alpha, \beta$  がスカラーでは成立しないことからDiracは反交換関係に注目し、4つの行列  $4 \times 4$  の組を考えた。

$$\alpha_x = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_x \\ \sigma_x & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_y = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_y \\ \sigma_y & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_z = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_z \\ \sigma_z & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix} \quad (9.60)$$

よって波動関数も次の4成分を持つ。そこで次のような平面波解を考え

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{pmatrix} = e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}$$

式 9.59 を代入すると式 9.60 から

$$\begin{pmatrix} E - mc^2 & 0 & -cp_z & -c(p_x - ip_y) \\ 0 & E - mc^2 & -c(p_x + ip_y) & cp_z \\ -cp_z & -c(p_x - ip_y) & E + mc^2 & 0 \\ -c(p_x + ip_y) & cp_z & 0 & E + mc^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = 0$$

この解が自明であるためには行列式が 0 でなくてはならない。よって

$$E_{\pm} = \pm \sqrt{m^2 c^4 + c^2 p^4}$$

が得られる。式 9.56 を満たすことになる。それぞれについて 4 種類の状態関数が決まり、

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{cp_z}{E_+ + mc^2} \\ \frac{c(p_x + ip_y)}{E_+ + mc^2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{c(p_x - ip_y)}{E_+ + mc^2} \\ \frac{-cp_z}{E_+ + mc^2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{cp_z}{E_- - mc^2} \\ \frac{c(p_x + ip_y)}{E_- - mc^2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{c(p_x - ip_y)}{E_- - mc^2} \\ \frac{-cp_z}{E_- - mc^2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (9.61)$$

ただし規格化定数

$$A = \left( \frac{1 + c^2 \mathbf{p}^2}{(E_+ + mc^2)^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

さら前節でのスピノ演算子は次のように拡張される。

$$\mathbf{s} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \sigma' \quad (9.62)$$

ここで  $\sigma'$  は対角に PauliMatrix を持つ  $4 \times 4$  の行列である。

以上から相対論と量子論の要請を満たす方程式は行列の形で表現され次の Dirac 方程式となる。

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x) &= \begin{pmatrix} mc^2 & -i\hbar c \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla \\ -i\hbar c \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla & -mc^2 \end{pmatrix} \psi(x) \\ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x) &= (-\hbar c \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \beta mc^2) \psi(x) \end{aligned} \quad (9.63)$$

$$\alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$

この式が確率密度を正にすることを確認しておこう。行列になったことで複素共役ではなく、転置複素共役  $\psi^\dagger$  をかけたものの差をとると

$$i\hbar \psi^\dagger \frac{\partial \psi}{\partial t} - (i\hbar)^* \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} \psi = -i\hbar c \sum_{k=1}^3 \left( \psi^\dagger \alpha^k \frac{\partial \psi}{\partial x^k} + \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial x^k} \alpha^k \psi \right)$$

これはまとめると

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (\psi^\dagger \psi) + i\hbar c \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^k} (\psi^\dagger \alpha^k \psi) = 0$$

となる。これから

$$\rho = \psi^\dagger \psi, \quad \mathbf{j} = c\psi^\dagger \boldsymbol{\alpha} \psi$$

と置けばこれは連続の式になり、確率密度  $\rho$  も負になることがない。さらに次のように 4 元確率の流れとして

$$j^\mu = (c\rho, \mathbf{j}) \equiv (c\psi^\dagger \psi, c\psi^\dagger \boldsymbol{\alpha} \psi)$$

が定義でき、これに従うミューオン、タウオン、アップクォーク、ダウンクォーク、ボトムクォーク、電子、陽子、中性子などスピン 1/2 のフェルミ粒子はディラック粒子と呼ばれる。

### 9.3 パウリ方程式

Dirac 方程式が非相対論的な近似により、シュレディンガー方程式になることを見てみよう。静止した自由粒子の場合は式 9.63 は次のようになる。

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \beta mc^2 \psi$$

となる。これは時間の 1 階微分方程式なのですぐに解くことができ、次の 4 成分が解となる。

$$\psi^1 = e^{-\frac{i}{\hbar} mc^2 t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\psi^2 = e^{-\frac{i}{\hbar} mc^2 t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\psi^3 = e^{+\frac{i}{\hbar} mc^2 t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\psi^4 = e^{+\frac{i}{\hbar} mc^2 t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる。このとき  $\psi^1, \psi^2$  は正の解、 $\psi^3, \psi^4$  は負の解になる。

この負の解の存在の詳しいことは後の章で考察する。ここでは負の解は物理的には極めて不安定なものを認めてしまうことになるので取り扱わず正の解のみの非相対論的極限を扱う。

式 9.63 において電子との相互作用がある場合に拡張するとゲージ変換を用いて

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x) = \left( -\hbar c \boldsymbol{\alpha} \cdot \left( \nabla + i \frac{e}{\hbar} A(x) \right) + \beta mc^2 - e\Phi(x) \right) \psi(x)$$

となる。非相対論の場合を考えるので波動関数の静止エネルギー依存部分を

$$\psi(x) = e^{-\frac{i}{\hbar} mc^2 t} \begin{pmatrix} \phi(x) \\ \chi(x) \end{pmatrix} \quad (9.64)$$

として次のようにディラック方程式を書き換える。

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \phi(x) \\ \chi(x) \end{pmatrix} = -\hbar c \boldsymbol{\sigma} \cdot \left( \nabla + i \frac{e}{\hbar} A(x) \right) \begin{pmatrix} \chi(x) \\ \phi(x) \end{pmatrix} - e\Phi \begin{pmatrix} \phi(x) \\ \chi(x) \end{pmatrix} - 2mc^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \chi(x) \end{pmatrix}$$

よって上の 2 成分からは

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \phi(x) = -\hbar c \boldsymbol{\sigma} \cdot \left( \nabla + i \frac{e}{\hbar} A(x) \right) \chi(x) - e\Phi \phi(x) \quad (9.65)$$

が得られ、下の 2 成分からは式 9.64 から

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \chi(x) = -\hbar c \boldsymbol{\sigma} \cdot \left( \nabla + i \frac{e}{\hbar} A(x) \right) \phi(x) - e\Phi \chi(x) - 2mc^2 \chi(x) \quad (9.66)$$

ところが電子の運動エネルギーは非相対論的な近似では静止エネルギーに対し、無視して

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \chi(x) \ll 2mc^2 \chi(x)$$

$$e\Phi \chi(x) \ll 2mc^2 \chi(x)$$

とすると

$$0 = -\hbar c \boldsymbol{\sigma} \cdot \left( \nabla + i \frac{e}{\hbar} A(x) \right) \phi(x) - 2mc^2 \chi(x)$$

とみなせる。これから

$$\chi(x) = -\frac{i\hbar}{2mc^2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \left( \nabla + i \frac{e}{\hbar} A(x) \right) \phi(x) \quad (9.67)$$

を得る。つまり  $\psi$  の 4 成分の間に拘束条件式が加わったわけだ。この条件は

$$\chi(x) \ll \phi(x)$$

であり、 $\phi(x)$  の振幅が  $\chi(x)$  の振幅よりかなり大きいと考えられる。パウリ行列の公式

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{a})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})I + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$$

を用いて、式 9.67 を式 9.65 に代入すると

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \phi(x) &= -\frac{\hbar^2}{2m} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \left( \nabla + i \frac{e}{\hbar} A(x) \right) \left( \nabla + i \frac{e}{\hbar} A(x) \right) \phi(x) - e\Phi \phi(x) \\ &= \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \nabla + i \frac{e}{\hbar} A(x) \right)^2 + \frac{e\hbar}{2m} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\text{rot} A(x)) - e\Phi \right) \phi(x) \\ &= \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \nabla + i \frac{e}{\hbar} A(x) \right)^2 + \frac{e\hbar}{2m} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}(x) - e\Phi \right) \phi(x) \end{aligned}$$

となり、磁場  $\mathbf{B}(x)$  を含んだ電磁場のパウリ方程式が得られる。

この時便宜的に分けた上、下の成分は spinor としてまとめることができる。

つまり次の  $\gamma$  行列  $\gamma^\mu$  を定義し、

$$\gamma^0 \equiv \beta, \quad \gamma^i \equiv \beta \alpha^i \quad (i = 1, 2, 3)$$

式 9.63 に  $i\hbar\beta$  をかけると

$$(i\hbar\gamma^\mu \partial_\mu - mc) \psi(x) = 0$$

のようにまとめることができる。 $\hbar = c = 1$  の自然単位系を使えば

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x) = 0$$

になり、これらを **Dirac 方程式** という。

## 9.4 モード展開

ディラック方程式はフェルミオン場の方程式であるとして、フェルミオン場の量子化から導いてみよう。スカラーの場合の式 6.25 のフェルミオンの場合を求めてみよう。作用とラグランジアンを次のようにおく。

$$S_f = \int d^4x \mathcal{L}_f$$

$$\mathcal{L}_f = \bar{\psi}(x) (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x) \quad (9.68)$$



また、 $\psi$  に共役な場は  $i\psi^\dagger$  である。これから自由フェルミオン場を次のように式 3.63 から次のように平面波展開する。

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{1}{2p_0}} \sum_{s=\pm} (b_{s,\mathbf{p}} u(p, s) e^{-ip \cdot x} + d_{s,\mathbf{p}}^\dagger v(p, s) e^{ip \cdot x}) \quad (9.69)$$

$$\bar{\psi}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{1}{2p_0}} \sum_{s=\pm} (d_{s,\mathbf{p}} \bar{v}(p, s) e^{-ip \cdot x} + b_{s,\mathbf{p}}^\dagger \bar{u}(p, s) e^{ip \cdot x}) \quad (9.70)$$

## 9.5 基本代数 [20]

ここまでは光子のようなボソンを考えてきたが、次の反交換関係を用いると用意に Fermi 系に拡張ができる。

物質の構成要素になりやすい Fermi 粒子は独特の性質があり、積分や微分のルールを始めに確認しておく。今後、ここでは必要が無い限り演算子記号の  $\hat{\phantom{x}}$  を省略する。

$$\{A, B\} \equiv AB + BA$$

で定義すると

$$\{a, a^\dagger\} = 1, \quad \{a, a\} = \{a^\dagger, a^\dagger\} = 0$$

となるので Fermion はベキ零則

$$a^2 = (a^\dagger)^2 = 0$$

が成り立つ。そこで先と同様に、コヒーレント状態を消滅演算子の固有状態として

$$a|\xi\rangle = \xi|\xi\rangle$$

を考えればよい。が、大きな問題は Boson の時は上式の固有値は複素数になった。

しかし、ここでの  $\xi$  は次の条件を満たすグラスマン数になる。これは前節式 8.61 でも見た。

$$\{\xi, \xi^*\} = 0, \quad \xi^2 = (\xi^*)^2 = 0$$

したがって、大きさが無い。これから面白いことに Taylor 展開は必ず有限で止まる。例えば

$$f(\xi^*, \xi) = f_0 + f_1 \xi + f_2 \xi^* + f_2 \xi^* \xi$$

よって積分も次のように定義しておく必要がある。

$$\int \xi d\xi \equiv i, \quad \int \xi^* d\xi^* = i \quad (9.71)$$

$$\int d\xi \equiv 0, \quad \int \xi^* d\xi^* = 0 \quad (9.72)$$

つまり積分測度  $d\xi, d\xi^*$  は次の反交換関係を持つ。

$$\{d\xi, \xi\} = \{d\xi, \xi^*\} = \{d\xi^*, \xi\} = \{d\xi^*, \xi^*\} = 0$$

このように反交換関係を満たす場合を互いに **Grassmann 奇**、といい、

交換関係関係を満たす場合を **Grassmann 偶** という。今後 G-奇、G-偶と表す。

G-奇であれば入れ替えで符号が変わり、G-偶であれば入れ替えで符号を変えない。

複素共役は、複素平面上で反転のイメージであるが、ここでは大きさという概念がないため、複素共役という概念そのものが意味がない。

従って積分公式も次のように簡単になる。自由度が  $n$  の場合

$$\int \xi_1 \xi_2 \cdots \xi_n d\xi_n \cdots d\xi_1 = i^n \quad (9.73)$$

$$\int \xi_1 \cdots \xi_j d\xi_n \cdots d\xi_1 = 0, \quad (0 \leq j < n) \quad (9.74)$$

反交換関係は、 $d\xi, d\xi^*$  とともに、この場合は G-奇である。

$$\{\xi_i, \xi_j\} = 0, \{d\xi_i \xi_j\} = 0, \{d\xi_i, d\xi_j\} = 0$$

となる。先の積分 9.74 において  $\xi', \zeta$  を新しい G 数として次のような変数変換を考える。

$$\xi'_i = \sum_{j=1}^n M_{ij} \xi_j + \zeta_i$$

ここで

$$(\xi'_i)^2 = (\xi_i)^2 = (\zeta_i)^2 = 0$$

となるので、例えば 2 つまでは

$$\begin{aligned} \xi'_1 \xi'_2 &= \left( \sum_{j=1}^2 M_{1j} \xi_j + \zeta_1 \right) \left( \sum_{j=1}^2 M_{2j} \xi_j + \zeta_2 \right) \\ &= (M_{11} \xi_1 + \zeta_1) (M_{12} \xi_2 + \zeta_2) (M_{21} \xi_1 + \zeta_1) (M_{22} \xi_2 + \zeta_2) \\ &= (M_{11} M_{12} - M_{21} M_{22}) \xi_1 \xi_2 + \zeta_1 \zeta_2 (\cdots) \end{aligned}$$

となるので

$$\xi'_1 \xi'_2 \cdots \xi'_{n-1} \xi'_n = \det M_{ij} (\xi_1 \xi_2 \cdots \xi_{n-1} \xi_n) + O(\zeta)$$

とかける。 $\xi_i$  については  $n$  次以下の項である。 $\xi'_i$  が独立ならば式 9.73 から

$$\int \xi'_1 \xi'_2 \cdots \xi'_n d\xi'_n \cdots d\xi'_1 = i^n = \int \xi_1 \xi_2 \cdots \xi_n d\xi_n \cdots d\xi_1$$

が成り立つ。そこで  $d^n \xi \equiv d\xi_n d\xi_{n-1} \cdots d\xi_1$  と逆順で定義しておく

$$\int \xi'_1 \xi'_2 \cdots \xi'_n d\xi'_n \cdots d\xi'_1 = \int \det M_{ij} (\xi_1 \xi_2 \cdots \xi_{n-1} \xi_n) d\xi'_n \cdots d\xi'_1 = \int \xi_1 \xi_2 \cdots \xi_n d\xi_n \cdots d\xi_1$$

が成り立つので、と変換のヤコビアンは

$$d^n \xi' = (\det M_{ij})^{-1} d^n \xi$$

となる。グラスマン代数でのディラック関数は

$$\delta(\xi_i - \xi_j) \equiv \frac{1}{i} (\xi_i - \xi_j)$$

で定義する。フーリエ変換は式 9.71、9.72 から

$$\begin{aligned} \int e^{\xi^* (\xi_i - \xi_j)} d\xi^* &= \int \left\{ 1 + \xi^* (\xi_i - \xi_j) + \frac{\xi^{*2} (\xi_i - \xi_j)^2}{2} + \cdots \right\} d\xi^* \\ &= \int \{ 1 + \xi^* (\xi_i - \xi_j) \} d\xi^* \\ &= (\xi_i - \xi_j) \int \xi^* d\xi^* \\ &= \frac{1}{i} (\xi_i - \xi_j) \\ &= \delta(\xi_i - \xi_j) \end{aligned}$$

となるので  $\delta$  関数の性質が使える、

$$\int f(\xi_i) \delta(\xi_i - \xi_j) d\xi_i = f(\xi_j)$$

である。

次に  $d^n \xi^* \equiv d\xi_1 d\xi_2 \cdots d\xi_n$  と正順で定義しておと

$$\int e^{-\xi_j^* \xi_j} d\xi_j d\xi_j^* = 1 \quad (j = 1, 2, 3 \cdots n)$$

となるのでガウス積分の公式は次のように使える。

$$\int e^{-\xi_i^* M_{ij} \xi_j} d^n \xi d^n \xi^* = \det M_{ij}$$

逆に微分は  $G$ -奇となるので

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j}$$

を左から作用して、符号変化させながら移動し、 $\xi_j$  を取り除くことができる。

## 9.6 コヒーレント状態 [20]

第9部で詳しく扱うコヒーレント状態は単一モードの消滅演算子の固有状態  $|\xi\rangle$  と固有値を次のように  $\xi$  とおき、

$$a|\xi\rangle = \xi|\xi\rangle \quad (9.75)$$

となる状態である。

古典的な光に近い性質を持ち、振幅と位相が最小不確定状態にある。よって決まった位相と振幅を観測しやすい。

ただし、ここでは光子のようなボソンではなく、フェルミオンの場合の様子を知りたい。

消滅生成演算子  $a, a^\dagger$  が  $G$ -奇だから

$$\{a, \xi\} = \{a, \xi^*\} = \{a^\dagger, \xi\} = \{a^\dagger, \xi^*\} = 0$$

$$a|0\rangle = 0$$

$$a^\dagger|0\rangle = |1\rangle$$

であり、真空  $|0\rangle$  が  $G$ -偶としてコヒーレント状態を

$$\begin{aligned} |\xi\rangle &= e^{a^\dagger \xi} |0\rangle \\ &= (1 + a^\dagger \xi) |0\rangle \\ &= |0\rangle - \xi |1\rangle \end{aligned}$$

と表すことができる。これは  $e^{a^\dagger \xi}$  がシフト演算子のように振る舞っている。

$$e^{-a^\dagger \xi} a e^{a^\dagger \xi} = a + \xi$$

また、BOSE 粒子のコヒーレント状態にはない次の関係もつくれる。

$$\langle \xi | a = \langle \xi | \xi$$

$$\begin{aligned}
\langle \xi | &= \langle 0 | \delta(\xi - a) \\
&= \frac{1}{i} \langle 0 | (\xi - a) \\
&= \frac{1}{i} (\langle 0 | \xi - \langle 1 |)
\end{aligned}$$

よって次の関係が成り立つ。

$$\delta(\xi - a) a = \delta(\xi - a) \xi$$

これらから単位の分解は式 9.71, 9.72 から

$$\begin{aligned}
\int |\xi\rangle \langle \xi| d\xi &= \frac{1}{i} \int (|0\rangle - \xi |1\rangle) (\langle 0| \xi - \langle 1|) d\xi \\
&= \frac{1}{i} \left\{ \int \xi |0\rangle \langle 0| d\xi + \int \xi |1\rangle \langle 1| d\xi \right\} \\
&= \sum_{n=0}^1 |n\rangle \langle n| \\
&= \mathbf{I}
\end{aligned}$$

となる。 $a^\dagger$  のコヒーレント状態は  $|\xi^*\rangle$  の固有状態を次のようにつくる。

$$\begin{aligned}
\langle \xi^* | a^\dagger &= \langle \xi^* | \xi^* \\
a^\dagger | \xi^* \rangle &= \xi^* | \xi^* \rangle
\end{aligned}$$

よって先と同様に

$$\langle \xi^* | = \langle 0 | e^{\xi^* a}$$

$$|\xi^*\rangle = \delta(a^\dagger - \xi^*) |0\rangle \tag{9.76}$$

であり、完全性が行列が入れ替わるので順番に注意して

$$\int d\xi^* |\xi^*\rangle \langle \xi^*| = \mathbf{I}$$

となることがわかる。大貫義朗氏の著書 [20] に次のような共役演算子  $*$  の対応表がある。

状態ベクトル	:	$ \cdot\rangle$	$\longleftrightarrow$	$\langle \cdot  $
演算子	:	$AB$	$\longleftrightarrow$	$B^\dagger A^\dagger$
G 数	:	$\xi_j \xi_k$	$\longleftrightarrow$	$\xi_k^* \xi_j^*$
c 数	:	$c$	$\longleftrightarrow$	$c^*$

図 9.3: [20] より

また、次の関係が成り立った。

$$e^{-a^\dagger \xi} a e^{a^\dagger \xi} = a + \xi$$

$$e^{\xi^* a} a^\dagger e^{-\xi^* a} = a^\dagger + \xi^*$$

これからコヒーレント状態の間で内積をとると次のようになる。

$$\langle \xi' | \xi \rangle = \delta(\xi' - \xi)$$

$$\langle \xi'^* | \xi^* \rangle = \delta(\xi'^* - \xi^*)$$

$$\langle \xi^* | \xi \rangle = e^{\xi^* \xi}$$

$$\langle \xi | \xi^* \rangle = -e^{\xi^* \xi}$$

例えば最後の式は次のように示す。式 9.76 と  $\delta$  関数の定義と  $a|0\rangle = 0$  を使うと

$$\begin{aligned} \langle \xi | \xi^* \rangle &= \langle 0 | \delta(\xi - a) \delta(a^\dagger - \xi^*) | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | \delta(\xi - a) \int e^{\lambda(a^\dagger - \xi^*)} d\lambda | 0 \rangle \\ &= \int \langle 0 | e^{-\lambda a^\dagger} \delta(\xi - a) e^{\lambda a^\dagger} e^{-\lambda \xi^*} d\lambda | 0 \rangle \\ &= \int \langle 0 | \delta(\xi + \lambda - a) | 0 \rangle e^{-\lambda \xi^*} d\lambda \\ &= \int \delta(\xi + \lambda) e^{-\lambda \xi^*} d\lambda \\ &= e^{\xi \xi^*} = e^{-\xi^* \xi} \end{aligned}$$

のように指数に乘る。

この結果は興味深いことに Bose 粒子と同じように  $a, a^\dagger$  の固有状態で定義したが、

$$\xi \rightarrow q, \xi^* \rightarrow p$$

のように振る舞うことがわかる。これからも位置、運動量を持つ古典光との対応が見られる。

## 10 散乱理論 [95]

前章までは量子力学的な粒子は散乱体がなくとも向かい合う方向の平面波の重ね合わせの構造をとることをみた。

ここでは実際に散乱体のある場合を考える。平面波の重ね合わせで得られる合成波は平面波になるが、散乱体があると球面波が生じる。この合成は曲線をつくる。この相違点を考察することは後部の観測理論においても重要になる。

ここでは具体的に散乱振幅を求めるいくつかの方法を学ぶ。ファインマンの経路積分の前に散乱の理論をここでまとめておく。

特に前半では桜井氏の文献 [88] を用いて、量子論の散乱の特色を学ぶ。

志半ばで惜しくも亡くなられた桜井氏の書籍は初等的であるが、量子論の本質を追う示唆に長け、教育的にも宝山である。

現代の「量子力学・上下巻」として邦訳もあり、演習問題の書籍も出ているので、若い学生は是非、読破して欲しい。

## 10.1 リップマン・シュウィンガー方程式 [88]

はじめに時間を含まない散乱過程を考える。ハミルトニアンを次のように表す。

$$H = H_0 + V$$

$H_0$  は自由粒子の運動エネルギー演算子

$$H_0 = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}$$

であり、

$$H_0 |\phi\rangle = E |\phi\rangle \quad (10.1)$$

を満たす。

ただし、ここではポテンシャルの影響を考えて、波動関数を  $|\psi\rangle$  として

$$(H_0 + V) |\psi\rangle = E |\psi\rangle \quad (10.2)$$

を満たす場合を考える。つまり、 $V \rightarrow 0$  の時は

$$|\psi\rangle \rightarrow |\phi\rangle$$

に連続的につながるはずである。式 10.2 は単純に式 10.1 から

$$|\psi\rangle = \frac{1}{E - H_0} V |\psi\rangle + |\phi\rangle$$

となる。ここでファインマンの伝播関数の時のように  $E = H_0$  での発散するのを仮想的な  $\pm i\epsilon$  のずらしを考えて、

内向き、外向きの 2 つの解を次のようにおく。

$$\left| \psi^{(\pm)} \right\rangle = \frac{1}{E - H_0 \pm i\epsilon} V \left| \psi^{(\pm)} \right\rangle + |\phi\rangle \quad (10.3)$$

これはリップマン・シュウィンガー方程式として知られている。

ポテンシャルがあることで反射波が生まれ、この散乱は古典的な波であれば次の図のように自由粒子の平面波と散乱による球面波の合成になる。図の青の縦線が図右に進行する平面波の波面で緑の円形の波が散乱波の波面を表す。その合成速度を表すのが赤の双曲線になる。この線が各点の合成速度を表す。図では散乱波と入射波の速度は等しい場合を図示している。原点から遠ざかるほど合成速度は波の単独の速度に近づき、速くなる。

ただし、 $x$  軸上は特別で散乱が同位相なら  $x > 0$  の領域ではどこでも波の速さは一定で単独の速さに等しい。

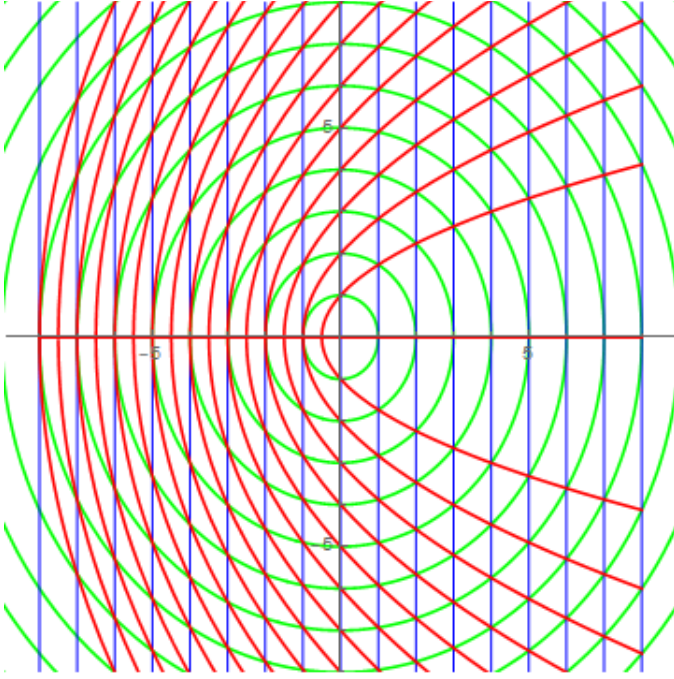


図 10.1: 球面波と平面波からできる定常波、赤線が合成速度を表す、節腹線

この式に次のように位置基底を左からかけて、内積をとる。

$$\langle \mathbf{x} | \psi^{(\pm)} \rangle = \langle \mathbf{x} | \phi \rangle + \int d^3 \mathbf{x}' \langle \mathbf{x} | \frac{1}{E - H_0 \pm i\epsilon} | \mathbf{x}' \rangle \langle \mathbf{x}' | V | \psi^{(\pm)} \rangle \quad (10.4)$$

これは積分方程式とみなせる。自由粒子の場合は

$$\langle \mathbf{x} | \phi \rangle = \frac{e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}}{(2\pi)^{3/2}}$$

となる。運動量基底で方程式を書き直すと

$$\langle \mathbf{p} | \psi^{(\pm)} \rangle = \langle \mathbf{p} | \phi \rangle + \frac{1}{E - (p^2/2m) \pm i\epsilon} \langle \mathbf{p} | V | \psi^{(\pm)} \rangle \quad (10.5)$$

が得られる。これは前章の式 7.42 のファインマンの伝播関数による散乱である。

次にこれを実際に計算してみる。

はじめに位置基底で前章の Green 関数の式、

$$G_{\pm}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \equiv \frac{1}{2m} \langle \mathbf{x} | \frac{1}{E - H_0 \pm i\epsilon} | \mathbf{x}' \rangle \quad (10.6)$$

とおくと

$$\begin{aligned} G_{\pm}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') &= \frac{1}{2m} \langle \mathbf{x} | \frac{1}{E - H_0 \pm i\epsilon} | \mathbf{x}' \rangle \\ &= \frac{1}{2m} \int d^3 \mathbf{p}' \int d^3 \mathbf{p}'' \langle \mathbf{x} | \mathbf{p}' \rangle \langle \mathbf{p}' | \frac{1}{E - (\mathbf{p}'^2/2m) \pm i\epsilon} | \mathbf{p}'' \rangle \langle \mathbf{p}'' | \mathbf{x}' \rangle \end{aligned}$$

デルタ関数法を用いて、入射波は平面波なので  $E = k^2/2m$  とすると  $\epsilon' = 2m\epsilon$  も微小として次のように置き換えてもよい。

$$\begin{aligned} G_{\pm}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') &= \frac{1}{2m} \int \frac{d^3 \mathbf{p}'}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{p}'\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}}{(k^2/2m) - (\mathbf{p}'^2/2m) \pm i\epsilon} \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 \mathbf{p}' \frac{e^{i\mathbf{p}'\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}}{\mathbf{p}'^2 - k^2 \mp i\epsilon'} \end{aligned}$$

となる。この積分を実行するためにまず、等方性から、散乱波は球面波になるからなす角を  $\theta$  として、

$$\mathbf{p}' \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}') = q|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \cos \theta$$

$$\mathbf{p}'^2 = q^2$$

$$d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi = d(\cos \theta) d\phi$$

$$d^3\mathbf{p}' = dq q^2 d\Omega = dq q^2 d(\cos \theta) d\phi$$

とおける。

次に変数変換をして、角度積分を実行する。

$$\begin{aligned} G_{\pm}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') &= -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} q^2 dq \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^{+1} d(\cos \theta) \frac{e^{iq|\mathbf{x}-\mathbf{x}'| \cos \theta}}{q^2 - k^2 \mp i\epsilon'} \\ &= -\frac{2\pi}{(2\pi)^3} \frac{1}{i|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \int dq \frac{q \left( e^{iq|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} - e^{-iq|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \right)}{q^2 - k^2 \mp i\epsilon'} \end{aligned} \quad (10.7)$$

となる。最後の  $\cos \theta$  積分が重要な働きをする。

散乱波とのなす角  $\cos \theta$  で  $\theta = 0 \rightarrow \pi$  で反転させた結果になり、進行が逆の反射波をつくる。

これは散乱が基本的に観測的な伝播関数の元に起きることを示す。

さらに球面波であるので沸きだしの特異点

$$\frac{1}{i|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

がこの積分から生じる。この操作と計量との関係を後に考察する。ここでは散乱計算を進めると最後に  $q$  積分は虚数が出てきたおかげで Green 関数のところで行ったように次の値で極を持つから

$$q = \pm\sqrt{k^2 \pm i\epsilon'} \simeq \pm\sqrt{k^2 \pm 2mi\epsilon} = \pm k'$$

として、留数積分ができる。 $\epsilon \rightarrow 0$  で  $k' \rightarrow k$  だから

$$\begin{aligned} G_{\pm}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') &= -\frac{1}{8\pi^2} \frac{1}{i|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \int dq \frac{q \left( e^{iq|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} - e^{-iq|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \right)}{(q + k')(q - k')} \\ &= -\frac{1}{8\pi^2} \frac{2\pi i}{i|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} [Res_+ + Res_-] \\ &= -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{\pm ik'|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \rightarrow -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{\pm ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \end{aligned} \quad (10.8)$$

を得る。この式は Green 関数であるのでクライン・ゴールドン方程式を満たす。

$$(\square + k^2) G_{\pm}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

従って、式 10.4 から式 10.6, 10.8 から

$$\langle \mathbf{x} | \psi^{(\pm)} \rangle = \langle \mathbf{x} | \phi \rangle - 2m \int d^3\mathbf{x}' \frac{1}{4\pi} \frac{e^{\pm ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \langle \mathbf{x}' | V | \psi^{(\pm)} \rangle \quad (10.9)$$

MKS 系で

$$\langle \mathbf{x} | \psi^{(\pm)} \rangle = \langle \mathbf{x} | \phi \rangle - \frac{2m}{\hbar^2} \int d^3\mathbf{x}' \frac{1}{4\pi} \frac{e^{\pm ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \langle \mathbf{x}' | V | \psi^{(\pm)} \rangle \quad (10.10)$$



となる。第1項が入射波、第2項が散乱波を表す。

興味あることに、この波も±の符号付きなので、正符号が平面波に対し、外向き、負符号は内向きの球面波が加わる。

通常では正符号の境界条件はわかりやすい。散乱体からの反射波が放射状にくると思えばいい。

しかし、負符号はその向きが反対になるのでこれは元々自由場でも2つの波が量子論の基本にあったように、散乱波からも粒子性を持つ波が生じているという量子論独特のものになる。後部の観測の理論で詳しく考察するが散乱があると、その場所が特定され、そこから球面波が生じるので、双対な、反対向きの波はあらゆる方向からくることになり、これにより、散乱波の運動量が決まる。

この問題は後部で考えるとして、ここでは桜井氏の処方に従って負符号の解はとりあえず猶予し、次に局所ポテンシャルを考えよう。

### 10.1.1 局所ポテンシャルの場合 [88]

次のような局所的なポテンシャルを考える。

$$\langle \mathbf{x}' | V | \mathbf{x}'' \rangle = V(\mathbf{x}') \delta^{(3)}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'')$$

前節の結果から

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}' | V | \psi^{(\pm)} \rangle &= \int d^3 \mathbf{x}'' \langle \mathbf{x}' | V(\mathbf{x}') | \mathbf{x}'' \rangle \langle \mathbf{x}'' | \psi^{(\pm)} \rangle \\ &= V(\mathbf{x}') \langle \mathbf{x}' | \psi^{(\pm)} \rangle \end{aligned}$$

となるので式は10.9は次のように書き換えられる。

$$\langle \mathbf{x} | \psi^{(\pm)} \rangle = \langle \mathbf{x} | \phi \rangle - 2m \int d^3 \mathbf{x}' \frac{1}{4\pi} \frac{e^{\pm ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} V(\mathbf{x}') \langle \mathbf{x}' | \psi^{(\pm)} \rangle \quad (10.11)$$

この時のベクトル  $\mathbf{x}$  は下図の観測点の方向を向く。有効なポテンシャル領域は図の斜線領域に限られる。

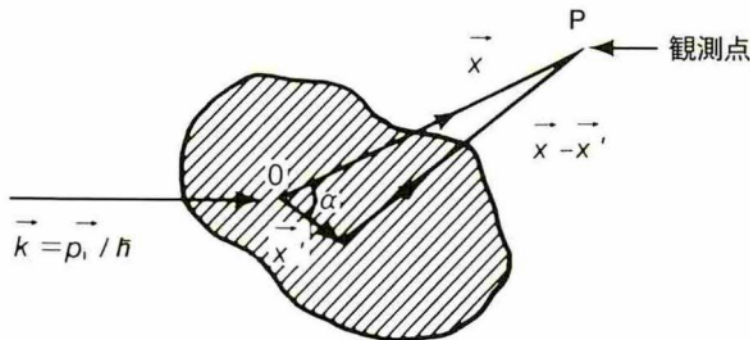


図 10.2: [88] より：局所ポテンシャルと観測点

この時の観測点はこの領域のはるか外部遠方にあると考えてよい。

$$|\mathbf{x}| \gg |\mathbf{x}'|$$

とできるので図のように原点に散乱点を取り

$$r = |\mathbf{x}|, r' = |\mathbf{x}'|$$

$$\alpha = \angle(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$$

とおく。  $r \gg r'$  として、

$$\begin{aligned} |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| &= \sqrt{r^2 - 2rr' \cos \alpha + r'^2} \\ &= r \left( 1 - \frac{2r'}{r} \cos \alpha + \frac{r'^2}{r^2} \right)^{1/2} \\ &= r - \mathbf{x}' \cdot \mathbf{e}_x \end{aligned}$$

$$\mathbf{e}_x \equiv \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$$

$$\mathbf{k}' \equiv k \mathbf{e}_x$$

とおく。これで  $\mathbf{k}'$  が観測点  $\mathbf{x}$  への波数ベクトルとみなせる。

さらにこの時、

$$\langle \mathbf{k} | \mathbf{k}' \rangle = \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$$

を課すと、

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{k} \rangle = \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}}{(2\pi)^{3/2}}$$

とすることができるので外向き球面波のみをとると  $r \rightarrow \infty$  では式 10.11 は

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x} | \psi^{(+)} \rangle &\rightarrow \langle \mathbf{x} | \mathbf{k} \rangle - \frac{1}{4\pi} 2m \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}}{r} \int d^3 \mathbf{x}' e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}'} V(\mathbf{x}') \langle \mathbf{x}' | \psi^{(+)} \rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left[ e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}}{r} f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \right] \end{aligned} \quad (10.12)$$

とかける。ただし、球面波の振幅に対応する  $f(\mathbf{k}', \mathbf{k})$  は次のように位置空間でのフーリエ変換になり、

$$\begin{aligned} f(\mathbf{k}', \mathbf{k}) &\equiv -\frac{1}{4\pi} (2\pi)^{3/2} 2m \int d^3 \mathbf{x}' e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}'} V(\mathbf{x}') \langle \mathbf{x}' | \psi^{(+)} \rangle \\ &= -\frac{1}{4\pi} (2\pi)^3 2m \langle \mathbf{k}' | V(\mathbf{x}') | \psi^{(+)} \rangle \end{aligned} \quad (10.13)$$

波数表現される。これは後節で定義する散乱振幅とみなせる。

ただし、内向きの散乱波にたいしては

$$f(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = -\frac{1}{4\pi} (2\pi)^3 2m \langle -\mathbf{k}' | V(\mathbf{x}') | \psi^{(-)} \rangle \quad (10.14)$$

を得る。ただし、このリップマン・シュウィンガーの理論では入射粒子というより、平面波そのものを扱いかい、時間的にも空間的にも

無限に広がっている波動関数を考えている。さらに入射に粒子性を持たせるために、後節で平面波を波束に修正して散乱を考察する。

## 10.2 散乱断面積

はじめにいくつかの定義式をまとめておく。ここでは単位の確認のために MKS 系を用いることもある。

立体角  $\Omega$  として、単位時間に  $d\Omega$  に散乱される粒子数を単位時間に単位面積を通過する入射粒子数で割ったものを

散乱断面積として

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \frac{r^2 d\Omega |\mathbf{j}_{sc}|}{|\mathbf{j}_{in}|} = |f(\mathbf{k}', \mathbf{k})|^2 d\Omega \quad (10.15)$$

になる。よって微分断面積 (differential\_cross\_section) は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\mathbf{k}', \mathbf{k})|^2 \quad (10.16)$$

となる。

単位時間あたりに立体角  $d\Omega$  に散乱される粒子数を  $dN$  とする。

散乱方向に垂直な平面の単位面積を単位時間あたりに通過する粒子数をフラックスといい  $j_{sc}$  で表す。

$$dN = j_{sc} r^2 d\Omega$$

で定義さえる。微分断面積を用いてあらわすと

$$dN = j_{in} \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$$

である。全断面積 (total\_cross\_section) を  $\sigma_{tot}$  とすると

$$\sigma_{tot} = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{d\sigma}{d\Omega} \quad (10.17)$$

となる。前章のネーターの定理から十分遠方であれば確率の流れから微分断面積を得ることができる。

MKS 単位系にすると  $[m^2]$  になるが、素粒子の分野ではバーン  $[b] = [10^{-28} m^2]$  を用いる。

確率の流れを式 3.112 の空間成分をとって、MKS 単位系にすると  $[m^{-2} s^{-1}]$  になる。

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}) = \frac{\hbar}{2mi} (\phi^* \nabla \phi - (\nabla \phi^*) \phi) = \frac{1}{m} \text{Re} \left[ \phi^* \frac{\hbar}{i} \nabla \phi \right] \quad (10.18)$$

とする。極座標で

$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}$$

であったのでこれから  $r \rightarrow \infty$  で境界条件を考えると、透過波と外向き散乱波から式 10.12 から簡単にして

$$\phi(\mathbf{x}) = e^{ik \cdot \mathbf{x}} + f(\theta) \frac{e^{ik \cdot r}}{r} \quad (10.19)$$

のようにおける。この式は下図の散乱の様子をよく表現している。

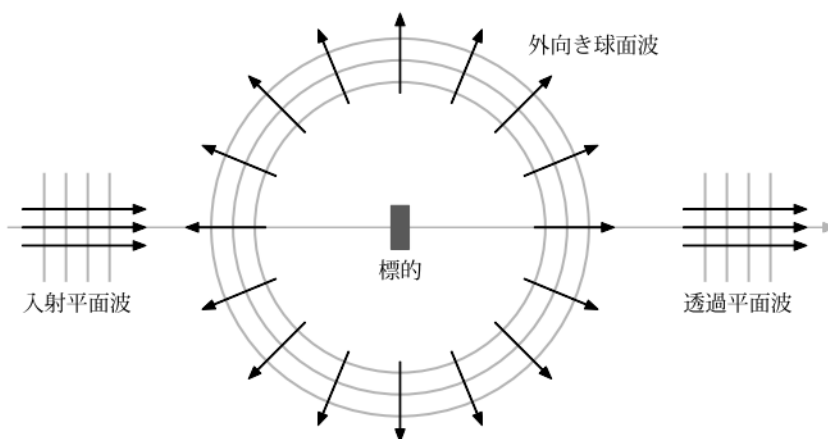


図 10.3: 平面波と球面波

平面波は明らかにシュレディンガー方程式

$$(\nabla^2 + k^2)\phi(x) = 0$$

を満たすから、球面波に  $\nabla^2$  を作用させる。

$$\begin{aligned}\nabla^2 \left( f(\theta) \frac{e^{ik \cdot r}}{r} \right) &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left( f(\theta) \frac{e^{ik \cdot r}}{r} \right) + \frac{1}{r^2} \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi^2} \right] \left( f(\theta) \frac{e^{ik \cdot r}}{r} \right) \\ &= -k^2 f(\theta) \frac{e^{ik \cdot r}}{r} + \frac{e^{ik \cdot r}}{r^3} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \\ &\rightarrow -k^2 f(\theta) \frac{e^{ik \cdot r}}{r}, (r \rightarrow \infty)\end{aligned}$$

となるので  $r \rightarrow \infty$  の条件でシュレディンガー方程式を満たす。

前章のネーターの定理式 3.112 から空間成分のみをとり式 10.19 の確率の流れを求める。

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}) = -\frac{i}{2m} (\phi^* \nabla \phi - \phi \nabla \phi^*) = \frac{1}{m} \text{Re} \left( \phi^* \frac{\hbar}{i} \nabla \phi \right)$$

となるから、

$$\frac{\hbar}{i} \nabla \phi(\mathbf{x}) = \hbar k \left( \mathbf{e}_x e^{ik \cdot x} + \mathbf{e}_r \frac{|f(\theta)|^2}{r^2} + \mathcal{O}(r^{-2}) \right)$$

なので  $r \rightarrow \infty$  の条件で

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}) = \frac{\hbar k}{m} \left( \mathbf{e}_x e^{ik \cdot x} + \mathbf{e}_r \frac{|f(\theta)|^2}{r^2} + (\mathbf{e}_r + \mathbf{e}_x) \text{Re} \left[ f(\theta) \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}-\mathbf{x})}}{r} \right] \right) \quad (10.20)$$

であり、

$$j_x = j_{in} = \frac{\hbar k}{m}, j_{sc} = \frac{\hbar k}{m} \frac{|f(\theta)|^2}{r^2}$$

となる。特にこの式の第3項は入射平面波と外向き球面波の干渉項で単純に重ね合わせの原理が成り立っている。

しかし、ここでは流れの密度は実としたが、この式から虚成分も  $\mathbf{0}$  ではないことがわかる。これが何を表すかは後に考察する。

### 10.3 ボルン近似 [88]

前節式 10.13 は未知の関数  $\psi^{(+)}$  を持っているので、この散乱波をほぼ入射波と等しいとして近似したものをボルン近似という。

$$\langle \mathbf{x}' | \psi^{(+)} \rangle \simeq \langle \mathbf{x}' | \phi \rangle = \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}}{(2\pi)^{3/2}}$$

これは次の図のように特徴的な散乱振幅となる。図 a では散乱中心に波束が近づき、図 b で散乱し、外向きの球面波と、同じ入射波を生じる過程である。

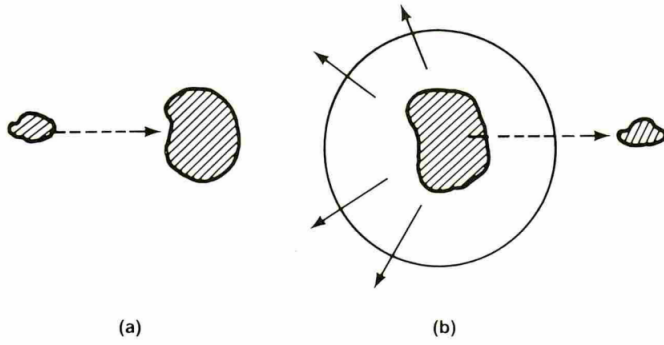


図 10.4: [88] より : 1 次の散乱過程

この時の振幅は

$$\begin{aligned}
 f^{(1)}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) &= -\frac{1}{4\pi} 2m \int d^3 \mathbf{x}' e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}'} V(\mathbf{x}') \\
 &= -\frac{1}{4\pi} 2m \int d^3 \mathbf{x}' e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}'} V(\mathbf{x}')
 \end{aligned} \tag{10.21}$$

となり、よく見れば  $\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$  に関する 3 次元フーリエ変換になっている。そこで球対称ポテンシャルの場合は下図から

$$|\mathbf{k}' - \mathbf{k}| \equiv q = 2k \sin \frac{\theta}{2}$$

となっている。古典的には運動量の差が力積なので  $q$  はその大きさを表すことになる。

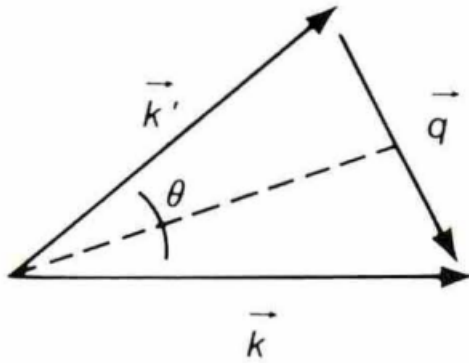


図 10.5: [88] より : 入射方向  $\mathbf{k}$  と散乱方向  $\mathbf{k}'$  その差  $\mathbf{q}$  でフーリエ変換する

空間対称性から  $r = |\mathbf{x}|, r' = |\mathbf{x}'|$  として、運動量とエネルギー保存成り立つから

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}' = q|\mathbf{x}'| \cos \theta$$

$$|\mathbf{k}'| = k$$

$$d^3 \mathbf{x}' = dr r^2 d(\cos \theta) d\phi$$

で変換すると式 10.21 は式 10.7 と同様に角度積分ができて

$$\begin{aligned}
f^{(1)}(\theta) &= -\frac{1}{2}2m\frac{1}{iq}\int dr r^2 \frac{e^{i+qr} - e^{-iqr}}{r} V(r) \\
&= -\frac{m}{iq}\int dr r (e^{i+qr} - e^{-iqr}) V(r)
\end{aligned}$$

となる。

振幅を 1 として無限速では

$$\phi(\mathbf{r}) = e^{ik\cdot x} + f(\theta)\frac{e^{ik\cdot r}}{r} \quad (10.22)$$

となる。

### 10.3.1 高次の場合 [88]

ここでさらに高次のボルン近似を考える。

遷移振幅が次のように摂動項の展開和として  $V$  は実関数として

$$T = V \left( 1 + \frac{1}{E - H_0 + i\epsilon} V + \frac{1}{E - H_0 + i\epsilon} V \frac{1}{E - H_0 + i\epsilon} V \dots \right) \quad (10.23)$$

展開出来る場合とし、式 10.3 のリップマン・シュウィンガーの方程式を次のように表す。

$$T|\phi\rangle = V|\phi\rangle + V\frac{1}{E - H_0 + i\epsilon}T|\phi\rangle$$

前節の結果から、この散乱振幅は式 10.10 から

$$f(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = -\frac{1}{4\pi}2m(2\pi)^3 \langle \mathbf{k}' | T | \mathbf{k} \rangle \quad (10.24)$$

であらわさえる。そこで  $n$  次の展開を考えると

$$f(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(\mathbf{k}', \mathbf{k})$$

と表すことができる。例えば

$$\begin{aligned}
f^{(1)}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) &= -\frac{1}{4\pi}2m(2\pi)^3 \langle \mathbf{k}' | T | \mathbf{k} \rangle \\
f^{(2)}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) &= -\frac{1}{4\pi}2m(2\pi)^3 \left\langle \mathbf{k}' \left| V \frac{1}{E - H_0 + i\epsilon} V \right| \mathbf{k} \right\rangle \\
f^{(3)}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) &= -\frac{1}{4\pi}2m(2\pi)^3 \left\langle \mathbf{k}' \left| V \frac{1}{E - H_0 + i\epsilon} V \frac{1}{E - H_0 + i\epsilon} V \right| \mathbf{k} \right\rangle \\
&\vdots
\end{aligned}$$

と表すことができる。さらに  $V(\mathbf{x})$  の計算が必要な時は式 10.6 を用いて

$$\begin{aligned}
f^{(2)} &= -\frac{1}{4\pi}2m(2\pi)^3 \int d^3x' \int d^3x'' \langle \mathbf{k}' | \mathbf{x}' \rangle V(\mathbf{x}') \times \left\langle \mathbf{x}' \left| \frac{1}{E - H_0 + i\epsilon} \right| \mathbf{x} \right\rangle V(\mathbf{x}'') \langle \mathbf{x}'' | \mathbf{k} \rangle \\
&= -\frac{1}{4\pi}2m \int d^3x' \int d^3x'' e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}'} V(\mathbf{x}') [2mG_+(\mathbf{x}', \mathbf{x}'')] V(\mathbf{x}'') e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}''}
\end{aligned}$$

と表すことができる。これは次の図のように 2 回の散乱過程を、観測点を共に外において起きていると考えられる。

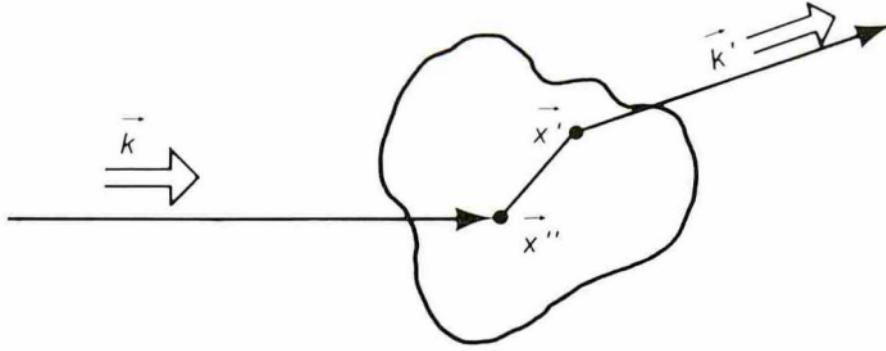


図 10.6: [88] より : 2 次のボルン近似

#### 10.4 光学定理 [88]

次に、この近似を用いて前方散乱  $\theta = 0$  の場合を考えると  $\mathbf{k}$  と  $\mathbf{k}'$  が等しくなるので

$$f(\mathbf{k}, \mathbf{k}) = -\frac{1}{4\pi} 2m (2\pi)^3 \langle \mathbf{k} | T | \mathbf{k} \rangle$$

が成り立つ。  $V$  はエルミートであるとするので式 10.13 から

$$\begin{aligned} \text{Im} \langle \mathbf{k} | T | \mathbf{k} \rangle &= \text{Im} \langle \mathbf{k} | T | \psi^{(+)} \rangle \\ &= \text{Im} \left[ \left( \langle \psi^{(+)} | - \langle \psi^{(+)} | V \frac{1}{E - H_0 - i\epsilon} V | \psi^{(+)} \rangle \right) \right] \end{aligned}$$

とできるので主値  $Pr.$  を

$$\frac{1}{E - H_0 - i\epsilon} = Pr. \left( \frac{1}{E - H_0} \right) + i\pi\delta(E - H_0)$$

とにおいて、次のように書き換える。

$$\begin{aligned} \text{Im} \left[ \left( \langle \psi^{(+)} | - \langle \psi^{(+)} | V \frac{1}{E - H_0 - i\epsilon} V | \psi^{(+)} \rangle \right) \right] &= \text{Im} \left( \langle \psi^{(+)} | V | \psi^{(+)} \rangle \right) - \text{Im} \left\langle \psi^{(+)} \left| V Pr. \frac{1}{E - H_0} V \right| \psi^{(+)} \right\rangle \\ &\quad - \text{Im} \left\langle \psi^{(+)} \left| V i\pi\delta(E - H_0) \right| \psi^{(+)} \right\rangle \end{aligned}$$

ここで  $V$  はエルミートとすると第 1,2 項は 0 になる。

$$\begin{aligned} \text{Im} \left( \langle \psi^{(+)} | V | \psi^{(+)} \rangle \right) &\rightarrow 0 \\ \text{Im} \left\langle \psi^{(+)} \left| V Pr. \frac{1}{E - H_0} V \right| \psi^{(+)} \right\rangle &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

従って、

$$d^3k' = k'^2 dE \left( \frac{dk'}{dE} \right) d\Omega$$

で変数変換すると

$$\begin{aligned} \text{Im} \langle \mathbf{k} | T | \mathbf{k} \rangle &= -\pi \langle \psi^{(+)} | V \delta(E - H_0) V | \psi^{(+)} \rangle \\ &= -\pi \langle \mathbf{k} | T^\dagger \delta(E - H_0) T | \mathbf{k} \rangle \\ &= -\pi \int d^3k' \langle \mathbf{k} | T | \mathbf{k}' \rangle \langle \mathbf{k}' | T | \mathbf{k} \rangle \delta \left( E - \frac{k'^2}{2m} \right) \\ &= -\pi \int d\Omega m k |\langle \mathbf{k}' | T | \mathbf{k} \rangle|^2 \end{aligned}$$

従ってこの時の微分断面積は

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\Omega} &= |f(\mathbf{k}, \mathbf{k})|^2 \\ &= \left(2m^2\pi(2\pi)^3\right) |\langle \mathbf{k}' | T | \mathbf{k} \rangle|^2\end{aligned}$$

式 10.24 を用いて

$$\begin{aligned}Im(f(0)) &= -\frac{1}{4\pi} 2m(2\pi)^3 Im \langle \mathbf{k} | T | \mathbf{k} \rangle \\ &= -\frac{1}{4\pi} 2m(2\pi)^3 (-\pi mk) \int d\Omega |\langle \mathbf{k}' | T | \mathbf{k} \rangle|^2 \\ &= \frac{k}{4\pi} \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} \\ &= \frac{k}{4\pi} \sigma_{tot}\end{aligned}$$

を得る。

つまり、散乱過程で散乱振幅のユニタリー性は重要で、確率の保存を担っていることが示唆される。

### 10.4.1 確率の流れ

よく用いられる図のような散乱過程で粒子的なイメージは波動関数の波束とみなす必要があり、粒子数の連続の式、保存則は

確率の流れによって保存されないとはいけない。

先に得た結果では散乱振幅の虚成分も確率として加えないといけないことが示唆された。ここで、それが何を表すか導く。

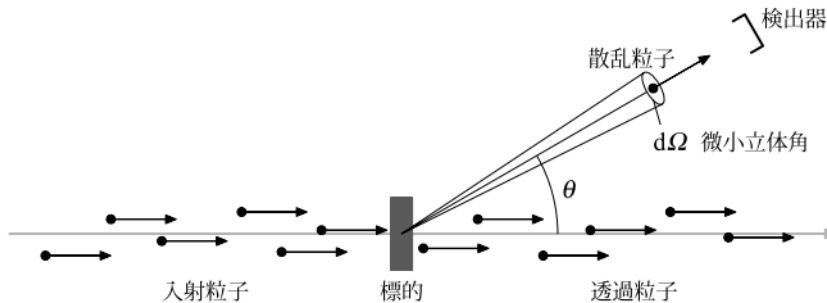


図 10.7: 散乱過程

単純に前節の式 10.20 を用いて次のように合成波をおく。

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}) = \frac{\hbar k}{m} \left( \mathbf{e}_x e^{ik \cdot \mathbf{x}} + \mathbf{e}_r \frac{|f(\theta)|^2}{r^2} + (\mathbf{e}_r + \mathbf{e}_x) Re \left[ f(\theta) \frac{e^{ik \cdot (\mathbf{r}-\mathbf{x})}}{r} \right] \right)$$

この式の3つの項に対応した粒子数を  $N_1, N_2, N_3$  とおく。

一方確率の流れから考えると連続の式

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$

が常に成り立つ。さらにこの場合

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho = 0$$

となるので

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$



となる。ただし、十分大きな領域で観測点を外にみた表面積

$$\int_V \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{e}_r d^2 d\Omega = 0$$

が成り立つとする。

つまり、大きな球面から球内部に流れ込む、確率の流れと、球面から外にでる流れの和が0になるという、立体版のキルヒホフの第1法則と考えてよい。ここでの流れはいたるところで一定として次のように速さ  $v$  で表す。

$$j_{in} = j_x = \frac{\hbar k}{m} = v$$

立体角の関係式

$$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_x = \cos \theta, d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$$

から粒子数も次のように表面から入る場合と出る場合の和を  $N_1$  とすると  $j_{in}$  からは

$$\begin{aligned} N_1 &= \mathbf{e}_r \cdot \int \mathbf{e}_x j_{in} r^2 d\Omega = j_{in} r^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cos \theta \sin \theta d\theta \\ &= j_{in} \pi r^2 \int_0^\pi \sin 2\theta d\theta = 0 \end{aligned}$$

となる。次に散乱で生じた

$$j_{sc} = v \frac{|f(\theta)|^2}{r^2}$$

とすると

$$N_2 = \mathbf{e}_r \cdot \int \mathbf{e}_r j_{sc} r^2 d\Omega = v \int |f(\theta)|^2 d\Omega = v \sigma_{tot}$$

とできる。この結果は自明である。

最後に第3項は入射平面波と外向き球面波の干渉項である。

$$N_3 = \mathbf{e}_r \cdot \int (\mathbf{e}_r + \mathbf{e}_x) j_{in} Re \left[ f(\theta) \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{x})}}{r} \right] r^2 d\Omega$$

ここで、よくやるように

$$d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi = d(\cos \theta) d\phi$$

とすると、 $\cos \theta$  に部分積分を用いて  $\mathbf{x} = \mathbf{r} \cos \theta$  だから

$$N_3 = j_{in} 2\pi r Re \left[ -\frac{1}{ikr} \left[ f(\theta) (1 + \cos \theta) e^{ikr(1 - \cos \theta)} \right]_{-1}^{+1} + \frac{1}{ikr} \int_{-1}^{+1} d(\cos \theta) [f(\theta) (1 + \cos \theta)] e^{ikr(1 - \cos \theta)} \right]$$

この第1項は次のようになる。

$$\left[ f(\theta) (1 + \cos \theta) e^{ikr(1 - \cos \theta)} \right]_{-1}^{+1} = f(0) \cdot 2 - 0 = 2f(0)$$

ここで第2項は十分  $r$  が大きいと  $kr \gg 1$  となるので激しく振動する部分の積分が0になる。積分に寄与するのは

$$1 - \cos \theta = 0$$

付近のみである。よって第2項の積分を無視すると

$$N_3 = v 2\pi r Re \left[ -\frac{2f(0)}{ikr} \right] = -2\pi r v \left( -\frac{2}{kr} Im[f(0)] \right) = -v \frac{4\pi}{k} Im[f(0)]$$

ここで、全粒子数の保存

$$N_1 + N_2 + N_3 = 0$$

を仮定すれば

$$0 + v\sigma_{tot} - v\frac{4\pi}{k}Im[f(0)] = 0$$

となり、

$$Im[f(0)] = \frac{k}{4\pi}\sigma_{tot}$$

が得られる。これを光学定理 (optical thorem) という。

これは  $\theta = 0$  の前方散乱のみ有効になる、2点を波源に持つ古典波と同じである。後方  $\theta = \pi$  では弱め合うわけである。

つまり

$$N_3 = -v\frac{k}{4\pi}Im[f(\theta = 0)] = -v\sigma_{tot} = \mathbf{e}_r \cdot (-\mathbf{e}_x v\sigma_{tot})$$

によって、後方には位相が  $\pi$  ずれた波が伝播するために、入射線方向の波は消えることになる。

## 10.5 S 行列

2粒子の散乱問題における時間依存をみるために次のシュレディンガー方程式を考える。

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi_\alpha(\mathbf{x}, t) = H\psi_\alpha(\mathbf{x}, t) = \left[-\frac{\nabla^2}{2m} + V(\mathbf{x})\right]\psi_\alpha(\mathbf{x}, t)$$

ここでも十分過去、と未来では自由粒子に近似出来るとして

$$i\frac{\partial}{\partial t}\phi_\alpha(\mathbf{x}, t) = -\frac{\nabla^2}{2m}\phi_\alpha(\mathbf{x}, t)$$

が成り立ち、十分大きな  $T_1$  に対して、 $t < -T_1$  と  $t > T_1$  の場合は次のようにおける。

$$\psi_\alpha(\mathbf{x}, t) = \phi_\alpha(\mathbf{x}, t)$$

十分過去に  $\psi_\alpha(\mathbf{x}, t) = \phi_\alpha(\mathbf{x}, t)$  であった粒子はその後、ハミルトニアンの影響を受けて時間変化し、十分未来には自由粒子の波動関数  $\phi_\beta(\mathbf{x}, t)$  の重ね合わせになったとする。この時、次の  $\beta$  行、 $\alpha$  列の行列

$$S_{\beta\alpha} = (\phi_\beta(t'), \psi_\alpha(t')), (t' > T_2) \quad (10.25)$$

を十分大きな  $T_2$  として定義し、 $t > T_2$  であれば自由粒子のようにふるまっているとする。

この行列  $S$  を散乱行列、あるいは **S** 行列 (S-matrix) として定義する。

つまり、散乱ポテンシャルが影響してくると自由粒子の波動関数の位相が様々に変化して、その足し合わせが  $\psi_\alpha$  である。

よって展開係数を  $c$  として、

$$\psi_\alpha(\mathbf{x}, t') = \sum_n \phi_n(\mathbf{x}, t') c_{n\alpha}, (t' > T_2) \quad (10.26)$$

とおける。ところがこの両辺に  $\phi_n$  を掛けて内積をとると、 $\phi_n$  の完全性から次のように S 行列の成分が求まる。

$$\psi_\alpha \cdot \phi_n = c_{n\alpha} = S_{n\alpha}$$

この時、ハミルトニアン  $H$  が行列要素を決めるわけだが、ハミルトニアンがエルミートであれば

$$H^\dagger = H$$

$H$  が時間依存していても、シュレディンガー方程式の  $\psi_\beta^*(t), \psi_\alpha(t)$  の内積は時間依存しない。

つまり、

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V d^3x \psi_\beta^*(\mathbf{x}, t) \cdot \psi_\alpha(\mathbf{x}, t) = 0$$

これから

$$\left[ \int_V d^3x \psi_\beta^*(\mathbf{x}, t) \cdot \psi_\alpha(\mathbf{x}, t) \right]_{t < -T_1} = \left[ \int_V d^3x \psi_\beta^*(\mathbf{x}, t') \cdot \psi_\alpha(\mathbf{x}, t') \right]_{t' > T_2} = \delta_{\alpha\beta}$$

一方で、式 10.25 から

$$\psi_\alpha(\mathbf{x}, t') = \sum_\gamma \phi_\gamma(\mathbf{x}, t') S_{\gamma\alpha}$$

とおけるから次のような内積をつくる。

$$\begin{aligned} (\psi_\beta(\mathbf{x}, t'), \psi_\alpha(\mathbf{x}, t')) &= \sum_{\gamma\gamma'} (\phi_\gamma(\mathbf{x}, t'), \phi_{\gamma'}(\mathbf{x}, t')) S_{\gamma\beta}^* S_{\gamma'\alpha} \\ &= \sum S_{\gamma\beta}^* S_{\gamma\alpha} = \delta_{\beta\alpha} \end{aligned}$$

この結果は行列  $S$  のユニタリ性を表している。同時に確率の保存も示している。

$$S^\dagger S = S S^\dagger = 1$$

従って、おもしろいことに  $S$  の自由粒子の解  $\phi$  と、時間依存シュレディンガー方程式の解  $\psi$  を入れ替えても成り立つ。

$$\sum (S^{-1})_{\gamma\beta}^* (S^{-1})_{\gamma\alpha} = \delta_{\beta\alpha}$$

さらに  $\mathbf{T}$  行列として式 10.23 の  $T$  を用いて

$$S_{\beta\alpha} = \delta_{\beta\alpha} - iT_{\beta\alpha}$$

と表すこともできる。前節の光学定理は入射粒子と散乱粒子が同じ状態  $\alpha = \beta$  の時と考えられる。

## 10.6 球面波 [88]

第 1 部のラプラス方程式において、極座標を用いた解には自然に  $l, m$  の整数化が得られることを見た。

また、第 2 部の角運動量において

### 10.6.1 平面球面変換関数

散乱により、球面波を考えてきたが、平面波が運動量の固有状態であったように、球面波が角運動量の固有状態になる。

興味あることに、エネルギー保存は共有して、運動量から角運動量に保存則が変化していく仮定が散乱の中にあるわけである。

そこで、自由粒子の固有状態  $|\phi\rangle$ 、運動量固有状態  $|\mathbf{k}\rangle$  とする。自由粒子のハミルトニアン  $H_0$  は角運動量を  $\mathbf{L}$  とした時、 $\mathbf{L}^2$  と、 $L_z$  と同時固有状態をとれる。これを球面波状態といい、

$$|E, l, m\rangle$$

で表す。この節では質量は  $M$  とする。第 2 部の角運動量で学んだように  $l, m$  はそれぞれ方位量子数、磁気量子数を表す。

量子論が重ね合わせの可能な理論であるので自由粒子を

$$|\phi\rangle = |E, l, m\rangle \text{ or } |\phi\rangle = |\mathbf{k}\rangle$$

で表すかは、ものさしとして、デカルト座標をとるか、極座標をとるかのよう任意のはずである。  
 が、方や角運動量保存で支配され、方や運動量保存で支配されるので、これらは境界条件によって大きく左右される。

しかも、角運動量には量子数が多くあり、束縛条件が増えているように見える。

そこで、位置と運動量の変換関数が平面波であったように、運動量固有状態と、角運動量固有状態を変換する関数

$$\langle \mathbf{k} | E, l, m \rangle$$

を始めに導こう。

はじめに球面波固有状態の規格化を次の条件で決めることにする。

$$\langle E', l', m' | E, l, m \rangle = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \delta(E - E') \quad (10.27)$$

第2部の角運動量の球面調和関数  $Y_l^m$  を用いて次のように仮定する。

$$\langle \mathbf{k} | E, l, m \rangle = g_{lE}(k) Y_l^m(\hat{\mathbf{k}})$$

第2部で球対称でスピンのない粒子の波動方程式が球座標でかけて、球面調和関数は

$$\langle \mathbf{x}' | n, l, m \rangle = R_{nl}(r) Y_l^m(\theta, \phi)$$

を満たした。方向固有状態を  $|\hat{\mathbf{n}}\rangle$  として

$$\langle \hat{\mathbf{n}} | l, m \rangle = Y_l^m(\hat{\mathbf{n}})$$

である。具体的  $m = 0$  であれば第1部であつかった、ルジャンドル多項式  $P_l$  を用いて

$$Y_l^0(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta) \quad (10.28)$$

である。  $l = 2, m = 0$  の場合は次のような図になる。

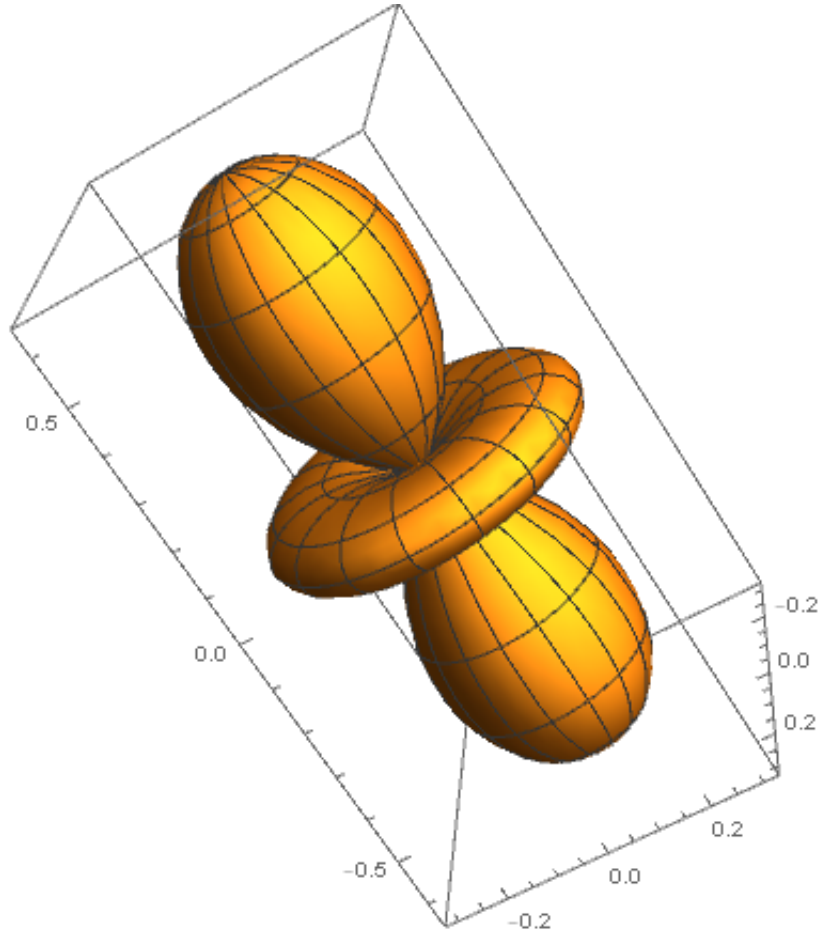


図 10.8: 球面調和関数  $Y_2^0(\theta, \phi)$

まず、 $z$  方向の運動量固有状態には軌道角運動量の  $z$  成分はないので

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{p} = (\mathbf{x} \times \mathbf{p}) \cdot \mathbf{p} = 0$$

となるはずだから

$$L_z |\mathbf{k}_z\rangle = (xp_y - yp_x) |\mathbf{k}_z\rangle = 0$$

が成り立つ。これから次のように展開する。平面波に磁気量子数はないので常に  $m = m' = 0$  として、

$$|\mathbf{k}_z\rangle = \sum_{l'} \int dE' |E', l', 0\rangle \langle E', l', 0 | \mathbf{k}_z\rangle$$

第 2 部の角運動量と同様に任意の方向は次の回転演算子  $D$  を作用させれば得られる。

$$D_{m'm}^l(\alpha, \beta, \gamma) = \langle l, m' | \exp\left(-i\frac{1}{2}\sigma_3\alpha\right) \exp\left(-i\frac{1}{2}\sigma_2\beta\right) \exp\left(-i\frac{1}{2}\sigma_3\gamma\right) | l, m \rangle$$

$$|\mathbf{k}\rangle = D_{00}^l(\phi, \theta, 0) |\mathbf{k}_z\rangle$$

よって左から  $\langle E, l, m |$  をかけて

$$\begin{aligned} \langle E, l, m | \mathbf{k}\rangle &= \sum_{l'} \int dE' \langle E, l, m | D_{00}^{l'}(\phi, \theta, 0) | E', l', 0\rangle \langle E', l', 0 | \mathbf{k}_z\rangle \\ &= \sum_{l'} \int dE' D_{m0}^{l'}(\phi, \theta, 0) |\delta_{ll'} \delta(E - E') \langle E', l', 0 | \mathbf{k}_z\rangle \\ &= D_{m0}^{l'}(\phi, \theta, 0) \langle E, l, 0 | \mathbf{k}_z\rangle \end{aligned}$$

が得られる。ここで内積  $\langle E, l, 0 | \mathbf{k}_z \rangle$  がつくる関数は上図のように角度  $\phi, \theta$  に依存しないから式 10.28 から

$$\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} g_{lE}^*(k)$$

として、これが  $m=0$  の場合だから、一般化して仮定のように

$$\langle \mathbf{k} | E, l, m \rangle = g_{lE}(k) Y_l^m(\hat{\mathbf{k}})$$

おけば、後は  $g_{lE}$  を決めればよい。まず、自由粒子のシュレディンガー方程式満たすはずだから

$$(H_0 - E) |E, l, m\rangle = 0$$

であり、この左に  $\langle \mathbf{k} |$  をかけると

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{k} | (H_0 - E) |E, l, m\rangle &= \left( \frac{k^2}{2M} - E \right) \langle \mathbf{k} | E, l, m\rangle = 0 \\ &= \left( \frac{k^2}{2M} - E \right) g_{lE}(k) Y_l^m(\hat{\mathbf{k}}) = 0 \end{aligned}$$

となる。従って、規格化定数  $N$  を残して  $Y_l^m(\hat{\mathbf{k}}) \neq 0$  だから

$$g_{lE}(k) = N \delta \left( \frac{k^2}{2M} - E \right)$$

とおけるはずである。次の変数変換と

$$\begin{aligned} E'' &= \frac{k'^2}{2M} \\ dE'' &= \frac{k'}{M} dk'' \end{aligned}$$

また、球面調和関数は

$$\int d\Omega_{\mathbf{k}''} Y_l^{m'*}(\hat{\mathbf{k}}') Y_l^m(\hat{\mathbf{k}}'') = \delta_{l'l'} \delta_{mm'}$$

を満たした。よって式 10.27 から  $\theta, \phi$  対称だから

$$\begin{aligned} \langle E', l', m' | E, l, m \rangle &= \int d^3 \mathbf{k}'' \langle E', l', m' | \mathbf{k}'' \rangle \langle \mathbf{k}'' | E, l, m \rangle \\ &= \int k''^2 dk'' \int d\Omega_{\mathbf{k}''} |N|^2 \delta \left( \frac{k''^2}{2M} - E' \right) \delta \left( \frac{k''^2}{2M} - E \right) Y_l^{m'*}(\hat{\mathbf{k}}') Y_l^m(\hat{\mathbf{k}}'') \\ &= \int M k' dE'' \int d\Omega_{\mathbf{k}''} |N|^2 \delta \left( \frac{k''^2}{2M} - E' \right) \delta \left( \frac{k''^2}{2M} - E \right) Y_l^{m'*}(\hat{\mathbf{k}}') Y_l^m(\hat{\mathbf{k}}'') \\ &= |N|^2 M k' \delta(E - E') \delta_{l'l'} \delta_{mm'} \end{aligned}$$

が得られる。こでから規格化定数は質量を  $M$  として

$$N = \frac{1}{\sqrt{Mk}}$$

ととればよい。よって

$$g_{lE} = \frac{1}{\sqrt{Mk}} \delta \left( \frac{k'^2}{2M} - E \right)$$

であり、求める変換関数は

$$\langle \mathbf{k} | E, l, m \rangle = \frac{1}{\sqrt{Mk}} \delta \left( \frac{k'^2}{2M} - E \right) Y_l^m(\hat{\mathbf{k}})$$

が得られる。従って、平面波は球面波基底を用いて

$$\begin{aligned} |\mathbf{k}\rangle &= \sum_l \sum_m \int dE |E, l, m\rangle \langle E, l, m | \mathbf{k}\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{Mk}} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l |E, l, m\rangle |_{E=k^2/2M} Y_l^{m*}(\hat{\mathbf{k}}) \end{aligned}$$

これが量子論的な結果であるのはヒルベルト空間の全運動量を足し合わせて位置が決められたと同じように全方向量子数を足し合わせて、1つの波数が決定される。逆にあらゆる衝突径数を足し合わせないと球面波が決まらない。

次に運動量と共役な関係にある位置空間を状態ベクトルに選び、

$$\langle \mathbf{x} | E, l, m \rangle$$

を考える。第2部の球面波の波動関数を用いて、 $l$ 次の球ベッセル関数を  $j_l(k, r)$  とする。未知な定数を  $c_l$  とおけば

$$\langle \mathbf{x} | E, l, m \rangle = c_l j_l(k, r) Y_l^m(\hat{\mathbf{r}})$$

とかけるはずである。そこで  $c_l$  を求めるために既知な次の関数をつかうとルジャンドル関数  $P_l$  を用いて、

$$\sum_m Y_l^m(\hat{\mathbf{r}}) Y_l^{m*}(\hat{\mathbf{k}}) = \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{r}})$$

となったことを利用すると

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x} | \mathbf{k}\rangle &= \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{(2\pi)^{3/2}} \\ &= \sum_l \sum_m \int dE \langle \mathbf{x} | E, l, m \rangle \langle E, l, m | \mathbf{k}\rangle \\ &= \sum_l \sum_m \int dE c_l j_l(k, r) Y_l^m(\hat{\mathbf{r}}) \frac{1}{\sqrt{Mk}} \delta\left(E - \frac{k^2}{2M}\right) Y_l^{m*}(\hat{\mathbf{k}}) \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_l (2l+1) \frac{1}{\sqrt{Mk}} c_l j_l(k, r) P_l(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \end{aligned} \quad (10.29)$$

となる。ここでも全  $l$  による足し上げが  $\langle \mathbf{x} | \mathbf{k}\rangle$  を作っている。

球ベッセル関数を  $j_l(k, r)$  は次の公式を満たした。

$$j_l(k, r) = \frac{1}{2(i)^l} \int_{-1}^1 e^{ikr \cos \theta} P_l(\cos \theta) d(\cos \theta)$$

また、ルジャンドル多項式が

$$\int_{-1}^1 P_l(\xi) P_{l'}(\xi) d\xi = \begin{cases} \frac{2}{2l+1} & (l = l') \\ 0 & (l \neq l') \end{cases}$$

を満たした。

従って、

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x} | \mathbf{k}\rangle &= \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{(2\pi)^{3/2}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_l (2l+1) \frac{1}{2(i)^l} \int_{-1}^1 e^{ikr \cos \theta} P_l(\cos \theta) d(\cos \theta) P_l(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_l (2l+1) (i)^l j_l(k, r) P_l(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \end{aligned} \quad (10.30)$$

従って、10.29,10.30 を比べると

$$c_l = (i)^l \sqrt{\frac{2Mk}{\pi}}$$

が求まる。よって

$$\langle \mathbf{k} | E, l, m \rangle = \frac{1}{\sqrt{Mk}} \delta \left( E - \frac{k'^2}{2M} \right) Y_l^m(\hat{\mathbf{k}})$$

$$\langle \mathbf{x} | E, l, m \rangle = (i)^l \sqrt{\frac{2Mk}{\pi}} j_l(k, r) Y_l^m(\hat{\mathbf{r}})$$

## 10.7 ファインマン図 [86]

これまでいくつかの散乱過程みたが、これを図式的に表すのに便利なのがファインマン図である。

次のような電子、陽電子の対消滅で  $\mu^+, \mu^-$  の  $\mu$  ニュートリノが生成される過程を考えよう。

粒子の正面衝突のようなイメージになるが、古典的なマクロな物質は大きさがはっきりしているので衝突する、しないは

この大きさによりはっきりするが素粒子の場合はそうもいかない。

そこでおおざっぱにこの衝突半径(断面積)を求めるにはどうしたらよいだろうか。

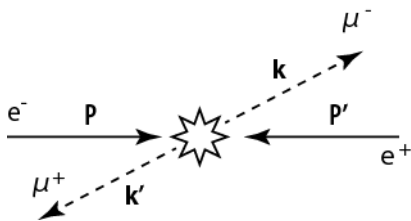


図 10.9: 電子、陽電子対消滅

$\hbar = 1, c = 1, e = 1$  として、重心系のエネルギー  $E_{CM}$  を用いて 4 元ベクトル表示で

$$|\mathbf{p}| = |\mathbf{p}'| = |\mathbf{k}| = |\mathbf{k}'| = E = \frac{E_{CM}}{2}$$

とすると、この衝突の散乱断面積  $\sigma$  は立体角  $\Omega$  を用いて

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 E_{CM}^2} |\mathcal{M}|^2 \quad (10.31)$$

のように書ける。この場合の単位系では

$$E_{CM}^{-2} \simeq (\text{Length})^{-2}$$

となるので高エネルギーになるほど、小さい領域を見る必要があり、微分断面積は小さくなる。

ここでの  $\mathcal{M}$  は無次元な量で、これを決めるのに便利なのがファインマン規則である。

そこでこの散乱のファインマン図を描くと次のようになる。



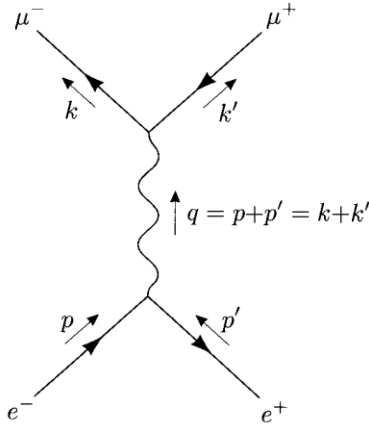


図 10.10: [86] より:FeynmanDiagram

この時の相互作用項がつくるハミルトニアンを  $H_I$  とすると状態変化を表すブラケット表示は

$$\langle \phi_{final} | H_I | \phi_{initial} \rangle$$

となる。これから式 10.31 の  $\mathcal{M}$  は次の値になる。

$$\mathcal{M} \simeq \langle \mu^+ \mu^- | H_I | \gamma \rangle^\mu \langle \gamma | H_I | e^+ e^- \rangle_\mu \quad (10.32)$$

これらは 4 元ベクトルのローレンツ不変な形になっている。この  $\mathcal{M}$  を散乱振幅という。

また、相互作用を仲介しているのが photon  $\gamma$  であることを表している。

さらに電子がスピンを持つことを考えると角運動量保存則から次のような図に拡張して考えて見る。

図右に z 軸、上方に x 軸をとり、

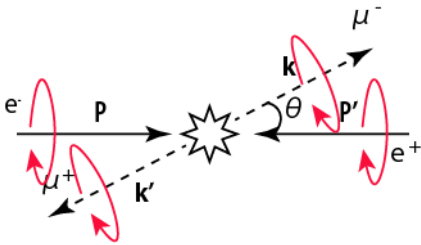


図 10.11: 電子と負ミューオンは右手系、陽電子と正ミューオンは左手系

これを表現するために同じ角運動量を持った次の偏光 4 元ベクトルを導入しよう。

$$e^\mu = (0, 1, i, 0)$$

これにより、電子対の状態が次のようにベクトルで表される。

$$\langle \gamma | H_I | e^+ e^- \rangle^\mu \propto e(0, 1, i, 0)$$

とおけば、ミューオンの状態はこれに y 軸まわりの  $\pi - \theta$  の回転を加えて

$$\langle \gamma | H_I | \mu^+ \mu^- \rangle^\mu \propto e(0, \cos(\pi - \theta), i, -\sin(\pi - \theta))$$

で表すことができる。これから散乱振幅が次のように計算できる。複素共役をかけることに注意し、

$$\mathcal{M} \simeq \langle \mu^+ \mu^- | H_I | \gamma \rangle^\mu \langle \gamma | H_I | e^+ e^- \rangle_\mu = -e^2 (1 + \cos \theta)$$

と表すことができる。これをスピン左周りを L、右周りを R として電子対からミューオンへの遷移は

$$\mathcal{M}(RL \rightarrow RL) = -e^2(1 + \cos \theta) \quad (10.33)$$

と表す。

では次に電子も陽電子も同じ左周りである場合を考える。

この場合の全角運動量は 0 になる。また、角度  $\theta$  はより小さくなる。第 2 部の角運動量の合成からクレブシュ-ゴルダン係数  $c_m$  が  $j = 1, m = 0$  では

$$\frac{1}{\sqrt{2}}$$

となるから、上下スピンの組み合わせは

$$|\uparrow\downarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|j = 1, m = 0\rangle + |j = 0, m = 0\rangle)$$

となる。しかし、4 元ベクトル考えると回転だけではなくて、並進ブーストによるものも考える必要がある。左巻きの電子 4 元ベクトルの結合を

$$|e_R^- e_R^+\rangle$$

とすると  $\mathcal{M}(RR \rightarrow RL)$  のような振幅は 0 になる。式 10.33 の他に振幅が 0 にならないものは

$$\mathcal{M}(RL \rightarrow LR) = -e^2(1 - \cos \theta)$$

$$\mathcal{M}(LR \rightarrow RL) = -e^2(1 - \cos \theta)$$

$$\mathcal{M}(LR \rightarrow LR) = -e^2(1 + \cos \theta)$$

なのがあるので

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 E_{CM}^2} |\mathcal{M}|^2 = \frac{\alpha^2}{4E_{CM}^2} (1 + \cos^2 \theta)$$

を微分断面積とする。

## 10.8 散乱振幅

ここで、相互作用する系を考えたいわけだが、今度よく登場する  $\phi^4$  の相互作用を持つスカラー場を考える。従ってラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [(\partial\phi)^2 - m^2\phi^2] - \lambda\phi^4 \quad (10.34)$$

であり、 $\lambda$  は相互作用の強さを示す。この時の運動方程式はクライン・ゴールドンにポテンシャルを加えて、

$$(\square + m^2)\phi(x) + 4\lambda\phi^3(x) = 0 \quad (10.35)$$

となる。ここで  $\phi(x)$  をヒルベルト空間上の演算子と考えて、次のような交換関係が成り立った。

$$[\phi(x^0, \mathbf{x}), \phi(x^0, \mathbf{y})] = 0$$

$$[\pi(x^0, \mathbf{x}), \phi(x^0, \mathbf{y})] = -i\delta^{(3)}(x - y)$$

$$[\pi(x^0, \mathbf{x}), \pi(x^0, \mathbf{y})] = 0$$

1 粒子状態のスカラー場の波動関数が

$$\phi(x) = \sum a_k u_k(x) + \sum a_k^\dagger u_k^*(x)$$

のようにかけた。つまり、定常波のように時間的な変化がない。  
しかし、相互作用があれば運動方程式が非線形になるので、例えば 1 粒子から 3 粒子への変化

$$a_k^\dagger |0\rangle \rightarrow (a_k^\dagger)^3 |0\rangle$$

がおきたり、2 粒子状態

$$a_k^\dagger a_l^\dagger |0\rangle \rightarrow a_k^\dagger a_l^\dagger |0\rangle$$

のような時間発展が考えられる。これらの過程は散乱と呼ばれる。  
このような散乱の過程は導入でみたように散乱振幅で記述される。  
ここではこれを計算するためのいくつかの方法を紹介する。

## 11 分配関数法 [95]

Green 関数の章の定義した  $N$  点関数の母関数

$$Z[J] = \sum_N \frac{1}{N!} \int d^4x_1 d^4x_2 \cdots d^4x_N G(x_1, x_2, \cdots, x_N) J(x_1) J(x_2) \cdots J(x_N)$$

から Green 関数を式 8.29 から

$$G(x_1, x_2, \cdots, x_N) = \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \cdots \frac{\delta}{\delta J(x_1)} Z[J] \Big|_{J=0}$$

とすることができた。さらに指数関数の定義から式 8.27 を用いて

$$Z[J] = \langle 0 | T \left[ \exp \left( \int d^4x J \phi \right) \right] | 0 \rangle$$

とできた。これから  $N$  点関数として Green 関数が

$$G(x_1, x_2, \cdots, x_N) = \langle 0 | T \phi(x_1) \phi(x_2) \cdots \phi(x_N) | 0 \rangle$$

のようになる。また Green 関数のところであつかった式 8.32 から  $Z[J]$  は

$$(\square_x + m^2 - i\epsilon) \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} = \langle 0 | T \left[ (\square_x + m^2) \phi(x) e^{\int J \phi} \right] | 0 \rangle - iJ(x) Z[J]$$

を満たす。この時、極ずらしの  $i\epsilon$  を用いたことで式 7.39 のファインマンの伝播関数を使うことになる。  
自由場であれば

$$(\square + m^2) \phi(x) = 0$$

なので 10.34 を用いると

$$\begin{aligned} (\square_x + m^2 - i\epsilon) \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} &= \langle 0 | T \left[ (\square_x + m^2) \phi(x) e^{\int J \phi} \right] | 0 \rangle - iJ(x) Z[J] \\ &= - \langle 0 | T \left[ 4\lambda \phi^3 \phi(x) e^{\int J \phi} \right] | 0 \rangle - iJ(x) Z[J] \end{aligned} \quad (11.1)$$

とすることができる。ここで汎関数微分の式 8.25 から

$$\frac{(i\hbar)^n}{Z^J(t_f, t_i)} \frac{\delta^n Z^J(t_f, t_i)}{\delta J(t_1) \cdots \delta J(t_n)} \Big|_{J=0} = \langle 0 | T Q(t_1) \cdots Q(t_n) | 0 \rangle$$

だったので  $Z[J] = \langle 0 | T \left[ \exp \left( \int d^4x J \phi \right) \right] | 0 \rangle$  の場合は単純に

$$\frac{\delta}{\delta J(x_1)} \frac{\delta}{\delta J(x_2)} \frac{\delta}{\delta J(x_3)} Z[J] = \langle 0 | T \left[ \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) e^{\int J \phi} \right] | 0 \rangle$$

となる。よって式 11.1 は

$$(\square_x + m^2 - i\epsilon) \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} + 4\lambda \left( \frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^3 Z[J] = -iJ(x)Z[J] \quad (11.2)$$

となる。相互作用がない場合の解は Green 関数を用いて

$$Z_0[J] = \exp \left[ \frac{1}{2} \int d^4x d^4y J(x)G(x,y)J(y) \right]$$

であったので、この式の解は  $N$  を規格化定数として

$$Z[J] = N \exp \left[ -i\lambda \int d^4x \left( \frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^4 \right] Z_0[J] \quad (11.3)$$

これが式 11.2 を満たすことを確認してみよう。式 11.1 から、上式の  $Z_0[J]$  を代入し、

$$\begin{aligned} (\square_x + m^2 - i\epsilon) \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} &= (\square_x + m^2 - i\epsilon) \frac{\delta}{\delta J(x)} \left( N \exp \left[ -i\lambda \int d^4x \left( \frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^4 \right] Z_0[J] \right) \\ &= N \exp \left[ -i\lambda \int d^4x \left( \frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^4 \right] (\square_x + m^2 - i\epsilon) \frac{\delta Z_0[J]}{\delta J(x)} \\ &= N \exp \left[ -i\lambda \int d^4x \left( \frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^4 \right] (-iJ(x)Z_0[J]) \\ &= \exp \left[ -i\lambda \int d^4x \left( \frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^4 \right] (-iJ(x)) \exp \left[ i\lambda \int d^4x \left( \frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^4 \right] Z[J] \end{aligned}$$

ここで有用な恒等式

$$\begin{aligned} \exp \left[ -i\lambda \int d^4x \left( \frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^4 \right] (-iJ(x)) \exp \left[ i\lambda \int d^4x \left( \frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^4 \right] &= -iJ(x) - \lambda \left[ \int \left( \frac{\delta}{\delta J} \right)^4, J(x) \right] \\ &= -iJ(x) - 4\lambda \left( \frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^3 \end{aligned}$$

を用いると

$$(\square_x + m^2 - i\epsilon) \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} = \left( -4\lambda \left( \frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^3 - iJ(x) \right) Z[J]$$

となる。さらに次の恒等式を使う。

$$F \left[ \frac{\delta}{\delta \phi} \right] G[\phi] e^{\int J\phi} |_{\phi=0} = G \left[ \frac{\delta}{\delta J} \right] F[J]$$

すると式 11.3 は次のように変形できる。

$$Z[J] = N \exp \left[ \frac{1}{2} \int d^4x d^4y J(x)G(x,y)J(y) \right] \exp \left[ -i\lambda \int d^4x \left( \frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^4 + \int J\phi \right] |_{\phi=0}$$

これで  $J\phi$  の項を左に移動させ、変形できるので  $\frac{1}{2} \int d^4x d^4y J(x)G(x,y)J(y) = \frac{1}{2} \int G\delta\delta$  でおきかえ、

$$\begin{aligned} \exp \left[ \frac{1}{2} \int G\delta\delta \right] \exp [J\phi] &= \exp \left[ \int J\phi \right] \left[ \exp \left[ -\int J\phi \right] \exp \left[ \frac{1}{2} \int G\delta\delta \right] \exp \left[ \int J\phi \right] \right] \\ &= \exp \left[ \int J\phi \right] \exp \left\{ \frac{1}{2} \int G\delta\delta + \left[ \frac{1}{2} \int G\delta\delta, \int J\phi \right] + \frac{1}{2!} \left[ \left[ \frac{1}{2} \int G\delta\delta, \int J\phi \right], \int J\phi \right] \right\} \\ &= \exp \left[ \int J\phi \right] \exp \left[ \frac{1}{2} \int G\delta\delta + \int JG\delta + \int JGJ \right] \end{aligned}$$

とすることができるので

$$Z[J] = \exp \left[ \frac{1}{2} \int J\phi J \right] \left[ \exp \left[ \int JG\delta \right] F[\phi] \right]_{\phi=0}$$

$$F[\phi] = N \exp \left[ \frac{1}{2} \int G\delta\delta \right] \exp \left[ -i\lambda \int \phi^4 \right]$$

となる。これは一般的な相互作用項  $S_{int}$  を用いて  $\exp(-i\lambda \int \phi^4)$  を  $\exp(iS_{int})$  に置き換え、一般化できる。

$$F[\phi] = N \exp \left[ \frac{1}{2} \int G\delta\delta \right] \exp [iS_{int}[\phi]]$$

次に規格化因子  $N$  を決めるためには  $Z[0] = 1$  として

$$N \left[ \exp \left[ \frac{1}{2} \int G\delta\delta \right] \exp [iS_{int}[\phi]] \right]_{\phi=0} = 1$$

を用いればよい。

## 12 摂動法 [86]

次に同じ  $\phi^4$  で相互作用する場合の散乱振幅を摂動論で求める。  
相互作用の影響を考え、基底状態は真空ではなく次の散乱を考える。

$$\langle \Omega | T\phi(x)\phi(y) | \Omega \rangle$$

自由スカラー場の場合であればファインマンの伝播関数式 7.39 を用いて

$$\langle 0 | T\phi(x)\phi(y) | 0 \rangle = \Delta_F = \int_{closed} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left( \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \right) e^{-ip \cdot (x-y)}$$

をここでも利用する。

相互作用のあるハミルトニアンは自由スカラー粒子の場合、

$$H = H_0 + H_{int} = H_{KG} + \int d^3x \frac{\lambda}{4!} \phi^4(\mathbf{x}) \quad (12.1)$$

とする。ハイゼンベルグ描像で

$$\phi(x) = e^{iHt} \phi(\mathbf{x}) e^{-iHt}$$

のように時間と分離する。

初期状態の波動関数を

$$\phi(t_0, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} (a_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} + a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{-\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}})$$

として  $t \neq t_0$  の時、ハイゼンベルグ描像で

$$\phi(t, \mathbf{x}) = e^{iH(t-t_0)} \phi(t_0, \mathbf{x}) e^{-iH(t-t_0)}$$

12.1 から少々都合がよいが、 $\lambda$  をうまく利用して相互作用の項を

$$\phi_I(t, \mathbf{x}) \equiv \phi(t, \mathbf{x})|_{\lambda=0} = e^{iH(t-t_0)} \phi(t_0, \mathbf{x}) e^{-iH(t-t_0)}$$

とする。これによって

$$\phi_I(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} (a_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} + a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{-\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}) |_{x^0=t-t_0}$$

となり、時間的に使い分けることができる。この手法はユークリッド化法で後に一般化する。ここで一般にユニタリ行列の時間推進演算子

$$U(t, t_0) = e^{iH_0(t-t_0)} e^{-iH(t-t_0)}$$

を用いて

$$\begin{aligned} \phi(t, \mathbf{x}) &= e^{iH(t-t_0)} e^{-iH_0(t-t_0)} \phi_I(t, \mathbf{x}) e^{iH_0(t-t_0)} e^{-iH(t-t_0)} \\ &\equiv U^\dagger(t, t_0) \phi_I(t, \mathbf{x}) U(t, t_0) \end{aligned}$$

となる。ちなみにこの  $U(t, t_0)$  は次のシュレディンガー方程式を満たす。

$$\begin{aligned} i \frac{\partial U}{\partial t} &= e^{iH_0(t-t_0)} (H - H_0) e^{-iH(t-t_0)} \\ &= e^{iH_0(t-t_0)} (H_{int}) e^{-iH(t-t_0)} \\ &= e^{iH_0(t-t_0)} (H_{int}) e^{-iH_0(t-t_0)} e^{iH_0(t-t_0)} e^{-iH(t-t_0)} \\ &= H_I(t) U(t, t_0) \end{aligned}$$

ただし、

$$H_I(t) = e^{iH_0(t-t_0)} H_{int} e^{-iH(t-t_0)} = \int d^3x \frac{\lambda}{4!} \phi_I^4(\mathbf{x})$$

とする。次にこれを計算する方法を紹介する。

## 12.1 Dyson 形式 [113]

相互作用表示を用いてシュレディンガー方程式を表すと、式 3.32 から

$$i \frac{d|\phi\rangle_I}{dt} = H_I |\phi\rangle_I$$

となった。そこで  $|\phi\rangle_I$  の時間発展をユニタリ演算子  $U$  を用いて

$$|\phi(t)\rangle_I = U(t, t_0) |\phi(t_0)\rangle$$

として代入すると、

$$i \frac{dU}{dt} = H_I(t) U$$

である。時間順序に並べ替えたものを  $T$  積として次のように定義する。

$$U(t, t_0) = T \exp \left( -i \int_{t_0}^t H_I(t') dt' \right) \quad (12.2)$$

これは展開表示で

$$U(t, t_0) = 1 - i \int_{t_0}^t dt' H_I(t') + \frac{(-i)^2}{2} \left[ \int_{t_0}^t dt' \int_{t'}^t dt'' H_I(t'') H_I(t') + \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' H_I(t'') H_I(t') \right] + \dots$$

となる。ただし、 $t_0 < t' < t''$  の時に

$$\int_{t_0}^t dt' \int_{t'}^t dt'' H_I(t'') H_I(t') = \int_{t_0}^t dt'' \int_{t_0}^{t''} dt' H_I(t'') H_I(t')$$

$t_0 < t'' < t'$  の時に

$$\int_{t_0}^t dt' \int_{t'}^t dt'' H_I(t'') H_I(t') = \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' H_I(t') H_I(t'')$$

とする。

この時、 $U(t, t_0)$  の時間微分は時刻  $t$  が時間の終点にとることになるので、次のように  $T$  積の右外に出せる。

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} T \exp \left( -i \int_{t_0}^t H_I(t') dt' \right) &= T \left[ H_I(t) \exp \left( -i \int_{t_0}^t dt' H_I(t') \right) \right] \\ &= H_I(t) T \exp \left( -i \int_{t_0}^t H_I(t') dt' \right) \end{aligned}$$

よって展開時にも終端を前に出せば良いから始点 ( $t_0$ ) を固定して、

$$U(t, t_0) = 1 - i \int_{t_0}^t dt' H_I(t') + (-i)^2 \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' H_I(t') H_I(t'') + (-i)^3 \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' \int_{t_0}^{t''} dt''' H_I(t') H_I(t'') H_I(t''') + \dots$$

とすればよい。これを **Dyson 形式** という。

## 12.2 多時間化 [86]

次に順序積  $T$  を用いると 2 点間では

$$\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 T \{ H_I(t_1) H_I(t_2) \}$$

とかける。これは時間を 2 次元体積とみなして体積積分した結果に等しい。

1 次元的な時間推進を多次元空間の体積積分化することが順序積の効果になる。

この様子を文献 [113] では次のように表している。

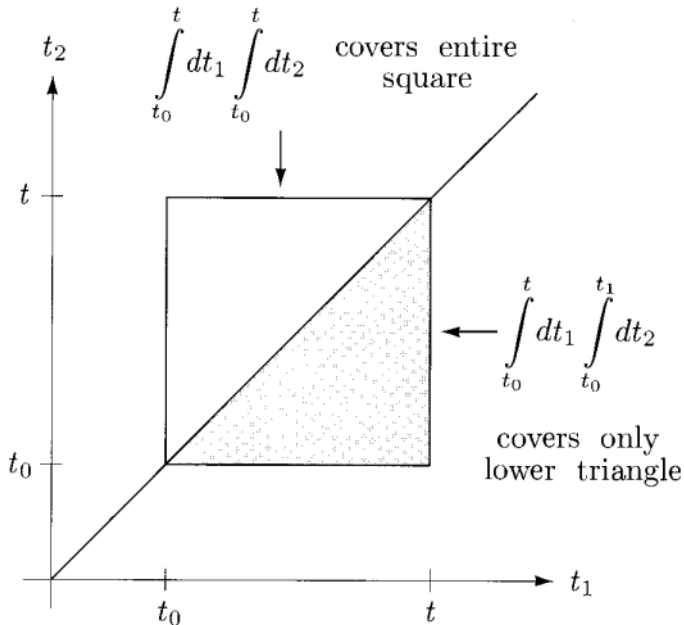


図 12.1: [86] より：時間の平面化

これはすぐに多次元に拡張できる。

$$\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_I(t_1) H_I(t_2) \cdots H_I(t_n) = \frac{1}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 dt_2 \cdots dt_n T \{ H_I(t_1) \cdots H_I(t_n) \}$$

左辺が指数関数の定義式になっていることがわかる。つまり、時間推進の足し合わせが式 12.2

$$U(t, t_0) = 1 + (-i) \int_{t_0}^t dt_1 H_1(t_1) + \frac{(-i)^2}{2!} \int_{t_0}^t dt_1 dt_2 T \{H_I(t_1) H_I(t_2)\} + \dots$$

$$\equiv T \left\{ \exp \left( -i \int_{t_0}^t H_I(t') dt' \right) \right\}$$

であることが自然に導ける。ただし、自然が自動的に時間順をつくるわけではなく、これは観測の問題と関わる。

つまり、 $T$  演算子は観測者依存をする。

時間区分をするという操作が指数関数的に広がりをつけるが、ここでは全体的な順序、つまり、向きをつけることを除いてその中身は見えなくなる粗視化がおきていることも重要である。

従って自然界の時間順序をつけるシステムが明確になれば、さらに自然にこの関係が導けるであろう。

### 12.3 デルタ関数法 [113]

次に文献 [113] の Cambridge の手法を紹介する。例として次の Yukawa 相互作用のハミルトニアンを考える。

$$H_{int} = g \int d^3x \psi^\dagger \psi \phi \quad (12.3)$$

時間発展を担うのは  $\psi(t)$  で

$$|\psi(t)\rangle = U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle$$

とする。また、次のように  $a, b, c, a^\dagger, b^\dagger, c^\dagger$  の生成、消滅演算子を持つとする。

- $\phi \sim a + a^\dagger$  これはボソンの中間子に相当する。
- $\psi \sim b + c^\dagger$  これはスピン 1/2 の核子の場合
- $\psi^\dagger \sim b^\dagger + c$  これもスピン 1/2 の核子の場合

とする。重要なのは次は保存さえる。

$$Q \equiv N_c - N_b$$

1 次の摂動では例えば  $H_{int} \sim c^\dagger b^\dagger a$  を含めば中間子を消滅させ、核子、反核子のペアを生成する散乱になり

$$\phi \rightarrow \psi \bar{\psi}$$

のような散乱過程である。

2 次の摂動では例えば  $(H_{int})^2 \sim (c^\dagger b^\dagger a) (c b a^\dagger)$  を含めば、散乱過程は

$$\psi \bar{\psi} \rightarrow \phi \rightarrow \psi \bar{\psi}$$

となる。もちろん、これらの複合された散乱もあり得る。そうすると極めて複雑な未来がまっている予感があるが、

ここに簡単にするため次のドッジ仮説を採用する。

散乱前後の初期、終状態は自由状態の固有状態と考えてよい。

これは全部の漸近的な散乱と同じように初期状態  $|i\rangle$ 、終状態  $|f\rangle$  について、次のように極限をとる。

$$|i\rangle : t \rightarrow -\infty$$

$$|f\rangle : t \rightarrow +\infty$$



そして、この両状態ではポテンシャルを無視したハミルトニアン  $H_0$  が使え、粒子数演算子  $N$  も独立して考えることができる。

この時  $S$  行列を用いて

$$\lim_{t_{\pm} \rightarrow \pm\infty} \langle f | U(t_+, t_-) | i \rangle \equiv \langle f | S | i \rangle \quad (12.4)$$

と表せる。もちろん多くの問題や課題もあるし、あくまで近似計算であることに注意はいる。

現実的に例えば、電場の中での単独な粒子の飛行を考えてみると、 $QED$  の考えでは粒子は常に周囲に仮想的なフォトンの雲を引きずることになる。これらは後の AQFT で考察する。

### 12.3.1 中間子の場合

例えば相対論的なスカラー粒子の生成を考えて、散乱の結果、次のような始状態と終状態を考える。

$$|i\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} a_{\mathbf{p}}^{\dagger} |0\rangle$$

$$|f\rangle = \sqrt{4E_{\mathbf{q}_1} E_{\mathbf{q}_2}} b_{\mathbf{q}_1}^{\dagger} c_{\mathbf{q}_2}^{\dagger} |0\rangle$$

1 粒子の中間子が運動量  $\mathbf{p}$  を持ち、散乱後、運動量  $\mathbf{q}_1$  と  $\mathbf{q}_2$  をもつ核子、反核子のペアになることを表している。

この時の散乱振幅は次のように表される。スカラー場の作用は既に 6.32 から計算できるので  $g$  を結合定数として、

$$\begin{aligned} \langle f | S | i \rangle &= -ig \langle f | \int d^4x \psi^{\dagger}(x) \psi(x) \phi(x) | i \rangle \\ &= -ig \langle f | \int d^4x \psi^{\dagger}(x) \psi(x) \phi \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{p}}^{\dagger} e^{-ik \cdot x} | 0 \rangle \\ &= -ig \langle f | \int d^4x \psi^{\dagger}(x) \psi(x) \phi \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{-ip' \cdot x} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{k}) | 0 \rangle \\ &= -ig \langle f | \int d^4x \psi^{\dagger}(x) \psi(x) e^{-ik \cdot x} | 0 \rangle \end{aligned}$$

となるデルタ関数のおかげで、空間運動量積分が簡単になる。

そこで次に

$$\begin{aligned} \psi &\sim b + c^{\dagger} \\ \psi^{\dagger} &\sim b^{\dagger} + c \end{aligned}$$

として  $\psi^{\dagger}\psi$  部分を実行すると。ここからもデルタ関数が次のように出てくる。

$$\begin{aligned} \langle f | S | i \rangle &= -ig \langle 0 | \int \int \frac{d^4x d^3k_1 d^3k_2}{(2\pi)^6} \frac{\sqrt{E_{\mathbf{q}_1} E_{\mathbf{q}_2}}}{\sqrt{E_{\mathbf{k}_1} E_{\mathbf{k}_2}}} c_{\mathbf{q}_2} b_{\mathbf{q}_1} c_{\mathbf{k}_1}^{\dagger} b_{\mathbf{k}_2}^{\dagger} | 0 \rangle e^{i(k_1 + k_2 - p) \cdot x} \\ &= -ig (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q_1 + q_2 - p) \end{aligned} \quad (12.5)$$

ただし、中間子は静止しているので  $p$  は

$$p = (m, 0, 0, 0)$$

さらに対生成で運動量が保存されるので

$$\mathbf{q}_1 = -\mathbf{q}_2$$

であり、生成したペアの核子は質量を  $M$  とする。よってエネルギー保存則は  $m \geq 2M$  として、

$$m = 2\sqrt{M^2 + |\mathbf{q}|^2}$$

が成り立つ。実際に、次節の Wick の定理を用いて、散乱振幅を計算する。

## 12.4 Wick の定理 [113]

### 12.4.1 時間順序積

前章の Green 関数で Wick より N 点関数を 2 点関数とみなす方法を紹介した。ここで散乱振幅の計算に応用する。

前節の Dyson 形式から  $|f\rangle, |i\rangle$  を自由場の固有状態としておいて、

$$\langle f|S|i\rangle = \langle f|T\{H_I(x_1)H_I(x_2)\cdots H_I(x_n)\}|i\rangle$$

のように時間順序積で遷移振幅を計算できることが与えられたが、Wick の理論はどのように時間積を計算するかを示してくれる。

前章の伝播関数の向きがここでは重要になる。

ハイゼンベルグ描像でスカラー場を考えよう。

$$\phi(x) = \phi^+(x) + \phi^-(x)$$

と置き、

$$\phi^+(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} a_{\mathbf{p}} e^{-ip \cdot x}$$

$$\phi^-(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{+ip \cdot x}$$

とすると、前章での反粒子化を使って、負のエネルギーの時間を反転させ、時間順序積を次のように決める。

- $x^0 > y^0$  の時

$$\begin{aligned} T\phi(x)\phi(y) &= \phi(x)\phi(y) \\ &= (\phi^+(x) + \phi^-(x)) (\phi^+(y) + \phi^-(y)) \\ &= \phi^+(x)\phi^+(y) + \phi^-(x)\phi^+(y) + \phi^-(y)\phi^+(x) + [\phi^+(x), \phi^-(y)] + \phi^-(x)\phi^-(y) \end{aligned}$$

前章の式 7.24 より伝播関数を用いて

$$D(x-y) = [\phi^+(x), \phi^-(y)], (x^0 > y^0) \quad (12.6)$$

$$D(y-x) = [\phi^+(y), \phi^-(x)], (y^0 > x^0) \quad (12.7)$$

とすると、この時は

$$T\phi(x)\phi(y) =: \phi(x)\phi(y) : + D(x-y) \quad (12.8)$$

とかける。ただし、

$$: \phi(x)\phi(y) : = \phi^+(x)\phi^+(y) + \phi^-(x)\phi^+(y) + \phi^-(y)\phi^+(x) + \phi^-(x)\phi^-(y)$$

である。同様に

- $y^0 > x^0$  の時

$$\begin{aligned} T\phi(x)\phi(y) &= \phi(y)\phi(x) \\ &= (\phi^+(y) + \phi^-(y)) (\phi^+(x) + \phi^-(x)) \\ &= \phi^+(y)\phi^+(x) + \phi^-(y)\phi^+(x) + \phi^-(x)\phi^+(y) + [\phi^+(y), \phi^-(x)] + \phi^-(y)\phi^-(x) \\ &=: \phi(x)\phi(y) : + D(y-x) \end{aligned}$$

従って、場分けされた、片方それぞれの立場ではなく、両方の場合を重ね合わせる立場をとると前章の式 7.24 より観測的伝播関数になる。

特に仮想的な粒子の交換相互作用のある場合はファインマン伝播関数になり

$$T\phi(x)\phi(y) =: \phi(y)\phi(x) : + \Delta_F(x-y)$$

と表すことができる。式 7.42 より

$$\Delta_F(x-y) \equiv \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} e^{ik \cdot (x-y)} \quad (12.9)$$

式 12.8 で順序積を伝播関数で表すことができ、さらにファインマン伝播関数を用いることもできるようになった。

**定理 1.** Wick の定理

そこで式 12.8 に変えて、正、逆順の時間進行を共に含めて

$$T\psi(x)\psi^\dagger(y) =: \psi(x)\psi^\dagger(y) : + \Delta_F(x-y) \quad (12.10)$$

と定義する。

非常に多くの多粒子系を扱う時に前章の式 3.68 のように置換関係が重要になる。

簡単にこの取り扱いをできるように次のように  $\overbrace{\dots}$  を定義しておくこと便利である。

$$\overbrace{\psi(x)\psi^\dagger(y)} = \Delta_F(x-y) \quad (12.11)$$

$$\overbrace{\psi(x)\psi(y)} = \overbrace{\psi^\dagger(x)\psi^\dagger(y)} = 0$$

これを用いると次の **Wick の定理** を表すことができる。

前章の Green 関数の式 8.44, 8.45 からペアの偶数場でない振幅は 0 になった。

さらに多くの状態があっても、最終的には始めと終わりの 2 点間の相関を見ればよかったので、例えば 4 状態では

$$\begin{aligned} T(\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4) = & (\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4) + \overbrace{\phi_1\phi_2} : \phi_3\phi_4 : + \overbrace{\phi_1\phi_3} : \phi_2\phi_4 : + \overbrace{\phi_1\phi_4} : \phi_2\phi_3 : \\ & + \overbrace{\phi_2\phi_3} : \phi_1\phi_4 : + \overbrace{\phi_2\phi_4} : \phi_1\phi_3 : + \overbrace{\phi_3\phi_4} : \phi_1\phi_2 : \\ & + \overbrace{\phi_1\phi_2} \overbrace{\phi_3\phi_4} + \overbrace{\phi_1\phi_3} \overbrace{\phi_2\phi_4} + \overbrace{\phi_1\phi_4} \overbrace{\phi_2\phi_3} \end{aligned}$$

のように順番を並べて書き出す作業をすればよい。

#### 12.4.2 正規順序積、対表現 [86]

時間順序積を  $T$  または  $::$  で表してきたが、もう一つ重要なのは前章の第 2 量子化でみた、生成消滅演算子の順番である。

伝播関数でみたようにこれらは実際に進行波、反射波を示すことが多く、対をつくると便利である。

そこで次のように  $N$  演算子を用いて、左側に生成演算子が来るように並べ直す。これを正規順序積という。

$$N(a_p a_k^\dagger a_q) \equiv a_k^\dagger a_p a_q$$

さらに、式 12.6,12.7 から次のような対表現方法もある。

$$\overleftarrow{\phi(x)}\overleftarrow{\phi(y)} = \begin{cases} D(x-y) = [\phi^+(x), \phi^-(y)] & (x^0 > y^0) \\ D(y-x) = [\phi^+(y), \phi^-(x)] & (y^0 > x^0) \end{cases}$$

この表記で Feynman 伝播関数が式 12.11 に対応して

$$\overleftarrow{\phi(x)}\overleftarrow{\phi(y)} = \Delta_F(x-y)$$

### 12.4.3 核子散乱 [113]

前節と同様に次のような中間子とフェルミオンペアの核子散乱を考える。

$$\phi \sim a + a^\dagger, \psi \sim b + c^\dagger, \psi^\dagger \sim b^\dagger + c$$

湯川理論に従って、この散乱は式 12.3 の相互作用が働き、

$$H_{int} = g \int d^3x \psi^\dagger \psi \phi$$

により、次のような散乱過程になる。

$$\psi\psi \rightarrow \phi \rightarrow \psi\psi$$

最初と、最後の状態を次のように生成演算子ペアで表す。

$$|i\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}} \sqrt{2E_{\mathbf{p}_2}} b_{\mathbf{p}_1}^\dagger b_{\mathbf{p}_2}^\dagger |0\rangle \equiv |p_1, p_2\rangle$$

$$|f\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}'_1}} \sqrt{2E_{\mathbf{p}'_2}} b_{\mathbf{p}'_1}^\dagger b_{\mathbf{p}'_2}^\dagger |0\rangle \equiv |p'_1, p'_2\rangle$$

この時の散乱振幅は

$$\langle f | S | i \rangle$$

で表される。この場合  $\langle f | S - 1 | i \rangle$  の散乱振幅はまったくないとする。

従ってこの時の散乱振幅は式 12.3 の相互作用をうけるとすると

$$\frac{(-ig)^2}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 T (\psi^\dagger(x_1)\psi(x_1)\phi(x_1)\psi^\dagger(x_2)\psi(x_2)\phi(x_2)) \quad (12.12)$$

を計算しないとイケない。

しかし、 $\psi^\dagger(x_1)$  が粒子を生成し、 $\psi(x_1)$  が粒子を消滅させるので  $\psi^\dagger(x)\psi^\dagger(x)$  と  $\psi(x)\psi(x)$  ペアの振幅は 0 になる。

従って、Wick の定理から交換するのがスカラー場だけになるので

$$: \psi^\dagger(x_1)\psi(x_1)\psi^\dagger(x_2)\psi(x_2) : \overbrace{\phi(x_1)\phi(x_2)}$$

を考えればよい。

最初に式 12.9 から式 12.12 の前の符号に留意し、

$$I_1 = \overbrace{\phi(x_1)\phi(x_2)} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} e^{ik \cdot (x_1 - x_2)} \quad (12.13)$$

とすると

次に有効になるのは  $\langle 0 | \psi(x) | p \rangle = e^{-ip \cdot x}$  だったから

$$\begin{aligned} I_2 &= \langle p'_1, p'_2 | : \psi^\dagger(x_1) \psi(x_1) \psi^\dagger(x_2) \psi(x_2) : | p_1, p_2 \rangle \\ &= \langle p'_1, p'_2 | \psi^\dagger(x_1) \psi^\dagger(x_2) | 0 \rangle \langle 0 | \psi(x_1) \psi(x_2) | p_1, p_2 \rangle \\ &= \left( e^{ip'_1 \cdot x_1 + ip'_2 \cdot x_2} + e^{ip'_1 \cdot x_2 + ip'_2 \cdot x_1} \right) \left( e^{-ip_1 \cdot x_1 - ip_2 \cdot x_2} + e^{-ip_1 \cdot x_2 - ip_2 \cdot x_1} \right) \\ &= e^{ix_1(p'_1 - p_1) + ix_2(p'_2 - p_2)} + e^{ix_1(p'_2 - p_1) + ix_2(p'_1 - p_2)} + e^{ix_2(p'_1 - p_1) + ix_1(p'_2 - p_2)} + e^{ix_2(p'_2 - p_1) + ix_1(p'_1 - p_2)} \end{aligned}$$

と展開できる。従って 12.12 から  $\langle f | S | i \rangle$  の  $g^2$  オーダーが次のようになる。

$$\frac{(-ig)^2}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 (I_1 I_2)$$

この計算には先のデルタ関数法 12.5 を用いて、

$$e^{ik \cdot (x_1 - x_2)}$$

が  $I_2$  全体にかかり、指数関数部分は  $\delta$  関数になるので

$$(-ig)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i(2\pi)^8}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \left( \delta^{(4)}(p'_1 - p_1 + k) \delta^{(4)}(p'_2 - p_2 - k) + \delta^{(4)}(p'_2 - p_1 + k) \delta^{(4)}(p'_1 - p_2 - k) \right)$$

となる。興味あることに次の運動量保存則が  $\delta$  関数の中に全てはいってくる。

$$k = p_1 - p'_1 = p'_2 - p_2 = p_1 - p'_2 = p'_1 - p_2 \quad (12.14)$$

つまりメソンの運動量が重心運動量のように保存される。

デルタ関数法で積分をすると次の結果が得られる。

$$i(-ig)^2 \left[ \frac{1}{(p_1 - p'_1)^2 - m^2 + i\epsilon} + \frac{1}{(p_1 - p'_2)^2 - m^2 + i\epsilon} \right] (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - (p'_1 + p'_2))$$

この結果の分母の  $i\epsilon$  は仮想的な粒子の相互作用と考えてきたが、極めて重要な役割をしている。

この微小な  $\epsilon$  のおかげで発散を抑えて、現実的な物理量を与えることができる。

そこでこの  $i\epsilon$  を 0 にするような 4 元の重心系から見てみよう。この時  $|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2|$  から 12.14 より

$$\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2$$

$$k = (0, \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_1) = (0, \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}'_2)$$

とすればよい。この時

$$k^2 < 0$$

となる。よって

$$i(-ig)^2 \left[ \frac{1}{(p_1 - p'_1)^2 - m^2} + \frac{1}{(p_1 - p'_2)^2 - m^2} \right] (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - (p'_1 + p'_2))$$

となる。注意すべきはこの散乱過程で

$$\psi \bar{\psi} \rightarrow \psi \bar{\psi}, \bar{\psi} \psi \rightarrow \bar{\psi} \psi$$

Wick の定理から有効な振幅があるが

$$\psi \psi \rightarrow \bar{\psi} \bar{\psi}$$

についてはない。これは後にみる  $Q$  チャージ保存則を破ることになる。

また、他に  $g^2$  の強さを持つ散乱として、この場合では次が考えられる。

$$\psi\phi \rightarrow \psi\phi$$

これは Wick の定理から次が有効な項になる。

$$:\psi^\dagger(x_1)\phi(x_1)\psi^\dagger(x_2)\phi(x_2): \overbrace{\psi(x_1)\psi^\dagger(x_2)}$$

この計算も、この場合と同じようにできる。

これらの計算規則をまとめて図式的な表現を可能にしたのが次章の経路積分のファインマン図である。

## 12.5 1次元 [114]

## 12.6 d次元 [116]

ここで  $d$  次元の散乱を考える。はじめに自由粒子の波動関数  $\phi$  を次で表す。

$$\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$

これは平面波である。散乱後には正負の向きが重ね合わさった、定常状態を次で表す。

$$H|\psi_{\mathbf{k}}^\pm\rangle = E|\psi_{\mathbf{k}}^\pm\rangle$$

前章から有限領域での重ね合わせからは  $d$  次元球面波が生じるとして、十分遠方で

$$\psi_{\mathbf{k}}^\pm(\mathbf{r})r \rightarrow \infty \rightarrow \phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) + f_{\mathbf{k}}^\pm(\Omega) \frac{e^{\pm ikr}}{r^{\frac{d-1}{2}}}$$

とかける。これは面積要素  $d\mathbf{S}$  を横切る散乱粒子を速さを  $v$  として、立体角  $\Omega$  は

$$r^{d-1}d\Omega = d\mathbf{S}$$

を満たすので

$$v \frac{|f_{\mathbf{k}}^\pm(\Omega)|^2}{r^{d-1}} d\mathbf{S} = v |f_{\mathbf{k}}^\pm(\Omega)|^2 d\Omega$$

が成り立ち、散乱波流束を

$$\mathbf{j} \equiv \text{Im}[\psi_{scatt}^* \nabla \psi_{scatt}] = \hat{\mathbf{r}} \frac{|f_{\mathbf{k}}^\pm(\Omega)|^2}{r^{d-1}}$$

と表す。これは式 10.18 の拡張である。同様に微分断面積も式 10.15 を拡張し、

$$\frac{d\sigma_{a \rightarrow b}}{d\Omega} = ||f_{\mathbf{k}\mathbf{a}}^\pm(\Omega_b)|^2|$$

とする。

## 13 経路積分 [20]

ある作用が物理的に定義されるとハミルトンの原理から作用積分の極値として古典的な粒子の経路は決定された。さらに Feynman の経路積分では粒子が A 点から B 点に至る経路の確率振幅として作用積分が位相の中に入る形で定義される。作用積分は粒子の通過点について無限大での積分をおこない。これらを掛け合わせる形で記述されるが、通過点外のところでは量子力学に従い、無限空間での波動関数の重ね合わせの状態であり、粒子の軌道は決まらない。これは観測の問題と関わり、観測者側からすれば粒子が多価な状態と 1 価な状態を行き来することになる。粒子からすると時空内で常に 1 つの連続した曲線を描いている。これは時間という概念をこれまでのパラメタとしての数から複素数のように成分をもたせるように拡張することと同値である。作用積分においても端点の周囲ではいくつもの経路が存在し、経路積分の積分核に寄与するのはラグランジュ方程式を満足する古典経路が最も大きい。

## 13.1 量子解析 [112]

量子論と古典論との関係を詳細に考察し、可換、非可換な演算子、特に指数演算子の関係を用いて、独特な解析方法を開発した日本人研究者に鈴木増雄氏がいる。著名な鈴木-Trotter 変換 (ST) の公式を導いた、その人である。

氏は量子論の関係式に形式的ではない鋭い原理的な視点を持ってユニークな理論を展開している。

筆者は経路積分の導入に必須な内容がここにあると考える。

後にさらに発展応用され、量子的なイジングモデルやエントロピー、共形場理論等に応用される。

ここでは鈴木氏の文献 [112] を用いて、氏の量子的な解析方法から量子論的な観測の課程につながるものを学びたい。

### 13.1.1 量子古典対応

非可換なハミルトニアンを  $\mathcal{H}$  として、系の時間発展を次のように表す。

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-it\mathcal{H}/\hbar} |\Psi(0)\rangle$$

これから、具体的な解を引き出すには  $\mathcal{H}$  を記述しているヒルベルト空間の任意の正規直交基底

$$\{|\alpha\rangle, |\alpha'\rangle\}$$

の間の行列要素、(これを遷移要素という) を求めればよい。

$$\langle\alpha|\exp(x\mathcal{H})|\alpha'\rangle \equiv T_{\alpha\alpha'}(x)$$

を計算すればよい。多くの教科書ではこのハミルトニアンは対角化可能であるが、通常は困難な場合が多い。そこで指数関数の特徴を利用して、対角化をしない場合の方法を考える。

すると、これが量子論と古典論との関係を以下のように引き出すことができる。

$$\begin{aligned} T_{\alpha\alpha'}(x) &= \langle\alpha|\left(\exp\left(\frac{x}{n}\mathcal{H}\right)\right)^n|\alpha'\rangle \\ &= \sum_{\alpha_1} \sum_{\alpha_2} \cdots \sum_{\alpha_{n-1}} T_{\alpha\alpha_1}\left(\frac{x}{n}\right) T_{\alpha_1\alpha_2}\left(\frac{x}{n}\right) \cdots T_{\alpha_{n-1}\alpha'}\left(\frac{x}{n}\right) \end{aligned}$$

つまり、積分の区分球積のように  $n \rightarrow \infty$  で  $x\mathcal{H}/n$  が無限小になることで行列要素の精度を高めるわけである。

鈴木氏は近似的に行列要素

$$\tilde{T}_{\alpha_j\alpha_{j+1}}\left(\frac{x}{n}\right) \tag{13.1}$$

を求めるのに留意すべきことを次のように上げている。

- 元の系の相互作用が短距離力の場合には近似的に構成した  $\tilde{T}$  を幾何学的に表現した格子上の相互作用も短距離力になること (自明ではない)
- 元の系のハミルトニアン  $\mathcal{H}$  の対称性を保持すること (内部対称性を保つこと)
- 近似の精度を上げて、収束性、安定性もよくすること

ST 変換 準備の章であつかった Trotter の公式 1.22 から

$$e^{x(A+B)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( e^{\frac{x}{n}A} e^{\frac{x}{n}B} \right)^n$$

$$e^{x(A_1+A_2+\dots+A_r)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( e^{\frac{x}{n}A_1} e^{\frac{x}{n}A_2} \dots e^{\frac{x}{n}A_r} \right)^n \quad (13.2)$$

が成り立つ。ここで  $A_1, A_2, \dots, A_r$  が互いに非可換であってもそれぞれは対角化は可能で

$$\left\{ \exp\left(\frac{x}{n}A_j\right) \right\}$$

の行列要素は求まるものとする。

互いに非可換なハミルトニアンを

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 + \dots + \mathcal{H}_r$$

に対して、この分け方を工夫し、Trotter の公式 13.2 を適用する。

式 13.1 に見るように量子論では分割数  $n$  が自由度として加わることになる。

これは次の図のような幾何学的なイメージになる。

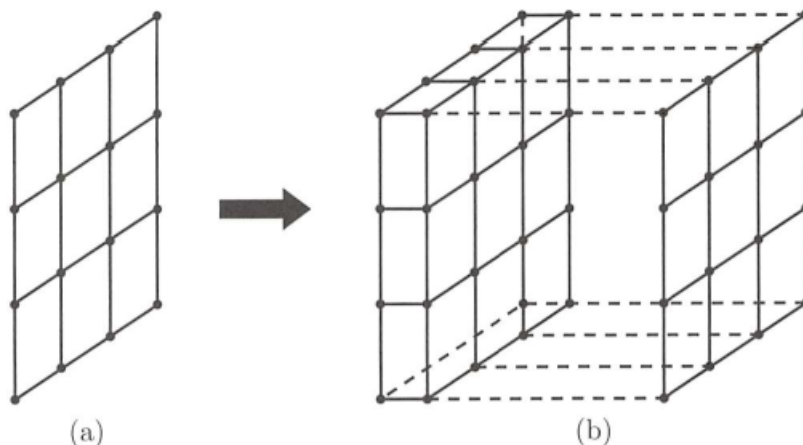


図 13.1: [112] より : (a) : 2次元量子系、(b) : 3次元古典系

つまり、古典系より +1 の余分な自由度を加えて量子モデルができる。

逆に古典的に戻すにはこの自由度を商として分割してしまうわけである。

この変換は鈴木・Trotter変換 (ST-Transform) と呼ばれる。

**2次元イジングモデル** 量子系と古典系のモデル間の等価性を考えるため、イジングモデルを考える。

下図のように4つのベクトル状態変数を持つ系を考える。



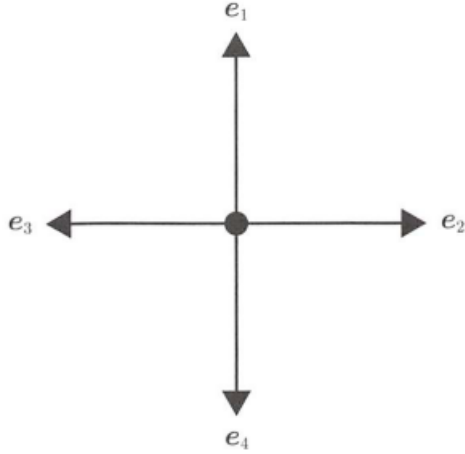


図 13.2: [112] より : ベクトルポッツモデルの 4 状態

次のようにこれを 2 つの独立なイジングスピン  $(S_i, S'_i)$  と対応させる。

$$\mathbf{e}_1 \leftrightarrow (1, 1), \mathbf{e}_2 \leftrightarrow (1, -1), \mathbf{e}_3 \leftrightarrow (-1, 1), \mathbf{e}_4 \leftrightarrow (-1, -1)$$

これをベクトルポッツモデルと呼ぶ。この相互作用ハミルトニアンを

$$\mathcal{H}_{ij} = -J(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \frac{J}{2} (S_i \cdot S_j + S'_i \cdot S'_j)$$

として 2 つの独立したイジングモデルの半分づつの和とする。

$d$  次元量子系と  $d+1$  次元古典系との等価性はコンピューターシミュレーションにより、実現できるようになった。

これを量子モンテカルロ法と呼ぶ。

具体的に見るために第 2 部で定義したパウリマトリックス

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (13.3)$$

$$\text{Tr}(\sigma_k) = 0, \quad k = 1, 2, 3$$

$$\det(\sigma_k) = -1, \quad k = 1, 2, 3$$

もちろん上の 2 式は単位行列  $\sigma_0$  には成り立たない。

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \sigma_0$$

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} \sigma_0 + i \epsilon_{ijk} \sigma_k, \quad k = 1, 2, 3$$

であり

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i \epsilon_{ijk} \sigma_k$$

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij} \sigma_0$$

なので次の関係がある。

$$2\sigma_i\sigma_j = \{\sigma_i, \sigma_j\} + [\sigma_i, \sigma_j], \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (13.4)$$

この性質からスピン角運動量  $s$  は

$$s_k = \frac{\hbar}{2}\sigma_k \quad (13.5)$$

と表すことができた。

を用いて、 $H$  を磁場とし、 $\Gamma$  をスピン反転の効果を与えたとして、

$$\mathcal{H}_1 = -\mu_B H \sigma^z - \Gamma \sigma^x \quad (13.6)$$

とする。これが  $2 \times 2$  のエルミートであるから、対角化ができて、その固有値が

$$\lambda = \pm \left\{ (\mu_B H)^2 + \Gamma^2 \right\}^{1/2}$$

となる。この時の状態和が

$$Z_1(\beta) = \text{Tr} e^{-\beta \mathcal{H}_1} = \frac{1}{2} (e^{\lambda\beta} + e^{-\lambda\beta}) = 2 \cosh \left( \beta \sqrt{(\mu_B H)^2 + \Gamma^2} \right)$$

となる。これを逆に量子系を古典系に変換して計算することにする。

まず式 13.6 を古典系になおして、 $n$  を導入し、次のような成分に分ける

$$h_n = \frac{1}{n} \beta \mu_B H$$

$$\gamma_n = \frac{1}{n} \beta \Gamma$$

トロッターの公式 13.2 から同じ状態和を求めると

$$\begin{aligned} Z_1(\beta) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Tr} \left( e^{h_n \sigma^z} e^{\gamma_n \sigma^x} \right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\sigma_1 = \pm 1} \sum_{\sigma_2 = \pm 1} \cdots \sum_{\sigma_n = \pm 1} \langle \sigma_1 | e^{h_n \sigma^z} | \sigma_1 \rangle \langle \sigma_1 | e^{\gamma_n \sigma^x} | \sigma_2 \rangle \times \cdots \times \langle \sigma_n | e^{h_n \sigma^z} | \sigma_n \rangle \langle \sigma_n | e^{\gamma_n \sigma^x} | \sigma_1 \rangle \end{aligned}$$

ただし、 $|\sigma_j\rangle$  は  $\sigma^z$  の固有値が  $\sigma_j$  となる次の固有方程式を満たすとする。

$$\sigma^z |\sigma_j\rangle = \sigma_j |\sigma_j\rangle$$

このとき、 $\exp(h_n \sigma^z)$  は式 13.3 から対角成分のみ持つので上式の計算で中間状態を  $2n \rightarrow n$  に半減させた。これらから 2 つの行列要素が次のように求まる。

$$\langle \sigma_j | e^{h_n \sigma^z} | \sigma_j \rangle = e^{h_n \sigma_j}$$

$$\langle \sigma_j | e^{\gamma_n \sigma^x} | \sigma_{j+1} \rangle = \left( \frac{\sinh(2\gamma_n)}{2} \right)^{1/2} e^{K_n \sigma_j \sigma_{j+1}}$$

ただし、

$$K_n = \frac{1}{2} \log \coth \gamma_n$$

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\cosh \theta} \cdot e^{-\tanh \theta a^\dagger b^\dagger} |0\rangle_A \otimes |0\rangle_B$$

### 13.1.2 変分原理

どうしても、この変分原理が物理の理論の組み立ての最初に立つことが多い。アインシュタインも物理屋への原点は若き日にこの理論にであったことにある。極値をとる曲面の幾何と、実現する運動方程式の関係は動的に力学を構成する。さらに筆者が思うに、数学的な厳密さの届かない、曖昧さを含んでいると思う。古典的にして、今、尚課題のある理論である。

この章の参考文献の主、鈴木氏もこの理論を経路積分の量子化の柱にしている。その考えを中心に見ていく。作用  $S$  を指数関数の肩に載せて、位相にしてしまう考えは、かのディラックがはじまりらしい。

$$\exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S(t_b, t_a) \right\}$$

作用を位相部分に入れることは次元を打ち消す量が必要で、これがプランク定数  $\hbar$  である。

従って、作用  $S$  の世界では時間とエネルギーの積は背景に隠れる。

ディラックはこの量が時刻  $t_a$  から  $t_b$  にいたる遷移確率に対応することを見抜いた。

無次元の位相が、同じ無次元の確率につながったことで、物理の世界が飛躍的に広がる。

ファインマンの経路積分の出発は作用原理で、高校物理の保存力の拡張版のように、始点と終点という端点を固定する。

節を決められた、弦の振動のように、この間の振動パターンは多数存在する。それらが経路とよばれ、この和を

$$Z = \int_i^f \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} \mathcal{L}(x(t), \dot{x}(t), t) \right\} D[x(t)]$$

と書かれた。これは位相部分と振幅部分に2重の足し合わせがあることに留意する。その足し合わせを共通して  $D[x(t)]$

が担う。これは多次元化し、相対論的な要請を含めることができる。3次元の場合は古典力学の中に同じようなものがあり、

熱統計力学の分配関数に相当する。この辺りは第9部で考察しよう。

ラグランジアン密度は

$$\mathcal{L} = p\dot{x} - \mathcal{H}$$

というルジャンドル変換から導かれた。この関係からハミルトニアンを用いて

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = \mathcal{H}\psi(x, t)$$

$$\mathcal{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)$$

という微分方程式がつけられる。つまり、局所的にみればシュレディンガー方程式を導く。

古典的にも第2部でみた、ハミルトン・ヤコビの方程式

$$\mathcal{H} \left( x, \frac{\partial S}{\partial t}, t \right) + \frac{\partial S(x, t)}{\partial t} = 0 \quad (13.7)$$

があった。これも本来、時間的に変化しない、作用、ハミルトニアンに時間軸を与えて、停留的な極値から現実に実現する物理方程式を見る方法であった。この式に

$$\psi(x, t) = \exp \left( \frac{i}{\hbar} S(x, t) \right)$$

として、時間微分すると式 13.7 から

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} &= \frac{i}{\hbar} \frac{\partial S(x, t)}{\partial t} \psi(x, t) \\ &= -\frac{i}{\hbar} \mathcal{H}\psi(x, t) \end{aligned}$$

となり、これはシュレディンガー方程式である。

さて、経路積分にもどると、端点を固定した図のような経路が実際、弦の振動のように考え、

$$Z_{i,f} = \cos\left(\frac{1}{\hbar}S(t_b, t_a)\right) + i \sin\left(\frac{1}{\hbar}S(t_b, t_a)\right)$$

としてみよう。

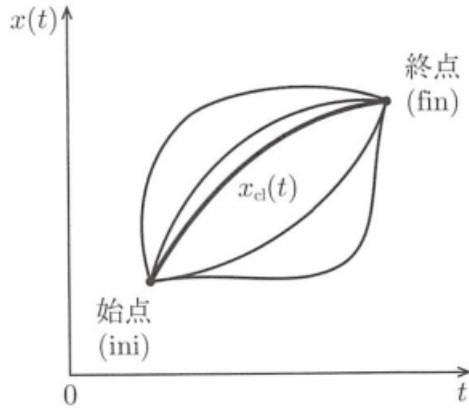


図 13.3: [112] より :

マクロ的な系ではプランク定数に対し

$$S \gg \hbar$$

となると、非常に激しく積分されるのでこの  $Z_{i,f}$  は 0 になる。よって停留点付近で

$$S \sim 0$$

となる経路では  $Z_{i,f}$  が有効になる。これが古典的な経路であるというわけである。

いつも疑問に思うのは、その中間である。半量子論的な現象はみることがない。

これは確率論以外の物理的なシステムがあることになるが詳しくは第 9 部で考察する。

ミクロな系ではこの状況は一変し、あらゆる経路が有効になってくる。

しかし、関数の形でかなり、特徴的なことがおきる。これを次にみておこう。

### 13.1.3 調和振動子

はじめに簡単な 1 次元調和振動子を考える。この系のハミルトニアンを  $k = m\omega^2$  から

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}m\dot{x}(t)^2 + \frac{1}{2}kx(t)^2 \equiv \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}$$

であり、単振動の運動方程式からの解を端点  $(x_a, t_a)$  と  $(x_b, t_b)$  を固定して

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

の解として

$$x_{cl}(t) = \frac{x_b \sin(\omega(t - t_a)) - x_a \sin(\omega(t - t_b))}{\sin(\omega(t_b - t_a))}$$

とすれば、境界条件を満たす。よって作用を求める

$$\begin{aligned}
S(x_{cl}) &= \int_{t_a}^{t_b} dt \left( \frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{m\omega^2}{2} x^2 \right) \\
&= \int_{t_a}^{t_b} dt \left( \frac{m}{2} \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{x_b \sin(\omega(t-t_a)) - x_a \sin(\omega(t-t_b))}{\sin(\omega(t_b-t_a))} \right) \right)^2 - \frac{m\omega^2}{2} \left( \frac{x_b \sin(\omega(t-t_a)) - x_a \sin(\omega(t-t_b))}{\sin(\omega(t_b-t_a))} \right)^2 \right) \\
&= \frac{m\omega}{2 \sin \omega(t_b-t_a)} \{ (x_a^2 + x_b^2) \cos \omega(t_b-t_a) - 2x_a x_b \}
\end{aligned}$$

となる。  $t_a = t_b$  では左因子は

$$(x_a - x_b)^2$$

となるので振動しない。しかし、分母に  $\sin \omega(t_b - t_a)$  があるので  $\Delta t$  が小さくなると大きな影響を与える。一方で

$$t = T + T/4$$

であれば

$$S(x_{cl}) = -m\omega x_a x_b = -\sqrt{km} \cdot x_a x_b$$

である。この時の振幅は

$$Z_{i,f}^{(cl)} = \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \frac{m\omega}{2 \sin \omega(t_b-t_a)} \{ (x_a^2 + x_b^2) \cos \omega(t_b-t_a) - 2x_a x_b \} \right]$$

である。

これは次の図で見るように原点付近で激しく振動するが、遠ざかると正弦曲線になる。波動関数を

$$\psi(x, t) = \left( \frac{m\omega}{2i\hbar \sin \omega t} \right)^{1/2} \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \frac{m\omega}{2 \sin \omega t} x^2 \cos \omega t \right]$$

とすれば調和振動子のシュレディンガー方程式

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial}{\partial x^2} \psi(x, t)$$

を満たす。

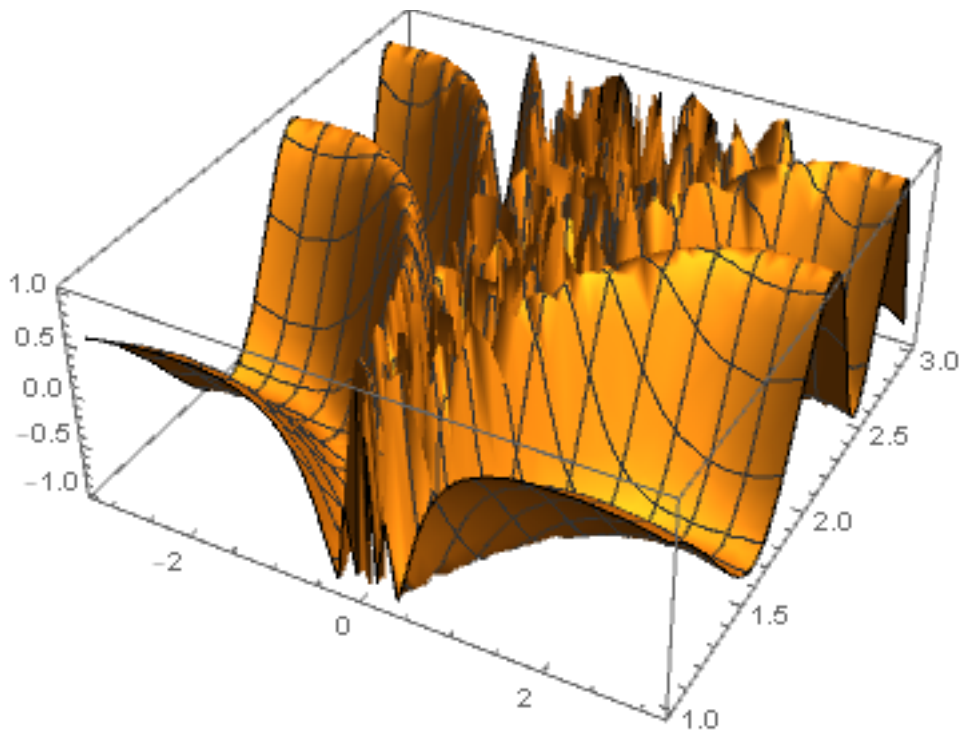


図 13.4:  $\omega$  を固定し、時間軸、空間軸で描画：図は実部分、虚部分は奇関数になる

しかし、

$$(x_a^2 + x_b^2) \cos \omega(t_b - t_a) - 2x_a x_b$$

の項は位相因子項が 1 に固定されると

$$(x_a - x_b)^2$$

となり、距離が決まる。つまり、空間の接続を決める。

周期的な境界条件にはこうした影響があることを留意しておく。

また、重要な役割を果たす次の関係  $x \rightarrow 0$  で

$$\frac{x}{\sin x} \rightarrow 1 \tag{13.8}$$

を用いて  $\omega \rightarrow 0$  とすると、次のように自由粒子の振幅

$$Z^{(free)} = \exp \left[ \frac{im(x_a - x_b)^2}{2\hbar(t_b - t_a)} \right]$$

に一致する。この時は下図のように遠ざかると滑らかに減少していくが原点付近では激しく振動している。

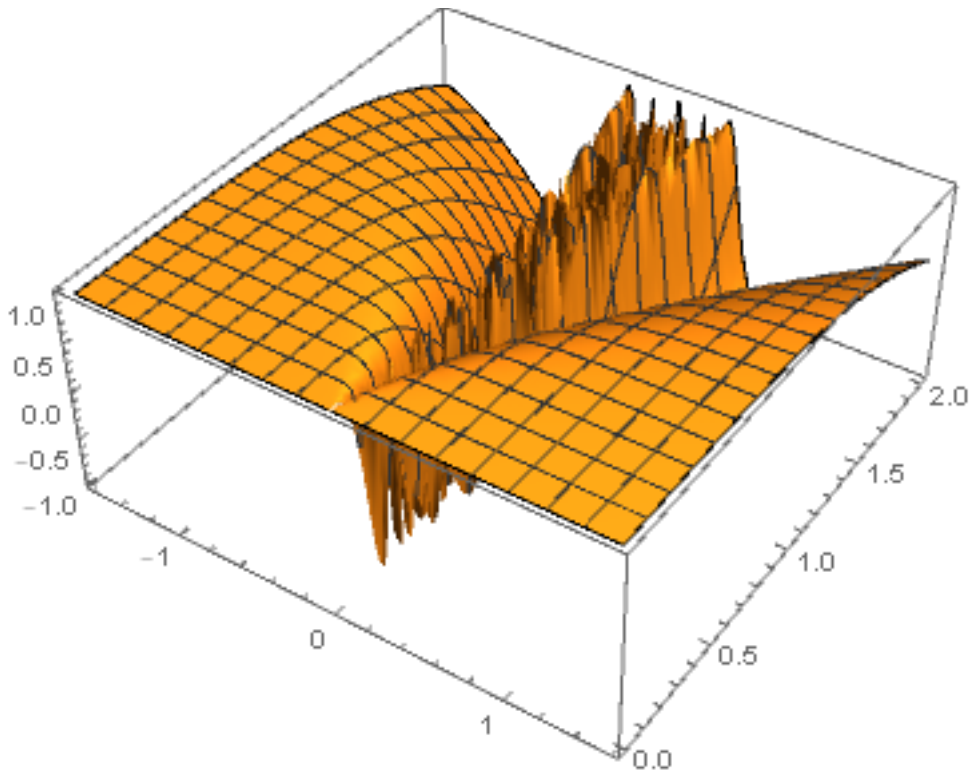


図 13.5:  $\omega$  が非常に小さい場合は自由粒子の振幅に移項する。

これは自由粒子のシュレディンガー方程式

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2}$$

を満たす。第 9 部で詳しく考察をするが、量子論の原理的な問題がここに見えている。

振幅は位相に虚数を持つので観測を共役をとることと考えると、粒子の確率から振動は消える。

また、位相部分の振幅は周期的な境界条件を課すと消える。

これらの 2 段階の変化が観測の課程にあることになる。

この時に極めて巧妙に式 13.8 が働く。

また、鈴木氏が指摘しているように調和振動子が空間 2 次のポテンシャルを持つことはガウス型の積分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-a(x_1 - x)^2 - b(x - x_2)^2] dx = \left(\frac{\pi}{a+b}\right)^{1/2} \exp\left[-\frac{(x_1 - x_2)^2}{a^{-1} + b^{-1}}\right]$$

が使えるようになっている。人間中心の理論を言うのではないが、つまり人が頑張れば手の届く領域にまだ、何かありそうなわけである。

#### 13.1.4 ラグランジアンの意味

はじめにハミルトニアンが時間によらない場合、運動エネルギー  $T$  として、

$$\mathcal{H} = T + V = E = \text{Const.} \quad (13.9)$$

とする。保存力であればポテンシャル  $V$  は

$$V(x) = -\int_{x_0}^x F(x') dx' + E$$

のようにかける。この時の  $E$  は  $x = x_0$  で  $V = E$  となるようにとった。運動エネルギー  $T = m\dot{x}^2/2$  だからエネルギー保存則  $\mathcal{H} = E$  を時間微分すると

$$(m\ddot{x}(t) - F(x_{cl}(t)))\dot{x}_{cl}(t) = 0$$

となるが、一般的な  $x_{cl}(t)$  はこの解にならないとして、積分表示で作用を運動エネルギー  $T$  と仕事  $W$  によるものに分けて、

$$\begin{aligned}\hat{S}(t_b, t_a) &= \int_{t_a}^{t_b} \left( T(\dot{x}) + \int_{x_0}^{x(t)} F(x) dx \right) dt \\ &\equiv S_T + S_W\end{aligned}$$

とかくと式 13.9 から、

$$S_W = E(t_b - t_a)$$

である。これから

$$\hat{S}(t_b, t_a) = S(t_a, t_b) + E(t_b - t_a)$$

つまり、力粒子にした仕事  $S_W$  と運動エネルギーの作用  $S_T$  がつりあうと古典軌道が決まる。古典論では運動エネルギーの差が  $ma$  の空間積分に等しく

$$\int madx = m \int \frac{dv}{dt} dx = m \int v dv = \frac{1}{2} mv^2$$

とした Newton の関係から次のように時間次元を増やすことになる。

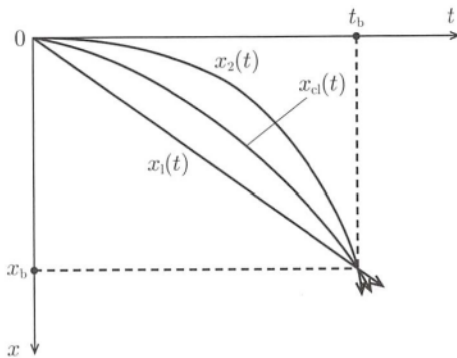


図 13.6: [112] より：古典軌道

例えば自由落下の場合  
古典解の軌道は

$$x = x_{cl}(t) = \frac{1}{2}gt^2$$

である。これはまず、 $V(x) = -mgx(t)$  として、

$$S_T^{(cl)} = \frac{m}{2} \int_0^{t_b} \dot{x}(t)^2 dt = \frac{1}{6}mg^2t_b^3$$

$$S_W^{(cl)} = \int_0^{t_b} (-V(x(t))) dt = mg \int_0^{t_b} x(t) dt = \frac{1}{6}mg^2t_b^3$$

のように余分な次元が増える。この時

$$S_T^{(cl)} = S_W^{(cl)}$$



が確かに成り立っている。また

$$S^{(cl)} = S_T^{(cl)} + S_W^{(cl)} = \frac{1}{6}mg^2t_b^3 \quad (13.10)$$

である。これだけでは面白みは少ないが、興味あることにこの時間余次元は空間の曲率を決める。

これを見るために古典解とかぎらない一般の2次関数を

$$x(t) = pt^2 + qt \quad (13.11)$$

のように決める。古典論では端点が決まるので原点を  $t_a$  にとり ( $t_a = 0$ )

$$x(t_b) = x_b = pt_b^2 + qt_b$$

となるから

$$q = \frac{x_b - pt_b^2}{t_b}$$

という式が次元を増やしたのに対応して出てくる。

従って、変数を1つ減らすことができ、

$$\begin{aligned} S_T(p) &= \frac{m}{2} \int_0^{t_b} \dot{x}(t)^2 dt \\ &= \frac{m}{2} \int_0^{t_b} \left( 2pt + \frac{x_b - pt_b^2}{t_b} \right)^2 dt \\ &= \frac{m}{2} \left( \frac{p^2 t_b^3}{3} + \frac{x_b^2}{t_b} \right) \end{aligned}$$

となるので、ここで

$$x_b = \frac{1}{2}gt_b^2$$

を代入すると

$$S_T(p) = \left( \frac{p^2}{6} + \frac{g^2}{8} \right) mt_b^3$$

となる。同様に

$$\begin{aligned} S_W(p) &= \int_0^{t_b} (-V(x(t))) dt \\ &= \int_0^{t_b} \left( mg \left( pt^2 + \frac{x_b - pt_b^2}{t_b} t \right) \right) dt \\ &= \frac{mg}{6} (3t_b x_b - pt_b^3) \end{aligned}$$

となるので

$$x_b = \frac{1}{2}gt_b^2$$

を代入すると

$$S_W(p) = \left( -\frac{pg}{6} + \frac{g^2}{4} \right) mt_b^3$$

を得る。これから式 13.10 と比べると

$$S = S_T + S_W = \left( \frac{1}{6} \left( p - \frac{g}{2} \right)^2 + \frac{1}{3}g \right) mt_b^3 \geq S^{(cl)}$$

であることがわかる。こ  $S$  は、 $S(a, t_b)$  として、

$$p = \frac{g}{2} \tag{13.12}$$

の時に極小値

$$S^{(cl)} = \frac{1}{3} mgt_b^3$$

をとる。

例えば

$$S(a, t) = \left( \frac{1}{6}(a - 4.9)^2 + \frac{9.8^2}{3} \right) t^3$$

として描画すると次のようになる。

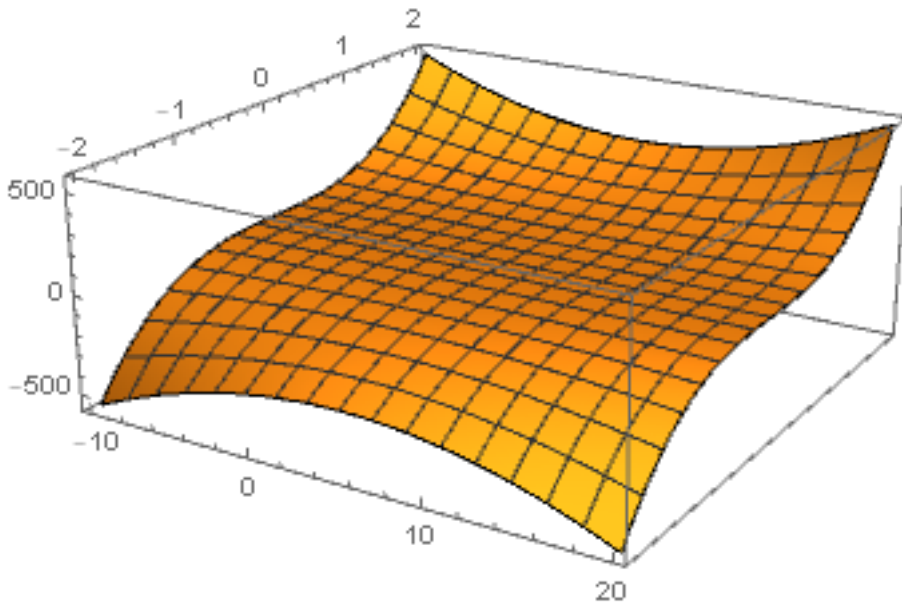


図 13.7:  $S(a, t)$  のグラフ、時間に対しては奇関数で、 $a = g/2$  で極値をとる

ここで関数  $f(x)$  の点  $A(a, f(a))$  における曲率半径  $R$  が

$$R = \frac{\left(1 + f'(a)^2\right)^{3/2}}{|f''(a)|}$$

であることを用いて、 $x(t)$  の曲率を求めると式 13.11 から

$$x(t) = pt^2 + qt$$

の曲率は

$$x'(t) = 2pt + q$$

$$x''(t) = 2p$$

だから

$$R = \frac{\left((2pt + q)^2 + 1\right)^{3/2}}{2p}$$

である。従って

$$(2pt + q)^2 \ll 1$$

であれば曲率半径が

$$\kappa = \frac{1}{R} \sim 2p$$

であり、これは式の極値の条件 13.12 から

$$\kappa \sim g$$

である。

## 13.2 散逸系

この章の参考文献の鈴木氏が散逸系のラグランジアンを考える時に、古典的な運動エネルギーと、仕事のバランスを考えた。

ほとんどの物理学では時間反転対称性をもち記述される。しかし、散逸系ではそうならない。

つまり、散逸系は時間の不可逆をつくるメカニズムに関与している。鈴木氏のラグランジアンに対する考察は今後重要になるのでその理論を学んでいこう。

### 13.2.1 時間発展

はじめに時間発展がどうなるか古典的にみておく。

シュレディンガー方程式の時間発展が

$$\psi(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\psi(0)$$

で表される。これから物体の位置の変化は

$$\langle q|\psi(t)\rangle = \int dq' \langle q|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}|q'\rangle \langle q'|\psi(0)\rangle$$

と書くことができた。これから状態  $i \rightarrow f$  において古典的な経路の和は

$$\begin{aligned} \langle q_f|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(\hat{q},\hat{p})(t_f-t_i)}|q_i\rangle &= \int D_q D_p \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt L\right\} \\ &= \int D_q D_p \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt [p(t)\dot{q}(t) - H(q(t), p(t))]\right\} \end{aligned} \quad (13.13)$$

で表すことができる。これを示しておこう。完全性の条件から

$$\int dq |q\rangle \langle q| = 1, \quad \frac{1}{2\pi} \int dp |p\rangle \langle p| = 1 \quad (13.14)$$

が成り立つので左辺から出発し、 $\epsilon = (t_f - t_i)/N$  とすると

$$\begin{aligned} \langle q_f|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(\hat{q},\hat{p})(t_f-t_i)}|q_i\rangle &= \int dq_1 dq_2 \cdots dq_{N-1} \langle q_f|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\epsilon}|q_{N-1}\rangle \langle q_{N-1}|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\epsilon}|q_{N-2}\rangle \cdots \langle q_1|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\epsilon}|q_i\rangle \\ &= \int dq_1 dq_2 \cdots dq_{N-1} \frac{dp_1}{2\pi} \frac{dp_2}{2\pi} \cdots \frac{dp_{N-1}}{2\pi} \langle q_f|p_N\rangle \langle p_N|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\epsilon}|q_{N-1}\rangle \\ &\quad \times \langle q_{N-1}|p_{N-1}\rangle \langle p_{N-1}|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\epsilon}|q_{N-2}\rangle \cdots \langle q_1|p_1\rangle \langle p_1|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\epsilon}|q_i\rangle \end{aligned}$$

となる。ここで  $\epsilon$  が小さいとし、固有方程式を用いて

$$\begin{aligned} \langle p_{N-1}|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\epsilon}|q_{N-2}\rangle &\simeq \left\langle p_{N-1} \left| 1 - \frac{i}{\hbar}\hat{H}(\hat{q},\hat{p})\epsilon \right| q_{N-2} \right\rangle \\ &= \langle p_{N-1}|q_{N-2}\rangle \left( 1 - \frac{i}{\hbar}H(q_{N-2}, p_{N-1})\epsilon \right) \\ &\simeq \langle p_{N-1}|q_{N-2}\rangle \exp^{-\frac{i}{\hbar}H(q_{N-2}, p_{N-1})\epsilon} \end{aligned}$$

としても問題はない。さらに

$$\langle q|p\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}pq} \quad (13.15)$$

とおけたから

$$\begin{aligned} \langle q_f|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(\hat{q},\hat{p})(t_f-t_i)}|q_i\rangle &= \int D_q D_p \exp\left\{\frac{i\epsilon}{\hbar}[p_N(q_f - q_{N-1})/\epsilon + p_{N-1}(q_{N-1} - q_{N-2})/\epsilon \right. \\ &\quad \left. + \cdots + p_1(q_1 - q_i)/\epsilon - H(q_{N-1}, p_N) - H(q_{N-2}, p_{N-1}) - \cdots - H(q_i, p_1)]\right\} \end{aligned}$$

ただし測度を

$$D_p D_q = dq_1 dq_2 \cdots dq_{N-1} \frac{dp_1}{2\pi} \frac{dp_2}{2\pi} \cdots \frac{dp_N}{2\pi}$$

とする。

$$\frac{(q_{N-1} - q_{N-2})}{\epsilon} \simeq \dot{q}_{N-1}$$

とすると  $N \rightarrow \infty$  で

$$\langle q_f|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(\hat{q},\hat{p})(t_f-t_i)}|q_i\rangle = \int D_q D_p \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt [p(t)\dot{q}(t) - H(q(t), p(t))]\right\}$$

式 13.13 が得られた。

具体例として

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2m}p^2 + V(q) \\ L &= p\dot{q} - H \end{aligned}$$

の場合を考えよう。ガウス積分の公式から

$$\int \frac{dp_n}{2\pi} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\epsilon \left[p_n(q_n - q_{n-1})/\epsilon - \frac{1}{2m}p_n^2\right]\epsilon\right\} = \sqrt{\frac{m\hbar}{2\pi i\epsilon}} \exp\left[\frac{i}{\hbar} \frac{m}{2} \left(\frac{q_n - q_{n-1}}{\epsilon}\right)^2 \epsilon\right] \quad (13.16)$$

となることを利用すると

$$\begin{aligned} \langle q_f, t_f|q_i, t_i\rangle &= \int D_q \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^{N-1} \epsilon \left[\frac{i}{\hbar} \frac{m}{2} \left(\frac{q_n - q_{n-1}}{\epsilon}\right)^2 - V(q_{n-1})\right]\right\} \\ &= \int D_q \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt \left[\frac{i}{\hbar} \frac{m}{2} \dot{q}(t)^2 - V(q(t))\right]\right\} \end{aligned}$$

となる。ただし

$$D_q \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \sqrt{\frac{m\hbar}{2\pi i\epsilon}} \right\} dq_1 dq_2 \cdots dq_{N-1}$$

である。これはユークリッド的な 4 次元時空で時間端点を固定し、ラグランジアンを得て  $i/\hbar$  倍したものを指数の肩に入れ、

微小空間変化で足し合わせる作業になる。これによって量子力学的な粒子の時間発展が得られることになった。

### 13.2.2 経路積分表示

前章の確率振幅は、時間、空間的な変化として、遷移振幅と再定義することができる。これから確率論を用いて、状態  $(x_0, t_0) \rightarrow (x, t)$  にいたる確率を

$$Z(x, t : x_0, t_0) = \int_{(x_0, t_0)}^{(x, t)} \exp\left[\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \mathcal{L}(x, \dot{x}, t)\right] D(x(t))$$

として、遷移振幅を表す。これを経路積分と定義する。

この時のラグランジアンとハミルトニアン密度は

$$\mathcal{L}(t) = T - V$$

$$\mathcal{H}(t) = T + V$$

であった。

$Z$  を規格化して  $|K|^2 = 1$  となるようにすると、この  $K$  も経路積分とみなし、波動関数の変化を

$$\psi(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x, t; x_0, t_0) \psi(x_0, t_0) dx \quad (13.17)$$

と書くことができる。

これが量子論の要請を満たすかはシュレディンガー方程式を満たすことをみてばよい。

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi(x, t)}{dx^2} + V(x) \psi(x, t) \quad (13.18)$$

そこで、 $K$  の微小変化は代表点を中点付近として

$$K(x, t; x + \eta, t - \epsilon) = \frac{1}{A} \exp \left[ \frac{i\epsilon}{\hbar} \mathcal{L} \left( x + \frac{\eta}{2}, -\frac{\eta}{\epsilon} \right) \right]$$

微小変化

$$dx = d\eta$$

を用いて、

$$\begin{aligned} \exp \left[ \frac{i\epsilon}{\hbar} \mathcal{L} \left( x + \frac{\eta}{2}, -\frac{\eta}{\epsilon} \right) \right] &= \exp \left[ \frac{i\epsilon}{\hbar} \left( \frac{m\eta^2}{2\epsilon^2} - V(x) \right) \right] \\ &= \exp \left( \frac{im\eta^2}{2\hbar\epsilon} \right) \left( 1 - \frac{i\epsilon V(x)}{\hbar} + \dots \right) \end{aligned}$$

とかけるので、規格化定数  $A$  を

$$1 = \frac{1}{A} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left( \frac{im\eta^2}{2\hbar\epsilon} \right) d\eta$$

として決めるとガウス積分の公式から式、9.71 と同様にして

$$A = \left( \frac{2\pi i\hbar\epsilon}{m} \right)^{1/2}$$

が求まる。

さらに波動関数の原点付近の展開が

$$\psi(x_0, t_0) = \psi(x, t) - \epsilon \frac{\partial \psi}{\partial t} + \eta \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\eta^2}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \dots$$

となることから式 13.17 に代入し、

$$\psi(x, t) = \left( \frac{2\pi i\hbar\epsilon}{m} \right)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left( \frac{im\eta^2}{2\hbar\epsilon} \right) \left( 1 - \frac{i\epsilon V(x)}{\hbar} \right) \left[ \psi(x, t) - \epsilon \frac{\partial \psi}{\partial t} + \eta \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\eta^2}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right] d\eta$$

となるが

$$\int_{-\infty}^{\infty} \eta \exp \left( \frac{im\eta^2}{2\hbar\epsilon} \right) d\eta = 0$$

の公式と  $\epsilon$  の 1 次までをとることになると

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= \left(\frac{2\pi i \hbar \epsilon}{m}\right)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{im\eta^2}{2\hbar\epsilon}\right) \left(1 - \frac{i\epsilon V(x)}{\hbar}\right) \psi(x, t) d\eta \\ &\quad - \left(\frac{2\pi i \hbar \epsilon}{m}\right)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{im\eta^2}{2\hbar\epsilon}\right) \left(1 - \frac{i\epsilon V(x)}{\hbar}\right) \left(\epsilon \frac{\partial \psi}{\partial t}\right) d\eta \\ &\quad + \left(\frac{2\pi i \hbar \epsilon}{m}\right)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{im\eta^2}{2\hbar\epsilon}\right) \left(1 - \frac{i\epsilon V(x)}{\hbar}\right) \left(\eta \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) d\eta \\ &\quad + \left(\frac{2\pi i \hbar \epsilon}{m}\right)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{im\eta^2}{2\hbar\epsilon}\right) \left(1 - \frac{i\epsilon V(x)}{\hbar}\right) \left(\frac{\eta^2}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\right) d\eta \\ &= \left(\frac{2\pi i \hbar \epsilon}{m}\right)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{im\eta^2}{2\hbar\epsilon}\right) \left(\psi - \frac{i\epsilon V \psi}{\hbar} + \epsilon \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\eta^2}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{i\epsilon V(x)}{\hbar} \frac{\eta^2}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\right) d\eta \end{aligned}$$

となり、さらに

$$\int_{-\infty}^{\infty} \eta^2 \exp\left(\frac{im\eta^2}{2\hbar\epsilon}\right) d\eta = \frac{i\hbar\epsilon}{m}$$

か式 13.18 のらシュレディンガー方程式が得られる。

### 13.2.3 物理的ラグランジアン

鈴木氏はまず、物理的ラグランジアンと、数学的ラグランジアンを区別している。例えば次のように作用を定義する。

$$S = \int_{t_0}^{t_1} f(x(t), \dot{x}(t), t) dt$$

また、オイラー・ラグランジュの公式からこの  $f$  は  $x(t), \dot{x}(t), t$  を独立と考えて、 $S$  を極小にするには

$$\frac{d}{dt} f_{\dot{x}} - f_x = \ddot{x} f_{\dot{x}\dot{x}} + \dot{x} f_{\dot{x}x} + f_{\dot{x}t} - f_x = 0 \quad (13.19)$$

となるが、これが 2 階の線形微分方程式なので、 $S$  を極小にする  $f$  を一意に決めることができない。ここであきらめず、後にこれを解くことになる。

一般に物理的なラグランジアン  $f^{(p)}$  と、数学的なラグランジアン  $f^{(M)}$  について

$$\int_{t_0}^{t_1} f^{(M)}(x(t), \dot{x}(t), t) dt = \int_{t_0}^{t_1} f^{(p)}(x(t), \dot{x}(t), t) dt$$

が成り立つが

$$f^{(M)} \neq f^{(p)}$$

となることがあり得る。実際により簡単な数学的なラグランジアンを用いて計算をして、より複雑な物理的なラグランジアンを

求めることが多い。

例えば数学的な例として粘性抵抗  $\zeta$  がある系の変分原理を考えてみよう。この時の散逸系を記述する式は

$$m\ddot{x}(t) + \zeta\dot{x}(t) = F(x(t)); \quad F(x) = -\frac{dV(x)}{dx} \quad (13.20)$$

のようにかける。外力  $F(x(t))$  は保存力である。

この場合のラグランジアンは

$$m\ddot{x}(t) - F(x(t)) = 0$$

の時のラグランジアンが

$$f(x(t), \dot{x}(t)) = T(\dot{x}(t)) - V(x(t))$$

であり、運動方程式の空間積分が

$$dT(x) + \int dx \zeta \dot{x}(t) = -dV(x)$$

である。従って、運動方程式に  $\zeta \dot{x}(t)$  が入った効果は、ラグランジアンに次の指数因子をかけたとなれば、数学的な条件は満足する。

$$f(x(t), \dot{x}(t)) = e^{\zeta t/m} (T(\dot{x}(t)) - V(x(t))) \quad (13.21)$$

しかし、物理的な意味は困難である。

$$\zeta X(t) - \frac{1}{m} \dot{X}(t) = 0$$

を満たすのが

$$X(t) = e^{\zeta t/m}$$

である。この困難を以下のように鈴木氏は克服した。鈴木氏の処方箋に従い追ってみよう。まず、熱  $Q$  を含めてエネルギー保存則を

$$T(\dot{x}(t)) + V(x(t)) + Q(t) = Const. \quad (13.22)$$

$$Q(t) = \zeta \int_0^t \dot{x}(s)^2 ds$$

とおく。

これで時間微分ができるから空間微分との関係

$$dx = \dot{x} dt$$

を用いると式 13.20 から 13.22 を  $x$  で微分すると

$$(m\ddot{x}(t) - F(x(t)) + \zeta \dot{x}(t)) \dot{x}(t) = 0$$

となる。よってこれから散逸系のラグランジアン  $\mathcal{L}_d$  を作ればよい。

まず、近似的なアプローチとして、力学的な仕事  $W$  は  $F(x)$  が保存力であれば

$$W(t) = \int_{x(0)}^{x(t)} F(x) dx = V(x(0)) - V(x(t))$$

である。熱がエネルギーを運ぶので

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_d &= T(\dot{x}(t)) + W(t) - Q \\ &= T(\dot{x}(t)) + V(x(0)) - V(x(t)) - Q \end{aligned}$$

保存則でない場合

$$\mathcal{L}_d = T(\dot{x}(t)) - V(x(t)) - Q + Const.$$

である。そこでこの作用を  $S_d$  とおいて

$$\begin{aligned} S_d &= \int_0^{t_1} \mathcal{L}_d dt \\ &= \int_0^{t_1} (T(\dot{x}(t)) + W(t) - Q) dt \end{aligned}$$

とおく。ここで  $W$  が経路依存する汎関数の場合、この作用の変分は  $\delta Q$  に依存する。

$$\delta Q(t) = \delta \left( \int_0^{t_1} dt \zeta \int_0^t \dot{x}(s)^2 ds \right)$$

そこで部分積分を用いて

$$\begin{aligned}\delta\left(\zeta\int_0^{t_1} dt\int_0^t \dot{x}^2(s)ds\right) &= 2\zeta\int_0^{t_1} \dot{x}(s)\delta\dot{x}(s)ds \\ &= 2\zeta\left(\int_0^{t_1} \dot{x}(t)\delta x(t)dt - \int_0^{t_1} dt\int_0^t \ddot{x}(s)\delta x(s)ds\right)\end{aligned}$$

となる。ここから先に課題が残る。ところが、先の数学的な処方 13.21 を認めると散逸関数として

$$\Phi(t) = \frac{1}{2}\zeta\dot{x}(t)^2$$

を仮定し、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathcal{L}}{d\dot{x}(t)}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x(t)} = \frac{\partial\Phi(t)}{\partial\dot{x}(t)} \quad (13.23)$$

を使うと進むことができる。ラグランジの方程式が、散逸関数の速度微分になるという視点をもつ。

鈴木氏はここから

定常状態では、そこにいたる過程を含めた、エントロピーが最小をとると指摘し、次の散逸エネルギー関数を定義した。

$$W_d^{(0)}(t) = -\int_0^t \Phi(s)ds = -\frac{1}{2}\zeta\dot{x}(s)^2 ds \quad (13.24)$$

この散逸関数が次の段階への出発となった。

#### 13.2.4 散逸ラグランジアン

散逸のない従来のラグランジアンから物理的な散逸のあるラグランジアンを  $\mathcal{L}$  として、

$$\mathcal{L}_d(t) = \mathcal{L} + W_d(t)$$

とする。ただし、次のように符号を

$$Q(t) = -2W_d^{(0)}(t)$$

を考えて、次を仮定する。

$$W_d(t) = W_d^{(0)}(t) + Q_d(t)$$

ただし、

$$\begin{aligned}Q_d(t) &= \int_0^t J_d(s)ds \\ W_d^{(0)}(t) &= \frac{\zeta}{2}\int_0^t \dot{x}(t)^2 ds\end{aligned}$$

とする。

この系の作用は  $t_1 = \tau$  とすると式 13.24 から

$$\begin{aligned}S_d &= \int_0^\tau \mathcal{L}_d(t)dt = \int_0^\tau \mathcal{L}(t)dt + \int_0^\tau W_d(t)dt \\ &= \frac{m}{2}\int_0^\tau (\dot{x}(t))^2 dt - \int_0^\tau V(x(t))dt - \frac{\zeta}{2}\int_0^\tau dt\int_0^t \dot{x}(t)^2 ds - \int_0^\tau dt\int_0^t J_d ds\end{aligned} \quad (13.25)$$

となる。2重積分を処理するために次の公式をつかう。

$$\int_0^\tau dt\int_0^t f(s)ds = \int_0^\tau (\tau - t)f(t)dt$$



この式は両辺を  $\tau$  で微分すると

$$\int_0^\tau f(t) dt$$

であり、 $\tau = 0$  の始点で両辺は 0 であることから成立が確かめられる。

実はこの数学的な式は後の経路積分で多用する次の関係に一般化できる。

$$\int_0^\tau dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_n} f(t_n) dt_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\tau (\tau-t)^{n-1} f(t) dt$$

この式は奥が深く。もし、 $f(t)$  が定数であれば指数関数  $e^{a\tau}$  である。

これにより式 13.25 の大 3 項が計算できる。

$$\frac{\zeta}{2} \int_0^\tau dt \int_0^t \dot{x}(t)^2 ds = -\frac{\zeta}{2} \int_0^\tau (\tau-t) \dot{x}(t)^2 dt$$

これで式 13.19 の

$$\ddot{x} f_{\dot{x}\dot{x}} + \dot{x} f_{\dot{x}x} \rightarrow -\zeta(\tau-t)\ddot{x}(t) + \zeta\dot{x}(t)$$

これで目的の粘性項  $\zeta\dot{x}(t)$  が得られた。しかし、同時に高次の項が出てくる。これが避けられないのである。

鈴木氏はこれを逆手にとり、はじめから無限に高次の多重積分を加えてしまうことをした。

我々は結果として次のような式を期待したい。

$$g(t) (m\ddot{x}(t) + \zeta\dot{x}(t) - F(x(t))) = 0$$

こうなるように  $Q_d(t)$  を決めればよい。そのための因子  $g(t)$  を 0 にならないように決めればラグランジュ方程式ができあがるだろう。

これから鈴木氏は次のように多重積分で  $W_d$  を決めたのである。

$$W_d(t) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{\zeta}{m}\right)^d \int_0^{t_1} dt_1 \int_0^{t_2} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} \mathcal{L}(t_n) dt_n \quad (13.26)$$

$$g(t) = \exp\left(\frac{\zeta}{m}(t-\tau)\right)$$

これにより相殺する効果が得られ、

$$\int_0^\tau \mathcal{L}_d^M(t) dt = \int_0^\tau \mathcal{L}_d^P(t) dt$$

となるべく次の散逸系ラグランジアンが見つかった。

$$\mathcal{L}_d^M(t) = \exp\left[\zeta\frac{t-\tau}{m}\right] \mathcal{L} = \exp\left[\zeta\frac{t-\tau}{m}\right] (T(\dot{x}(t)) - V(x(t)))$$

これが 13.21 である。

つまり因子  $\exp\left[\zeta\frac{t-\tau}{m}\right]$  を除けば通常のラグランジアンである。しかしこの因子に

$$t, \tau \rightarrow it, i\tau$$

と虚数化すると量子論の位相になる。ミクロからマクロの量子論の位相の観測による消失の過程がこの因子に含まれている。

これは筆者の考えなので第 9 部で詳しく考察する。

### 13.2.5 過度的状態

平衡状態でなく、散逸のある系をどう表現するかを考えよう。

前回までに次の散逸のある運動方程式

$$m\ddot{x}(t) + \zeta\dot{x}(t) - F(x(t)) = 0$$

を満たすラグランジアンは次のように与えられた。

$$\mathcal{L}_d(t) = e^{\gamma(t-\tau)} \mathcal{L} \quad (13.27)$$

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} \dot{x}(t)^2 - V(x(t)) \quad (13.28)$$

$$\gamma = \frac{\zeta}{m} \quad (13.29)$$

ただし、これは物理的には未だ不十分で、熱の発生を記述できる次のような項

$$\zeta \int_0^t \dot{x}(s)^2 ds = \dots \zeta x(t) \dots$$

が入るようにしたい。先内容から散逸ラグランジアンを式 13.26 のような無限級数で表す。

$$\begin{aligned} W_d(t) &= \mathcal{L}_d(t) - \mathcal{L} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{\zeta}{m}\right) \int_0^{t_1} dt_1 \int_0^{t_2} dt_2 \dots \int_0^{t_{n-1}} \mathcal{L}(t_n) dt_n \end{aligned} \quad (13.30)$$

第1項は

$$W_d^{(1)} = -\frac{\zeta}{2} \int_0^t \dot{x}(s)^2 ds + \gamma \int_0^t V(x(s)) ds$$

となるが、以降の項がやっかいになるが、前節の多重積分の公式の  $n$  をずらし、

$$\int_0^{\tau} dt \int_0^{t_1} dt_1 \dots \int_0^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n = \frac{1}{n!} \int_0^{\tau} (\tau - t)^n f(t) dt \quad (13.31)$$

を用いる。さらに解析的な関数  $g(x), f(x)$  に対して、

$$\int_0^{\tau} g(\tau - t) f(t) dt = g(0) \int_0^{\tau} f(t) dt + \int_0^{\tau} dt \int_0^t g^{(1)}(t - s) f(s) ds \quad (13.32)$$

が使える。これも前節のように両辺を微分し、初期値  $\tau = 0$  での式を比べると成立がわかる。

さらに、この式の第2項に同様な展開を用いることで次の式が得られる。

$$\begin{aligned} \int_0^{\tau} g(\tau - t) f(t) dt &= \int_0^{\tau} dt \int_0^t dt_1 \dots \int_0^{t_{n-1}} g^{(n)}(t_{n-1} - t_n) f(t_n) dt_n \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n-1} g^{(k)}(0) \int_0^{\tau} dt \int_0^t dt_1 \dots \int_0^{t_{k-1}} f(t_k) dt_k \end{aligned} \quad (13.33)$$

この式で

$$g(t) = t^n$$

とすると

$$g(\tau - t) = (\tau - t)^n$$

$$g(t_{n-1} - t_n) = (t_{n-1} - t_n)^n$$

$$g(0) = 1$$

だから式 13.31 が得られる。例えば  $k = 1$  から  $n = 3$  までを考えると式 13.33 は

$$\begin{aligned} \int_0^\tau (\tau - t)^3 f(t) dt &= \int_0^\tau dt \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 (t_2 - t_3)^3 f(t_3) dt_3 \\ &\quad + \int_0^\tau dt \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} f(t_2) dt_2 \\ &\quad + \int_0^\tau dt \int_0^t f(t_1) dt_1 \end{aligned}$$

式 13.33 は  $n = 3$  の時

$$\int_0^\tau dt \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} f(t_3) dt_3 = \frac{1}{3!} \int_0^\tau (\tau - t)^3 f(t) dt$$

となる。さらに長方形領域を 2 つ三角形に分割し

$$\int_0^\tau dt \int_0^\tau f(t, s) ds = \int_0^\tau dt \int_0^t f(t, s) ds + \int_0^\tau dt \int_0^t f(s, t) ds \quad (13.34)$$

この式は微分して

$$\int_0^\tau f(\tau, t) dt = \int_0^\tau dt \int_0^t f_t(t, s) ds + \int_0^\tau f(t, t) dt \quad (13.35)$$

これらの公式は経路積分を学ぶ上でとても有用であり、全て両辺で次元を与えたとしても等しくなるので、物理的でもある。

この次元を利用する積分公式でもっとも典型的なもの

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

であろう。この式を面積積分にかえることで

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \pi \quad (13.36)$$

である。これは

$$x = \cos \theta, y = \sin \theta$$

で変数変換すると得られるが、式 13.36 がユークリッド空間の全領域での積分であるにもかかわらず指数の中に

位相として入れると円の面積になるのとても興味深い。もちろんマイナスの符号をとれば収束しないが、次のように  $i$  を乗じて結果は  $i\pi$  となる。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(x^2+y^2)} dx dy = i\pi$$

これらの興味ある積分公式が散逸系のラグランジアンを解く手がかりになる。

さらに、摩擦を考えていない系では位置エネルギーと運動エネルギーがバランスし、可逆的にあつうことができた。

しかし、摩擦がはいると時間順が重要になる。これをうまく  $\tau, t$  という 2 つの変数が担う。

よって散逸系の作用積分が経路依存した形で次のようになると予想できる。

$$\int_0^\tau e^{-\gamma(\tau-t)} \mathcal{L}(t) dt = \int_0^\tau \mathcal{L}_d^p(t) dt$$

これを解くために、式 13.35 と部分積分を使って、次の有用な公式がつかえる。

$$\int_0^\tau e^{-\gamma(\tau-t)} f(t) dt = \int_0^\tau f(t) dt - \gamma \int_0^\tau dt \int_0^t e^{-\gamma(\tau-t)} f(s) ds$$

この式で  $f(t) = \mathcal{L}(t)$  として、 $t$  で微分すれば

$$\mathcal{L}_d^p(t) = \mathcal{L}(t) - \gamma \int_0^\tau e^{-\gamma(\tau-t)} \mathcal{L}(s) ds$$

が成り立つ。これから散逸系のラグランジアン  $W_d$  は式 13.28 を代入し、

$$\begin{aligned} W_d(t) &\equiv \mathcal{L}_d^p(t) - \mathcal{L}(t) \\ &= -\frac{\zeta}{2} \int_0^t e^{-\gamma(\tau-t)} \dot{x}(s)^2 ds + \gamma \int_0^t e^{-\gamma(\tau-t)} V(x(s)) ds \end{aligned}$$

である。この時の係数  $e^{-\gamma(\tau-t)}$  を重みとみなし、これが非平衡状態、言い換えれば過度的な状態の特徴である。

この重みがない場合は定常波ができており、重みがかからない。

そこでこの重みが何を意味しているかが、物理的な関心になるだろう。この重みの特徴は  $\tau, t$  の 2 つの変数である。

これによりどちらかを固定して、一方を足し上げる（積分する）ことができるわけである。この因子が指数関数であるということは

遠い過去ほどその影響が少ないことを示す。時間推進はある基準点からの経過時間量に比例して分岐していくことが示唆される。

$e^{-\gamma(\tau-t)}$  の  $t$  展開は次のようになる。

$$e^{-\gamma\tau} + \gamma t e^{-\gamma\tau} + \frac{1}{2} \gamma^2 t^2 e^{-\gamma\tau} + \frac{1}{6} \gamma^3 t^3 e^{-\gamma\tau} + \frac{1}{24} \gamma^4 t^4 e^{-\gamma\tau} + O(t^5)$$

展開次数とともに  $e^{-\gamma\tau} = q, \gamma t = p$  として

$$q \int_0^{p_1} \cdots \int_0^{p_i} dp^i$$

の形になり、これは式 13.30 の積分公式である。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( -\frac{\zeta}{m} \right) \int_0^{t_1} dt_1 \int_0^{t_2} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} \mathcal{L}(t_n) dt_n$$

### 13.2.6 非線形散逸ラグランジアン

ここで数学的に次の非線形項をもつ運動方程式を変分原理から導こう。

例えば次のように粘性係数が定数でなく、速度依存する場合を考える。

$$m\ddot{x}(t) + \zeta(\dot{x}(t))\dot{x}(t) - F(x(t)) = 0 \quad (13.37)$$

この変化だけで、この問題は難問になる。正攻法からの解決は未踏である。

オイラーラグランジュの方程式は式 13.19 から

$$\ddot{x} f_{\dot{x}\dot{x}} + \dot{x} f_{\dot{x}x} + f_{\dot{x}t} - f_x = 0 \quad (13.38)$$

である。正攻法とは運動方程式 13.37 が成り立つような  $f$  をこの式から決めることである。

未だ、誰も成功していないので、ここでは発見的に求める。

つまり、前節での結果から散逸のあるラグランジアンを数学的に

$$\mathcal{L}_d^M(t; \tau) = \exp\left(\int_\tau^t \gamma ds\right) \mathcal{L}(t) \quad (13.39)$$

となることが予想される。ただし、前節までは  $\gamma$  を定数としたが上式では変数である。

$$\gamma(t) \equiv \frac{1}{m} \zeta(\dot{x}(t))$$

試行的に

$$\mathcal{L}_d^{(trial)}(t; \tau) = \exp\left(\int_{\tau}^t \gamma(\dot{x}(s)) ds\right) \mathcal{L}(t)$$

とすると、これは間違いになる。

つまり、式 13.39 のようにラグランジアンそのものが  $x(t)$  の経路による汎関数で表されている場合、オイラー・ラグランジュ方程式が使えない。これは  $\dot{x}(s)$  の変分をとる場合に

$$\dot{x}(s) + \delta\dot{x}(s)$$

のように変分をとることになるからである。そこで鈴木氏は変分をとる際に指数因子が時微分だけになるように、ある固定した関数

$$\dot{x}_*(t)$$

を仮定し、これを用いて非線形の数学的な散逸ラグランジアンを次のようにおいた。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_d^M(t; \tau) &= \exp\left(\int_{\tau}^t \gamma(\dot{x}_*(s)) ds\right) \mathcal{L}(t) \\ &= \exp\left(\int_{\tau}^t \gamma(\dot{x}_*(s)) ds\right) \left(\frac{m}{2} \dot{x}(t)^2 - V(x(t))\right) \end{aligned}$$

また、 $F(x)$  を保存力として

$$F(x) = -\frac{dV(x)}{dx}$$

であった。

これからオイラー・ラグランジュの方程式は式 13.38 から

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}_d^M(t; \tau)}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}_d^M(t; \tau)}{\partial x} = m\ddot{x}(t) + \zeta(\dot{x}(t)) \dot{x}(t) - F(x(t)) = 0$$

## 13.3 Feynman 核 [20]

### 13.3.1 Trotter 公式

経路積分は基本的にはユークリッド平面に連続した曲線を考えて粒子の軌道を追う。背景には多様な位相空間があり、交換しないような場合についても順序積を定義すると時間変化の振幅を得ることができる。

時間推進の演算子を  $U$  として

$$|\phi(t)\rangle = U(t, t_0) |\phi(t_0)\rangle \quad (13.40)$$

のように波動関数の時間推進を与える。一方でシュレディンガー方程式から

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\phi(t)\rangle = H |\phi(t)\rangle \quad (13.41)$$

が成り立つ。よって

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |U(t, t_0)\rangle = H |U(t, t_0)\rangle \quad (13.42)$$

$$U(t_0, t_0) = I(\text{単位元}) \quad (13.43)$$

が成り立つ必要がある。次のように時間演算子を区分にわけ、その積で表現できるとする。

$$U(t_2, t_0) = U(t_2, t_1)U(t_1, t_0) \quad t_2 > t_1 > t_0 \quad (13.44)$$

従ってシュレディンガー方程式から

$$U(t_0 + \Delta t, t_0) = \left(1 - \frac{i}{\hbar} H(t_1) \Delta t\right) + O(\Delta t^2) \quad (13.45)$$

と表すことができるので N-1 等分した時、それぞれの 2 次の項を無視し、

$$U(t_N, t_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{i}{\hbar} H(t_N) \Delta t\right) \left(1 - \frac{i}{\hbar} H(t_{N-1}) \Delta t\right) \cdots \left(1 - \frac{i}{\hbar} H(t_1) \Delta t\right) \quad (13.46)$$

$$\Delta t = \frac{t_N - t_0}{N} \quad (13.47)$$

とおくことができる。ハミルトニアンが時間に陽に依存しない場合は

$$U(t_N, t_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{i}{\hbar} H \Delta t\right)^N = e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)H} \quad (13.48)$$

となるので

$$H = A + B \quad (13.49)$$

の場合は次の **Trotter's formula** トロッターの公式が導ける

$$e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)(A+B)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(e^{-\frac{i}{\hbar} \Delta t A} e^{-\frac{i}{\hbar} \Delta t B}\right)^N \quad (13.50)$$

ここではハミルトニアンはシュレディンガー表示で運動量 P, 位置 Q の関数である。また、はじめは簡単のため自由度は 1 とし次の関係が成立するとする。

$$[Q, P] = i\hbar \quad (13.51)$$

$$[P, P] = [Q, Q] = 0 \quad (13.52)$$

$$P |p\rangle = p |p\rangle \quad (13.53)$$

$$Q |q\rangle = q |q\rangle \quad (13.54)$$

また次の完全性の条件を満足する。

$$\int_{-\infty}^{\infty} |p\rangle \langle p| dp = I \quad (13.55)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |q\rangle \langle q| dq = I \quad (13.56)$$

$$\langle q|q'\rangle = \delta(q - q'), \langle p|p'\rangle = \delta(p - p') \quad (13.57)$$

また波動関数は次の平面波になる。

$$\langle q|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipq/\hbar}, \quad \langle p|q\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-ipq/\hbar} \quad (13.58)$$

よって  $H(P, Q; t_j) = H_j$  として式 13.48 は

$$U(t_N, t_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} |q_N\rangle \prod_{j=1}^N \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dq_j \langle q_j | 1 - \frac{i}{\hbar} H_j(P, Q) \Delta t | q_{j-1} \rangle \right\} \int_{-\infty}^{\infty} dq_0 \langle q_0 | \quad (13.59)$$

と書ける。ここで **Fynman** 核を

$$K(q_j, t_j; q_{j-1}, t_{j-1}) \equiv \langle q_j | 1 - \frac{i}{\hbar} H_j(P, Q) \Delta t | q_{j-1} \rangle \quad (13.60)$$

とする。  $H$  が次のように時間分離して書ける時は PQ 順序付けとして

$$H(P, Q; t) = \sum_{m,n} a_{mn}(t) P^m Q^n \quad (13.61)$$

式 13.60 は PQ 順として式 13.55 を左から挿入し、式 13.58 から

$$K(q_j, t_j; q_{j-1}, t_{j-1})^{(PQ)} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} |p_j\rangle \langle p_j| dp \langle q_j | 1 - \frac{i}{\hbar} H_j(P, Q) \Delta t | q_{j-1} \rangle \quad (13.62)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dp \langle q_j | p_j \rangle \langle p_j | q_{j-1} \rangle \left( 1 - \frac{i}{\hbar} H_j(p_j, q_{j-1}) \Delta t \right) \quad (13.63)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{1}{2\pi\hbar} e^{ip_j q_j / \hbar} e^{-ip_j q_{j-1} / \hbar} \left( 1 - \frac{i}{\hbar} H_j(p_j, q_{j-1}) \Delta t \right) \quad (13.64)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{1}{2\pi\hbar} e^{ip_j (q_j - q_{j-1}) / \hbar} \left( 1 - \frac{i}{\hbar} H_j(p_j, q_{j-1}) \Delta t \right) \quad (13.65)$$

となるが  $H$  を次のように書くと QP 順序付けとして

$$H(P, Q; t) = \sum_{m,n} b_{mn}(t) Q^m P^n \quad (13.66)$$

式 13.60 は QP 順として式 13.56 を右から挿入し、式 13.58 から

$$K(q_j, t_j; q_{j-1}, t_{j-1})^{(QP)} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \langle q_j | 1 - \frac{i}{\hbar} H_j(P, Q) \Delta t | q_{j-1} \rangle |p_j\rangle \langle p_j| dp \quad (13.67)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dp \langle q_j | p_j \rangle \langle p_j | q_{j-1} \rangle \left( 1 - \frac{i}{\hbar} H_j(p_j, q_j) \Delta t \right) \quad (13.68)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{1}{2\pi\hbar} e^{ip_j q_j / \hbar} e^{-ip_j q_{j-1} / \hbar} \left( 1 - \frac{i}{\hbar} H_j(p_j, q_j) \Delta t \right) \quad (13.69)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{1}{2\pi\hbar} e^{ip_j (q_j - q_{j-1}) / \hbar} \left( 1 - \frac{i}{\hbar} H_j(p_j, q_j) \Delta t \right) \quad (13.70)$$

となる。従って Q,P の順序を先に整列させておく必要がある。次にもう少し詳しくみる。

### 13.3.2 Weyl の順序付け

順序付けられたハミルトニアンは  $p, q$  の位相空間で不変性を保っていける。これを次で確認するとハミルトニアンに式 13.55 と 13.56 を 2 回ずつ用いると式 13.58 から

$$H(P, Q; t) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int \int \int \int |q_1\rangle \langle p_1| H(P, Q; t) |p_2\rangle \langle q_2| e^{i(p_1 q_1 - p_2 q_2) / \hbar} dp_1 dp_2 dq_1 dq_2 \quad (13.71)$$

が得られる。ここで次のような変数変換を考える。

$$p_1 = p + \left(\frac{1}{2} - \alpha\right) u, \quad q_1 = q + \left(\frac{1}{2} + \alpha\right) v \quad (13.72)$$

$$p_2 = p - \left(\frac{1}{2} + \alpha\right) u, \quad q_2 = q - \left(\frac{1}{2} - \alpha\right) v \quad (13.73)$$

すると

$$H(P, Q; t) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int \int \int \left| q + \left(\frac{1}{2} + \alpha\right) v \right\rangle \left\langle q - \left(\frac{1}{2} - \alpha\right) v \right| H^{[\alpha]}(p, q; t) e^{ipv/\hbar} dv dq dp \quad (13.74)$$

$$H^{[\alpha]}(p, q; t) \equiv \int \left\langle p + \left(\frac{1}{2} - \alpha\right) u \right| H(P, Q; t) \left| p - \left(\frac{1}{2} + \alpha\right) u \right\rangle e^{iqu/\hbar} du \quad (13.75)$$

となり、パラメタ  $\alpha$  で表すことができる。そこで  $a, b$  は  $c$  数として **Cambell-Baker-Hausdroff** の公式

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-[A,B]/2} \text{ as } [A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0 \quad (13.76)$$

を用いて

$$H \equiv e^{i(aP+bQ)/\hbar} \quad (13.77)$$

$$= e^{iaP/\hbar} e^{ibQ/\hbar} e^{-iab/2\hbar} \quad (13.78)$$

$$= e^{ibQ/\hbar} e^{iaP/\hbar} e^{iab/2\hbar} \quad (13.79)$$

となり

$$e^{ibQ/\hbar} \left| p - \left(\frac{1}{2} + \alpha\right) u \right\rangle = \left| p + b - \left(\frac{1}{2} + \alpha\right) u \right\rangle \quad (13.80)$$

となることなどから

$$H^{[\alpha]}(p, q) = \int \left\langle p + \left(\frac{1}{2} - \alpha\right) u \right| e^{i(aP+bQ)/\hbar} \left| p - \left(\frac{1}{2} + \alpha\right) u \right\rangle e^{iqu/\hbar} du$$

は次のように場合分けし、

$\alpha = 1/2$  ならば

$$\begin{aligned} H^{[\alpha]}(p, q) &= \int \langle p | e^{i(aP+bQ)/\hbar} | p - u \rangle e^{iqu/\hbar} du \\ &= \int \langle p | e^{iaP/\hbar} e^{ibQ/\hbar} e^{-iab/2\hbar} | p - u \rangle e^{iqu/\hbar} du \\ &= \int \langle p - b | e^{iap/\hbar} e^{-iab/2\hbar} | p - u \rangle e^{iqu/\hbar} du \end{aligned}$$

よって  $u = b$  の時のみ値をとり、

$$H^{[\alpha]}(p, q) = e^{i(ap+bq)/\hbar - iab/2\hbar} = e^{i(ap+bq)/\hbar - iab\alpha\hbar} \quad (13.81)$$

を得る。よってはじめの式と比べると

$$e^{iaP/\hbar} e^{ibQ/\hbar} = e^{iap/\hbar} e^{ibq/\hbar} \quad (13.82)$$

のようにふるまっている。



$\alpha = -1/2$ ならば

$$\begin{aligned} H^{[\alpha]}(p, q) &= \int \langle p+u | e^{i(aP+bQ)/\hbar} | p \rangle e^{iqu/\hbar} du \\ &= \int \langle p+u | e^{iap/\hbar} e^{iab/2\hbar} | p+b \rangle e^{iqu/\hbar} du \end{aligned}$$

よって  $u = b$  の時、結局

$$H^{[\alpha]}(p, q) = e^{i(ap+bq)/\hbar+iab/2\hbar} = e^{i(ap+bq)/\hbar-iab\alpha\hbar} \quad (13.83)$$

を得る。よってはじめの式と比べると

$$e^{ibQ/\hbar} e^{iap/\hbar} = e^{ibq/\hbar} e^{iap/\hbar} \quad (13.84)$$

のようにふるまっている。

$\alpha = 0$ ならば

$$\begin{aligned} H^{[\alpha]}(p, q) &= \int \left\langle p + \frac{u}{2} \left| e^{i(aP+bQ)/\hbar} \right| p - \frac{u}{2} \right\rangle e^{iqu/\hbar} du \\ &= \int \left\langle p + \frac{u}{2} \left| e^{iaP/\hbar} e^{ibQ/\hbar} e^{-iab/2\hbar} \right| p - \frac{u}{2} \right\rangle e^{iqu/\hbar} du \\ &= \int \left\langle p + \frac{u}{2} \left| e^{ia(p+u/2)/\hbar} e^{-iab/2\hbar} e^{ib(q-u/2)/\hbar} \right| p - \frac{u}{2} \right\rangle e^{iqu/\hbar} du \end{aligned}$$

よって  $u = 0$  の時のみ値をとり

$$H^{[\alpha]}(p, q) = e^{i(ap+bq)/\hbar+iab/2\hbar} e^{-iab/2\hbar} = e^{i(ap+bq)/\hbar} = e^{i(ap+bq)/\hbar-iab\alpha\hbar} \quad (13.85)$$

を得る。よってはじめの式と比べると

$$e^{i(aP+bQ)/\hbar} = e^{i(ap+bq)/\hbar} \quad (13.86)$$

のようにふるまっている。

従って  $\alpha = 1/2$  は **PQ** 順序

$$P^m Q^n = p^m q^n \quad (13.87)$$

に対応し、 $\alpha = -1/2$  は **QP** 順序

$$Q^m P^n = q^m p^n \quad (13.88)$$

に対応し、 $\alpha = 0$  は **Weyl** 順序

$$\frac{1}{2} (PQ + QP) = pq \quad (13.89)$$

$$\frac{1}{3} (P^2Q + PQP + QP^2) = p^2q \quad (13.90)$$

と対応することがわかる。これらの順序付けを含めて経路積分の表示は次のようになる。

$$\begin{aligned} \langle q_i | H(P, Q; t_j) | q_{j-1} \rangle &= \int \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{ip_j(q_j - q_{j-1})/\hbar} H_j^{[\alpha]}(p_j, q_j^{(\alpha)}) \\ q^{(\alpha)} &= \left( \frac{1}{2} - \alpha \right) q_j + \left( \frac{1}{2} + \alpha \right) q_{j-1} \end{aligned}$$

よって **Feynman** 核が式 13.65 より次のように求まる。

$$\begin{aligned} K(q_j, t_j; q_{j-1}, t_{j-1}) &= \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{1}{2\pi\hbar} e^{ip_j(q_j - q_{j-1})/\hbar} \left( 1 - \frac{i}{\hbar} H_j^{[\alpha]}(p_j, q_{j-1}) \Delta t \right) \\ &\simeq \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{1}{2\pi\hbar} e^{ip_j(q_j - q_{j-1})/\hbar - \Delta t H_j^{[\alpha]}/\hbar} \end{aligned}$$

同様に時間推進の演算子も

$$K(q_f, t_N; q_i, t_0) = \langle q_f | U(t_N, t_0) | q_i \rangle \quad (13.91)$$

$$U(t_N, t_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \langle q_N | \prod_{j=1}^N dp_j dq_j \frac{1}{2\pi\hbar} e^{ip_j(q_j - q_{j-1})/\hbar - i\Delta t H_j^{[\alpha]}/\hbar} \int dq_0 \langle q_0 | \quad (13.92)$$

とおけて、分離でき、計算ができるようになる。

従ってまとめるとハミルトニアンと  $\alpha$  の関係が次のようになる。

$\alpha = 1/2$  は **PQ** 順序

$$P^m Q^n = p^m q^n$$

$$H_j^{[1/2]}(p_j, q_{j-1})$$

$\alpha = -1/2$  は **QP** 順序

$$Q^m P^n = q^m p^n$$

$$H_j^{[-1/2]}(p_j, q_j)$$

$\alpha = 0$  は **Weyl** 順序で中点処方とも呼ばれ

$$\frac{1}{2} (PQ + QP) = pq$$

$$H_j^{[0]}(p_j, \frac{q_j + q_{j-1}}{2})$$

となる。

例えば次のようなハミルトニアンを考える。

$$H = PQP$$

**QP** 順序では

$$H^{(QP)} = QP^2 - i\hbar P$$

**PQ** 順序では

$$H^{(PQ)} = P^2Q + i\hbar P$$

である。

### 13.3.3 自由粒子

例えば古典的な粒子はハミルトニアンが

$$H(P, Q) = \frac{P^2}{2m} + V(Q)$$

の時、

$$H^{[\alpha]}(p, q) = \frac{p^2}{2m} + V(q)$$

となる。これから Feynman 核は次の積分公式を用いると、

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp e^{ap^2+bp} = \sqrt{\frac{\pi}{-a}} e^{-b^2/4a^2}$$

$$\Delta q_j \equiv q_j - q_{j-1}$$

$$p = m \left( \frac{\Delta q}{\Delta t} \right)$$

として

$$\begin{aligned} K(q_f, t_N; q_i, t_0) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^{N-1} \int_{-\infty}^{\infty} dq_j \prod_{j=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_j}{2\pi\hbar} \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^N \left\{ p_j \Delta q_j - \Delta t \left( \frac{p_j^2}{2m} + V(q_j^{(\alpha)}) \right) \right\} \right] \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t}} \prod_{j=1}^{N-1} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t}} dq_j \\ &\quad \times \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \Delta t \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{m}{2} \left( \frac{\Delta q_j}{\Delta t} \right)^2 - V(q_j^{(\alpha)}) \right\} \right]_{q_N=q_f, q_0=q_i} \end{aligned} \quad (13.93)$$

のように求まる。これを **Feynman 経路積分公式** という。

最後の位相項の  $\frac{\Delta q_j}{\Delta t}$  は古典的な粒子速度であるが  $dp$  でガウス積分し運動量項は定数化され、第 1 項の  $p_j \Delta q_j$  から来る  $\Delta p$  とともに時間推進の  $(1 - \frac{i}{\hbar} \Delta t H)$  から来る  $\Delta t$  の比からなることに留意がいる。

さらに単純な自由粒子であれば

$$H^{[\alpha]}(p, q) = \frac{p^2}{2m} = \hat{H} \quad (13.94)$$

であるから式 13.55、式 13.58 を用いて  $p$  でガウス積分を実行し、

$$\begin{aligned} K(q_f, t_f; q_i, t_i) &= \langle q_f | \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t_f - t_i) \right] | q_i \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dp \langle q_f | \exp \left[ -\frac{ip^2}{2m\hbar} (t_f - t_i) \right] | p \rangle \langle p | q_i \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dp \langle p | \exp \left[ -\frac{ip^2}{2m\hbar} (t_f - t_i) \right] | p \rangle \exp \left[ \frac{i}{\hbar} (q_f - q_i) p \right] \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \sqrt{\frac{2\pi m \hbar}{i(t_f - t_i)}} \exp \left[ \frac{im(q_f - q_i)^2}{2\hbar(t_f - t_i)} \right] \\ &= \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar i(t_f - t_i)}} \exp \left[ \frac{im(q_f - q_i)^2}{2\hbar(t_f - t_i)} \right] \end{aligned} \quad (13.95)$$

と求まる。一般に次の振幅を求める。

$$K(q_f, t_f; q_i, t_i) = \langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle \quad (13.96)$$

隣接間について次のように H を外に出す。

$$\begin{aligned} K(q_{j+1}, t_{j+1}; q_j, t_j) &= \langle q_{j+1} | \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} \hat{H} t_{j+1} \right] \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \hat{H} t_j \right] | q_i \rangle \\ &= \langle q_{j+1} | \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} \hat{H} (t_{j+1} - t_j) \right] | q_i \rangle \\ &= \langle q_{j+1} | \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} \hat{H} \tau \right] | q_i \rangle \\ &= \langle q_{j+1} | \left( 1 - \frac{i}{\hbar} \hat{H} \tau + \dots \right) | q_i \rangle \\ &= \delta(q_{j+1} - q_j) - \frac{i}{\hbar} \tau \langle q_{j+1} | \hat{H} | q_i \rangle \end{aligned} \quad (13.97)$$

ただし、

$$\tau \equiv \frac{t_f - t_i}{n} \quad (13.98)$$

とした。第 2 項について Weyl 順序を用いれば

$$\begin{aligned} \langle q_{j+1} | \hat{H} | q_i \rangle &= \int dp_j \langle q_{j+1} | p_j \rangle \langle p_j | \hat{H} | q_i \rangle \\ &= \int dp_j \langle q_{j+1} | p_j \rangle \langle p_j | q_j \rangle \hat{H} \left( p, \frac{q_{j+1} + q_j}{2} \right) \end{aligned}$$

平均値を

$$\bar{q} \equiv \frac{q_{j+1} + q_j}{2} \quad (13.99)$$

とすると

$$\langle q_{j+1} | \hat{H} | q_j \rangle = \int dp_j \langle q_{j+1} | p_j \rangle \langle p_j | q_j \rangle \hat{H}(p, \bar{q}) = \langle q_j | p_j \rangle \hat{H}(p, \bar{q})$$

となる。

これから次のポテンシャルを含むハミルトニアンの場合について

$$H^{[\alpha]}(p, q) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{q}) \quad (13.100)$$

まず、運動量部分について完全性を 2 つはさみ式 13.55 から

$$\begin{aligned} \langle q_{j+1} | \frac{\hat{p}^2}{2m} | q_i \rangle &= \int dp_j dp'_j \langle q_{j+1} | p_j \rangle \langle p_j | p'_j \rangle \langle p'_j | q_i \rangle \frac{p_j'^2}{2m} \\ &= \int dp_j dp'_j \frac{1}{2\pi\hbar} \exp \left[ \frac{i}{\hbar} q_{j+1} p_j - q_j p'_j \right] \delta(p_j - p'_j) \frac{p_j'^2}{2m} \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp_j \exp \left[ \frac{i}{\hbar} p_j (q_{j+1} - q_j) \right] \frac{p_j^2}{2m} \end{aligned}$$

ポテンシャル項については、この場合 q のみの関数を考えているので

$$\begin{aligned}\langle q_{j+1} | V(\hat{q}) | q_i \rangle &= V(\bar{q}) \langle q_{j+1} | q_j \rangle \\ &= V(\bar{q}) \delta(q_{j+1} - q_j)\end{aligned}$$

が得られる。δ関数の定義から

$$\delta(q_{j+1} - q_j) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dp_j \exp \left[ \frac{i}{\hbar} p_j (q_{j+1} - q_j) \right] \quad (13.101)$$

とおくと 13.97 は次のように計算できる。

$$\begin{aligned}\langle q_{j+1}, t_{j+1} | q_j, t_j \rangle &= \delta(q_{j+1} - q_j) - \frac{i}{\hbar} \tau \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp_j \exp \left[ \frac{i}{\hbar} p_j (q_{j+1} - q_j) \right] H(p_j, \bar{q}_j) + \dots \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp_j \exp \left[ \frac{i}{\hbar} p_j (q_{j+1} - q_j) \right] - \frac{i}{\hbar} \tau \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp_j \exp \left[ \frac{i}{\hbar} p_j (q_{j+1} - q_j) \right] H(p_j, \bar{q}_j) + \dots \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp_j \exp \left[ \frac{i}{\hbar} p_j (q_{j+1} - q_j) \right] \left( 1 - \frac{i}{\hbar} \tau H(p_j, \bar{q}_j) + \dots \right) \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp_j \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \{ p_j (q_{j+1} - q_j) - H(p_j, \bar{q}_j) \tau \} \right]\end{aligned}$$

となることからこれを次々に挿入し、全振幅が

$$\begin{aligned}\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle &= \int \dots \int dq_1 \dots dq_n \langle q_f, t_f | q_n, t_n \rangle \langle q_n, t_n | q_{n-1}, t_{n-1} \rangle \dots \langle q_1, t_1 | q_i, t_i \rangle \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int \prod_{j=1}^n dq_j \frac{1}{2\pi\hbar} \int \prod_{j=0}^n dp_j \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=0}^n \{ p_j (q_{j+1} - q_j) - H(p_j, \bar{q}_j) \tau \} \right] \quad (13.102)\end{aligned}$$

と求まる。この式で  $n \rightarrow \infty$  とすれば

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = \iint Dq Dp \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t d\tau \{ p\dot{q} - H^{[\alpha]}(p, q, ; \tau) \} \right] \quad (13.103)$$

とかけるのでこれをハミルトニアン経路積分公式という。

また、式 13.93 でも同様に  $N \rightarrow \infty$  とすれば

$$K(q, t; q_0, t_0) = \int Dq \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t d\tau \left\{ \frac{m}{2} \dot{q}^2 - V(q) \right\} \right]$$

となり、これをラグランジアン積分公式という。

### 13.3.4 調和振動子

次に古典的な調和振動子の場合のラグランジアンを

$$L(x, \dot{x}, t) = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - V(x) \quad (13.104)$$

$$V(x) = \frac{m\omega^2 x^2}{2} \quad (13.105)$$

とするとオイラーラグランジュ方程式は  $dV/dx = V'$  として

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= -V' - m\ddot{x} \\ &= -m\omega^2 x - m\ddot{x} \\ &= 0\end{aligned}\tag{13.106}$$

ここで古典解を  $x(t)$  として

$$x(t) = x_c(t) + \delta x(t)$$

とおく。また、端点については時刻を  $t_i, t_f$  を考え

$$\begin{aligned}x_c(t_i) &= x_i \\ x_c(t_f) &= x_f \\ \delta x(t_i) &= 0 \\ \delta x(t_f) &= 0\end{aligned}$$

とすると作用  $S$  は

$$\begin{aligned}S &= \int_{t_i}^{t_f} dt L \\ &= \int_{t_i}^{t_f} dt \left\{ \frac{m}{2} (\dot{x}_c + \delta \dot{x})^2 - V(x_c + \delta x) \right\} \\ &= \int_{t_i}^{t_f} dt \left\{ \frac{m}{2} \dot{x}_c^2 + \frac{m}{2} \delta \dot{x}^2 + m \dot{x}_c \delta \dot{x} - V(x_c) - V'(x_c) \delta x - \frac{1}{2} V''(x_c) \delta x^2 - \dots \right\} \\ &= \int_{t_i}^{t_f} dt \left\{ \left( \frac{m}{2} \dot{x}_c^2 - V(x_c) \right) + \left( \frac{m}{2} \delta \dot{x}^2 - \frac{1}{2} V''(x_c) \delta x^2 \right) + (m \dot{x}_c \delta \dot{x} - V'(x_c) \delta x) - O(\delta x^3) \dots \right\}\end{aligned}$$

と展開できるが  $O(\delta x^3)$  以上を無視し、括弧の中を作用  $S$  で置き換えると

$$S = S(x_c) + S_1(\delta x) + S_2(\delta x^2)\tag{13.107}$$

となる。各項は  $V'' = m\omega^2$  だから

$$\begin{aligned}S_1(\delta x) &= \int_{t_i}^{t_f} dt \left( \frac{m}{2} \delta \dot{x}^2 - \frac{1}{2} V''(x_c) \delta x^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} m \int_{t_i}^{t_f} dt \left( (\delta \dot{x})^2 - \omega^2 \delta x^2 \right)\end{aligned}\tag{13.108}$$

部分積分を用いて式 13.106 より

$$\begin{aligned}S_2(\delta x^2) &= \int_{t_i}^{t_f} dt (m \dot{x}_c \delta \dot{x} - V'(x_c) \delta x) \\ &= m \dot{x}_c \delta x \Big|_{t_i}^{t_f} - \int_{t_i}^{t_f} dt (m \ddot{x}_c + V'(x_c)) \delta x \\ &= 0\end{aligned}$$

これから確率振幅が関数  $F(T); T = t_f - t_i$  を時間間隔のみの関数として

$$K(x_f, x_i) = e^{\frac{i}{\hbar} S_1(\delta x)} F(T) \quad (13.109)$$

とおける。\$F(T)\$ は

$$F(T) = \int_{\delta x_i = \delta x_f = 0} D\delta x(t) e^{\frac{i}{\hbar} S_1(\delta x)} \quad (13.110)$$

$$= \int_{\delta x_i = \delta x_f = 0} D\delta x(t) \text{Exp} \left[ \frac{i}{\hbar} \left( \int_{t_i}^{t_f} dt L(\delta x, \delta \dot{x}, t) \right) \right] \quad (13.111)$$

調和振動しでは

$$x_c(t) = a e^{i\omega t} + b e^{-i\omega t} \quad (13.112)$$

$$\dot{x}_c(t) = i\omega (a e^{i\omega t} - b e^{-i\omega t}) \quad (13.113)$$

となるので次のように行列表現すると

$$\begin{pmatrix} x_i \\ x_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\omega t_i} & e^{-i\omega t_i} \\ e^{i\omega t_f} & e^{-i\omega t_f} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad (13.114)$$

係数 \$a, b\$ が逆行列を用いて求められ

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{e^{i\omega(t_i - t_f)} - e^{-i\omega(t_i - t_f)}} \begin{pmatrix} e^{-i\omega t_f} & -e^{-i\omega t_i} \\ -e^{i\omega t_f} & e^{i\omega t_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ x_f \end{pmatrix} \quad (13.115)$$

となる。これから

$$\begin{aligned} S(x_c) &= \int_{t_i}^{t_f} dt \left( \frac{m}{2} \dot{x}^2 - V(x_c) \right) \quad (13.116) \\ &= \int_{t_i}^{t_f} dt \left( \frac{m}{2} (i\omega (a e^{i\omega t} - b e^{-i\omega t}))^2 - \frac{m\omega^2}{2} (a e^{i\omega t} + b e^{-i\omega t})^2 \right) \\ &= \frac{m\omega}{2 \sin \omega T} \{ (x_i^2 + x_f^2) \cos \omega T - 2x_i x_f \} \end{aligned}$$

がもとまる。この結果は

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1 \quad (13.117)$$

だから \$\omega \to 0\$ で前節でみたように自由粒子の結果に一致する。

### 13.3.5 フーリエ展開

フーリエ変換を利用することで自由粒子も調和振動子の経路積分を古典経路を用いて同じように計算できる。はじめに自由粒子について

$$L = \frac{m}{2} \dot{x}^2 \quad (13.118)$$

を考えると古典経路 \$x\_c(t)\$ は

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x} = 0 \quad (13.119)$$

を満たし、また先と同様に

$$x(t) = x_c(t) + \delta x(t) \quad (13.120)$$

とおく。また、端点については時刻を  $t_i, t_f$  を考え

$$x_c(t_i) = x_i \quad (13.121)$$

$$x_c(t_f) = x_f \quad (13.122)$$

$$\delta x(t_i) = 0 \quad (13.123)$$

$$\delta x(t_f) = 0 \quad (13.124)$$

$$x_c(t) = x_f \frac{t - t_i}{T} + x_i \frac{t - t_f}{-T} \quad (13.125)$$

$$\dot{x}_c(t) = \frac{x_f - x_i}{T} \quad (13.126)$$

とおく。よって

$$S(x_c) = \int_{t_i}^{t_f} dt \left( \frac{m}{2} \dot{x}^2 \right) \quad (13.127)$$

$$= \int_{t_i}^{t_f} dt \left( \frac{m}{2} (\dot{x}_c + \delta \dot{x})^2 \right) \quad (13.128)$$

$$= \frac{m}{2} \int_{t_i}^{t_f} dt (\dot{x}_c^2 + \delta \dot{x}^2 + 2\dot{x}_c \delta \dot{x}) \quad (13.129)$$

部分積分により  $m\ddot{x} = 0$  だから

$$\int_{t_i}^{t_f} dt \dot{x}^2 = x_c \dot{x}_c \Big|_{t_i}^{t_f} - \int_{t_i}^{t_f} dt x_c \ddot{x}_c \quad (13.130)$$

$$= x_c \dot{x}_c \Big|_{t_i}^{t_f} \quad (13.131)$$

$$= \frac{(x_f - x_i)^2}{T} \quad (13.132)$$

また部分積分により  $m\ddot{x} = 0, \delta x_i = \delta x_f = 0$  だから

$$\int_{t_i}^{t_f} dt (2\dot{x}_c \delta \dot{x}) = 2\dot{x}_c \delta x \Big|_{t_i}^{t_f} - \int_{t_i}^{t_f} dt \delta x_c 2\ddot{x}_c \quad (13.133)$$

$$= 0 \quad (13.134)$$

これから

$$K(x_f, x_i) = e^{\frac{i}{\hbar} S_c} K(0, 0) \quad (13.135)$$

$$= \text{Exp} \left[ im \frac{(x_f - x_i)^2}{2\hbar T} \right] K(0, 0) \quad (13.136)$$

ただし、

$$K(0, 0) = \int_{\delta x_i = \delta x_f = 0} D\delta x(t) \text{Exp} \left[ \frac{i}{\hbar} m \frac{(\delta \dot{x})^2}{2} \right] \quad (13.137)$$

$$= \frac{1}{A^n} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_{n-1} \text{Exp} \left[ \frac{im}{2\hbar} \sum_{k=1}^n \frac{(\delta x_k - \delta x_{k-1})^2}{\epsilon} \right] \quad (13.138)$$



となるから初期条件  $x_i, x_f$  が確定していれば求めることができ、有限の  $n$  に対しても式 13.95 から

$$\begin{aligned}
 K(0,0) &= \frac{1}{A} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \text{Exp} \left[ \frac{im}{2\hbar} \sum_{k=1}^1 \frac{(\delta x_k - \delta x_{k-1})^2}{\epsilon} \right] \\
 &= \frac{1}{A} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \text{Exp} \left[ \frac{im}{2\hbar} \frac{(\delta x_1 - \delta x_0)^2}{\epsilon} \right] \\
 &= \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar i(t_f - t_i)}} \\
 &= \left( \frac{m}{2\pi\hbar i T} \right)^{1/2}
 \end{aligned}$$

である。ここでフーリエ変換を利用し、

$$\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_{n-1} \quad (13.139)$$

から

$$a_1, a_2, \dots, a_{n-1} \quad (13.140)$$

への線形変換  $D_n$  を次で定義する。

$$\begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \vdots \\ \delta x_{n-1} \end{pmatrix} = D_{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} \quad (13.141)$$

$$D_{n-1} = \begin{pmatrix} \sin \frac{\pi \cdot 1}{T} t_1 & \sin \frac{\pi \cdot 2}{T} t_1 & \cdots & \sin \frac{\pi \cdot (n-1)}{T} t_1 \\ \sin \frac{\pi \cdot 1}{T} t_2 & \sin \frac{\pi \cdot 2}{T} t_2 & \cdots & \sin \frac{\pi \cdot (n-1)}{T} t_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sin \frac{\pi \cdot 1}{T} t_{n-1} & \sin \frac{\pi \cdot 2}{T} t_{n-1} & \cdots & \sin \frac{\pi \cdot (n-1)}{T} t_{n-1} \end{pmatrix} \quad (13.142)$$

これは  $\delta x_i = \delta x_f = 0$  という条件があるので境界条件として利用でき、次のフーリエ級数

$$\delta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{\pi k t}{T} \quad (13.143)$$

を有限でカットオフした

$$\begin{aligned}
 \delta x(t_j) &= \sum_{k=1}^{n-1} a_k \sin \frac{\pi k t_j}{T} \\
 &= \sum_{k=1}^{n-1} a_k \sin \frac{\pi k j}{T} \quad T = n\epsilon
 \end{aligned} \quad (13.144)$$

と展開することに対応している。これから

$$K(0,0) = \frac{1}{A^n} \int_{-\infty}^{\infty} da_1 \int_{-\infty}^{\infty} da_2 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} da_{n-1} |\text{Det } D_{n-1}| \text{Exp} \left[ \frac{im}{2\hbar} \sum_{k=1}^n \frac{(\delta x_k - \delta x_{k-1})^2}{\epsilon} \right] \quad (13.145)$$

と書き換えることができる。これを計算するために次の準備をする。式 13.144 より

$$\begin{aligned}
\int dt(\delta\dot{x}^2) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \frac{(\delta x_j - \delta x_{j-1})^2}{\epsilon} & (13.146) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{T} \sum_{j=1}^n \left\{ \sum_k a_k \left( \sin \frac{\pi k j}{n} - \sin \frac{\pi k (j-1)}{n} \right) \right\}^2 \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{T} \sum_{j=1}^n \sum_{kk'} a_k a_{k'} \left( \sin \frac{\pi k j}{n} \sin \frac{\pi k' j}{n} + \sin \frac{\pi k (j-1)}{n} \sin \frac{\pi k' (j-1)}{n} - 2 \sin \frac{\pi k j}{n} \sin \frac{\pi k' (j-1)}{n} \right)
\end{aligned}$$

ここで

$$\sum_{j=0}^{n-1} \sin \frac{\pi k j}{n} \sin \frac{\pi k' j}{n} = \delta_{kk'} \frac{n}{2} \quad (13.147)$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} \sin \frac{\pi k j}{n} \sin \frac{\pi k' (j-1)}{n} = \delta_{kk'} \frac{n}{2} \cos \frac{\pi k}{n} \quad (13.148)$$

$$\int_0^T dt \sin \frac{\pi k j}{n} \sin \frac{\pi k' j}{n} = \delta_{kk'} \frac{T}{2} \quad (13.149)$$

より

$$\int dt(\delta\dot{x}^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{T} \sum_{j=1}^{n-1} a_k^2 \left( 1 - \cos \frac{\pi k}{n} \right) \quad (13.150)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{T} \sum_{j=1}^{n-1} a_k^2 \left( 1 - \cos \frac{\pi k}{n} \right) \quad (13.151)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{T} \sum_{j=1}^{n-1} a_k^2 \sin^2 \frac{\pi k}{2n} \quad (13.152)$$

となるので式 13.146 は

$$\int dt(\delta\dot{x}^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \frac{(\delta x_j - \delta x_{j-1})^2}{\epsilon} \quad (13.153)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{T} \sum_{j=1}^n \left\{ \sum_k a_k \left( \sin \frac{\pi k j}{n} - \sin \frac{\pi k (j-1)}{n} \right) \right\}^2 \quad (13.154)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{T} \sum_{j=1}^{n-1} a_k^2 \sin^2 \frac{\pi k}{2n} \quad (13.155)$$

これから式 13.145 は各  $a_n$  のガウス積分の積になり

$$K(0,0) = \frac{1}{A^n} \int_{-\infty}^{\infty} da_1 \int_{-\infty}^{\infty} da_2 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} da_{n-1} |Det D_{n-1}| Exp \left[ \frac{im}{\hbar} \frac{n^2}{T} \sum_{j=1}^{n-1} a_k^2 \sin^2 \frac{\pi k}{2n} \right] \quad (13.156)$$

$$= |D_{n-1}| \left( \frac{m}{2\pi\hbar iT} \right)^{n/2} \prod_{k=1}^{n-1} \left( \frac{i\pi T \hbar}{mn^2 \sin^2 \frac{\pi k}{2n}} \right)^{1/2} \quad (13.157)$$

$$= |D_{n-1}| \left( \frac{m}{2\pi\hbar iT} \right)^{n/2} \prod_{k=1}^{n-1} \left\{ \left( \frac{2i\pi T \hbar}{mn} \right)^{1/2} \left( \frac{1}{2n \sin^2 \frac{\pi k}{2n}} \right)^{1/2} \right\} \quad (13.158)$$

であり結果が  $\left(\frac{m}{2\pi\hbar iT}\right)^{1/2}$  となることから

$$|D_{n-1}| \prod_{k=1}^{n-1} \left( \frac{1}{2n \sin^2 \frac{\pi k}{2n}} \right)^{1/2} = 1 \quad (13.159)$$

が成り立つことになるので

$$\begin{aligned} |D_{n-1}| &= \prod_{k=1}^{n-1} \left( 2n \sin^2 \frac{\pi k}{2n} \right)^{1/2} \\ &= n^{(n-2)/n} 2^{(n-1)/2} \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{\pi k}{2n} \end{aligned} \quad (13.160)$$

と求まる。この結果は以下でも利用する。

この方法は調和振動子の場合についても同じように求めることができる。そこで式 13.144 から

$$\delta x(t_j) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{\pi k}{T} t \quad (13.161)$$

として式 13.116 を再び計算する。

$$S(x_c) = \int_{t_i}^{t_f} dt \left( \frac{m}{2} \dot{x}_c^2 - V(x_c) \right)$$

ここで先の結果から  $\epsilon = T/n$  だから式 13.148 を利用し

$$\begin{aligned} \int dt \dot{x}^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \frac{(\delta x_j - \delta x_{j-1})^2}{\epsilon^2} \epsilon \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{T} \sum_{j=1}^n \left\{ \sum_k a_k \left( \sin \frac{\pi k j}{n} - \sin \frac{\pi k (j-1)}{n} \right) \right\}^2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{T} \sum_{j=1}^n \sum_{kk'} a_k a_{k'} \left( 2\delta_{kk'} \frac{n}{2} - 2\delta_{kk'} \frac{n}{2} \cos \frac{\pi k}{n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{T} \sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 \left( 1 - \cos \frac{\pi k}{n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{T} \sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 \sin^2 \frac{\pi k}{2n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int dt x^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{n-1} ((\delta x_j + \delta x_{j-1})/2)^2 \epsilon \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\epsilon}{4} \sum_{j=1}^{n-1} (\delta x_j + \delta x_{j-1})^2 \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\epsilon}{4} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_k a_k^2 \left( \sin \frac{\pi k j}{n} + \sin \frac{\pi k (j-1)}{n} \right)^2 \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\epsilon}{4} \sum_{j=1}^n \sum_{kk'} a_k a_{k'} \left( 2\delta_{kk'} \frac{n}{2} + 2\delta_{kk'} \frac{n}{2} \cos \frac{\pi k}{n} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T}{2} \sum_k a_k^2 \left( 1 + \cos \frac{\pi k}{n} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T}{2} \sum_k^{n-1} a_k^2 \left( \cos^2 \frac{\pi k}{2n} \right)
\end{aligned}$$

よって次のように  $S$  が求まる。

$$\begin{aligned}
\frac{i}{\hbar} S &= \frac{i}{\hbar} \int dt \left( \frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{m\omega^2}{2} x^2 \right) = \frac{im}{4T\hbar} \sum_k a_k^2 \left( 4n^2 \sin^2 \frac{\pi k}{2n} - \omega^2 T^2 \cos^2 \frac{\pi k}{2n} \right) \\
&= \frac{im}{T\hbar} \sum_k n^2 a_k^2 \sin^2 \frac{\pi k}{2n} \left( 1 - \left( \frac{\omega^2 T^2}{2n \tan \frac{\pi k}{2n}} \right)^2 \right)
\end{aligned}$$

よって振幅  $F(T)$  は式 13.160 を用いてガウス積分をすると

$$A = \left( \frac{2\pi i \hbar \epsilon}{m} \right)^{1/2} = \left( \frac{2\pi i \hbar T}{nm} \right)^{1/2} \quad (13.162)$$

$$\prod_{k=1}^{n-1} \left\{ 1 - \left( \frac{\omega^2 T^2}{2n \tan \frac{\pi k}{2n}} \right)^2 \right\}^{-1/2} = \frac{1}{\omega T} \sin \omega T \quad (13.163)$$

だから

$$\begin{aligned}
F(T) &= \int_{\delta x_i = \delta x_f = 0} D\delta x(t) e^{\frac{i}{\hbar} S(x)} \\
&= \frac{1}{A^n} \int da_1 \cdots da_{n-1} |D_{n-1}| \exp \left[ \frac{im}{\hbar} \sum_k \frac{n^2}{T} a_k^2 \sin^2 \frac{\pi k}{2n} \left( 1 - \left( \frac{\omega^2 T^2}{2n \tan \frac{\pi k}{2n}} \right)^2 \right) \right] \\
&= \frac{1}{A^n} \prod_{k=1}^{n-1} \left( 2n \sin^2 \frac{\pi k}{2n} \right)^{1/2} \left( \frac{\hbar \pi T}{im n^2 \sin^2 \frac{\pi k}{2n}} \right)^{1/2} \left\{ 1 - \left( \frac{\omega^2 T^2}{2n \tan \frac{\pi k}{2n}} \right)^2 \right\}^{-1/2} \\
&= \left( \frac{2\pi i \hbar T}{nm} \right)^{-n/2} \left( \frac{2i \hbar \pi T}{im n} \right)^{(n-1)/2} \prod_{k=1}^{n-1} \left\{ 1 - \left( \frac{\omega^2 T^2}{2n \tan \frac{\pi k}{2n}} \right)^2 \right\}^{-1/2} \\
&= \left( \frac{m}{2\pi \hbar i T} \right)^{1/2} \prod_{k=1}^{n-1} \left\{ 1 - \left( \frac{\omega^2 T^2}{2n \tan \frac{\pi k}{2n}} \right)^2 \right\}^{-1/2} \\
&= \left( \frac{m}{2\pi \hbar i T} \right)^{1/2} \left( \frac{1}{\omega T} \sin \omega T \right)
\end{aligned}$$

となる。

### 13.3.6 phi-forth-theory

経路積分は様々な粒子、光間の散乱の理論である。これらは自由粒子と異なり、相互作用のハミルトニアンをもつ。

次のように 3 次元の体積空間でハミルトニアン密度を積分することでこの、相互作用のハミルトニアンを得る。

場のみを考慮すれば、相互作用ラグランジアン密度で表すこともできる。

$$H_{int} = \int d^3x \mathcal{H}_{int}[\phi(x)] = - \int d^3x \mathcal{L}_{int}[\phi(x)]$$

はじめに  $\phi^4$  理論から始めよう。  $\lambda$  を無次元の結合定数として

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4$$

とおく。

オイラーラグランジュ方程式から得られるク方程式は自然単位系を用いて

$$(\partial^2 + m^2) \phi = -\frac{\lambda}{3!} \phi^3$$

となる。ここで以前にも使用した式 7.20 の同時刻交換条件を用いると

$$[\phi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

が成り立つ。

次の例として電磁場を考えよう。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{QED} &= \mathcal{L}_{Dirac} + \mathcal{L}_{Maxwell} + \mathcal{L}_{int} \\ &= \bar{\psi} (i \not{\partial} - m) \psi - \frac{1}{4} (F_{\mu\nu})^2 - e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu \end{aligned}$$

最後の相互作用の項はベクトルポテンシャルが直に関わることを表す。

この項はゲージ論を用いて微分演算を次のように変更すると

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + ieA_\mu(x)$$

次のようにシンプルになる。

$$\mathcal{L}_{QED} = \bar{\psi} (i \not{D} - m) \psi - \frac{1}{4} (F_{\mu\nu})^2$$

となる。重要なのはこのラグランジアンは次のようなゲージ変換で不変になる。

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)} \psi(x), \quad A_\mu \rightarrow A_\mu - \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x)$$

この変化は局所的な位相変換とみなせるので、ラグランジアンが、どのように回転しても変化しないで場を記述できるものでないといけないわけである。

$\mathcal{L}_{QED}$  をオイラーラグランジュ方程式にいと

$$(i \not{D} - m) \psi(x) = 0$$

これは電磁場とディラック方程式の結合が

$$\partial \rightarrow D$$

の演算子の書き換えになっている。

一方でベクトルポテンシャルのオイラーラグランジュ方程式は第 5 部でのアンペールの法則の拡張版で 4 元電流密度を  $j^\mu$  として、

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \square A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = e \bar{\psi} \gamma^\nu \psi = e j^\nu$$

となる。

### 13.4 Euclid 化法

ここでは具体的な計算方法をいくつか紹介し、後の応用で利用できるようにする。  
はじめに Euclid 化法という経路積分に有用な方法を学ぶ。  
 $J(t)$  は  $C$  数であるとし次の時間依存したハミルトニアンを考える。

$$H^J(t) \equiv H(P, Q) + \phi \cdot \mathbf{J}(t)$$

ただし、

$$\phi \equiv (P, Q), \mathbf{J} \equiv (K(t), J(t))$$

この時

$$H |n\rangle = E_n |n\rangle$$

が使える。ここでは簡単に

$$H^J(t) \equiv H(P, Q) + QJ(t)$$

となる場合も考える。

このハミルトニアンの時間部分を担う特徴的な関数  $\mathbf{J}(t)$  をソース関数という。

また、基底状態は  $J$  に無関係で

$$H |0\rangle = E_0 |0\rangle$$

とする。次にハミルトニアンが時間推進演算子とみなすことができたが、**Euclid 化**では

$$t \rightarrow -it$$

で時間推進  $U$  の演算子を置き換えた、次の虚時間推進の演算子を用いる。

$$\tilde{U}^J(t_f, t_i) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \mathbf{I} - \frac{\Delta t}{\hbar} H_N^J(P, Q) \right) \left( \mathbf{I} - \frac{\Delta t}{\hbar} H_{N-1}^J(P, Q) \right) \cdots \left( \mathbf{I} - \frac{\Delta t}{\hbar} H_1^J(P, Q) \right) \quad (13.164)$$

ただし、

$$\Delta t = \frac{t_f - t_i}{N} \equiv \frac{T}{N} \quad (13.165)$$

である。外場  $\mathbf{J}(-it_j) = \mathbf{J}_j$  として解析接続可能であるが、次の図のように限られた領域のみ存在できるとする。

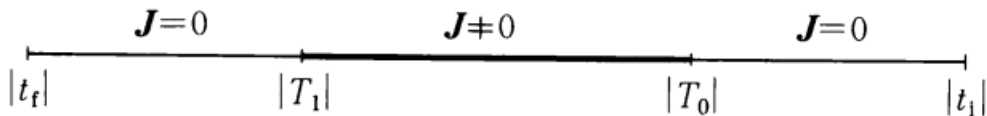


図 13.8: [20] より：外場はある時間領域のみ有効とする

$$\begin{cases} \mathbf{J}(t) \neq 0 & (|T_1| \geq |t| \geq |T_0|) \\ \mathbf{J}(t) = 0 & (|t| > |T_1|, |t| < |T_0|) \end{cases} \quad (13.166)$$

式 13.164 から次の関係が導ける。

$$\tilde{U}^J(t_f, t_i) \stackrel{t \rightarrow -it}{\longleftarrow} U^J(t_f, t_i) \quad (13.167)$$

$$\tilde{U}^J(t_f, t_i) = e^{-(t_f - T_1)H/\hbar} \tilde{U}^J(T_1, T_0) e^{-(T_0 - t_i)H/\hbar} \quad (13.168)$$

通常の時間表示を Minkowski 表示、虚時間は Euclid 表示ということがある。  
 例えばミンコフスキー表示の計量は虚時間表示で Euclid 表示に変えると  $t \rightarrow -it$  で

$$(ct)^2 - \mathbf{x}^2 \rightarrow -\{(ct)^2 + \mathbf{x}^2\}$$

となる。

次で生成母関数を定義する。

$$Z^J(t_f, t_i) \equiv \langle 0 | U^J(t_f, t_i) | 0 \rangle$$

この母関数を求めるため虚時間推進を利用してみる。ただし、次のようにトレースをとる。

$$\tilde{Z}_T(\mathbf{J}) \equiv \text{Tr} \tilde{U}^J(t_f, t_i) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | \tilde{U}^J(t_f, t_i) | n \rangle$$

ただし、

$$H(P, Q) |n\rangle = E_n |n\rangle, \quad \langle m | n \rangle = \delta_{mn}, \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots)$$

である。連続している場合、 $|q\rangle$  表示では

$$\tilde{Z}_T(\mathbf{J}) = \int_{-\infty}^{\infty} dq \langle q | \tilde{U}^J(t_f, t_i) | q \rangle \quad (13.169)$$

で定義して、これをトレース公式と呼ぶ。

$T \equiv t_f - t_i \rightarrow \infty$  として、式 13.168 より、次の重要な関係が成り立つ。

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \tilde{Z}(\mathbf{J}) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-TE_n/\hbar} e^{(T_1 - T_0)E_n/\hbar} \langle n | \tilde{U}^J(T_1, T_0) | n \rangle \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} e^{-TE_0/\hbar} e^{(T_1 - T_0)E_0/\hbar} \langle 0 | \tilde{U}^J(T_1, T_0) | 0 \rangle \end{aligned}$$

つまり、虚時間を導入したことで基底状態以外は指数関数的に減衰すると考えるのである。

これにより  $T \rightarrow \infty$  とした後で虚時間反転の式 13.167 を用いれば、母関数  $Z^J(t_f, t_i)$  は求まるわけである。

例えば通常

$$K^J(q_f, t_f; q_i, t_i) \equiv \langle q_f | U^J(t_f, t_i) | q_i \rangle$$

として生成母関数は通常表示で次のようになる。

$$Z(\mathbf{J}; t_f, t_i) = \int dq_f dq_i \phi_0^*(q) K^J(q_f, t_f; q_i, t_i) \phi_0(q_i) \quad (13.170)$$

ただし、

$$\phi_0(q) \equiv \langle q | 0 \rangle$$

である。 $dq_f, dq_i$  で積分することに留意する。

この場合はどうしても基底状態の波動関数が残るのでシュレディンガー方程式を解く必要が生じる。

しかし、虚時間をつかうと式 13.93 から生成母関数のトレース表示

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_T(\mathbf{J}) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^{N-1} \int_{-\infty}^{\infty} dq_j \prod_{j=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_j}{2\pi\hbar} \\ &\times \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^N \left\{ p_j \Delta q_j - \Delta t \left( H^{[\alpha]}(p_j, q_j^\alpha) + p_j K_j + q_j J_j \right) \right\} \right]_{\text{periodic}} \end{aligned} \quad (13.171)$$

が求まる。ただし、periodic は周期的境界条件

$$q_0 \rightarrow q_N \Rightarrow q_i \rightarrow q_f$$

とみなして

$$q_i = q_f = q_N$$

とにおいて  $q_N$  で積分すればよい。

### 13.4.1 分配関数

Euclid 化法を使うと Feynman 核を定義すれば周期的境界条件

$$q_N = q_0$$

を考えると、シュレディンガー方程式を解くことなく、母関数を得ることができる。  
例えば Feynman 核を次のようにして虚時間表示出発すると、

$$\begin{aligned}\tilde{K}^J(q_f, t_f : q_i, t_i) &= \langle q_f | \tilde{U}^J(t_f, t_i) | q_i \rangle \\ &= e^{-TE_0/\hbar} e^{(T_1-T_0)E_0/\hbar} \langle q_f | 0 \rangle \langle 0 | q_i \rangle \langle 0 | U^J(T_1, T_0) | 0 \rangle \\ &= e^{-TE_0/\hbar} e^{(T_1-T_0)E_0/\hbar} \langle q_f | p_f \rangle \langle p_f | 0 \rangle \langle 0 | q_i \rangle \langle 0 | U^J(T_1, T_0) | 0 \rangle\end{aligned}$$

のように  $T \rightarrow \infty$  の部分が  $e^{E_0/\hbar}$  の部分だけを残して表される。

次に完全系をはさむが式 13.15 ではなくて、より対称性の高い次を使う

$$\langle q | p \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipq/\hbar}, \quad \langle q | p \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-ipq/\hbar}$$

よって

$$\langle q_{j+1} | p_{i+1} \rangle \langle p_{i+1} | 0 \rangle \langle 0 | q_j \rangle = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dp_{i+1} \exp \left[ \frac{i}{\hbar} (p_{i+1}(q_{j+1} - q_j)) \right]$$

となるので、これを  $p$  について  $N$  回、 $q$  について  $N-1$  回かけてから  $N \rightarrow \infty$  とすれば、次のように書くことができる。

$$\begin{aligned}\tilde{K}^J(q_f, t_f : q_i, t_i) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^{N-1} \int_{-\infty}^{\infty} dq_j \prod_{j=1}^{N-1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_j}{2\pi\hbar} \\ &\times \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^N \left\{ p_j \Delta q_j + i \Delta t \left\{ H^{[\alpha]}(p_j, q_j^{[\alpha]}) \right\} + p_j K_j + q_j J_j \right\} \right] \Big|_{q_N=q_f, q_0=q_i}\end{aligned}\quad (13.172)$$

ここでハミルトニアンを代入すればいい。

ここでは

$$H = \frac{P^2}{2m} + V(Q)$$

として結果にガウス積分公式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dp \exp \left[ -\frac{ap^2}{2} \right] = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}$$

を用いれば運動量積分が実行できて、

$$\begin{aligned}\tilde{Z}_T^J(\mathbf{J}) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar\Delta t}} dq_j \\ &\times \exp \left[ -\frac{1}{\hbar} \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{m}{2\Delta t} (\Delta q_j + i \Delta t K_j)^2 + \Delta t \left( V(q_j^{(\alpha)}) + q_j J_j \right) \right\} \right] \Big|_{\text{periodic}}\end{aligned}\quad (13.173)$$

となるので式 13.172 は  $N$  を 1 つずらして



$$\begin{aligned}\tilde{K}^J(q, t_f; q, t_i) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar\Delta t}} \prod_{j=1}^{N-1} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar\Delta t}} dq_j \\ &\times \exp \left[ -\frac{1}{\hbar} \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{m}{2\Delta t} (\Delta q_j + i\Delta t K_j)^2 + \Delta t \left( V(q_j^{(\alpha)}) + q_j J_j \right) \right\} \right] \Big|_{q_N=q_f, q_0=q_i}\end{aligned}$$

となる。両者を見ると  $\tilde{K}^J$  は  $N-1$  個の積分をかけているので、もう 1 回次のようにかけて式 13.170 に対応したトレースの場合の関係式

$$\tilde{Z}_T(\mathbf{J}) = \int dq \tilde{K}^J(q, t_f; q, t_i)$$

得られる。これは

とくに外場  $\mathbf{J} = 0$  の場合は式 13.165 より

$$T = N\Delta t = t_f - t_i$$

だから、これを境界条件として

$$\begin{aligned}\tilde{Z}_T^{J=0}(0) &= \int dq \tilde{K}^{J=0}(q, t_f; q, t_i) \\ &= \int dq_j \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar\Delta t}} dq_j \exp \left[ -\frac{\Delta t}{\hbar} \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{m}{2} \left( \frac{\Delta q_j}{\Delta t} \right)^2 + V(q_j^{(\alpha)}) \right\} \right] \Big|_{q_N=q_f, q_0=q_i} \\ &= \int dq_j dq_j \exp \left[ -\frac{\Delta t}{\hbar} NH \right] \\ &= \text{Tre}^{-TH/\hbar}\end{aligned}$$

と書くことができる。

これは第 3 部の熱力学で登場した分配関数によく似ている。そこで  $T_{emp}$  を温度として、

$$\frac{T}{\hbar} = \frac{1}{k_B T_{emp}} = \beta$$

と置けば

$$\tilde{Z}_T(0) = e^{-H/k_B T_{emp}}$$

であり分配関数そのものになる。熱力学的な温度が量子論的な時間と関係していることがわかる。

さらに

$$\frac{\hbar}{k_B} = TT_{emp}$$

であり、 $k_B, \hbar$  という重要定数の比がからむのも興味あることで、右辺は明らかに意味のある定数である。

詳しくは次節で考察したい。

例えば前節でのハミルトニアンが

$$H(t) = \frac{P^2}{2m} + V(Q) + QJ(t) \quad (13.174)$$

の時、経路積分表示を考えよう。

まず、ガウス積分が使えるように虚時間対応で  $P \rightarrow ip, Q \rightarrow q$  に対応させ、ポテンシャル以外は

$$-\frac{1}{2m} p_j^2 + ip_j \dot{q}_j = -\frac{1}{2m} (p_j - im\dot{q}_j)^2 - \frac{m}{2} \dot{q}_j^2$$

のように平方完成できる。ただし

$$\dot{q}_j \equiv \frac{\Delta q_j}{\Delta t}$$

である。ここで、式 13.93 のファインマン核の公式をつかう。すると虚時間表示で  $(\alpha)$  順序付けを使うと

$$\tilde{Z}^J(t_f, t_i) = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^N \left( \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar\Delta t}} dq_j \right) \exp \left[ -\frac{\Delta t}{\hbar} \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{m}{2} \dot{q}_j^2 + V(q_j^{(\alpha)}) + q_j^{(\alpha)} J_j \right\} \right] \Big|_{q_N=q_0}$$

となる。周期的境界条件に注意して  $N \rightarrow \infty$  での経路積分表示は

$$\tilde{K}^J(t_f, t_i) = \int \mathcal{D}_q \exp \left[ -\frac{1}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt \left\{ \frac{m}{2} \dot{q}^2 + V(q^{(\alpha)}) + q^{(\alpha)} J \right\} \right] \Big|_{q_N=q_0}$$

と求めることができる。さらに  $k_B$  をボルツマン定数として

$$\beta \equiv \frac{1}{k_B T}$$

とすれば熱統計力学の分配関数

$$z(\beta) = \text{Tr} e^{-\beta H}$$

であったことを思い出すと。この経路積分表示は

$$t_f \rightarrow \hbar\beta, t_i = 0$$

と対応させれば、ソース関数を  $J \rightarrow 0$  と考え、

$$z(\beta) = \tilde{Z}^{J=0}(t_f = \hbar\beta, t_i = 0)$$

となる。

### 13.4.2 WKB 法

前節の古典的な  $(p, q)$  系でも、 $(a^\dagger, a)$  系でも、経路積分で厳密に解けるのは調和振動子の場合である。一般的な場合は近似を考えないといけない。そのひとつが摂動論を用いた WKB 法である。

まず、 $(p, q)$  系をとり調和振動子から始める。

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{m}{2} \omega^2 Q^2$$

とおけば分配関数は式 13.173 から

$$\tilde{Z}_T(\mathbf{J}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{j=1}^N \left( \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar\Delta t}} dq_j \right) \exp \left[ -\frac{S_E^{\mathbf{J}}(q)}{\hbar} \right]_{\text{periodic}} \quad (13.175)$$

ただし、

$$\begin{aligned} S_E^{\mathbf{J}}(q) &\equiv \sum_{j=1}^N \left[ \frac{m}{2\Delta t} (\Delta q_j + i\Delta t K_j)^2 + \Delta t \left( \frac{m\omega^2}{2} q_j^2 + q_j J_j \right) \right] \\ &= \sum_{j=1}^N \Delta t \left[ -\frac{m}{2} K_j^2 + \frac{m}{2} \left( \frac{\Delta q_j}{\Delta t} \right)^2 + \frac{m\omega^2}{2} q_j^2 + q_j \left( J_j - im \frac{\Delta K_{j+1}}{\Delta t} \right) \right] \end{aligned} \quad (13.176)$$

であり、これは Euclid 化された作用である。

この例で用いた便利な部分積分の用法として、

$$\Delta K_{j+1} = K_{j+1} - K_j$$

であり、周期的境界条件があるので

$$q_j \Delta K_{j+1} + \Delta q_j K_j = 0$$

から

$$\sum_{j=1}^N \Delta q_j K_j = \sum_{j=1}^N (-q_j \Delta K_{j+1})$$

となることを利用している。

古典解は次の条件から運動方程式を得ることができる。

$$\frac{\partial S_E^{\mathbf{J}}}{\partial q_j} \Big|_{q_j^C} = 0 \quad (13.177)$$

この解の  $q_j^C$  のまわりで  $S_E^{\mathbf{J}}$  を展開すると

$$S_E^{\mathbf{J}}(q) = S_E^{\mathbf{J}}(q^C) + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^N (q_j - q_j^C) A_{jk} (q_k - q_k^C)$$

ここに、係数行列  $A_{jk}$  は

$$A_{jk} \equiv \frac{\partial^2 S_E^{\mathbf{J}}}{\partial q_j \partial q_k} \Big|_{q^C} \quad (13.178)$$

である。ここでは  $S_E^{\mathbf{J}}$  は3回微分以上はないとする。

そこで、積分変数を次のようにシフトさせ、

$$q_j - q_j^C \rightarrow q_j$$

式 13.169 を次のように書き換える。

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_T(\mathbf{J}) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \exp \left[ -\frac{S_E^{\mathbf{J}}(q^C)}{\hbar} \right] \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{j=1}^N \left( \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar\Delta t}} dq_j \right) \exp \left[ -\frac{1}{2\hbar} \sum_{j,k=1}^N q_j A_{jk} q_k \right]_{\text{periodic}} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{m}{\Delta t} \right)^{N/2} (\det A_{jk})^{-1/2} \exp \left[ -\frac{S_E^{\mathbf{J}}(q^C)}{\hbar} \right] \end{aligned} \quad (13.179)$$

ただし、最後の変形はガウスの積分公式から

$$\int_{-\infty}^{\infty} dq_1 dq_2 \cdots dq_N \exp \left[ -\frac{1}{2\hbar} \sum_{j,k=1}^N q_j A_{jk} q_k \right] = (2\pi)^{N/2} (\det A_{jk})^{-1/2} \quad (13.180)$$

を用いた。

従って、式 13.179 を解くためには式 13.177 を周期的境界条件のもとで解き、

式 13.178 の行列式を計算すればよい。

極値は古典的な運動方程式になるから、古典的調和振動の運動方程式は式 13.176 から

$$\begin{aligned} -\frac{m}{(\Delta t)^2} ((q_{j+1}^C - q_j^C) - (q_j^C - q_{j-1}^C)) + m\omega^2 q_j^C + J_j - \frac{im}{\Delta t} (K_{j+1} - K_j) &= 0 \\ -\frac{m}{(\Delta t)^2} (q_{j+1}^C - 2q_j^C + q_{j-1}^C) + m\omega^2 q_j^C + J_j - \frac{im}{\Delta t} (K_{j+1} - K_j) &= 0 \end{aligned}$$

となる。これは  $\Delta t \rightarrow 0$  の極限で連続変数になり、次の微分方程式になる。

$$\left( -\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2 \right) q^C(t) = i\dot{K}(t) - \frac{J(t)}{m}$$

### 13.5 コヒーレント状態

第9部での位相演算子のところで消滅演算子の固有関数をコヒーレント状態  $|\alpha\rangle$  としてあつかう。ここでは経路積分の考え方を  $(p, q)$  の変数から  $(a, a^\dagger)$  の粒子数でみた場合で考えてみる。この変数は次のように複素空間で定義される。

$$Q = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \quad P = -i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)$$

逆に

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(Q + i\frac{P}{m\omega}\right), \quad \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(Q - i\frac{P}{m\omega}\right)$$

これらは前節式 3.5 で見たように調和振動子のハミルトニアンを対角化する。ここで  $\hat{a}^\dagger$  は生成演算子、 $\hat{a}$  は消滅演算子であり、

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1, \quad [a, a] = 0, \quad [\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger] = 0$$

を満たす。

この演算子を用いて、経路積分表示を考える。

まずはじめに、単位元の分解を考えよう。あるボソンの消滅演算子の固有状態は

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \tag{13.181}$$

となる。 $a$  の固有状態をまず求める。しかし、 $a$  演算子はエルミートではなかったから、まず真空を次で定義する。

$$\hat{a}|0\rangle = 0$$

13.181 の左から  $\langle n|$  をかけると

$$\begin{aligned} \langle n|\hat{a}|\alpha\rangle &= \alpha\langle n|\alpha\rangle \\ (n+1)^{1/2}\langle n+1|\alpha\rangle &= \alpha\langle n|\alpha\rangle \end{aligned}$$

よって次のように隣接2項の関係があるから

$$\begin{aligned} \langle n|\alpha\rangle &= \frac{\alpha}{n^{1/2}}\langle n-1|\alpha\rangle \\ &= \frac{\alpha}{(n(n-1))^{1/2}}\langle n-2|\alpha\rangle \\ &= \dots \\ &= \frac{\alpha^n}{(n!)^{1/2}}\langle 0|\alpha\rangle \end{aligned}$$

よって  $|n\rangle$  が完全系であれば  $\alpha$  を任意の複素数として

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n|\alpha\rangle = \langle 0|\alpha\rangle \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{(n!)^{1/2}} |n\rangle$$

と展開できることを表す。従って固有値に虚数を許すので  $\alpha$  は観測可能な物理量ではない。ここで  $|\alpha\rangle$  の規格化のために次の完全性の条件

$$\langle \alpha|\alpha\rangle = |\langle 0|\alpha\rangle|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n}}{n!} = \mathbf{I}$$

位相に任意性があるが

$$\langle 0|\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right)$$

となるように決めると

$$|\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (13.182)$$

したがって

$$|\langle n|\alpha\rangle|^2 = \exp(-|\alpha|^2) \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \quad (13.183)$$

ここで第9部でも扱う変位演算子の定義

$$\hat{D}(\alpha) \equiv \exp(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a})$$

を用いて、関係式を利用する。 $\alpha$  は数値であることに注意し、

$$\begin{aligned} \hat{D}(\alpha)^\dagger \hat{a} \hat{D}(\alpha) &= \exp(\alpha^*\hat{a} - \alpha\hat{a}^\dagger) \hat{a} \exp(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}) \\ &\simeq (1 + \alpha^*\hat{a} - \alpha\hat{a}^\dagger) \hat{a} (1 + \alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}) \\ &= (\hat{a} + \alpha^*\hat{a}^2 - \alpha\hat{a}^\dagger\hat{a}) (1 + \alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}) \\ &= \hat{a} + \alpha^*\hat{a}^2 - \alpha\hat{a}^\dagger\hat{a} + \alpha\hat{a}\hat{a}^\dagger + |\alpha|^2\hat{a}^2\hat{a}^\dagger \\ &\quad - \alpha^2\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}^2 - \alpha^*\hat{a}^3 + |\alpha|^2\hat{a}^\dagger\hat{a}^2 \\ &= \hat{a} + \alpha [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] + O(\alpha^2) \\ &= \hat{a} + \alpha \end{aligned}$$

となる。これから次のように、コヒーレント状態は展開できる。13.182 から

$$|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha) |0\rangle = \exp(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}) |0\rangle = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (13.184)$$

である。よって

$$\langle \alpha| = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha^*)^n}{\sqrt{n!}} \langle n| \quad (13.185)$$

である。 $\alpha = re^{i\theta}$  とおけば

$$\iint d^2\alpha \equiv \int_0^\infty r dr \int_0^{2\pi} d\theta$$

となるので、次の式が成り立つ。

$$\iint d^2\alpha \exp(-|\alpha|^2) \alpha^m \alpha^{*n} = \pi m! \delta_{mn}$$

よって単位の分解として

$$\iint \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha\rangle \langle \alpha| = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n| = \mathbf{I} \quad (13.186)$$

が求まる。注意すべきは、異なるコヒーレント状態は次のように  $\alpha \neq \beta$  の時、直交化していない。式 13.184, 13.185 より

$$\langle \alpha | \beta \rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2 - \frac{1}{2}|\beta|^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha^* \beta)^n}{n!} \quad (13.187)$$

$$\begin{aligned} &= \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2 - \frac{1}{2}|\beta|^2 + \alpha^* \beta\right) \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha - \beta|^2\right) \end{aligned} \quad (13.188)$$

位相部分が実数になっていることが重要である。つまり、 $\alpha \neq \beta$  であっても  $\alpha, \beta$  との大きさの差が大きいと近似的に直交することになる。

直感的には距離がうんと離れれば干渉性を失うことになる。

次のように完全性の条件に  $\pi$  が登場することも興味がある。

$$\begin{aligned} \int |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha &= \int \exp(-|\alpha|^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} |n\rangle \langle n| d^2\alpha \\ &= \int \exp(-r^2) 2\pi r dr \\ &= \pi \end{aligned}$$

さらに純粋状態の条件

$$\text{Tr}[|\alpha\rangle \langle \alpha|] = 1$$

を満たす。

さらに単位の分解から

$$\iint \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha\rangle \langle \alpha| \beta\rangle = |\beta\rangle \quad (13.189)$$

となるので  $\delta$  関数を挿入しても積分結果に変化はないから

$$\iint \frac{d^2\alpha}{\pi} \delta^2(\alpha - \beta) |\beta\rangle = |\beta\rangle$$

移項して、もう一度式 13.189 を代入すると  $\delta$  関数の性質から

$$\begin{aligned} \iint \frac{d^2\alpha}{\pi} \delta^2(\alpha - \beta) |\beta\rangle - |\beta\rangle &= 0 \\ \iint \frac{d^2\alpha}{\pi} \delta^2(\alpha - \beta) |\beta\rangle - \iint \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha\rangle \langle \alpha| \beta\rangle &= 0 \\ \iint d^2\alpha |\alpha\rangle (\langle \alpha| \beta\rangle - \delta^2(\alpha - \beta)) &= 0 \end{aligned}$$

と書くことができる。これから状態  $|\alpha\rangle$  が 1 次独立であるためには上式の  $\{\dots\}$  の中は 0 でないといけない。しかし、式 13.188 があるから  $\{\dots\}$  の中は 0 ではない。

これから状態  $|\alpha\rangle$  が 1 次従属であることがわかる。つまり、状態  $|\alpha\rangle$  は次元の数より多くの異なる状態をとれることになる。

$$\text{rank}\{\alpha_n\} < n$$

よってこの状態は過剰完全系 (overcompletet set) という。

物理的には不確定性関係を最小にするのでコヒーレント状態という。これは振幅と位相が安定した、古典光に近い状態である。

第 9 部で光子について具体的に触れる。

このコヒーレント状態を前節の分配関数に適応させる。例えば外場を  $\eta(t), \eta^*(t)$  として、時間推進演算子は式 13.46 より、

$$\tilde{U}^\eta(t_f, t_i) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{\hbar} H^\eta(t_N) \Delta t\right) \left(1 - \frac{1}{\hbar} H^\eta(t_{N-1}) \Delta t\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{\hbar} H^\eta(t_1) \Delta t\right)$$

とかける。ただし、ハミルトニアンは順番に留意し、

$$H^\eta \equiv H(a^\dagger, a) + a^\dagger \eta(t) + \eta^*(t) a$$

である。周期的境界条件

$$\alpha_0 = \alpha_T$$

$$\Delta \alpha_j = \alpha_j - \alpha_{j-1}$$

$$\Delta \alpha_j^* \alpha_{j-1} + \alpha_j^* \Delta \alpha_j = (\alpha_j^* - \alpha_{j-1}^*) \alpha_{j-1} + \alpha_j^* (\alpha_j - \alpha_{j-1}) = |\alpha_j|^2 - |\alpha_{j-1}|^2$$

部分積分から周期的境界条件で足せば

$$\sum_{j=1}^N \Delta \alpha_j^* \alpha_{j-1} = - \sum_{j=1}^N \alpha_j^* \Delta \alpha_j$$

となる。留意点は行列要素

$$\langle \alpha_j | H(\hat{a}^\dagger, \hat{a}) | \alpha_{j-1} \rangle$$

において  $\hat{a}^\dagger$  は次のように左に作用し、

$$\langle \alpha_j | \hat{a}^\dagger = \langle \alpha_j | \alpha^*$$

$\hat{a}$  は次のように右に作用することである。

$$\hat{a} | \alpha_{j-1} \rangle = \alpha_{j-1} | \alpha_{j-1} \rangle$$

従って、有効な行列要素は足が 1 つずれていないといけない。

これらを用いて、 $\tilde{U}^\eta$  をトレース公式に代入すると

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_T(\eta) &= \iint \frac{d^2 \alpha}{\pi} \langle \alpha | \tilde{U}^\eta(t_f, t_i) | \alpha \rangle \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^N \iint \frac{d^2 \alpha_j}{\pi} \\ &\quad \times \exp \left[ \sum_{j=1}^N \left\{ -\frac{1}{2} \alpha_j^* \Delta \alpha_j + \frac{1}{2} \Delta \alpha_j^* \alpha_{j-1} - \frac{\Delta t}{\hbar} (H(\alpha_j^*, \alpha_{j-1}) + \alpha_j^* \eta_j + \eta_j^* \alpha_{j-1}) \right\} \right] \Big|_{\text{periodic}} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^N \iint \frac{d^2 \alpha_j}{\pi} \\ &\quad \times \exp \left[ \sum_{j=1}^N \left\{ -\alpha_j^* \Delta \alpha_j - \frac{\Delta t}{\hbar} (H(\alpha_j^*, \alpha_{j-1}) + \alpha_j^* \eta_j + \eta_j^* \alpha_{j-1}) \right\} \right] \Big|_{\text{periodic}} \end{aligned}$$

これが、コヒーレント状態の経路積分表示ということになる。

$\eta = 0$  の時、

$$\tilde{Z}_T^{\eta=0} = \iint \frac{d^2 \alpha_j}{\pi} \exp \left[ - \sum_{j=1}^N \alpha_j^* \Delta \alpha_j - \frac{\Delta t}{\hbar} N H(\alpha_j^*, \alpha_{j-1}) \right]$$

先の結果

$$\tilde{Z}_T^{J=0} = \int dq_j dq_j \exp \left[ -\frac{\Delta t}{\hbar} NH(P, Q) \right]$$

と比べると  $\Delta t$  が大きくてもコヒーレント状態の場合は

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j^* \Delta \alpha_j$$

が干渉成分として残る。そこで周期  $T$  として

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j^* \Delta \alpha_j = \alpha_1^* (\alpha_1 - \alpha_0) + \alpha_2^* (\alpha_2 - \alpha_1) + \cdots + \alpha_T^* (\alpha_T - \alpha_{T-1}) + \alpha_{T+1}^* (\alpha_{T+1} - \alpha_T) + \cdots$$

となるが周期的境界条件があると

$$\alpha_0^* = \alpha_T^*, \alpha_0 = \alpha_T$$

となるので

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{T+\cdots} \alpha_j^* \Delta \alpha_j &= \alpha_1^* (\alpha_1 - \alpha_0) + \alpha_2^* (\alpha_2 - \alpha_1) + \cdots + \alpha_0^* (\alpha_0 - \alpha_{T-1}) \\ &+ \alpha_1^* (\alpha_1 - \alpha_0) + \alpha_2^* (\alpha_2 - \alpha_1) + \cdots + \alpha_0^* (\alpha_0 - \alpha_{T-1}) \\ &+ \cdots \end{aligned}$$

そこで、繰り返し数  $n$  とすれば

$$N = nT$$

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j^* \Delta \alpha_j = n \sum_{j=1}^{T-1} \alpha_j^* \Delta \alpha_j = n \{ |\alpha_0|^2 + \cdots + |\alpha_{T-1}|^2 \} - \sum_{i=0}^{T-1} \alpha_i^* \alpha_{i+1}$$

となる。ところがこの周期に広がりを持たせて、時間順に並べた時、周期が一増えていくと

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{T+\cdots} \alpha_j^* \Delta \alpha_j &= \alpha_1^* (\alpha_1 - \alpha_0) + \alpha_2^* (\alpha_2 - \alpha_1) \cdots + \alpha_0^* (\alpha_0 - \alpha_{T-1}) \\ &+ \alpha_1^* (\alpha_1 - \alpha_0) + \alpha_2^* (\alpha_2 - \alpha_1) \cdots + \alpha_T^* (\alpha_T - \alpha_{T-1}) + \alpha_0^* (\alpha_0 - \alpha_T) \\ &+ \alpha_1^* (\alpha_1 - \alpha_0) + \alpha_2^* (\alpha_2 - \alpha_1) \cdots + \alpha_T^* (\alpha_T - \alpha_{T-1}) + \alpha_{T+1}^* (\alpha_{T+1} - \alpha_T) + \alpha_0^* (\alpha_0 - \alpha_{T+1}) \\ &+ \cdots \end{aligned}$$

## 13.6 Feynman 則 [111]

### 13.6.1 2点散乱 [86]

前節のスカラー場では自由粒子のラグランジアンを

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{1}{2} \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \phi^2$$

として、式 3.1 のクライン・ゴールドン方程式

$$\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \phi = 0$$

が導けた。ここではラグランジアンに相互作用によるポテンシャルがある場合を考える。

ここで相互作用のある場での時間依存のある摂動論を考える。



前節での 2 点 Green 関数を用いて

$$\langle \Omega | T \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle$$

の簡単な 2 点の散乱を考える。

第 1 章の準備で扱った汎関数微分をここでは用いる。

生成関数をソース関数で汎関数微分したものが次のように  $Q(t)$  の時間変化の期待値を表す。

$$-\hbar^2 [Z^J(t_f, t_i)]^{-1} \frac{\delta^2 Z^J(t_f, t_i)}{\delta J(t) \delta J(t')} \Big|_{J \rightarrow 0} = \langle 0 | T Q(t) Q(t') | 0 \rangle$$

ただし、 $\mathbf{T}$  は時間順序積、汎関数微分を次で定義する。

$\Delta t \ll 1, t_n = n\Delta t, J(n\Delta t) = J_n$  として

$$\frac{\delta}{\delta J(t)} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\partial}{\Delta t \partial J_n}$$

これは次のように示す。  $J_j = J(t_j)$  として

$$\Delta t = \frac{t_f - t_i}{N} \equiv \frac{T}{N}$$

とおく。この微小  $\Delta t$  で展開をするとハミルトニアンが時間推進の演算子になったから後ろから並べて、

$$Z^J(t_f, t_i) = \lim_{N \rightarrow \infty} \langle 0 | \left( \mathbf{I} - \frac{i}{\hbar} \Delta t (H + J_N Q) \right) \left( \mathbf{I} - \frac{i}{\hbar} \Delta t (H + J_{N-1} Q) \right) \cdots \left( \mathbf{I} - \frac{i}{\hbar} \Delta t (H + J_1 Q) \right) | 0 \rangle$$

とかける。  $t = t_j, t' = t_k$  を選んで  $J_i, J_k$  で微分すると括弧内の  $J$  の係数のみが残るから

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Z^J(t_f, t_i)}{\partial J_j \partial J_k} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \langle 0 | \left( \mathbf{I} - \frac{i}{\hbar} \Delta t (H + J_N Q) \right) \cdots \\ &\quad \times \left( \mathbf{I} - \frac{i}{\hbar} \Delta t (H + J_{j+1} Q) \right) \left( -\frac{i}{\hbar} \Delta t Q \right) \left( \mathbf{I} - \frac{i}{\hbar} \Delta t (H + J_{j-1} Q) \right) \cdots \\ &\quad \times \left( \mathbf{I} - \frac{i}{\hbar} \Delta t (H + J_{k+1} Q) \right) \left( -\frac{i}{\hbar} \Delta t Q \right) \left( \mathbf{I} - \frac{i}{\hbar} \Delta t (H + J_{k-1} Q) \right) \cdots \\ &\quad \times \cdots \left( \mathbf{I} - \frac{i}{\hbar} \Delta t (H + J_1 Q) \right) | 0 \rangle \end{aligned}$$

となる。従って  $J \rightarrow 0$  とすると

$$\mathbf{I} - \frac{i\Delta t H}{\hbar} \simeq e^{i\Delta t H/\hbar}$$

で置き換えると各区間の  $e$  を数え上げればよいので

$$\left[ \frac{\partial^2 Z^J(t_f, t_i)}{\partial J_j \partial J_k} \right]_{J=0} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{\Delta t}{\hbar} \right)^2 \langle 0 | e^{-i\Delta t(N-j)H/\hbar} Q e^{-i\Delta t(j-k-1)H/\hbar} Q e^{-i\Delta t(k-1)H/\hbar} | 0 \rangle$$

となる。ここでハイゼンベルグ表示を用いて

$$Q(t) = e^{iHt/\hbar} Q e^{-iHt/\hbar}$$

となるので  $t_{k-1} = t_k - \Delta t$  だから  $\Delta t = T/N$  の高次項を無視して

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial^2 Z^J(t_f, t_i)}{\partial J_j \partial J_k} \right]_{J=0} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{\Delta t}{\hbar} \right)^2 \langle 0 | e^{-iT H/\hbar} Q(t_j) Q(t_k) | 0 \rangle \\ &= -e^{-iTE_0/\hbar} \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{\Delta t}{\hbar} \right)^2 \langle 0 | Q(t_j) Q(t_k) | 0 \rangle \end{aligned}$$

両辺を  $(\Delta t)^2$  で割り、

$$Z^{J=0}(t_f, t_i) = e^{-iTE_0/\hbar}$$

だから  $t_j \rightarrow t, t_k \rightarrow t'$  と最初の表記に戻せば

$$\frac{(i\hbar)^2}{Z^{J_0}(t_f, t_i)} \frac{\delta^2 Z^J(t_f, t_i)}{\delta J(t) \delta J(t')} \Big|_{J \rightarrow 0} = \langle 0 | T Q(t) Q(t') | 0 \rangle$$

これは  $t = t, t'$  間の相関関数であるが、すぐに次のように  $n$  点関数に拡張できる。

$$\frac{(i\hbar)^n}{Z^{J_0}(t_f, t_i)} \frac{\delta^n Z^J(t_f, t_i)}{\delta J(t_1) \cdots \delta J(t_n)} \Big|_{J \rightarrow 0} = \langle 0 | T Q(t_1) Q(t_2) \cdots Q(t_n) | 0 \rangle$$

### 13.7 Feynman Diagrams[113]

はじめに粒子の始状態を  $|i\rangle$  とする。終状態を  $|f\rangle$  とする。次の図のように点線は中間子、実線は核子を表す。

時間の順方向は左から右とするので、逆方向の矢印がついているのは反粒子である。

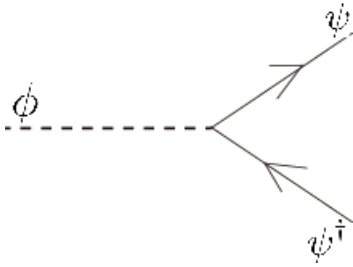


図 13.9: Feynman Diagrams

この図が散乱

$$\langle f | S - 1 | i \rangle$$

の展開に対応する。次のような手順を踏めばいい。

1. 運動量  $k$  をそれぞれの内側の線に加える。
2. それぞれの頂点に次の因子を対応させる。それぞれの線から入る運動量を  $k_i$  として

$$(-ig) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left( \sum_i k_i \right)$$

3. 運動量  $k$  を持つメソン  $\phi$  粒子には前節の式 12.13 の  $I_1$  に対応した次の因子を対応させる。

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$$

もし、核子の  $\psi$  粒子の場合には質量  $m$  を  $M$  に置き換えればよい。

#### 13.7.1 核子散乱

具体的に散乱問題を計算してみよう。はじめに

$$\psi\psi \rightarrow \psi\psi$$

散乱を  $g^2$  の精度で計算する。これは下図のように  $1-1, 2-2$  と  $1-2, 2-1$  の 2 つの図の和になる。

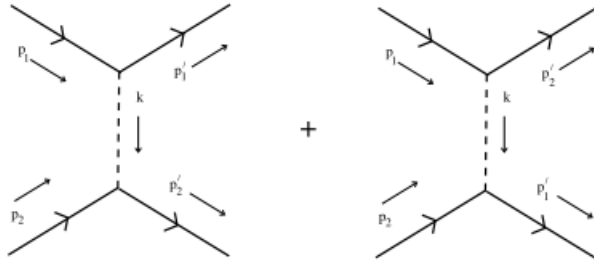


図 13.10: [113] より

これに先のルールを適応させると

$$k_1 = p_1 - p'_1$$

$$k_2 = p_2 - p'_2$$

に対応して

$$i(-ig)^2 \left[ \frac{1}{(p_1 - p'_1)^2 - m^2} + \frac{1}{(p_2 - p'_2)^2 - m^2} \right] (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 - p'_1 + p_2 - p'_2)$$

となる。最初の図から運動量保存則が  $k$  の向きに注意して

$$k = p_1 - p'_1 = -(p_2 - p'_2)$$

である。また、この場合の中間子はエネルギーが

$$k^2 \neq m^2$$

であることから off-shell(off-mass-shell) の仮想粒子と呼ばれる。一方で

$$p^2 = M^2$$

の場合は on-shell と呼ばれる。

上の図はどちらもボース統計に従う粒子である。

### 13.7.2 相互作用

ラグランジアン  $\mathcal{L}$  を運動項+質量項のみの部分  $\mathcal{L}_0$  と相互作用項  $\mathcal{L}_I$  に分離できるとして

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I$$

と表す。このときの  $\mathcal{L}_0$  は運動量と質量、スピンの情報を持つとし、前節の 2 点関数で表される。

一方相互作用項は、例えばスカラーの 3 点関数がある場合

$$\mathcal{L}_I \sim \lambda \phi_A(x) \phi_B(x) \phi_C$$

のように積でかける。この時の  $\lambda$  が相互作用の強さを表す結合定数である。

摂動計算は運動量空間でおこなうと便利なので、自由場のモード展開から式 3.43 のように消滅・生成演算子を用いて

$$\mathcal{L}_I \sim \lambda \left( a_{\mathbf{p}}^A + a_{-\mathbf{p}}^{A\dagger} \right) \left( a_{\mathbf{q}}^B + a_{-\mathbf{q}}^{B\dagger} \right) \left( a_{\mathbf{k}}^C + a_{-\mathbf{k}}^{C\dagger} \right) \delta^{(4)}(p + q + k)$$

とかける。この式の  $\delta$  関数は 4 元運動量が保存されていることを示す。

各、 $a_{\mathbf{p}}^A a_{-\mathbf{q}}^{B\dagger} a_{-\mathbf{k}}^{C\dagger}$  に比例する項は次の図 (a) のように時空点上のある点まで伝播してきた粒子  $A$  を消して、その点において粒子  $B$  と粒子  $C$  を生成し、伝播させる意味を表す。それ以外にも

(b)  $A$  と  $C$  が  $B$  を交換し散乱

(c)  $A$  と  $C$  が対消滅により  $B$  になり、散乱  
を図では表している。

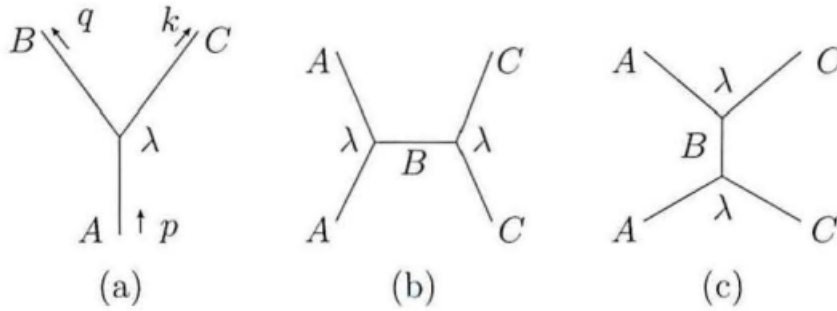


図 13.11: [111] より：時間経過は下から上に見る

従って、場の理論では相互作用とは粒子の交換であることがわかる。

このときは粒子として見なくてはいけないが、同時に波としての見方があることを考えないといけない。つまり、この時には正、負方向の進行波の合成による定常波ができていいる。

### 13.7.3 電子-ミューオン散乱

例えば電子、ミューオン散乱を考えてみる。共に電荷をもっているので光子を交換して電磁相互作用をする。

電子と光子の相互作用項は電子の電荷を  $Q_e e$  として

$$\mathcal{L}_{e\mu} = iQ_e e \bar{\phi}_e(x) \gamma_\mu A^\mu \phi_e(x)$$

という 3 点相互作用の構造をしている。

電子の場合

$$Q_e = -1$$

である。この散乱は次の図 (a) のようにかける。

図の実線が自由電子と自由ミューオンの伝搬を表す。

破線が光子の伝搬を表す。

線が交差しているところはバーテックス (頂点) と呼ばれ、相互作用を表している。

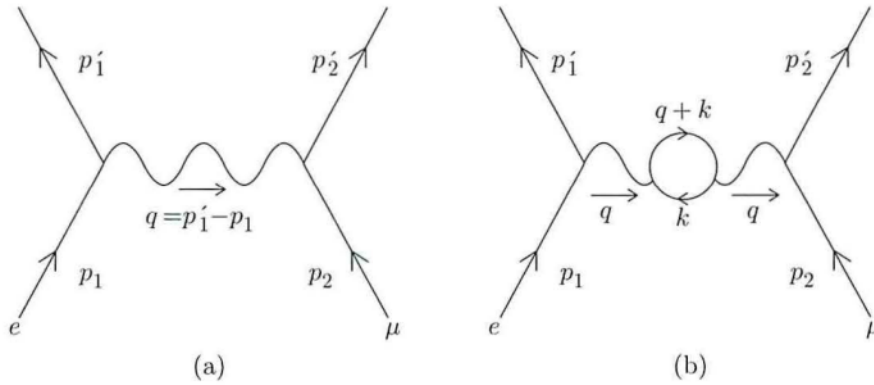


図 13.12: [111] より：電子、ミューオン散乱とその高次版 (b)

例えば図の  $ee\gamma$  頂点では運動量  $p_1$  で飛んできた電子が消えて  $p_1'$  の電子と  $q$  の光子を生成している。これを **Feynman 図** という。図 (a) では光子の伝搬関数を

$$G_{\gamma}^{\mu\nu}(a) = \frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2}$$

であり、フェルミオンと光子の頂点は頂点関数

$$V_{ff\gamma}^{\mu} = -iQ_f|e|\gamma^{\mu}$$

に置き換えればよい。

もし内線に運動量  $p^{\mu}$  のフェルミオン  $f$  の線があれば、フェルミオンの伝搬関数

$$G_{f,\alpha,\beta} = \left( \frac{i(\gamma_{\mu}p^{\mu} + m_f)}{p^2 - m_f^2} \right)_{\alpha,\beta}$$

## 14 対称性と保存則 [111]

### 14.1 CPT 対称性

離散的な対称性として、空間反転 ( $P$  変換)、荷電共役変換 ( $C$  変換)、時間反転 ( $T$  変換) に対するものがある。

その内容を定義しておこう。

#### 定義 3. CPT 対称性

- ・空間反転対称性

ある物理過程に対し、それを鏡に移した現象も同じ確率でおこること。

- ・荷電共役対称性

ある物理過程に対し、それに参加した粒子の電荷の符号を逆にした現象も同じ確率で起きること。

- ・時間反転対称性

ある物理過程に対し、時間を逆向きに進めた現象も同じ確率で起きること。

興味深い次の定理を証明なしにあげておく。

#### 定理 2. CPT 定理

素粒子標準模型では  $C, P, T$  の変換で不変にならないものがある。一般にはラグランジアンが局所的でエルミート、かつローレンツ不変であれば 3 つの変換を同時に施すと作用が不変になる。これからラグランジアンが  $CP$  対称性を破っていれば、必ず  $T$  対称性も破られている。

空間の変換に対して、荷電共役も共に登場するところが面白い。

## 14.2 内部対称性

ある連続変換で作用が不変なら、運動方程式も変化しない。この時、ネーターの定理からカレントの保存が導ける。

連続的な対称性は次の2つがある。

1. 時空の対称性が関わるもの (並進、回転)
2. 内部対称性

例えば並進対称性はネーターの定理の章では並進としたが

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \epsilon^{\mu} = x^{\mu} + g_{\nu}^{\mu} \epsilon^{\nu}$$

ここでは定数ベクトル  $a^{\mu}$  だけ変化した場合、

$$\phi(x) \rightarrow \phi(x+a) = \phi(x) + \delta\phi(x) = \phi(x) + a^{\mu} (\partial_{\mu}\phi(x))$$

を考えると

$$\begin{aligned} \partial_{\nu}\phi(x) &\rightarrow \partial_{\nu}\phi(x+a) = \partial_{\nu}\phi(x) + \delta(\partial_{\nu}\phi(x)) \\ &= \partial_{\nu}\phi(x) + a^{\mu} (\partial_{\mu}\partial_{\nu}\phi(x)) \end{aligned}$$

となる。この時のラグランジアンはオイラー・ラグランジュの公式を用いて

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_{\nu} \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\nu}\phi)} \right) = 0$$

となるので

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} \delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\nu}\phi)} \delta(\partial_{\nu}\phi) \\ &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} a^{\mu} (\partial_{\mu}\phi) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)} a^{\mu} (\partial_{\mu}\partial_{\nu}\phi) \\ &= a^{\mu} \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} (\partial_{\mu}\phi) - \partial_{\nu} \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)} \right) (\partial_{\mu}\phi) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)} (\partial_{\mu}\partial_{\nu}\phi) + \partial_{\nu} \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)} \right) (\partial_{\mu}\phi) \right) \\ &= a^{\mu} \partial_{\nu} \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)} (\partial_{\mu}\phi) \right) \end{aligned} \tag{14.1}$$

となり、全微分の形でかける。

一方で、ラグランジアンの変化は

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \delta\mathcal{L}$$

とすると、並進  $a^{\mu}$  の変化分が

$$\delta\mathcal{L} = a^{\mu} \partial_{\nu} (\delta_{\nu}^{\mu} \mathcal{L})$$

となるので 14.1 と比較して、

$$a^{\mu} \partial_{\nu} \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)} (\partial_{\mu}\phi) \right) = a^{\mu} \partial_{\nu} (\delta_{\nu}^{\mu} \mathcal{L})$$

よって

$$\partial_{\mu} \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)} (\partial_{\mu}\phi) - (\delta_{\nu}^{\mu} \mathcal{L}) \right) = 0$$

となり、これはカレントの保存を意味する。そこで括弧の中を

$$T_\nu^\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} (\partial_\nu \phi) - (\delta_\nu^\mu \mathcal{L}) \quad (14.2)$$

と定義すると、4つの保存カレント

$$T_{0,1,2,3}^\mu \quad (14.3)$$

の存在が示唆される。そこでカレントの時間成分 ( $\mu = 0$ ) の空間積分をそのカレントのチャージと呼び

$$Q_{0,1,2,3} \quad (14.4)$$

で表す。すると式 14.2 からストークスの定理を用いて

$$\begin{aligned} \frac{dQ_{0,1,2,3}}{dt} &= \frac{d}{dt} \int d^3x T_{1,2,3}^0 \\ &= \int d^3x \partial_i T_{0,1,2,3}^i = \int dST_{0,1,2,3}^i = 0 \end{aligned} \quad (14.5)$$

が成り立つのでチャージは時間に対して保存量である。

注目すべきは、並進対称性からのみ、この結果が導けたことである。

また、これは前章のネーターの定理の式 3.107 の書き換えでもある。

クライン・ゴールドンのような実スカラー場の場合は共役運動量を  $\pi(x) = \partial \mathcal{L} / \partial \dot{\phi} = \partial^0 \phi(x)$  として

$$\begin{aligned} T_0^0 &= \frac{1}{2} \left( (\partial_0 \phi)^2 + (\partial_i \phi)^2 + m^2 \phi^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( (\pi)^2 + (\partial_i \phi)^2 + m^2 \phi^2 \right) \end{aligned}$$

となり、全空間で積分すれば式 3.45 になる。

場の成分を  $\phi_i$  とし、時空と関係の無い自由度の場合は内部自由度という。

時空によらない内部パラメタを  $\epsilon$  とし、内部対称性を決める定数行列を  $\omega_{i,j}$  とすると、内部空間の微小変換は

$$\phi_i \rightarrow \phi_i + \sum_j \epsilon \omega_{ij} \phi_j \quad (14.6)$$

$$\partial_\mu \phi_i \rightarrow \partial_\mu \phi_i + \sum_j \epsilon \omega_{ij} \partial_\mu \phi_j \quad (14.7)$$

となる。この変換から保存カレントを式から求めてみると式 14.1 と同じ変形になるから

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= \sum_i \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} \delta \phi_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \delta (\partial_\mu \phi_i) \right) \\ &= \epsilon \sum_i \omega_{ij} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} \phi_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} (\partial_\mu \phi_j) \right) \\ &= \epsilon \partial_\mu \left( \sum_{i,j} \omega_{i,j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \phi_j \right) \end{aligned}$$

となる。最後の変形にはオイラー・ラグランジュの式を利用した。

従って、 $\delta \mathcal{L} = 0$  とすると全微分の括弧内の

$$j^\mu \equiv \sum_{i,j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \omega_{i,j} \phi_j \quad (14.8)$$

が保存両になる。これを保存カレントという。

そこで、内部対称性の具体例として、2つの実スカラー場  $\sigma, \pi$  からなる次の系を考える。

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \pi)^2 - V(\sigma, \pi) \quad (14.9)$$

$$V(\sigma, \pi) = \frac{1}{2} m^2 (\sigma^2 + \pi^2) + \frac{\lambda}{4} (\sigma^2 + \pi^2)^2 \quad (14.10)$$

このラグランジアンは明らかにパリティに対して不変である。

次のような、連続回転の変換を考える。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \sigma' \\ \pi' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma \\ \pi \end{pmatrix} \\ &= \exp \left[ i\theta \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \sigma \\ \pi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるが  $\theta$  が十分小さいと

$$\begin{pmatrix} \sigma' \\ \pi' \end{pmatrix} = \left[ 1 - \theta \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \sigma \\ \pi \end{pmatrix} \quad (14.11)$$

となる。この変換でラグランジアン  $\mathcal{L}$  は不変になる。

式 14.6 から、場の成分を  $\phi_i$  が内部自由度であれば

$$\begin{pmatrix} \sigma \\ \pi \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$$

と置き換えることができる。この時の対称性は内部対称性という。

この時、

$$\begin{aligned} \epsilon &= -\theta \\ \omega &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (14.12)$$

とおいた。保存カレントは式 14.8 から  $\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \pi)^2 - V(\sigma, \pi)$  として

$$\begin{aligned} j^\mu &= \sum_{i,j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \omega_{i,j} \phi_j \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \pi)} \sigma - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \sigma)} \pi \\ &= (\partial^\mu \pi) \sigma - (\partial^\mu \sigma) \pi \end{aligned}$$

さらに、チャージは次のようにカレントの第0成分の空間積分で定義される。

$j^0$  を全空間で積分して、

$$Q = \int d^3x [(\partial^0 \pi) \sigma - (\partial^0 \sigma) \pi] \quad (14.13)$$

となる。

これが式 14.11 の生成子となっていることをみておく。  $\epsilon \ll 1$  であれば式 1.23 から

$$\sigma(x)' = e^{i\epsilon Q} \sigma(x) e^{-i\epsilon Q} \rightarrow \sigma(x) + i\epsilon [Q, \sigma(x)]$$

$$\pi(x)' = e^{i\epsilon Q} \pi(x) e^{-i\epsilon Q} \rightarrow \pi(x) + i\epsilon [Q, \pi(x)]$$

となれば  $Q$  を生成子と見なすことができる。



実際に第 0 成分との交換関係

$$[\sigma(t, \mathbf{x}), \partial^0 \sigma(t, \mathbf{y})] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

$$[\pi(t, \mathbf{x}), \partial^0 \pi(t, \mathbf{y})] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

が成り立つので  $\delta$  関数の性質が活きて、式 14.13 より

$$[Q, \sigma(x)] = \left[ \int d^3x [(\partial^0 \pi) \sigma - (\partial^0 \sigma) \pi], \sigma(x) \right] = i\pi(x)$$

$$[Q, \pi(x)] = \left[ \int d^3x [(\partial^0 \pi) \sigma - (\partial^0 \sigma) \pi], \pi(x) \right] = -i\sigma(x)$$

となるので式 14.12 の対応関係

$$\epsilon = -\theta, \omega = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

をつかうと式 14.11

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \sigma' \\ \pi' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sigma(x) + i\epsilon [Q, \sigma(x)] \\ \pi(x) + i\epsilon [Q, \pi(x)] \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sigma(x) - \epsilon\pi(x) \\ \pi(x) + \epsilon\sigma(x) \end{pmatrix} \\ &= [1 - \epsilon\omega] \begin{pmatrix} \sigma \\ \pi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

が導ける。

この系の基底状態を  $|\Omega\rangle$  とすると、この変換で  $|Q\rangle$  が不変になるためには

$$e^{i\epsilon Q} |\Omega\rangle = |\Omega\rangle$$

から

$$Q |\Omega\rangle = |0\rangle \tag{14.14}$$

が成り立つことになる。この不変性は変換のパラメタ  $\theta$  が座標に依存していないので、大局的な対称性があるという。

このとき、保存カレントが存在する。

### 14.3 自発的対称性の破れ

式 14.10 のポテンシャルが極値をとるために

$$\frac{\partial V}{\partial \sigma} = m^2 \sigma + \lambda(\sigma^2 + \pi^2) = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \pi} = m^2 \pi + \lambda(\sigma^2 + \pi^2) = 0$$

さらに極小であるためには

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2} = m^2 + \lambda \{(\sigma^2 + \pi^2) + 2\sigma^2\} > 0$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \pi^2} = m^2 + \lambda \{(\sigma^2 + \pi^2) + 2\pi^2\} > 0$$

となる。よって  $m^2 > 0$  の時は図の (a) の様になり、全ての時空で  $(\sigma, \pi) = (0, 0)$  となる配位が最小のポテンシャルになる。

特別なことはおこらない。しかし、 $m^2 < 0$  の時は図の (b) の様になり、極小値は

$$\sigma^2 + \pi^2 = \frac{-m^2}{\lambda} = v^2 \quad (14.15)$$

の場合になる。

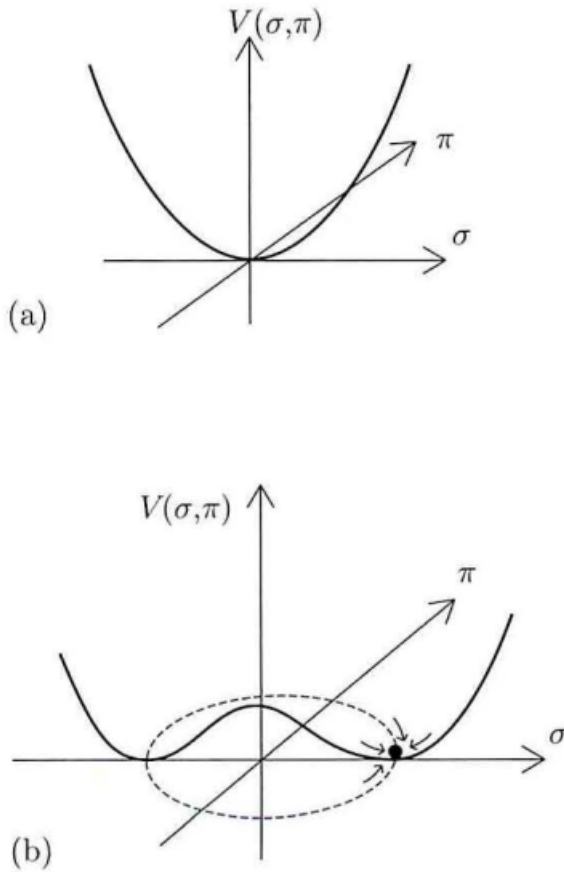


図 14.1: [111] より：ヒッグスポテンシャル

この場合はポテンシャルの最小値が原点を中心とした円周上にあることになる。

つまり、この円周上の点は縮退した、異なる基底状態になる。つまり、基底状態を選ぶ操作が必要になる。そこで、基底状態の配位として、

$$\langle \Omega | \sigma(x) | \Omega \rangle = v, \quad \langle \Omega | \pi(x) | \Omega \rangle = 0 \quad (14.16)$$

を選ぶ。

次のこの基底状態の配位まわりの揺らぎについて考えてみよう。 $\sigma$  を次のようにずらす。

$$\sigma' = \sigma - v \quad (14.17)$$

としてラグランジアンを書き換えると、式 14.9 から

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu (\sigma - v))^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \pi)^2 - \frac{1}{2} m^2 ((\sigma - v)^2 + \pi^2) - \frac{\lambda}{4} ((\sigma - v)^2 + \pi^2)^2$$

の 2 次の項を質量の部分を見ると 14.15 から

$$-m^2 = \lambda v^2 = (\sigma - v)^2 + \pi^2 \quad (14.18)$$

が成り立つのでラグランジアンのパテンシャル部分は

$$\frac{1}{2}m^2 \left( (\sigma - v)^2 + \pi^2 \right) + \frac{\lambda}{4} \left( (\sigma - v)^2 + \pi^2 \right)^2 = \frac{1}{2}m^2 (\sigma^2 - 2\sigma v + v^2 + \pi^2) + \frac{\lambda}{4} (\sigma^2 - 2\sigma v + v^2 + \pi^2)^2$$

よって質量に関する  $\sigma^2, \pi^2$  を持つ項を拾うと、

$$\sigma^2(m^2 + \lambda v^2 + 2\lambda v^2) = 0$$

$$\pi^2(m^2 + \lambda v^2) = 0$$

が恒等的に成り立つ。 $\sigma'$  と  $\pi$  の部分を式 14.18 から次のようにおける。

$$m_{\sigma'}^2 = (m^2 + \lambda v^2 + 2\lambda v^2) = 2(-m^2)$$

$$m_{\pi}^2 = (m^2 + \lambda v^2) = 0$$

この2つの式の解釈を、真空の期待値と、質量0粒子の出現を表している。とみるのである。

上図にみるように、真空として  $(\sigma, \pi) = (v, 0)$  をとったので  $\sigma$  方向に動くと山である質量にぶつかる。

しかし、 $\pi$  方向は円周にあるので常に平坦である。

つまり、揺らぎ  $\sigma - v$  を持たせると、 $\sigma'$  と  $\pi$  のように式 14.11 で見たような対称性がなくなる。

これは真空が期待値を持つと、内部対称性が破れて、質量0の粒子  $\pi$  が現れたと考えられる。

基底状態がどうあるかが、この内部対称性に重要であることがわかったが、前節の保存カレントとチャージはラグランジアンから導かれるので基底状態に依存しない。ここで式 14.4 を基底状態に作用することを考えてみる。

対称性がれば、前節の式 14.14 から

$$\langle \Omega | [Q, \pi(0)] | \Omega \rangle = -i \langle \Omega | \sigma(0) | \Omega \rangle = 0$$

となることが期待できる。しかし、具体的にチャージ  $Q$  を  $\pi(0)$  に作用させて、状態を式 14.16 にとると運動量の完全系を挿入し、

$$\begin{aligned} \langle \Omega | [Q, \pi(0)] | \Omega \rangle &= \int d^3x \langle \Omega | [j^0(t, \mathbf{x}), \pi(0)] | \Omega \rangle \\ &= \int d^3x \sum_n \int d^3p_n \langle \Omega | j^0(t, \mathbf{x}) | n(E_n, \mathbf{p}_n) \rangle \langle n(E_n, \mathbf{p}_n) | \pi(0) | \Omega \rangle \\ &\quad - \int d^3x \sum_n \int d^3p_n \langle \Omega | \pi(0) | n(E_n, \mathbf{p}_n) \rangle \langle n(E_n, \mathbf{p}_n) | j^0(t, \mathbf{x}) | \Omega \rangle \\ &= \int d^3x \sum_n \int d^3p_n \left\{ \langle \Omega | j^0(0) | n(E_n, \mathbf{p}_n) \rangle \langle n(E_n, \mathbf{p}_n) | \pi(0) | \Omega \rangle e^{-i(E_n t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})} \right. \\ &\quad \left. - \langle \Omega | \pi(0) | n(E_n, \mathbf{p}_n) \rangle \langle n(E_n, \mathbf{p}_n) | j^0(0) | \Omega \rangle e^{i(E_n t + \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})} \right\} \\ &= \int d^3p \sum_n (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}_n) \left\{ \langle \Omega | j^0(0) | n(E_n, \mathbf{p}_n) \rangle \langle n(E_n, \mathbf{p}_n) | \pi(0) | \Omega \rangle e^{-iE_n t} \right. \\ &\quad \left. - \langle \Omega | \pi(0) | n(E_n, \mathbf{p}_n) \rangle \langle n(E_n, \mathbf{p}_n) | j^0(0) | \Omega \rangle e^{iE_n t} \right\} \\ &= \sum_n (2\pi)^3 \left\{ \langle \Omega | j^0(0) | n(M_n, 0) \rangle \langle n(M_n, 0) | \pi(0) | \Omega \rangle e^{-iM_n t} \right. \\ &\quad \left. - \langle \Omega | \pi(0) | n(M_n, 0) \rangle \langle n(M_n, 0) | j^0(0) | \Omega \rangle e^{iM_n t} \right\} \end{aligned}$$

となる。ただし、最後の行では運動量  $\mathbf{p}_n = 0$  となるエネルギー固有状態を  $E_n \rightarrow M_n$  とした。従って、 $M_n = 0$  の時に

$$\langle \Omega | j^0(0) | n(M_n, 0) \rangle \langle n(M_n, 0) | \pi(0) | \Omega \rangle - \langle \Omega | \pi(0) | n(M_n, 0) \rangle \langle n(M_n, 0) | j^0(0) | \Omega \rangle \neq 0 \quad (14.19)$$

を満たすような状態  $|n(M_n, 0)\rangle$  があることになる。

この状態は真空とはことなるが  $\pi(0), j^0(0)$  と同じ量子数を持ち、質量がないことを意味する。

このような粒子  $\pi$  は  $\sigma$  が真空の期待値  $v$  を持つ時に現れ、南部・ゴールドストーン粒子と呼ばれる。後に説明する強い相互作用のカイラル対称性の破れ、電弱理論のヒッグス機構に現れる。

## 14.4 ゲージ対称性

前節でゲージ変換での不変性を見た。ここではより一般的にゲージ対称性を考える。フェルミオン場に対し、次の局所位相変換をする。

$$\psi(x) \rightarrow U(x)\psi(x), \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}(x)U^\dagger(x)$$

$$U(x) = \exp(-i\epsilon(x))$$

これを自由フェルミオン粒子場のラグランジアン式から

$$\mathcal{L} =$$

## 14.5 Higgs 機構

電磁場のようにハミルトニアンが  $U(1)$  対称性をもつ場合。物理系ではハミルトニアンの固有値が最小となる場合を基底状態 (ground -state) といい、素粒子系では真空 (vacume) と呼ぶことが多い。

真空については縮退をしていると考えられる。この波動関数を

$$\Phi(x) = \rho(x)e^{i\theta(x)}$$

のように書くと、古典的な真空は

$$\rho(x) = v$$

のように表される。問題は位相  $\beta$  が決まらない点になる。例えばひとつの真空を  $\beta = 0$  とし、 $\Phi = v$  とすると

真空は  $U(1)$  対称性を破り、自発的対称性の破れという現象がおきる。

これを説明するのが Higgs 機構である。その主役になるのがヒッグス粒子である。

ヒッグス粒子はスピン 0 のスカラー粒子である。

$N$  成分複素スカラー場で  $N = 1$  場合を考える。ラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - V(\phi, \phi^*) \quad (14.20)$$

これは  $U(1)$  対称性を持っている。さらにポテンシャル  $V$  は図のような

$$V(x) = -\mu^2 x^2 + \lambda x^4, \quad (\mu > 0) \quad (14.21)$$

形をしたポテンシャルを考える。 $\mu$  は質量を表す。

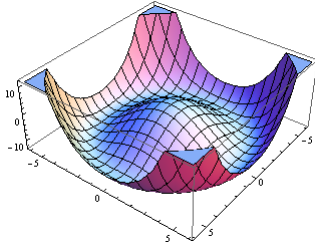


図 14.2: Higgs ポテンシャル

実スカラー場を  $\Phi_R = (\Phi_1, \Phi_2)^t$  として次のように複素場を表す。

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Phi_1(x) + i\Phi_2(x)) \quad (14.22)$$

を新たに定義するとこのポテンシャルを持ったラグランジアンは次のように書き換えることができる。

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi^* \partial^\mu \Phi + \frac{\mu^2}{2} \Phi \cdot \Phi - \frac{\lambda}{4} (\Phi \cdot \Phi)^2 \quad (14.23)$$

となる。これは  $O(2)$  対称性を持っている。

図から原点は不安定でその周囲の円周上にポテンシャルの低いところがあるから粒子は原点からこの円周上のどこかの位置に落ちたほうが安定である。

このようなポテンシャルの原因は式 14.21 の質量項

$$-\mu^2(\Phi_1^2 + \Phi_2^2) \quad (14.24)$$

を負にとっているためである。質量項が負の粒子はタキオンと呼ばれ、

$$E = \pm \sqrt{p^2 + m^2} = \pm \sqrt{p^2 - \mu^2} \quad (14.25)$$

となるので真空の近傍では運動量がいまいち考えればエネルギーが虚数をとることが起きる。

このとき、系の時間変化はおおまかに

$$e^{-iEt} \rightarrow e^{\pm Et} \begin{cases} \infty & t \rightarrow \infty \\ 0 & t = 1 \\ -\infty & t \rightarrow 0 \end{cases} \quad (14.26)$$

となり非常に不安定であることになる。

式 14.21 の  $x$  が

$$v \equiv x_0 = \frac{\mu}{\sqrt{2\lambda}} \quad (14.27)$$

であれば

$$V(v) = 0 \quad (14.28)$$

となるのでこの  $v$  を真空の期待値とし、定数であるとする。

そこでこの  $x_0$  で系を展開してみる。

対称性から  $\Phi_1, \Phi_2$  どちらも同じであるからここでは  $\Phi_1 = v$  とおく。そこで  $\Phi$  の実成分を

$$\Phi = \begin{pmatrix} v + \sigma(x) \\ \xi(x) \end{pmatrix} = \Phi_0 + \begin{pmatrix} 0 \\ \xi(x) \end{pmatrix} \quad (14.29)$$

$$\Phi_0 \equiv \begin{pmatrix} v + \sigma(x) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (14.30)$$

式 14.22 から複素場に戻すと

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \sigma(x) + i\xi(x)) \quad (14.31)$$

である。この時

$$\begin{aligned} -\frac{\mu^2}{2}\Phi \cdot \Phi &= -\frac{\mu^2}{2}(\sigma^2 + 2v\sigma + v^2 + \xi^2) \\ \frac{\lambda}{4}(\Phi \cdot \Phi)^2 &= \frac{\lambda}{2}(\sigma^2 + 2v\sigma + v^2 + \xi^2)^2 \end{aligned}$$

なのでポテンシャルは式 14.27 を使うと次のようになる。

$$\begin{aligned} V(\Phi \cdot \Phi) &= -\frac{\mu^2}{2}\Phi \cdot \Phi + \frac{\lambda}{4}(\Phi \cdot \Phi)^2 \\ &= \frac{\lambda}{2}\sigma^2\xi^2 + \lambda v\sigma\xi^2 + \frac{\lambda}{4}(-v^4 + \xi^4) \\ &\quad + 2\lambda v^2\frac{\sigma^2}{2} + \lambda v\sigma^3 + \frac{\lambda}{4}\sigma^4 \end{aligned} \quad (14.32)$$

となりポテンシャルは次のような変数に書き換えられる。

$$V(\sigma, \xi^2) \quad (14.33)$$

よって式 14.23 のラグランジアンは式 14.29 から

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi + \frac{\mu^2}{2}\Phi \cdot \Phi - \frac{\lambda}{4}(\Phi \cdot \Phi)^2 \\ &= \frac{1}{2}\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma + \frac{1}{2}\partial_\mu\xi\partial^\mu\xi - V(\sigma, \xi^2) \end{aligned} \quad (14.34)$$

となり新たな場  $\xi$  は式 14.27 から質量  $\mathbf{0}$  である。

これを南部-ゴールドストーン粒子と呼ぶ。

また式 14.27 から  $\sigma$  は質量を持つが式 14.32 から  $\frac{\sigma^2}{2}$  の係数から

$$\sqrt{2\lambda v^2} = \sqrt{2}\mu \quad (14.35)$$

であると考えられる。よってタキオン粒子ではなく通常の粒子であるとする。

この過程で重要なのは対称性の現象である。式 14.34 はもはや  $U(1)$  対称性が破れ

$$\xi \rightarrow -\xi \quad (14.36)$$

の対称性が残る。この対称性を  $Z_2$  対称性という。

このように対称性の低い状態に南部-ゴールドストーン粒子を伴って変化する現象を対称性の自発的な破れという。

式 14.29 を  $\xi, v$  で置き換えると

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\exp\left[-ie\frac{\xi(x)}{v}\right](v + \sigma(x)) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\exp\left[-ie\frac{\xi(x)}{v}\right]\phi_0(x) \quad (14.37)$$

また、式 14.22 から実成分と虚成分表示をまとめて

$$\Phi(x) = \exp\left[e\frac{\xi}{v}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]\Phi_0(x) \quad (14.38)$$

とかける。後に  $\xi, \sigma$  が無限小のときは  $e \rightarrow -1$  とすると式 14.31 に一致し、式 14.37 より

$v$  は定数なので

$$\begin{aligned}\partial_\mu \phi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-ie\xi(x)/v} \left[ \partial_\mu \sigma(x) - ie \frac{\partial_\mu \xi(x)}{v} (v + \sigma(x)) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-ie\xi(x)/v} [\partial_\mu \sigma(x) - ie \partial_\mu \xi(x) (1 + \sigma(x)/v)]\end{aligned}\quad (14.39)$$

となり、式 14.34 からラグランジアンが作れる。

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \frac{e^2}{2} \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi (1 + \sigma(x)/v) - V(\sigma)\quad (14.40)$$

ポテンシャル  $V$  からは次のように質量項  $\xi$  が消える。

式 14.31 より

$$\phi^* \cdot \phi = \phi_0^2 = (v + \sigma(x))^2 / 2\quad (14.41)$$

だから式 14.32 のはじめの式から

$$\begin{aligned}V(\phi^* \cdot \phi) &= -\frac{\mu^2}{2} \Phi \cdot \Phi + \frac{\lambda}{4} (\Phi \cdot \Phi)^2 \\ &= -\frac{\mu^2}{2} (v + \sigma(x))^2 + \frac{\lambda}{4} (v + \sigma(x))^4\end{aligned}$$

さらに式 14.27 を用いると  $\mu^2 = 2v^2\lambda$  だから

$$V(\phi^* \cdot \phi) = (2\lambda v^2) \frac{\sigma^2(x)}{2} + \lambda v \sigma^3(x) + \frac{\lambda}{4} (-v^4 + \sigma(x)^4)\quad (14.42)$$

完全に  $\xi$  項が消える。そこで  $\xi(x)$  が南部-ゴールドストーン粒子であると考えるのである。

式、14.37 は成分  $(\Phi_1, \Phi_2)$  とゴールドストーン粒子の場が 1 対 1 に対応していない非線形表現であることに注意がいる。

この内容はさらに一般化し、 $O(N)$  の対称性を持った  $N$  成分実スカラー場

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \phi_1(x) \\ \vdots \\ \phi_N(x) \end{pmatrix}\quad (14.43)$$

でも同様に成り立つ。ラグランジアンは先と同様に

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi(x) \partial^\mu \Phi(x) + \frac{\mu^2}{2} \Phi(x) \cdot \Phi(x) - \frac{\lambda}{4} (\Phi(x) \cdot \Phi(x))^2\quad (14.44)$$

とおく、先と同様にポテンシャルの底は対称性を持ち式 14.27 から

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} v + \sigma(x) \\ \xi^{N-1}(x) \end{pmatrix} = \Phi_0 + \begin{pmatrix} 0 \\ \xi^{N-1}(x) \end{pmatrix}\quad (14.45)$$

$$\Phi_0(x) = \begin{pmatrix} v + \sigma(x) \\ 0^{N-1}(x) \end{pmatrix}, \quad \xi^{N-1} \equiv \begin{pmatrix} \xi_1(x) \\ \vdots \\ \xi_{N-1}(x) \end{pmatrix}\quad (14.46)$$

となるから式  $\mu^2 = 2v^2\lambda$  を再び利用して

$$\begin{aligned} V(\Phi \cdot \Phi) &= -\frac{\mu^2}{2}(\sigma^2 + 2v\sigma + v^2 + \xi^2) + \frac{\lambda}{2}(\sigma^2 + 2v\sigma + v^2 + \xi^2)^2 \\ &= (2\lambda v^2)\frac{\sigma^2(x)}{2} + \lambda v\sigma^3(x) + \frac{\lambda}{4}(-v^4 + \sigma(x)^4) \\ &\quad + \lambda v\sigma\xi \cdot \xi + \frac{\lambda}{4}(\xi \cdot \xi)^2 \\ &\equiv V(\sigma, \xi \cdot \xi) \end{aligned}$$

よってラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\sigma(x)\partial^\mu\sigma(x) + \frac{1}{2}\partial_\mu\xi(x)\partial^\mu\xi(x) - V(\sigma, \xi \cdot \xi) \quad (14.47)$$

となる。

$$\xi \rightarrow O'\xi, \quad O' \in O(N-1) \quad (14.48)$$

のように対称性が1つ破れるがそのもとでラグランジアンの不変性は保たれる。 $\sigma$ の質量は先と同じ  $\mu = \sqrt{2\lambda}v$  になる。

一方  $\xi$  は質量のない  $N-1$  個の南部-ゴールドストーン粒子である。このようにラグランジアンの対称性は  $O(N)$  から  $O(N-1)$  に破れる。一般に群  $O(N)$  の次元はその生成子の数は2項係数

$$\binom{N}{2} = \frac{N(N-1)}{2} \quad (14.49)$$

であり、群  $O(N)$  は  $N$  次元空間の回転を表していた。するとこの空間の異なる回転の数を数えると  $N$  個の回転軸から2個の異なる軸を選ぶ場合の数である。そこで対称性が破れることによる異なる回転の数の変化  $\Delta n$  は

$$\begin{aligned} \Delta n &= n(O(N) - O(N-1)) \\ &= \frac{N(N-1)}{2} - \frac{(N-1)(N-2)}{2} \\ &= N-1 \end{aligned}$$

でありこれはちょうど南部-ゴールドストーン粒子の数に等しい。

#### 14.5.1 4次元の場合

4次元の具体的な例を見る。ハミルトニアンを作ると、これは  $U(1)$  対称性を持つ。まず、改めて4次元ミンコフスキー空間で、作用等を次のように置く。

$$S = \int d^4x \mathcal{L} \quad (14.50)$$

$$\mathcal{L} = -\partial_\mu\Phi^\dagger\partial^\mu\Phi - V(\Phi)$$

$$V(\Phi) = m^2\Phi^\dagger\Phi + \lambda(\Phi^\dagger\Phi)^2, \quad (m^2 < 0, \lambda > 0)$$

ただし、 $\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$  として

$$\partial_\mu\Phi^\dagger\partial^\mu\Phi = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\Phi^\dagger\partial_\nu\Phi$$



これから次のように共役運動量を定義する。

$$\Pi = \dot{\Phi} = \partial_t \Phi$$

$$\Pi^\dagger = \dot{\Phi}^\dagger$$

よってハミルトニアンが通常 3 次元空間で

$$H = \int d^3x \{ \Pi^\dagger \Pi + \nabla \Phi^\dagger \nabla \Phi + V(\Phi) \}$$

とかける。この時のポテンシャルは

$$v = \sqrt{\frac{-m^2}{\lambda}} \quad (14.51)$$

とけば、

$$V(\Phi) = \lambda \left( \left( \Phi^\dagger \Phi - \frac{v^2}{2} \right)^2 - \frac{v^4}{4} \right) \quad (14.52)$$

とかけるのでヒッグス型の形である。U(1) 対称性は

$$\Phi(x) \rightarrow \Phi'(x) = e^{i\alpha} \Phi(x)$$

と位相変換したとき、

$$S(\Phi') = S(\Phi)$$

$$H(\Phi', \Pi') = H(\Phi, \Pi)$$

となることから確認できる。

これから真空が縮退していることがわかる。

$$\Phi(x) = \rho(x) e^{i\theta(x)}$$

とすると、14.52 から極値において、位相を無視して、

$$\rho(x) = v$$

となるが、位相を決めるのは任意性がある。そこで

$$\theta(x) = \beta$$

を選んで

$$\beta' \rightarrow \beta + \alpha$$

としても  $V(x)$  の大きさに変化はない。この縮退した  $\beta = 0$  の状況からある真空を選ぶと真空の U(1) 対称性は破られることがある。

これはハミルトニアンは対称性変換で不変でも真空の基底状態が対称性の変換で不変にならない。

これを自発的な対称性の破れという。

南部・ゴールドストーンの定理

詳しく見るために例えば真空の期待値を

$$\langle \Phi \rangle \equiv \langle 0 | \Phi(x) | 0 \rangle = \frac{v}{\sqrt{2}}$$

をとる真空の状態  $|0\rangle$  を選ぶ。これに実数場  $h(x), \phi(x)$  を揺らぎとして取り入れ、 $v$  が非常に大きいところで位相が確定するように

$$v \rightarrow v + h(x) \quad (14.53)$$

$$\theta \rightarrow \theta + \frac{\phi(x)}{v} \quad (14.54)$$

とおき、

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{v + h(x)\} e^{i(\phi_0 + \phi(x))/v} \quad (14.55)$$

で表す。

局所座標  $x$  で平均化してしまえば

$$\bar{\Phi}(x) = \frac{v}{\sqrt{2}}$$

で期待値に一致する。式 14.55 から作用を式 14.50 から作ると

$$S = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{2} \partial_u h \partial^u h - \lambda v^2 h^2 - \frac{1}{2} \partial_u \phi \partial^u \phi + \frac{\lambda}{4} v^4 \right. \\ \left. - \left( \frac{h}{v} + \frac{h^2}{2v^2} \right) \partial_u \phi \partial^u \phi - \lambda v h^3 - \frac{\lambda}{4} h^4 \right\}$$

あまりきれいではないが、少なくとも  $h(x)$  の場は質量  $m$  が負であったことに注意して、第 2 項から式 14.51 より、 $h(x)$  場の質量は

$$\sqrt{2\lambda v^2} = \sqrt{2}|m|$$

であるが、式 14.54 と置いたのが効いて位相部分の揺らぎ  $\phi(x)$  場の質量は 0 であることを表している。これを零質量場という。

さらに 2 行目には  $h(x), \phi(x)$  に関して 3 次、4 次の相互作用があることを表している。

### 定理 3. 南部・ゴールドストーン定理

これは一般的に成り立ち、時空座標  $x^\mu$  に依存しない対称性が破れると零質量場が出現する。これを南部・ゴールドストーン定理という。

この質量は南部・ゴールドストーンボソンと呼ばれる。

## 14.6 無限小回転

南部-ゴールドストーン粒子と Higgs 機構には  $O(N)$  の回転の自由度が関係している。

2次元の  $z$  軸周り無限小回転は複素数を用いて次のように表現できる

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \Delta\phi \\ -\Delta\phi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ = \left\{ 1 + i\Delta\phi \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

これから  $N$  次元の任意の  $k, j$  軸について無限小回転の生成子を次のように定義できる。

$$L_{jk} \equiv \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \cdots & -i & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & i & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad (14.56)$$

つまり  $(k, j) = -i, (j, k) = i$  の成分を持ちそれ以外は 0 である。

$$L_{jk}^\dagger = L_{jk} \quad (14.57)$$

また成分表示すると対角成分も 0 だから

$$(L_{jk})_{ab} = -i(\delta_{ja}\delta_{kb} - \delta_{jb}\delta_{ka}) \quad (14.58)$$

と書くことができるので  $\xi$  成分との作用は次のように表すことができる。

$$L_{12}\xi_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i\xi_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ i\xi_1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad (14.59)$$

$$L_{13}\xi_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i\xi_3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ i\xi_2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad (14.60)$$

$$L_{14}\xi_3 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i\xi_3 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ i\xi_3 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad (14.61)$$

よって  $\mathbf{0}$  を  $(N-1) \times (N-1)$  行列としてこれらから次の実行列をつくることができる。

$$-i \sum_{j=2}^N L_{1j}\xi_{j-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\xi^{(N-1)\text{T}} \\ \xi^{(N-1)} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (14.62)$$

つまり 1 行、1 列目以外が全て 0 である。 $\xi^{(N-1)}$  は式 14.23 より 1 列縦  $N-1$  成分の実行列である。真空を表した  $\Phi_0$  は  $O(N-1)$  の対称性を持っていたがこれは次のような生成子の表現で書ける。

$$L_{jk}\Phi_0 = 0, \quad (2 \leq j < k, k = 1, 2, \dots, N) \quad (14.63)$$

これを真空の条件という。これに対して

$$L_{1j}\Phi_0 \neq 0 \quad 2 \leq j \leq N \quad (14.64)$$

となり南部-ゴールドストーン粒子は生成子  $L_{1j}$  の数、つまり破れた対称性の数と等しい。式 14.42 で与えられたポテンシャル  $V$  は  $O(N)$  に拡張できる。式 14.38 から  $e = -1$  として

$$|\sigma| \ll 1, \quad |\xi| \ll 1 \quad (14.65)$$

の場合は次のように指数関数を展開して

$$\Phi \rightarrow \left( 1 - \frac{i}{v} \sum_{j=2}^N L_{1j} \xi_{j-1} \right) \Phi_0 \quad (14.66)$$

とすればよい、よって新たに  $N$  次元の場合は

$$\Phi \equiv \exp \left( -\frac{i}{v} \mathbf{L} \cdot \xi(x) \right) \Phi_0 \quad \mathbf{L} = (L_{12}, L_{13}, \dots, L_{1N}) \quad (14.67)$$

であり式 14.82 より

$$\mathbf{L} = -\mathbf{L}^T \quad (14.68)$$

となる。よって

$$\Phi^T = \Phi_0^T \exp \left( \frac{i}{v} \mathbf{L} \cdot \xi(x) \right) \quad (14.69)$$

となるので

$$\Phi^T \cdot \Phi = \Phi_0^T \cdot \Phi_0 = (v + \sigma(x))^2 \quad (14.70)$$

となり  $\xi$  は位相のみにかかるのでポテンシャルには現れず、 $\Phi$  の実成分  $\sigma$  に依存し、結局次のように  $O(2)$  と同じ形になる。

$$V(\Phi \cdot \Phi) = (2\lambda v^2) \frac{\sigma^2(x)}{2} + \lambda v \sigma^3(x) + \frac{\lambda}{4} (-v^4 + \sigma(x)^4) \quad (14.71)$$

## 14.7 複素スカラーと電磁場

ベクトルポテンシャル  $A, \phi$  は次のような項を加えても同じように成立するゲージ不変性がある。

$$A' = A + \text{grad} \lambda \quad (14.72)$$

$$\phi' = \phi - \frac{\partial \lambda}{\partial t} \quad (14.73)$$

これは時空を座標位相変数  $\xi$  で、時空での場を  $\psi$  で統一し表現したとき

$$\lambda = d\psi d\xi$$

が決まった定数として存在する。これから次のように改めて定義する。

$$\lambda = d\psi \wedge d\xi$$

ただし、座標位相変数  $\xi$ 、場  $\psi$  とともに最大の次数の微分形式とする。

$$d\psi = d\psi_1 \wedge \dots \wedge d\psi_p$$

$$d\xi = d\xi_1 \wedge \dots \wedge d\xi_q$$

よってこの時、 $\lambda$  は 1 次元の数になる。

ラグランジアンに次のように電磁場を加えて、自発的な対称性の破れをみてる。

$$\mathcal{L} = (D_\mu\phi)^* D_\mu\phi - V(\phi^*\phi) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (14.74)$$

ただし、

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + ieA_\mu(x) \quad (14.75)$$

とすると共変微分は式 14.39 と式 14.37 から次のようになる。

$$\begin{aligned} D_\mu\phi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-ie\xi(x)/v} [\partial_\mu\sigma(x) - ie\partial_\mu\xi(x)(1 + \sigma(x)/v) + ieA_\mu(x)(v + \sigma(x))] \\ &= \exp\left[-ie\frac{\xi(x)}{v}\right] \\ &\quad \times \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \partial_\mu\sigma(x) + ie(1 + \sigma(x)) \left( A_\mu(x) - \frac{\partial_\mu\xi(x)}{v} \right) \right] \end{aligned}$$

式 14.71 からポテンシャルはこの変換で  $\xi$  を含まない形にできた。そこで共変微分も

$$A_\mu \rightarrow A_\mu(x) + \frac{\partial_\mu\xi(x)}{v} \quad (14.76)$$

とすれば共変微分からの  $\xi$  は相殺され、消える。このようなゲージをユニタリゲージという。このようにゲージ固定をすると式 14.74 は

$$\begin{aligned} (D_\mu\phi(x))^* (D_\mu\phi(x)) &= \frac{1}{2} (\partial_\mu\sigma(x) - ie(v + \sigma(x))A_\mu(x)) (\partial^\mu\sigma(x) + ie(v + \sigma(x))A^\mu(x)) \\ &= \frac{1}{2} \partial_\mu\sigma(x)\partial^\mu\sigma(x) + \frac{e^2}{2}(v + \sigma(x))^2 A_\mu(x)A^\mu(x) \\ &= \frac{1}{2} \partial_\mu\sigma(x)\partial^\mu\sigma(x) + \frac{1}{2}(e^2v^2)A_\mu(x)A^\mu(x) \\ &\quad + \frac{e^2}{2}\sigma(x)^2 A_\mu(x)A^\mu(x) + e^2v^2\sigma(x)A_\mu(x)A^\mu(x) \end{aligned}$$

となるので

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\sigma(x)\partial^\mu\sigma(x) - (2\lambda v^2)\frac{\sigma^2(x)}{2} + \frac{e^2}{2}v^2 A_\mu(x)A^\mu(x) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \dots \quad (14.77)$$

省略項には  $\sigma$  と  $\sigma$ 、 $\sigma$  と  $A_\mu$  との相互作用の項が加わる。しかしこの新しいラグランジアンで重要なのは質量項  $\xi$  がなくなる代わりに

$$\begin{aligned} \frac{e^2}{2}v^2 A_\mu(x)A^\mu(x) &= \frac{m_g^2}{2} A_\mu(x)A^\mu(x) \\ m_g &\equiv ev = \frac{e\mu}{\sqrt{\lambda}} \end{aligned}$$

が生じる。つまり質量のない南部ゴールドストーン粒子が消えて、質量のある粒子  $\sigma$  が生じたとみなすことができる。

式式 14.27 から  $\sigma$  の質量は

$$m_\sigma \equiv \sqrt{2\lambda}v \quad (14.78)$$

であり、このような粒子をヒッグス粒子という。

## 14.8 スカラー場とヤン-ミルズ場

$N$ 成分実スカラー場に対して、ゲージ原理を適応したときのヤン-ミルズ場とスカラー場のラグランジアンはヤンミルズ場の運動項は  $O(N)$  生成子が

$$Tr(L_{ij}L_{kl}) = 2(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) \quad (14.79)$$

を満たすのでヤンミルズ場の強さは

$$\mathbf{F}_{\mu\nu} \equiv \sum_{(i<j)=1}^N F_{\mu\nu}^{[i,j]} L_{ij} \quad (14.80)$$

であり、運動項が

$$\mathbf{M} \equiv -\frac{1}{4} \sum_{(i<j)=1}^N F_{\mu\nu}^{[i,j]} F^{\mu\nu[i,j]} \quad (14.81)$$

をみたすためにラグランジアン密度が

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (D^\mu \Phi) (D_\mu \Phi) - V(\Phi \cdot \Phi) - Tr \frac{1}{8} \mathbf{F}_{\mu\nu} \mathbf{F}^{\mu\nu} \quad (14.82)$$

であり共変微分とゲージ原理の強さが

$$D_\mu = \partial_\mu 1 - ig \mathbf{A}_\mu \quad (14.83)$$

$$\mathbf{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathbf{A}_\nu - \partial_\nu \mathbf{A}_\mu - ig[\mathbf{A}_\mu, \mathbf{A}_\nu] \quad (14.84)$$

のようになる。ただし、太字は0成分を除く  $j$  は  $i$  より小さい1からの和である。

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_\mu &\equiv \sum_{(i<j)=1}^N A_\mu^{[i,j]} F^{\mu\nu[i,j]} \\ A_\mu^{[i,j]} &= -A_\mu^{[j,i]} \end{aligned}$$

ここでこの自発的対称性の破れを見るために

$$\theta^{[i,j]}(x) = -\theta^{[j,i]}(x) \quad (14.85)$$

として  $O(N)$  の局所的な要素は次を定義すること

$$O(x) = \exp \left[ i \sum_{(i<j)=1}^N \theta^{[i,j]}(x) L_{ij} \right] \quad (14.86)$$

によって

$$O^T = O^{-1}$$

$$O^* = O$$

をみたし、場の量は次のように変換する。

$$\Phi'(x) = O(x)\Phi(x) \quad (14.87)$$

$$A'_\mu(x) = O(x)A_\mu O^T + \frac{i}{g}O(x)\partial_\mu O^T(x) \quad (14.88)$$

南部-ゴールドストーン粒子は式 14.37 から  $\Phi_0$  を用いて

$$h^T = h^{-1} \in O \quad (14.89)$$

として  $L_{1j}$  成分を用いて

$$\Phi(x) = h(x) \cdot \Phi_0(x), \quad h(x) = \exp \left[ -\frac{i}{v} \sum_{(i<j)=1}^N L_{1j} \xi_{j-1}(x) \right] \quad (14.90)$$

とおく。この場合スカラーポテンシャルは  $h$  や  $\xi$  によらないから、共変微分の項の変化をみると

$$\begin{aligned} D_\mu \Phi &= (\partial_\mu - igA_\mu(x)) \Phi \\ &= (\partial_\mu h) \cdot \Phi_0 + h \partial_\mu \cdot \Phi_0 - ig \mathbf{A}_\mu h \cdot \Phi_0 \\ &= (\partial_\mu \Phi_0 + h^T (\partial_\mu h) \Phi_0 - ig h^T \mathbf{A}_\mu h \cdot \Phi_0) \end{aligned}$$

よって式 14.88 から次のようにゲージ変換で置き換えると。

$$A_\mu(x) \rightarrow h A_\mu h^T + ih \partial_\mu h^T / g \quad (14.91)$$

さらに先と同様に  $1 = h^T h$  の両辺を微分することで

$$(\partial_\mu h^T) h + h^T \partial_\mu = 0 \quad (14.92)$$

だから

$$\begin{aligned} D_\mu \Phi &= (\partial_\mu \Phi_0 + h^T (\partial_\mu h) \Phi_0 - ig h^T h A_\mu h^T h \cdot \Phi_0 + h^T h \partial_\mu h^T h \cdot \Phi_0) \\ &= h (\partial_\mu \Phi_0 - ig A_\mu \cdot \Phi_0) \end{aligned} \quad (14.93)$$

でありさらに  $L^T = -L$  から

$$(D_\mu \Phi)^T = h^{-1} (\partial_\mu \Phi_0^T - ig \Phi_0^T A_\mu^T) = h^{-1} (\partial_\mu \Phi_0^T + ig \Phi_0^T A_\mu) \quad (14.94)$$

よって式 14.46 から

$$\begin{aligned} (\mathbf{D}_\mu \Phi)^T \cdot (\mathbf{D}^\mu \Phi) &= (\partial_\mu \Phi_0^T + ig \Phi_0^T \mathbf{A}_\mu) (\partial^\mu \Phi_0 - ig \mathbf{A}^\mu \Phi_0) \\ &= \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + ig (\Phi_0^T \mathbf{A}^\mu \partial_\mu \Phi_0 - \partial_\mu \Phi_0^T \mathbf{A}^\mu \Phi_0) \\ &\quad + g^2 \Phi_0^T \mathbf{A}_\mu \mathbf{A}^\mu \Phi_0 \end{aligned}$$

を得るが次のようにスカラー成分が等しいので

$$(\Phi_0^T \mathbf{A}^\mu \partial_\mu \Phi_0 - \partial_\mu \Phi_0^T \mathbf{A}^\mu \Phi_0) = \partial^\mu \sigma (v + \sigma) ((\mathbf{A}_\mu)_{11} - (\mathbf{A}_\mu)_{11}) \quad (14.95)$$

が成り立つから、結局

$$(\mathbf{D}_\mu \Phi)^T \cdot (\mathbf{D}^\mu \Phi) = \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + g^2 \Phi_0^T \mathbf{A}_\mu \mathbf{A}^\mu \Phi_0 \quad (14.96)$$

である。この第2項がゲージ場に質量を与える項になり具体的に式 14.46 から

$$g^2 \Phi_0^T \mathbf{A}_\mu \mathbf{A}^\mu \Phi_0 = g^2 (v + \sigma)^2 \sum_{i < j, k < l} A_\mu^{[i,j]} A^{\mu[k,l]} (L_{ij} L_{kl})_{11} \quad (14.97)$$

ここで式 14.82 より

$$\begin{aligned} (L_{ij} L_{kl})_{11} &= \sum_a (L_{ij})_{1a} (L_{kl})_{a1} \\ &= -(\delta_{i1} \delta_{ja} - \delta_{ia} \delta_{j1})(\delta_{ka} \delta_{i1} - \delta_{k1} \delta_{il}) \end{aligned}$$

となるので結局  $i = j = k = l = 1$  のみが残り

$$g^2 \Phi_0^T \mathbf{A}_\mu \mathbf{A}^\mu \Phi_0 = g^2 (v + \sigma)^2 \sum_{j=2}^N A_\mu^{[1,j]} A^{\mu[1,j]} \quad (14.98)$$

となる。式 14.82 よりラグランジアンのコэффициентには  $\frac{1}{2}$  がつくので  $\sigma = 0$  の場合は式 14.27 より

$$m_g = gv = \frac{g\mu}{\sqrt{\lambda}} \quad (14.99)$$

である。このような質量を持つ成分の個数は  $N - 1$  個であり、破れていない対称性が残り  $O(N - 1)$  は質量を持っていない。

また、ヒッグス粒子は質量を持ったゲージ場と相互作用をすることになるが、破れていないゲージ場とは相互作用しない。

さらにこの内容は次のようにラグランジアンを複素場に拡張しても成り立つ。

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (D^\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi) - V(\Phi^\dagger \cdot \Phi) - Tr \frac{1}{8} \mathbf{F}_{\mu\nu} \mathbf{F}^{\mu\nu} \quad (14.100)$$

$N$ 次元複素スカラー場では次のユニタリ変換が成り立つ。

$$\Phi \rightarrow U\Phi, \quad U^\dagger U = 1 \quad (14.101)$$

ユニタリ対称性の自由度は  $N^2$  だから生成子を  $T_a$  とすると真空  $\Phi_0$  とすると破れない質量0のゲージ場は  $\alpha$  を実数として

真空の条件である式 14.63 と同様に

$$\sum_b \alpha_b T_b \Phi_0 = 0 \quad (14.102)$$

を満たすとする。この生成子は指数関数の肩に乗ると  $U(N)$  の部分群をつくり

$$\mathcal{H} = \exp \left[ i \sum_b \theta_b T_b \right] \quad (14.103)$$

とする。残った生成子によって作られる群は  $U(N)$  を  $\mathcal{G}$  と書くと

$$\bar{\mathcal{H}} = \mathcal{G}/\mathcal{H} \quad (14.104)$$

と書ける。これを用いてユニタリゲージは一般に

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= h(x) \Phi_0(x) \\ h(x) &\in \bar{H} \end{aligned}$$



とかける。つまり真空の生成子がつくる群は同一視され商群として真空に作用し、場が形成される。  
これから共変微分は

$$\begin{aligned} D_\mu \Phi &= (\partial_\mu - ig\mathbf{A}_\mu) \Phi \\ &= ((\partial_\mu h) \Phi_0 + h\partial_\mu \Phi_0 - ig\mathbf{A}_\mu h \cdot \Phi_0) \\ &= h (\partial_\mu \Phi_0 + h^{-1} (\partial_\mu h) \Phi_0 - igh^{-1} \mathbf{A}_\mu h \Phi_0) \end{aligned}$$

また  $\mathcal{G}$  でのゲージ変換は式 14.88 から

$$\mathbf{A}_\mu^U(x) = U(x)\mathbf{A}_\mu(x)U^\dagger(x) + \frac{i}{g}U(x)\partial_\mu U^\dagger(x) \quad (14.105)$$

従って  $O(N)$  の場合と同様に

$$U \rightarrow h \quad (14.106)$$

と書くことで南部-ゴールドストーン粒子場を表すと式 14.93 より

$$\begin{aligned} (\mathbf{D}_\mu \Phi)^\dagger \cdot (\mathbf{D}^\mu \Phi) &= (\partial_\mu \Phi_0^\dagger + ig\Phi_0^\dagger \mathbf{A}_\mu) (\partial^\mu \Phi_0 - ig\mathbf{A}^\mu \Phi_0) \\ &= \partial_\mu \Phi_0^\dagger \partial^\mu \Phi_0 + ig (\Phi_0^\dagger \mathbf{A}^\mu \partial_\mu \Phi_0 - \partial_\mu \Phi_0^\dagger \mathbf{A}^\mu \Phi_0) \\ &\quad + g^2 \Phi_0^\dagger \mathbf{A}_\mu \mathbf{A}^\mu \Phi_0 \end{aligned}$$

よってゲージ場の質量が次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} m_g &= g^2 \sum_{ab}^{\mathcal{G}} (A^\mu)_a (A_\mu)_b \Phi_0^\dagger T_a T_b \Phi_0 \\ &= g^2 \sum_{ab}^{\mathcal{G}/\mathcal{H}} (A^\mu)_a (A_\mu)_b \Phi_0^\dagger T_a T_b \Phi_0 \\ &\equiv \sum_{ab}^{\mathcal{G}/\mathcal{H}} (A^\mu)_a (A_\mu)_b \mathbf{M}_{ab}^2 \end{aligned} \quad (14.107)$$

ここで  $\mathbf{M}_{ab}^2$  は明らかに対称行列であるから直交行列  $O$  を用いて次のように対角化できる。

$$O^T M O = \begin{pmatrix} \mathbf{m}_1^2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \mathbf{m}_{\mathcal{G}/\mathcal{H}}^2 \end{pmatrix} \quad (14.108)$$

従って変換されたゲージ場

$$(A_\mu)_a = \sum_b^{\mathcal{G}/\mathcal{H}} O_{ab} (A_\mu)_{b'} \quad (14.109)$$

で見れば  $\mathcal{G}/\mathcal{H}$  に属する生成子の個数のゲージ場は質量を持つことになる。

## 14.9 U(2) の場合

具体的に簡単な例で  $\mathcal{G} = U(2)$  の場合には生成子は

$$T_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (14.110)$$

$$T_i = \frac{1}{2} \sigma_i \quad (14.111)$$

$\sigma_i$  はパウリ行列である。これから具体的に真空の生成子を求めてみる。真空は

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} v + \sigma(x) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (14.112)$$

だったので真空の条件式 14.102 から質量を持たないゲージ場の数は次の生成子の数に等しいことになる。

$$\begin{aligned} \sum_b \alpha_b T_b \Phi_0 &= \alpha_0 T_0 \Phi_0 + \alpha_1 T_1 \Phi_0 + \alpha_2 T_2 \Phi_0 + \alpha_3 T_3 \Phi_0 \\ &= \frac{1}{2} \left( \begin{pmatrix} \alpha_0 & 0 \\ 0 & \alpha_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -i\alpha_2 \\ i\alpha_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_3 & 0 \\ 0 & -\alpha_3 \end{pmatrix} \right) \Phi_0 \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \alpha_0 + \alpha_3 & \alpha_1 - i\alpha_2 \\ \alpha_1 + i\alpha_2 & \alpha_0 - \alpha_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v + \sigma(x) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (\alpha_0 + \alpha_3)(v + \sigma(x)) \\ (\alpha_1 + i\alpha_2)(v + \sigma(x)) \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

従ってこれを満たす生成子は

$$\alpha_0 + \alpha_3 = 0 \quad (14.113)$$

から  $\alpha$  を大きさ 1 に選ぶと

$$\alpha_0 = 1, \alpha_3 = -1 \quad (14.114)$$

を得る。

$$\alpha_1 - i\alpha_2 = 0 \quad (14.115)$$

からは  $\alpha$  が実数であるということから

$$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0 \quad (14.116)$$

となり、次のように求める質量 0 となる生成子群は 1 つしかない。

$$T_0 - T_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (14.117)$$

確かにこの時、次の真空の条件を満足する。

$$\begin{aligned}
\sum_b \alpha_b T_b \Phi_0 &= T_0 \Phi_0 - T_3 \Phi_0 \\
&= \frac{1}{2} \left( \begin{pmatrix} 1-1 & 0 \\ 0 & 1+1 \end{pmatrix} \right) \Phi_0 \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v + \sigma(x) \\ 0 \end{pmatrix} = 0
\end{aligned}$$

従って残りの  $N^2 - 1 = 3$  の生成子は質量を獲得し、 $T_1, T_2$  は明らかだが後 1 つは式 14.117 から対角行列を完成させるために

$$T_0 + T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる必要がある。

この時式 14.107 は次のようになる。

$$\begin{aligned}
g^2 \sum_{ab}^{g/\mathcal{H}} (A^\mu)_a (A_\mu)_b \Phi_0^\dagger T_a T_b \Phi_0 &= \\
g^2 \frac{v^2}{4} [(A^\mu)_1 (A_\mu)_1 + (A^\mu)_2 (A_\mu)_2 + ((A_\mu)_0 + (A_\mu)_3) ((A^\mu)_0 + (A^\mu)_3)] &
\end{aligned}$$

この結果から  $A_1^\mu, A_2^\mu, (A_0^\mu + A_3^\mu)$  のゲージ場が質量を獲得していることがわかる。

## 14.10 U(3) の場合

具体的に簡単な例で  $\mathcal{G} = U(3)$  の場合には生成子は単位行列を含め次の 9 個になる。

これらは単位行列  $\lambda_0$  を除いてゲルマン行列と呼ばれる。

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
\lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \lambda_0 = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

先と同様に真空  $\Phi_0$  は次のようにおける。

$$\Phi_0(x) = \begin{pmatrix} v + \sigma(x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (14.118)$$

真空の条件式 14.102 から質量を持たないゲージ場の数は先と同様に  $T_a = \lambda_a/2$  として

$$\begin{aligned}
\sum_b \alpha_b T_b \Phi_0 &= \alpha_0 T_0 \Phi_0 + \alpha_1 T_1 \Phi_0 + \alpha_2 T_2 \Phi_0 + \alpha_3 T_3 \Phi_0 \\
&+ \alpha_4 T_4 \Phi_0 + \alpha_5 T_5 \Phi_0 + \alpha_6 T_6 \Phi_0 + \alpha_7 T_7 \Phi_0 + \alpha_8 T_8 \Phi_0 \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} \alpha_0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & 0 \\ \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -i\alpha_2 & 0 \\ i\alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right. \\
&+ \begin{pmatrix} \alpha_3 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_4 \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha_4 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i\alpha_5 \\ 0 & 0 & 0 \\ i\alpha_5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&+ \left. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_6 \\ 0 & \alpha_6 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i\alpha_7 \\ 0 & i\alpha_7 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \alpha_8 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_8 & 0 \\ 0 & 0 & -2\alpha_8 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} v + \sigma(x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}}\alpha_0 + \alpha_3 + \frac{1}{\sqrt{3}}\alpha_8 & \alpha_1 - i\alpha_2 & \alpha_4 - i\alpha_5 \\ \alpha_1 + i\alpha_2 & \sqrt{\frac{2}{3}}\alpha_0 - \alpha_3 + \frac{1}{\sqrt{3}}\alpha_8 & \alpha_6 - i\alpha_7 \\ \alpha_4 + i\alpha_5 & \alpha_6 + i\alpha_7 & \sqrt{\frac{2}{3}}\alpha_0 - \frac{2}{\sqrt{3}}\alpha_8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v + \sigma(x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= 0
\end{aligned}$$

となる。 $\alpha$  が実数であることからすぐに

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0 \quad (14.119)$$

つまり  $T_1, T_2, T_4, T_5$  は真空の条件は満たさない。有効な条件は  $v + \sigma(x) \neq 0$  とすれば、まず次の  $T_6, T_7$  は真空の条件を満たす。

$$T_6 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, T_7 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad (14.120)$$

これ以外の  $T_0, T_3, T_8$  は次の条件が必要になる。

$$\sqrt{\frac{2}{3}}\alpha_0 + \alpha_3 + \frac{1}{\sqrt{3}}\alpha_8 = 0 \quad (14.121)$$

$\alpha_0 = 0, \alpha_3 = -\frac{1}{2}$  ととれば

$$\alpha_8 = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (14.122)$$

となるから

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}T_3 + \frac{\sqrt{3}}{2}T_8 &= -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned} \quad (14.123)$$

$\alpha_3 = -\frac{1}{4}, \alpha_8 = -\frac{1}{4\sqrt{3}}$  ととれば式 14.121 から

$$\sqrt{\frac{2}{3}}\alpha_0 - \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = 0$$

だから

$$\alpha_0 = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{1}{6}} \quad (14.124)$$

を得るので

$$\sqrt{\frac{1}{6}}T_0 - \frac{1}{4}T_3 - \frac{1}{4\sqrt{3}}T_8 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{6}}\sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{8\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad (14.125)$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \right\} \quad (14.126)$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \right\} \quad (14.127)$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \right\} \quad (14.128)$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \right\} \quad (14.129)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\alpha_3 = -\frac{1}{2}, \alpha_8 = -\frac{1}{2\sqrt{3}}$  ととれば式 14.121 から

$$\sqrt{\frac{2}{3}}\alpha_0 - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = 0$$

だから

$$\alpha_0 = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad (14.130)$$

を得るので

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{2}{3}}T_0 - \frac{1}{2}T_3 - \frac{1}{2\sqrt{3}}T_8 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{4\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{14.131}
\end{aligned}$$

従って式 14.120,14.123,14.125,14.131 が真空の条件を満たす生成子であり、  
これらは 1 行、1 列目を除けば  $U(2)$  に等しい。従って逆に対称性が破れた質量を持つゲージ場の数は  $\mathcal{G}/\mathcal{H} = U(3)/U(2)$  であり  $9-4=5$  個である。つまり  $T_1, T_2, T_4, T_5$  以外には式 14.131 から

$$\sqrt{\frac{2}{3}}T_0 + \frac{1}{2}T_3 + \frac{1}{2\sqrt{3}}T_8 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{14.132}$$

である必要がある

2n 次元ユークリッド空間上の次の微分 2 形式

$$\omega = \sum_{i=1}^n dx_{2i-1} \wedge dx_{2i} \tag{14.133}$$

n 回外積をとると

$$\omega \wedge \omega \wedge \cdots \wedge \omega = n! dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{2n} \tag{14.134}$$

となり微分 2 形式  $\omega$  は 2n 次元の標準シンプレクティック形式と呼ばれる。

これは次のシンプレクティック多様体 (symplectic manifold) を構成する。

M が多様体で M 上の閉 2 次形式  $\omega$  が非退化であれば M 上の任意の点 P で

$$\omega_P(X, Y) = 0, \forall Y \in T_p M \implies X = 0 \in T_p M \tag{14.135}$$

が満たされるならば  $\omega$  は M 上のシンプレクティック形式といい、この多様体をシンプレクティック多様体という。  
従ってシンプレクティック多様体の次元は必ず偶数次元になる。

## 14.11 ハミルトンベクトル場

2n 次元  $(M, \omega)$  でシンプレクティック多様体とする。M 上のなめらかな関数  $f \in C^\infty(M)$  に対して  $\omega$  とベクトル場  $X_f$  との内積を  $i_{X_f}\omega$  で定義し、

$$i_{X_f}\omega = -df \tag{14.136}$$

を満たすならば  $X_f$  は  $f$  から決められるハミルトンベクトル場とかげ、位相空間上で次のようにあらわされる。

$$X_f = \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i} \quad (14.137)$$

今次のようにシンプレクティック形式をおくと

$$\omega = \sum_i dp_i \wedge dq^i \quad (14.138)$$

ハミルトンの正準方程式は変分原理を用いることなくシンプレクティック多様体  $M$  上で  $H$  をハミルトニアンとして次のようになる。

$$\frac{d\gamma}{dt} = X_H, \quad \gamma(t) = (q^1(t), \dots, q^n(t), p_1(t), \dots, p_n(t)) \quad (14.139)$$

さらに  $M$  上に次のようにポアソン構造が定義できる。

$$\{f, g\} = \omega(X_f, X_g) \quad (14.140)$$

従ってシンプレクティック多様体はポアソン多様体でもある。シンプレクティック多様体上のポアソン括弧は

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right) \quad (14.141)$$

となる。

## 14.12 断熱近似

次のような時間依存したポテンシャルを持ち、周期  $T$  を持つ 1 粒子場から出発する。

$$\hat{H} = \hat{H}(\hat{p}, \hat{x}, X(t)) \quad (14.142)$$

経路積分を用いて

$$\frac{\partial}{\partial t} (\psi^* \psi) = \psi^* \frac{\partial}{\partial t} \psi + \psi \frac{\partial}{\partial t} \psi^* \quad (14.143)$$

$$z = \int D\psi^* D\psi \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_0^T dt dx^3 \left[ \psi^*(t, x) i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, x) - \psi^*(t, x) H \left( \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t}, x, X(t) \right) \psi(t, x) \right] \right\} \quad (14.144)$$

$t=0$  で次のような完全系を満たす固有値方程式が成り立つとする。

$$H \left( \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t}, x, X(0) \right) u_n(x, X(0)) = \lambda_n u_n(x, X(0)) \quad (14.145)$$

$$\int d^3x u_n^*(x, X(0)) u_m(x, X(0)) = \delta_{nm} \quad (14.146)$$

この固有ベクトルを用いて次のように展開できるとする。

$$\psi(t, x) = \sum_n a_n(t) u_n(x, X(0)) \quad (14.147)$$

すると

$$D\psi^* D\psi = \Pi_n D a_n^* D a_n \quad (14.148)$$

となるので経路積分が

$$z = \int \prod_n D a_n^* D a_n \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \int_0^T dt \left( \sum_n a_n^*(t) i \hbar \frac{\partial}{\partial t} a_n(t) - \sum_{n,m} a_n^*(t) E_{nm}(X(t)) a_m(t) \right) \right] \quad (14.149)$$

$$E_{nm}(X(t)) = \int d^3x u_n^*(x, X(0)) H \left( \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t}, x, X(t) \right) u_m(x, X(0)) \quad (14.150)$$

とおける。次のようなユニタリ変換を考える。

$$a_n = \sum_m U(X(t))_{nm} b_m \quad (14.151)$$

$$U(X(t))_{nm} = \int d^3x u_n^*(x, X(0)) v_m(x, X(t)) \quad (14.152)$$

この時、 $v_n$  の固有方程式と直交関係は固有値が次のような関数となり、

$$H \left( \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t}, x, X(t) \right) v_n(x, X(t)) = \varepsilon(X(t)) v_n(x, X(t)) \quad (14.153)$$

$$\int d^3x v_n^*(x, X(t)) v_m(x, X(t)) = \delta_{nm} \quad (14.154)$$

ただし、 $t=0, t=nT$  の時は

$$X(0) = X(T) \quad (14.155)$$

$$\{a_n\} = \{b_n\} \quad (14.156)$$

が成り立つ。これから経路積分を書き直し、

$$z = \int \prod_n D b_n^* D b_n \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \int_0^T dt \left( \sum_n b_n^*(t) i \hbar \frac{\partial}{\partial t} b_n(t) + \sum_{n,m} b_n^*(t) i \hbar \langle n | \frac{\partial}{\partial t} | m \rangle b_m(t) - \sum_n b_n^*(t) \varepsilon(X(t)) b_n(t) \right) \right] \quad (14.157)$$

この式では指数内の第2項は非対角成分であり、この項が Berry の位相とよばれるものである。

この項は直交関係を用いると

$$b_n^*(t) i \hbar \langle n | \frac{\partial}{\partial t} | m \rangle b_m(t) = \left( U(X(t))^\dagger i \hbar \frac{\partial}{\partial t} U(X(t)) \right)_{nm} \quad (14.158)$$

$$= \int d^3x v_n^*(x, X(t)) i \hbar \frac{\partial}{\partial t} v_m(x, X(t)) \quad (14.159)$$

$$= i \hbar \langle n | \frac{\partial}{\partial t} | m \rangle \quad (14.160)$$

となる。経路積分は次のようにはじめから  $\psi$  を表しても成り立つ。

$$\psi = \sum_n b_n(t) v_n(x, X(t)) \quad (14.161)$$

これは隠れたゲージ対称性として後に取り上げる。これまで Berry の位相が断熱近似としてハミルトニアンに取り入れられる例はあった。しかし、ここではユニタリ変換を用いただけで断熱的な仮定はしていないことが重要である。

第2量子化をハミルトニアンにすると有効ハミルトニアンは Bose 粒子、Fermi 粒子について



$$H_{ef}(t) = \sum_n \hat{b}_n^\dagger(t) \varepsilon_n(X(t)) \hat{b}_n(t) - \sum_{n,m} \hat{b}_n^\dagger(t) i\hbar \langle n | \frac{\partial}{\partial t} | m \rangle \hat{b}_m(t) \quad (14.162)$$

ただし、

$$[\hat{b}_n(t), \hat{b}_m^\dagger(t)]_{\mp} = \delta_{nm} \quad (14.163)$$

$$\hat{b}_n(t) \hat{b}_n^\dagger(t) \mp \hat{b}_n^\dagger(t) \hat{b}_n(t) = 1 \quad (14.164)$$

となり第2項が berry の位相に寄与する。この項は非対角成分しかもたない。ハイゼンベルグの運動方程式は

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{b}_n(t) = [\hat{b}_n(t), \hat{H}_{ef}(t)] \quad (14.165)$$

となる。ここでユニタリ演算子を  $U(0) = 1$  として次を満たすとする。

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(t) = -\hat{H}_{ef}(t)U(t) \quad (14.166)$$

とすると  $\hat{b}_n(t)$  の時間発展は式 3.37 より

$$\hat{b}_n(t) = U(t) \hat{b}_n(0) U^\dagger(t) \quad (14.167)$$

と決まる。ここで次のようにハミルトニアンを変換すると  $U^\dagger(t) \hat{b}_n(t) = \hat{b}_n(0) U^\dagger(t)$  だから

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}_{ef} &\equiv U^\dagger(t) \hat{H}_{ef}(t) U(t) \\ &= \sum_n U^\dagger(t) \hat{b}_n^\dagger(t) \varepsilon_n(X(t)) \hat{b}_n(t) U^\dagger(t) - \sum_{n,m} U^\dagger(t) \hat{b}_n^\dagger(t) i\hbar \langle n | \frac{\partial}{\partial t} | m \rangle \hat{b}_m(t) U^\dagger(t) \\ &= \sum_n \hat{b}_n^\dagger(0) \varepsilon_n(X(t)) U^\dagger(t) U(t) \hat{b}_n(0) - \sum_{n,m} \hat{b}_n^\dagger(0) i\hbar U^\dagger(t) U(t) \langle n | \frac{\partial}{\partial t} | m \rangle \hat{b}_m(0) \\ &= \sum_n \hat{b}_n^\dagger(0) \varepsilon_n(X(t)) \hat{b}_n(0) - i\hbar \sum_{n,m} \hat{b}_n^\dagger(0) \langle n | \frac{\partial}{\partial t} | m \rangle \hat{b}_m(0) \end{aligned}$$

ハイゼンベルグとシュレディンガーの状態には

$$\psi_H(0) = U(t) \psi_S(t) \quad (14.168)$$

が成り立つから

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_s = U^\dagger(t) \hat{H}_{ef}(t) U(t) U^\dagger(t) \psi_H(0) = \hat{\mathcal{H}}_{ef}(t) \psi_s(t) \quad (14.169)$$

よって第2量子化を時間推進演算子にほどこす  $T^*$  を時間順序演算子とし  $\epsilon = T/(N+1)$  とする。

$$\begin{aligned} &\langle n | T^* \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_0^T \hat{\mathcal{H}}_{ef}(t) dt\right) | n \rangle \\ &= \langle n | T^* \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_0^T \sum_n \hat{b}_n^\dagger(0) \varepsilon_n(X(t)) \hat{b}_n(0) - i\hbar \sum_{n,m} \hat{b}_n^\dagger(0) \langle n | \frac{\partial}{\partial t} | m \rangle \hat{b}_m(0) dt\right) | n \rangle \\ &= \sum_{n_1, n_2, \dots, n_N} \langle n | \exp\left(-\frac{i\epsilon}{\hbar} \left(\sum_n \hat{b}_n^\dagger(0) \varepsilon_n(X(T)) \hat{b}_n(0) - i\hbar \sum_{n,m} \hat{b}_n^\dagger(0) \langle n | \frac{\partial}{\partial T} | m \rangle \hat{b}_m(0)\right)\right) | n_1 \rangle \\ &\times \langle n_1 | \exp\left(-\frac{i\epsilon}{\hbar} \left(\sum_n \hat{b}_n^\dagger(0) \varepsilon_n(X(t_1)) \hat{b}_n(0) - i\hbar \sum_{n,m} \hat{b}_n^\dagger(0) \langle n | \frac{\partial}{\partial t_1} | m \rangle \hat{b}_m(0)\right)\right) | n_2 \rangle \\ &\times \langle n_2 | \exp\left(-\frac{i\epsilon}{\hbar} \left(\sum_n \hat{b}_n^\dagger(0) \varepsilon_n(X(t_2)) \hat{b}_n(0) - i\hbar \sum_{n,m} \hat{b}_n^\dagger(0) \langle n | \frac{\partial}{\partial t_2} | m \rangle \hat{b}_m(0)\right)\right) | n_3 \rangle \\ &\times \dots \times \langle n_N | \exp\left(-\frac{i\epsilon}{\hbar} \left(\sum_n \hat{b}_n^\dagger(0) \varepsilon_n(X(t_N)) \hat{b}_n(0) - i\hbar \sum_{n,m} \hat{b}_n^\dagger(0) \langle n | \frac{\partial}{\partial t_N} | m \rangle \hat{b}_m(0)\right)\right) | n \rangle \end{aligned}$$

ここで光子数状態を真空から次のように導けるとする

$$|n\rangle = \hat{b}_n^\dagger(0)|0\rangle \quad (14.170)$$

これで書き換えると

$$\begin{aligned} & \langle n|T^* \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_0^T \hat{H}_{ef}(t) dt\right) |n\rangle \\ &= \sum_{n_1, n_2, \dots, n_N} \left\{ \exp\left(-\frac{i\epsilon}{\hbar} \left(\varepsilon_n(X(T)) - \langle n| \frac{\partial}{\partial T} |n_1\rangle\right)\right) \delta_{nn_1} + \frac{i\epsilon}{\hbar} \langle n| \frac{\partial}{\partial T} |n_1\rangle |_{n \neq n_1} \right\} \\ & \times \left\{ \exp\left(-\frac{i\epsilon}{\hbar} \left(\varepsilon_n(X(t_1)) - \langle n_1| \frac{\partial}{\partial t_1} |n_2\rangle\right)\right) \delta_{n_1 n_2} + \frac{i\epsilon}{\hbar} \langle n_1| \frac{\partial}{\partial t_1} |n_2\rangle |_{n_1 \neq n_2} \right\} \times \\ & \dots \times \left\{ \exp\left(-\frac{i\epsilon}{\hbar} \left(\varepsilon_n(X(t_N)) - \langle n_N| \frac{\partial}{\partial t_N} |n\rangle\right)\right) \delta_{n_N n} + \frac{i\epsilon}{\hbar} \langle n_N| \frac{\partial}{\partial t_N} |n\rangle |_{n_N \neq n} \right\} \end{aligned}$$

さらに次のような固有方程式が成り立つ

$$\hat{H}(\hat{p}, \hat{x}, X(t)) |n(t)\rangle = \varepsilon_n(X(t_N)) |n(t)\rangle \quad (14.171)$$

さらに断熱近似  $t_2 \rightarrow t_1 + \epsilon$  を次の項におこなうと

$$\begin{aligned} & \exp\left(-\frac{i\epsilon}{\hbar} \left(\varepsilon_n(X(t_1)) - \langle n_1| \frac{\partial}{\partial t_1} |n_2\rangle\right)\right) \delta_{n_1 n_2} + \frac{i\epsilon}{\hbar} \langle n_1| \frac{\partial}{\partial t_1} |n_2\rangle |_{n_1 \neq n_2} \\ &= \exp\left(-\frac{i\epsilon}{\hbar} \left(\varepsilon_n(X(t_1))\right)\right) \langle n_1(t_1)| n_2(t_1 - \epsilon)\rangle + O(\epsilon^2) \\ &= \langle n_1(t_1)| \exp\left(-\frac{i\epsilon}{\hbar} \left(\hat{H}(\hat{p}, \hat{x}, X(t_1))\right)\right) |n_2(t_1 - \epsilon)\rangle + O(\epsilon^2) \end{aligned}$$

となるので  $\epsilon \rightarrow 0$  の近似で

$$\langle n|T^* \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_0^T \hat{H}_{ef}(t) dt\right) |n\rangle = \langle n(T)| \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_0^T \left(\hat{H}(\hat{p}, \hat{x}, X(t_1))\right) dt\right) |n(0)\rangle \quad (14.172)$$

## 15 ゲージ理論

### 15.1 ローレンツ変換の拡張

相対論では4元座標を次のようにおいた。

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (ct, x, y, z)$$

また、通常光円錐の内では

$$(ct)^2 \gg \mathbf{x}^2$$

であるから次のようにおけた。

$$-\Delta s^2 = -(\Delta x^0)^2 + (\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2$$

これは4次元時空で不変な長さであり

$$\Delta s^2 = \Delta s'^2$$

が成り立つ。また

$$ds^2 = ds'^2$$

と表すこともできる。ただし、

$$-ds^2 = \sum_{\mu=0}^3 dx_\mu dx^\mu$$

である。この章の以後においてはアインシュタイン既約に従い、シグマ記号を略すことにする。ここでもし  $ds^2 > 0$  であれば

$$ds \equiv \sqrt{ds^2}$$

であり、

$$-ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

で表すことができる。 $\eta$  は

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

のように対角可された行列である。

複素スカラー場  $\phi$  を用いて Klein-Gordon 場のラグランジアン密度は式 15.25 から

$$\mathcal{L}_K = (\partial^\mu \phi)^* (\partial_\mu \phi) - m^2 \phi^* \phi$$

とおけた。前節でみたように場  $\phi$  を局所位相変換  $U = e^{-i\omega(x)}$  のように座標依存する変換を施すと微分項は

$$\partial^\mu \phi \rightarrow \partial^\mu (U(x)\phi(x)) = U(x)\partial^\mu \phi(x) - i\phi(x)U(x)\partial^\mu \omega(x)$$

となるが、これは第 2 項からラグランジアン密度が不変ではなくなる。しかし次のような局所ゲージ変換と微分演算子の書き換えをセットで考えると

$$A^\mu(x) \rightarrow A^\mu + \frac{1}{e}\partial^\mu \omega(x)$$

$$D^\mu(x) \rightarrow \partial^\mu + ieA^\mu(x)$$

局所ゲージ変換

$$D^\mu \phi(x) \rightarrow U(x)D^\mu \phi(x)$$

$$(D^\mu \phi(x))^* \rightarrow U^*(x) (D^\mu \phi(x))^*$$

で変換し、ラグランジアン密度は不変である。

$V(\phi = \rho) = 0$  は極小値をとる。ここで

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla A^0, \quad \pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^0 \phi)} = (D^0 \phi)^*$$

が成り立つから、ハミルトニアンを式 15.3 のラグランジアン密度から求めると  $H(p, q) = p_i \dot{q}^i - L$  であったから

$$H = \int d^3x A^\mu - \int d^3x \mathcal{L} \left[ \frac{1}{2} (B_a^2 + E_a^2) \right]$$

$SU(2)$  の随伴表現によって変換するクラインゴールドンの場  $\phi$  を次のようにおく。

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} \tag{15.1}$$

この時ゲージ変換の生成子は

$$(T_a)_{bc} = -i\epsilon_{abc} \quad (15.2)$$

ポテンシャルを  $V$  として  $V$  は質量項  $m^2\phi^\dagger\phi$  を含むとしてラグランジアン密度を改めて次のように定義する。

$$\mathcal{L}_K = (D^\mu\phi)^\dagger(D_\mu\phi) - V(\phi) \quad (15.3)$$

この時  $V$  は次の極小値条件を満たすとす。

$$V(\rho) = 0, V'(\rho) = 0, V''(\rho) > 0 \quad (15.4)$$

例えば正の実数を  $a$  として次のように  $V$  をおける。

$$V(\phi) = \lambda(\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 - a^2)^2 \quad (15.5)$$

すると

$$\phi = \rho, |\rho| = a \quad (15.6)$$

## 15.2 ゲージ変換

### 15.2.1 電磁場中の荷電粒子

外場のスカラーポテンシャルを  $\phi$ 、ベクトルポテンシャルを  $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$  とする。電荷を  $e$  とするとこの粒子のラグランジアンは古典的に

$$L = \frac{m}{2}\dot{\mathbf{x}}^2 - e\phi(\mathbf{x}, t) + \frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \cdot \dot{\mathbf{x}} \quad (15.7)$$

とかける。このときのラグランジュの方程式はいわゆるローレンツ力が導かれ

$$m\ddot{\mathbf{x}} = e\left(\mathbf{E} + \frac{\dot{\mathbf{x}}}{c} \times \mathbf{B}\right) \quad (15.8)$$

ここで

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (15.9)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \quad (15.10)$$

で与えられた。

ここで外場  $\phi$ 、 $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$  に対して次のような微分項を加えた変化を与えてみると

$$\begin{aligned} \phi' &= \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\lambda(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \\ \mathbf{A}' &= \mathbf{A} - \nabla\lambda(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (15.11)$$

ラグランジアンは次のように変化する。

$$\begin{aligned}
L' &= \frac{m}{2} \dot{\mathbf{x}}^2 - e\phi'(\mathbf{x}, t) + \frac{e}{c} \mathbf{A}'(\mathbf{x}, t) \cdot \dot{\mathbf{x}} \\
&= L - \frac{e}{c} \left( \frac{\partial \lambda(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla \lambda(\mathbf{x}, t) \cdot \dot{\mathbf{x}} \right) \\
&= L - \frac{e}{c} \frac{d}{dt} \lambda
\end{aligned}$$

となり前部の作用原理でみたように第2項は $\lambda$ の全微分になっているためハミルトニアンが不変になる。そこで前節からハミルトン形式での作用に上式の第2項を付け加えて次のように置くと

$$\begin{aligned}
S &= \int dt \left( \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{x}} - H - \frac{e}{c} \frac{d}{dt} \lambda \right) \\
&= \int dt \left( \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{x}} - H - \frac{e}{c} \left( \frac{\partial}{\partial t} \lambda + \nabla \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} \lambda \right) \right) \\
&= \int dt \left( \left( \mathbf{p} - \frac{e}{c} \nabla \lambda \right) \cdot \dot{\mathbf{x}} - \left( H + \frac{e}{c} \frac{\partial}{\partial t} \lambda \right) \right)
\end{aligned}$$

となる。これは運動量とハミルトニアンが作用積分の過程で同時に次のように変換しても作用に変化はないことになる。

$$H' = H + \frac{e}{c} \frac{\partial \lambda(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \quad (15.12)$$

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p} - \frac{e}{c} \nabla \lambda(\mathbf{x}, t) \quad (15.13)$$

これは式 17.12 の一般化である。

つまり、ラグランジアンに関する全微分の任意の微分可能な関数の変化は作用原理において、時間部分と空間部分の変化に分離され、粒子は局所的に相互作用する形の式が導かれる。

式 17.12 のような変換をゲージ変換 (gauge transformation) という。

さて、量子力学では式 15.7 のラグランジアンから次のようにゲージ変換に対して不変な形の電磁場内の粒子のハミルトニアンが記述される。

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left( \hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c} \hat{\mathbf{A}} \right)^2 + e\phi(\hat{\mathbf{x}}, t) \quad (15.14)$$

この時、波動関数の時間変化のユニタリ変換  $\hat{U}$  を利用して

$$\hat{U}|\psi(t)\rangle = |\psi(t')\rangle \quad (15.15)$$

とする。シュレディンガー方程式はラグランジュの方程式のように時間軌道を表すものではない。

しかし、ハミルトニアンがユニタリ変換後には同時刻において式 15.12 のように変換されると仮定する

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle \quad (15.16)$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t')\rangle = H'(t') |\psi(t')\rangle \quad (15.17)$$

が共に成り立つ。ただし、変化は時間のみを考え、空間変化は考えない。そこで

$$\dot{\lambda}(t) = \frac{\partial \lambda(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \frac{d\lambda(t)}{dt} \quad (15.18)$$

とおく。したがって左辺は

$$\begin{aligned}
i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t')\rangle &= i\hbar \frac{d}{dt} (\hat{U} |\psi(t)\rangle) \\
&= \hat{U} \left( i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle \right) + i\hbar \hat{U}^{-1} \left( \frac{d}{dt} \hat{U} \right) |\psi(t)\rangle
\end{aligned}$$

一方右辺は  $H(t+dt) = H(t)$  であるから式 15.12、15.18 より

$$\begin{aligned}
H'(t') |\psi(t')\rangle &= H'(t+dt) \hat{U} |\psi(t)\rangle \\
&= \left( H(t+dt) + \frac{e}{c} \frac{\partial \lambda(\mathbf{x}, t+dt)}{\partial t} \right) \hat{U} |\psi(t)\rangle \\
&= \hat{U} H |\psi(t)\rangle + \left( \frac{e}{c} \dot{\lambda}(t+dt) \right) \hat{U} |\psi(t)\rangle \\
&= \hat{U} H |\psi(t)\rangle + \hat{U} \left( \frac{e}{c} \dot{\lambda}(t) \right) |\psi(t)\rangle
\end{aligned}$$

ただし、次が成り立つとした。

$$\hat{U} \dot{\lambda}(t) |\psi(t)\rangle = \dot{\lambda}(t+dt) \hat{U} |\psi(t)\rangle$$

式 15.17 から

$$\hat{U} \left( i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle + i\hbar \hat{U}^{-1} \left( \frac{d}{dt} \hat{U} \right) |\psi(t)\rangle \right) = \left( H + \frac{e}{c} \dot{\lambda} \right) |\psi(t)\rangle \quad (15.19)$$

よって式 15.16 を代入すると次のユニタリ変換  $\hat{U}$  に関する方程式が得られる。

$$i\hbar \left( \frac{d}{dt} \hat{U} \right) = \frac{e}{c} \dot{\lambda} \hat{U} \quad (15.20)$$

これを解くと

$$\hat{U} = \exp \left( \frac{e\lambda(t)}{i\hbar c} \right) = \exp \left( -i \frac{e\lambda(t)}{\hbar c} \right) \quad (15.21)$$

を得る。この変換は位相変換である。電磁場のラグランジアン密度は電流密度を  $j^\mu = (\rho, \mathbf{j})$  として

$$\mathcal{L}_{EM} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + A_\mu j^\mu \quad (15.22)$$

とおける。この時の Maxwell の方程式は Minkowski 計量を  $diag(-1, 1, 1, 1)$  として次のようにまとめてかける。

$$\partial_\xi F_{\mu\nu} - \partial_\mu F_{\nu\xi} + \partial_\nu F_{\xi\mu} = 0 \quad (15.23)$$

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = j^\mu \quad (15.24)$$

### 15.2.2 Klein-Gordon 場

次に自由クラインゴルドン場を考える。ラグランジアン密度を

$$\mathcal{L}_K = (\partial^\mu \phi)^\dagger (\partial_\mu \phi) - m^2 \phi^\dagger \phi \quad (15.25)$$

として 4 元座標  $x$  に依存しない大域的なゲージ変換をユニタリ行列を  $U$ 、 $\omega$  を定数として次のように表す。

$$U = \exp(-i\omega) \quad (15.26)$$

$$\phi' = U\phi \quad (15.27)$$

これを式 15.25 に代入してもラグランジアンは変化しない。  
座標  $x$  に依存した局所ゲージ変換をユニタリ行列を  $U$  として次のように表す。

$$U = \exp(-i\omega(x)) \quad (15.28)$$

この場合の変換は

$$\partial^\mu (U(x)\phi(x)) = U(x)\partial^\mu\phi(x) - i\phi(x)U(x)\partial^\mu\omega(x) \quad (15.29)$$

となり、第 2 項の影響でラグランジアン密度に変化がおこる。  
座標に依存するような局所的な作用がラグランジアンに影響を与えることになる。  
しかし、この変化は次のように変化する場を考え、次のようにゲージ場を導入する。

$$A^{\mu'} = A^\mu(x) + \frac{1}{e}\partial^\mu\omega(x) \quad (15.30)$$

さらに微分演算子も共変微分

$$D^\mu = \partial^\mu + ieA^\mu(x) \quad (15.31)$$

に置き換えると

$$\begin{aligned} D^{\mu'} (U(x)\phi(x)) &= \left( \partial^\mu + ieA^{\mu'}(x) \right) (U(x)\phi(x)) \\ &= U(x)\partial^\mu\phi(x) - i\phi(x)U(x)\partial^\mu\omega(x) + ieA^{\mu'}(x)U(x)\phi(x) \\ &= U(x)\partial^\mu\phi(x) - i\phi(x)U(x)\partial^\mu\omega(x) + ie \left( A^\mu(x) + \frac{1}{e}\partial^\mu\omega(x) \right) U(x)\phi(x) \\ &= U(x)\partial^\mu\phi(x) + ieA^\mu U(x)\phi(x) \\ &= U(x) (\partial^\mu + ieA^\mu(x)) \phi(x) \\ &= U(x)D^\mu\phi(x) \end{aligned}$$

同様に複素共役項も

$$D^{\mu'} (U(x)\phi(x))^* = U(x)^* (D^\mu\phi(x))^* \quad (15.32)$$

のように変換されるのでラグランジアン密度は不変に保たれる。

量子場においてもド・ブローイ波だけでは波動関数の位相変換しても不変な理論にならず、ゲージ場を導入しないと行けない。

これをゲージ原理による相互作用の導入という。

### 15.2.3 Dirac 場

4次元時空では 4成分 Dirac 場を考える。

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} \phi_1(x) \\ \vdots \\ \phi_n(x) \end{pmatrix} := (\phi_1(x), \dots, \phi_n(x))^T \quad (15.33)$$

N 行、N 列の行列  $U$  を用いて場の回転は次のように表される。

$$\phi'_a(x) = U_a^b \phi_b(x) \quad (a, b = 1, \dots, N) \quad (15.34)$$

ここで  $a, b$  はカラー添え字と呼ばれる。  $U$  は各成分を混合していく役割をはたしている。  
Dirac 共役は

$$\bar{\phi}_a = \phi_a^\dagger \gamma^0 \quad (15.35)$$

であることに注意し、共役場の変換は

$$\bar{\phi}'_a(x) = \bar{\phi}_b(x) (U^*)^b_a = \bar{\phi}_b(x) (U^\dagger)^a_b \quad (15.36)$$

となる。  $\alpha, \beta, \gamma$  をスピノールの添え字としてエルミート共役の転置はスピノールの添え字のみに作用する。  
よって

$$\phi'^\alpha_a(x) = U_a^b \phi^\alpha_b(x) \quad (15.37)$$

$$\bar{\phi}'^\beta_a(x) = \phi^{*\gamma}_a(x) (\gamma^0)^{\gamma\beta} \quad (15.38)$$

$$\bar{\phi}'^{\beta a}(x) = \bar{\phi}^{\beta c}(x) (U^*)^c_a = \bar{\phi}^{\beta c}(x) (U^\dagger)^a_c \quad (15.39)$$

が変換規則となる。さて Dirac 場のラグランジアン密度  $\mathcal{L}$  は  $\bar{\phi}$  と  $\phi$  に関する双 1 次形式で添え字  $a$  で縮約されているのでラグランジアンが不変性を保つために次のような和の循環が現れる。

$$\bar{\phi}'^\beta \phi'^\alpha = \sum_a \bar{\phi}'^{\beta a} \phi'^\alpha_a = \sum_{abc} \bar{\phi}^{\beta a} (U^\dagger)^a_c U_a^b \phi^\alpha_b \quad (15.40)$$

よって  $U$  がエルミート演算子であれば

$$\sum_a (U^\dagger)^a_c U_a^b = \delta_c^b \quad (15.41)$$

なので上の式が縮約され

$$\bar{\phi}'^\beta \phi'^\alpha = \bar{\phi}^\beta \phi^\alpha \quad (15.42)$$

となりラグランジアンの不変性が保たれる。このような成分間の対称性を内部対称性という。  
これに対し Lorentz 変換のような時空座標の変換のもとでの対称性を時空対称性という。  
内部対称性は  $N$  次のユニタリ群とも呼ばれ  $U(N)$  とかける。また  $U$  は 16.2 から

$$U = \exp(i\theta^\lambda T^\lambda) \quad (15.43)$$

のようにかける。このとき  $T^\lambda$  を群の生成子といい、  $\theta^\lambda$  が実のパラメータであれば  $T^\lambda$  は  $N \times N$  のエルミート行列である。

$$(T^\lambda)^\dagger = T^\lambda \quad (15.44)$$

このとき次元の数は

$$\dim U(N) = N^2 \quad (15.45)$$

であるが行列式が 1 である特殊ユニタリ変換  $SU(N)$  の場合は次元が  $n = N^2 - 1$  の随伴表現がとれる。  
 $N = 1$  であれば  $U(1)$  でこれは次のような位相変換である。



$$U(1) = \exp(i\theta) \quad (15.46)$$

$\phi$  を電荷  $e$  の Dirac 場とし、自由 Dirac 場のラグランジアン密度を

$$\mathcal{L}_D = \bar{\phi}(i\gamma^\mu \partial_\mu + m)\phi \quad (15.47)$$

大域的なゲージ変換を

$$\phi' = e^{-ie\alpha} \phi \quad (15.48)$$

$$\bar{\phi}' = \bar{\phi} e^{ie\alpha} \quad (15.49)$$

とすると  $\mathcal{L}_D$  はこの変換においても明らかに不変である。しかし次のような局所的なゲージ変換では

$$\phi' = e^{-ie\alpha(x)} \phi \quad (15.50)$$

$$\bar{\phi}' = \bar{\phi} e^{ie\alpha(x)} \quad (15.51)$$

式 15.47 より微分演算子を含むので

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_D &= \bar{\phi} e^{ie\alpha(x)} (i\gamma^\mu \partial_\mu + m) e^{-ie\alpha(x)} \phi \\ &= \bar{\phi} (i\gamma^\mu \partial_\mu + m) \phi + \bar{\phi} e^{ie\alpha(x)} \gamma^\mu \partial_\mu (e^{-ie\alpha(x)}) \phi \\ &= \bar{\phi} (i\gamma^\mu (\partial_\mu - ie\partial_\mu \alpha) + m) \phi \end{aligned}$$

そこでラグランジアンを不変に保つために次のような場を  $\phi$  に加え、同時に演算子を次のように変更する。

$$A_\mu = \partial_\mu \alpha \quad (15.52)$$

$$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu \quad (15.53)$$

を共変微分として定義すると局所位相変化のもとで

$$\mathcal{L}_D = \bar{\phi}(i\gamma^\mu D_\mu + m)\phi \quad (15.54)$$

を得る。また、共変微分の異なる時空間での交換積

$$\begin{aligned} [D_\mu, D_\nu] &= (\partial_\mu - ieA_\mu)(\partial_\nu - ieA_\nu) - (\partial_\nu - ieA_\nu)(\partial_\mu - ieA_\mu) \\ &= -ie(\partial_\mu A_\nu + A_\nu \partial_\mu - \partial_\nu A_\mu + A_\mu \partial_\nu + \partial_\nu A_\mu - A_\nu \partial_\mu) \\ &\quad + [\partial_\mu, \partial_\nu] - e^2 [A_\mu, A_\nu] \end{aligned}$$

となるが、 $A_\mu$ 、 $\partial_\mu$  は交換するので

$$[D_\mu, D_\nu] = -ie(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = -ieF_{\mu\nu} \quad (15.55)$$

である。これから相互作用を含めたディラック場のラグランジアンが次のようにかかる。

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) + \bar{\phi}(i\gamma^\mu D_\mu + m)\phi - e\bar{\phi}\gamma^\mu \phi A_\mu(x) \quad (15.56)$$

### 15.2.4 相互作用

次に 1 成分 Klein-Gordon 場と Dirac 場の相互作用がある場合を考える。

$$\mathcal{L}[x] = \mathcal{L}_0[x] + \mathcal{L}_{int}[x]$$

$$\mathcal{L}_0[x] = -\hbar c \psi^\dagger(x) (\gamma_\mu \partial_\mu + K_D) \psi(x) - \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi(x) \partial_\mu \phi(x) + K_G^2 \phi(x) \phi(x)) \quad (15.57)$$

相互作用の項は次のように 2 つの場合を考える。

$$\mathcal{L}_{int1}[x] = f \psi^\dagger \psi \phi$$

$$\mathcal{L}_{int2}[x] = i g \psi^\dagger \gamma_\mu \psi \partial_\mu \phi$$

前者のように微分項がないなら正準運動量は  $\mathcal{L}_0$  だけで決まるが、後者のように微分項があると  $\phi$  の正準運動量は

$$\begin{aligned} \pi_\phi &= \frac{\partial (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int2})}{\partial \dot{\phi}(x)} \\ &= \frac{1}{c^2} \dot{\phi}(x) + \frac{g}{c} \psi^\dagger \gamma_4 \psi \end{aligned} \quad (15.58)$$

となり、この時のハミルトニアン密度は空間成分と時間成分に分離され

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x) &= \hbar c \psi^\dagger(x) (\gamma_i \partial_i + K_D) \psi(x) - i g \psi^\dagger(x) \gamma_i \psi(x) \partial_i \phi(x) - \frac{g}{c} \psi^\dagger(x) \gamma_4 \psi(x) \dot{\phi}(x) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( \nabla \phi(x) \nabla \phi(x) - \frac{1}{c^2} \dot{\phi}(x) \dot{\phi}(x) + K_G^2 \phi(x) \phi(x) \right) + \pi_\phi(x) \dot{\phi}(x) \\ &= \mathcal{H}_0(x) + \mathcal{H}_{int}(x) \end{aligned}$$

とかけると、ただし、15.58 から

$$\mathcal{H}_0 = \hbar c \psi^\dagger(x) (\gamma_i \partial_i + K_D) \psi(x) + \frac{1}{2} (c^2 \pi_\phi(x) \pi_\phi(x) + \nabla \phi(x) \nabla \phi(x) + K_G^2 \phi(x) \phi(x))$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{int} &= -i g \psi^\dagger(x) \gamma_i \psi(x) \partial_i \phi(x) - \frac{g}{c} \psi^\dagger(x) \gamma_4 \psi(x) \dot{\phi}(x) + \pi_\phi(x) \dot{\phi}(x) \\ &= -i g \psi^\dagger(x) \gamma_i \psi(x) \partial_i \phi(x) - g c \psi^\dagger(x) \gamma_4 \psi(x) \pi_\phi(x) + \frac{1}{2} g^2 (\psi^\dagger(x) \gamma_4 \psi(x))^2 \end{aligned}$$

となるので正準方程式は

$$\begin{aligned} \dot{\phi}(x) &= \frac{\delta H}{\delta \pi_\phi(x)} = c^2 \pi_\phi - g c \psi^\dagger(x) \gamma_4 \psi(x) \\ \dot{\pi}_\phi(x) &= -\frac{\delta H}{\delta \phi(x)} = (\nabla^2 - K_G^2) \phi(x) - i g \partial_i (\psi^\dagger(x) \gamma_i \psi(x)) \end{aligned}$$

となるので Euler-Lagrange の式がスカラーについて

$$(\square - K_G^2) \phi(x) = i g \partial_\mu (\psi^\dagger(x) \gamma_\mu \psi(x))$$

さらに spinor についても

$$(\gamma_\mu \partial_\mu + K_D) \psi(x) = i \frac{g}{\hbar c} \gamma_\mu \psi(x) \partial_\mu \phi(x)$$

が得られる。

### 15.2.5 Maxwell 場 [38]

荷電粒子のベクトルポテンシャルを  $A^\mu$  として Maxwell 場は

$$(\partial_\mu \partial^\mu) A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = 0 \quad (15.59)$$

とかけた。ここでラグランジアン密度を単純に

$$L = L(\partial_\mu A_\nu)$$

とおこう。この時、15.59 より、

$$\partial_\mu \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu (\partial^\nu A^\mu) = \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)$$

## 15.3 ゲージ理論

### 15.3.1 自然単位系 [109]

歴史的な背景から物理学の標準単位は  $MKSA$  系を用いてきた。

例えばエネルギーについては素粒子でよくもちいる  $eV$  は

$$[J] = 1.6 \times 10^{-19} \times 1.0[eV]$$

である。

しかし、物理の基本定数として光速と、プランク定数を選び、この単位を 1 とするのは自然である。これを自然単位系という。そのために

$$\hbar c = 1.97 \times 10^{15} \text{MeV} \cdot \text{m}$$

を覚えて、換算につかい、以後は自然単位系

$$\hbar = c = 1$$

を用いる。この単位系では次のように質量中心で単位をつくることができる。長さは質量の逆数になる。

$$[L] = [M^{-1}] = (eV^{-1})$$

エネルギー  $E$  は質量と同じになる。

$$[E] = [M^1] = (eV)$$

このように質量の何乗になっているかを表すのを質量次元という。

前節式 15.56 での電子のラグランジアンについて電荷  $q = eQ$  とし、標準単位にもどすと、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{QED} &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) + \bar{\phi}(i\gamma^\mu D_\mu + m)\phi - e\bar{\phi}\gamma^\mu \phi A_\mu(x) \\ &= -\frac{1}{4\mu_0} (\partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x)) (\partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x)) + c\bar{\psi}(x) \left\{ i\hbar\gamma^\mu \left( \partial_\mu + i\frac{eQ}{\hbar} A_\mu(x) \right) - mc \right\} \psi(x) \end{aligned}$$

そこで自然単位系の表現にすると

$$\frac{e}{\sqrt{\varepsilon_0 \hbar c}} \rightarrow e, \quad \sqrt{\frac{c\varepsilon_0}{\hbar}} A_\mu \rightarrow A_\mu$$

とできるので

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{QED} = & \bar{\psi}(x) \{i\hbar\gamma^\mu (\partial_\mu + ieQA_\mu(x)) - m\} \psi(x) \\ & - \frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x)) (\partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x))\end{aligned}$$

となる。この時の構造定数が

$$\alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = \frac{e^2}{4\pi}$$

と簡単になる。しかし、自然単位系では  $\epsilon_0, \mu_0$  も  $c$  と見分けがつかないくなるので留意がいる。さらに簡単に表記する場合は

$$\begin{aligned}\gamma^\mu \partial_\mu &= \not{\partial} \\ \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) &= F_{\mu\nu}\end{aligned}$$

を使えばさらに、

$$\mathcal{L}_{QED} = \bar{\psi}(x) i\not{\partial}\psi - m\bar{\psi}\psi - eQ\bar{\psi}\not{A}\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$

となる。今後必要に応じて利用する。この表記は前章でみた繰り込み可能な理論になっている。

### 15.3.2 ゲージ場

時空座標に無関係に一齐に内部空間で同じ変換をする場合を大局的変換 (global transformation) といい、Klein-Gordon 場で見たとように各時空で異なった位相変化をする場合を局所変換 (local transformation) という。

この局所変換

$$\phi'_a = U_b^a(x)\phi_b(x) \quad (15.60)$$

を行ったとき作用積分が不変になることをゲージ原理という。

しかし作用積分はラグランジアン密度の積分なのでラグランジアンには微分演算子が含まれ、時空座標に作用する。よって  $\theta(x^\mu)$  のように位相が座標依存する時は演算子側にも変化を要求しないとゲージ原理は満たされない。このために接続 (connection) と呼ばれる新たな場  $A(x)$  の導入が必要になる。これがゲージ場 (gauge field) である。

第5部でその導入をみたがここであらためて局所的な接続から今後重要な指導原理にもなるゲージ理論を考えよう。

一般にはゲージ場は Lie 群  $G$  の Lie 代数  $g$  の元で生成子  $T^\lambda$  の線形結合  $N \times N$  の行列として次のように定義する。

$$A_\mu(x) \equiv \sum_{\lambda=1}^{\dim G} A_\mu^\lambda(x) T^\lambda \quad (15.61)$$

$$(A_{\mu a}^b)(x) = \sum_{\lambda=1}^{\dim G} A_\mu^\lambda(x) (T^\lambda)_a^b \quad (15.62)$$

後に考察するように任意性が残され、時空の各点にファイバーバンドルとして束が接続されている。

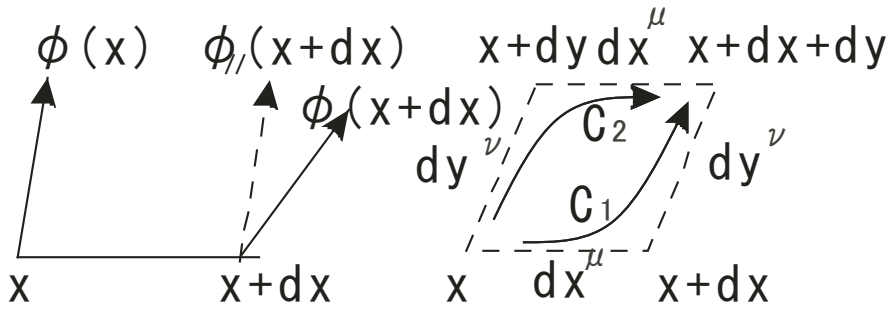


図 15.1: 平行移動の経路による相違

従って、図のように、ある点  $x$  での物質場の内部空間ベクトル  $\phi(x)$  の平行移動は  $x$  から  $x+dx$  の移動で時空の変化量  $dx^\mu$  に比例し、内部空間ベクトルは回転する。

この時、 $g$  が場の強さを表す比例定数を考え。平行移動が

$$\phi_{||}(x+dx) = \phi(x) + igA_\mu(x)dx^\mu\phi(x) \quad (15.63)$$

のようになると考えるわけである。つまり、平行移動がスカラーとして観測できるために、ゲージ場が必要になる。

同じ時空点  $x+dx$  で比較できるように書き換えると

$$\begin{aligned} \phi_{||}(x+dx) &= \phi(x) + \partial_\mu\phi(x)dx^\mu - \partial_\mu\phi(x)dx^\mu + igA_\mu(x)dx^\mu\phi(x) \\ &= \phi(x+dx) - (\partial_\mu - igA_\mu(x))dx^\mu\phi(x) \end{aligned}$$

と書ける。第2項の括弧内を共変微分といい、

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu(x) \quad (15.64)$$

と定義された。つまり微分演算子が共変微分に変化されることが要求される。これによって式 17.5 より

$$\phi_{||}(x+dx) = \phi(x+dx) - D_\mu\phi(x)dx^\mu \quad (15.65)$$

となる。ここでの平行移動の定義に従えば、場の関数を同じ時空座標だけ変化しても平行であるとは限らず。共変微分だけずれることになる。

そこでこのずれの経路依存を見るために図の2つの経路  $C_1, C_2$  による変化を考えてみる。

はじめに経路  $C_1$  については  $dx^\mu$  の移動で平行移動された場は

$$\phi_{||}^{C_1}(x+dx) = \phi(x+dx) - D_\mu\phi(x)dx^\mu \quad (15.66)$$

となる。物理的に重要なのは平行移動された場であり、単に場の関数をそのまま座標移動させたものとは異なる。

次に  $dy^\nu$  の移動を  $\phi(x+dx)$  ではなく、 $\phi_{||}^{C_1}(x+dx)$  に施す。ここで座標  $x+dx+dy$  見た  $\phi^{C_1}(x+dx+dy)$  は  $\phi_{||}^{C_1}(x+dx)$  を座標  $x+dx+dy$  に移動したものだから式 15.66 から座標を  $x \rightarrow x+dy$  に変化させて

$$\phi^{C_1}(x+dx+dy) = \phi(x+dx+dy) - D_\mu\phi(x+dy)dx^\mu \quad (15.67)$$

とする。すると経路  $C_1$  での平行移動後は

$$\begin{aligned}
\phi_{||}^{C1}(x+dx+dy) &= \phi^{C1}(x+dx+dy) - D_\nu dy^\nu \phi_{||}^{C1}(x+dx) \\
&= \phi(x+dx+dy) - D_\mu \phi(x+dy) dx^\mu - D_\nu dy^\nu (\phi(x+dx) - D_\mu dx^\mu \phi(x)) \\
&= \phi(x+dx+dy) - D_\mu \phi(x+dy) dx^\mu - D_\nu \phi(x+dx) dy^\nu + D_\nu D_\mu \phi(x) dx^\mu dy^\nu
\end{aligned}$$

次に経路  $C_2$  については  $dy^\nu$  の移動で

$$\phi_{||}^{C2}(x+dy) = \phi(x+dy) - D_\nu dy^\nu \phi(x) \quad (15.68)$$

さらに  $dx^\mu$  の移動をこれに施す。先と同様に座標を  $x \rightarrow x+dx$  に変化させて

$$\phi^{C2}(x+dx+dy) = \phi(x+dx+dy) - D_\nu \phi(x+dx) dx^\nu \quad (15.69)$$

であるから

$$\begin{aligned}
\phi_{||}^{C2}(x+dy+dx) &= \phi^{C2}(x+dy+dx) - D_\mu dx^\mu \phi_{||}^{C2}(x+dy) \\
&= \phi(x+dy+dx) - D_\nu \phi(x+dx) dx^\nu - D_\mu dx^\mu (\phi(x+dy) - D_\nu dy^\nu \phi(x)) \\
&= \phi(x+dy+dx) - D_\nu \phi(x+dx) dx^\nu - D_\mu \phi(x+dy) dx^\mu + D_\mu D_\nu \phi(x) dx^\mu dy^\nu
\end{aligned}$$

よってこの差は次のように表される。

$$\phi_{||}^{C1}(x+dy+dx) - \phi_{||}^{C2}(x+dx+dy) = -[D_\mu, D_\nu] \phi(x) dx^\mu dy^\nu \quad (15.70)$$

つまり経路の差はその2つの経路のつくる閉じた曲面の面積と共変微分の交換積の積に比例している。交換積そのものも回転を表すのでこれは面積単位の回転したときのねじれを表す。交換積が0であれば位相差がない。

そこでこの差を  $\Delta\phi(x)$  として次のようにおく。15.64 から

$$\Delta\phi(x) \equiv \phi_{||}^{C1}(x+dy+dx) - \phi_{||}^{C2}(x+dx+dy) = igF_{\mu\nu} \phi(x) dx^\mu dy^\nu \quad (15.71)$$

$$\begin{aligned}
F_{\mu\nu} &\equiv \frac{i}{g} [D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu] \\
&= F_{\mu\nu}^A T^A
\end{aligned} \quad (15.72)$$

最後の表現は成分表示である。このゲージ場の強さ (field strength)  $F_{\mu\nu}$  は幾何的には曲率を表している。これは次節でも登場する構造定数  $C_{abc}$  を用いて

$$[T_a, T_b] = iC_{abc} T_c \quad (15.73)$$

という関係から

$$F_{\mu\nu}^A = \partial_\mu A_\nu^A - \partial_\nu A_\mu^A - igC^{ABC} A_\mu^B A_\nu^C \quad (15.74)$$

$U$  は次のように  $\phi(x+dx)$  にも  $\phi_{||}(x+dx)$  にも同じように作用し、

$$\phi'_{||}(x+dx) = U(x+dx) \phi_{||}(x+dx) \quad (15.75)$$

$$\phi'(x+dx) = U(x+dx) \phi(x+dx) \quad (15.76)$$

となる。また

$$\phi(x) = U^\dagger U \phi(x) = U^\dagger \phi'(x) \quad (15.77)$$

だから

$$D'_\mu \phi'(x) = U(x) D_\mu \phi(x) \quad (15.78)$$

すなわち

$$\left( \partial_\mu - ig A'_\mu(x) \right) \phi'(x) = U(x) (\partial_\mu - ig A_\mu(x)) U^\dagger \phi'(x) \quad (15.79)$$

となる。これから共変微分の変換則が求まる。

$$D'_\mu(x) = U(x) D_\mu(x) U^\dagger \quad (15.80)$$

である。 $\phi'(x) = U(x)\phi(x)$  の変換に対しゲージ場の変換則には次のように微分演算子の変換が加わる。

$$A'_\mu(x) = U(x) A_\mu(x) U^\dagger - \frac{i}{g} U(x) \partial_\mu U^\dagger(x) \quad (15.81)$$

これを式 15.79 に代入すると第 2 項があるから

$$\begin{aligned} & \left( \partial_\mu - ig \left( U(x) A_\mu(x) U^\dagger + \frac{i}{g} U(x) \partial_\mu U^\dagger(x) \right) \right) \phi'(x) \\ &= -U(x) ig A_\mu(x) U^\dagger \phi'(x) \\ & \quad - U(x) U^\dagger(x) \partial_\mu \phi'(x) + U(x) \partial_\mu \left( U^\dagger(x) \phi'(x) \right) \\ &= -U(x) ig A_\mu(x) U^\dagger \phi'(x) \\ & \quad - U(x) U^\dagger(x) \partial_\mu \phi'(x) \\ & \quad + U(x) U^\dagger(x) \partial_\mu \phi'(x) \\ & \quad + U(x) (\partial_\mu U^\dagger(x)) \phi'(x) \\ &= U(x) (\partial_\mu - ig A_\mu(x)) U^\dagger \phi'(x) \end{aligned}$$

と求まるが、第 1 項だけでは

$$(\partial_\mu - ig (U(x) A_\mu(x) U^\dagger)) \phi'(x) = U(x) (U^\dagger \partial_\mu - ig A_\mu(x)) U^\dagger \phi'(x)$$

となり式 15.79 を満たさない。この変換を局所ゲージ変換 (local gauge transformation) という。一方で場の強さは  $(\Delta\phi)'(x) = U(x)\Delta\phi(x)$  だから

$$F'_{\mu\nu} = U(x) F_{\mu\nu}(x) U^\dagger(x) \quad (15.82)$$

のように変換する。

### 15.3.3 無限小ゲージ変換

先の節からユニタリ変換から

$$U = \exp\left(i \sum_{a=1}^{N^2-1} \theta_a T_a\right) \equiv \exp(i\theta)$$

と定義できた。

式 16.12 の無限小ゲージ変換  $|\theta(x) \ll 1|$  を考える

$$A_\mu(x) = \sum_{a=1}^{N^2-1} A_\mu^a T_a \quad (15.83)$$

だからゲージ変換の無限小変化を次のように表す。

$$A_\mu^a(x) \rightarrow A_\mu^a(x) + \partial_\mu \theta^a(x) + g \sum_{b,c=1}^{N^2-1} C_{abc} A_\mu^b(x) \theta^c(x) \quad (15.84)$$

と表現できたとする。波動関数のゲージ変換を 15.36 から

$$\phi \rightarrow \phi^U \equiv U\phi \quad (15.85)$$

$$\bar{\phi} \rightarrow \bar{\psi}^U \equiv \bar{\phi}U^\dagger \quad (15.86)$$

$$A \rightarrow A^U \quad (15.87)$$

とおくとディラック場は

$$\begin{aligned} \bar{\phi} (i\gamma^\mu (\partial_\mu - igA_\mu) + m) \phi &= \bar{\phi}^U (i\gamma^\mu (\partial_\mu - igA_\mu^U) + m) \phi^U \\ &= \bar{\phi}U^\dagger (i\gamma^\mu (\partial_\mu - igA_\mu^U) + m) U\phi \\ &= \bar{\phi} (i\gamma^\mu ((U^\dagger U) \partial_\mu + U^\dagger \partial_\mu U - igU^\dagger A_\mu^U U) + U^\dagger m U) \phi \\ &= \bar{\phi} (i\gamma^\mu (\partial_\mu + U^\dagger \partial_\mu U - igU^\dagger A_\mu^U U) + m) \phi \end{aligned}$$

従って

$$-igA_\mu = U^\dagger \partial_\mu U - igU^\dagger A_\mu^U U \quad (15.88)$$

となるが  $UU^\dagger = 1$  の両辺を微分し、

$$\partial_\mu U U^\dagger = -U \partial_\mu U^\dagger \quad (15.89)$$

を代入すると

$$\begin{aligned} igU^\dagger A_\mu^U U &= igA_\mu - \partial_\mu U^\dagger \\ U^\dagger A_\mu^U U &= A_\mu - \frac{1}{ig} \partial_\mu U^\dagger \end{aligned}$$

となるから

$$A_\mu^U(x) \equiv UA_\mu U^\dagger + \frac{i}{g} U \partial_\mu U^\dagger \quad (15.90)$$

となる。これは  $UU^\dagger = 1$  なので位相変換の座標変化率が逆変換になるような場合

$$\partial_\mu U^\dagger = U^{-1} = U^\dagger$$



であればゲージ場の変換は

$$A_\mu^U(x) \equiv U A_\mu U^\dagger + \frac{i}{g} \quad (15.91)$$

である。

さらに1次まで変換をとると

$$U = 1 + ig\theta \quad (15.92)$$

ディラック場は

$$\begin{aligned} \phi^U &\rightarrow \phi^\theta \equiv (1 + ig\theta)\phi \\ \bar{\phi}^U &\rightarrow \bar{\phi}^\theta \equiv \bar{\phi}(1 - ig\theta) \\ A &\rightarrow A^\theta \end{aligned}$$

と変換されるので式 15.90 に代入すると  $\theta^2$  以上を無視し、

$$\begin{aligned} A_\mu^\theta &= U A_\mu U^\dagger + \frac{i}{g} U \partial_\mu U^\dagger \\ &= (1 + ig\theta) A_\mu (1 - ig\theta) + \frac{i}{g} (1 + ig\theta) \partial_\mu (1 - ig\theta) \\ &= (A_\mu + ig\theta A_\mu) (1 - ig\theta) - \left( \frac{i}{g} 1 - \theta \right) ig \partial_\mu \theta \\ &= A_\mu + ig\theta A_\mu - ig A_\mu \theta + \partial_\mu \theta + ig\theta \partial_\mu \theta \\ &= A_\mu + ig(\theta A_\mu - A_\mu \theta) + \partial_\mu \theta \\ &= A_\mu + ig[\theta, A_\mu] + \partial_\mu \theta \\ &= A_\mu + (\partial_\mu - ig A_\mu) \theta - ig\theta A_\mu + ig\theta A_\mu \\ &= A_\mu + D_\mu \theta \end{aligned}$$

ここで  $\theta = \theta^a T_a$  のように展開できる実数であった。

よってこの式の両辺に  $T_a$  を書いてトレースをとり式

$$(T_a)_{bc} \equiv -iC_{abc} \quad (15.93)$$

$$[T_a, T_b] = iC_{abc} T_c \quad (15.94)$$

$$\frac{i}{2} C_{abc} = \text{Tr}([T_a, T_b], T_c) \quad (15.95)$$

を用いると式 15.84 が再現できる。

また次のように共変微分が定義できるので

$$D_\mu \theta = ig[\theta, A_\mu] + \partial_\mu \theta \quad (15.96)$$

両辺に  $T_a$  を書いてトレースをとり式 17.12 より

$$C_{abc} A_\mu^b = (T_b)_{ac} \quad (15.97)$$

だから

$$\begin{aligned}
(D_\mu \theta)^a &= \text{Tr} (ig [\theta, A_\mu] T_a) + \partial_\mu \theta^a \\
&= \partial_\mu \theta^a - g C_{abc} \theta^b A_\mu^c \\
&= \partial_\mu \theta^a + g C_{abc} A_\mu^b \theta^c \\
&= \partial_\mu \theta^a - ig A_\mu^b (T_b)_{ac} \theta^c \\
&= ((\partial_\mu 1 - ig A_\mu^b) \theta)^a
\end{aligned}$$

となる。つまり共変微分が  $\theta$  に作用し不変性が保たれる。共変微分のゲージ変換はここでの表記では

$$D_\mu^U = \partial_\mu 1 - ig A_\mu^U = U D_\mu U^\dagger \quad (15.98)$$

である。よって場の強さは 15.71 より

$$F_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{ig} [D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig [A_\mu, A_\nu] \quad (15.99)$$

可換であれば

$$[D_\mu, D_\nu] = ig (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \quad (15.100)$$

$$-ig F_{\mu\nu}^U = [D_\mu^U, D_\nu^U] = U [D_\mu^U, D_\nu^U] U^\dagger \quad (15.101)$$

なので

$$F_{\mu\nu}^U = U F_{\mu\nu} U^\dagger \quad (15.102)$$

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{ig} [D_\mu^U, D_\nu^U] = \frac{1}{ig} [D_\mu, D_\nu] \quad (15.103)$$

が成り立つ。

#### 15.3.4 局所ゲージ変換

いくつかの局所ゲージ変換の例を具体的にみてみよう。

共変微分の変換則は

$$D'_\mu(x) = U(x) D_\mu(x) U^\dagger(x)$$

だったので Dirac 場 (物質場) に対して

$$\psi'(x) = U(x) \psi(x)$$

で変換され、ゲージ場は式 15.90 から

$$A'_\mu(x) = U(x) D_\mu U^\dagger(x) + \frac{i}{g} U(x) \partial_\mu U^\dagger(x)$$

### 15.3.5 平行移動

古典的な3次元空間で角速度  $\Omega$  は位置ベクトル  $\mathbf{r}$  との関係が

$$\Omega = \mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}}$$

で表される。この時、明らかに

$$\Omega \cdot \mathbf{r} = 0$$

である。また常に

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{r} = 0$$

を満たす  $\mathbf{r}$  ベクトルに直交して変化していくベクトル  $\mathbf{e}$  を考えると

$$\dot{\mathbf{e}} = \Omega \wedge \mathbf{e}$$

も同様に成り立つ。

次に球面上でのベクトルの移動を考えよう。球面上に下図のような反時計周りの閉回路  $C$  を取る。球の中心  $O$  に原点をとり、この経路上に  $\mathbf{r}$  を移動させていく。経路上のある位置  $P$  から単位ベクトル  $\mathbf{e}$  を1周させると図のように  $\mathbf{e}_{\text{initial}}, \mathbf{e}_{\text{final}}$  は同じベクトルにならない。

この2つのベクトルのなす角  $\alpha(C)$  とすると明らかに閉曲線  $C$  が平面上であれば0であるのでこの角度は曲線の描かれる面の曲率と関係する。

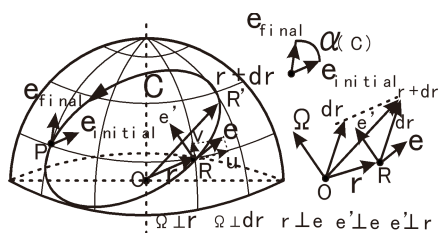


図 15.2: 球面上の閉回路  $C$

そこで3つの直交した動標構を決めるために

$$\mathbf{e}' \equiv \mathbf{r} \wedge \mathbf{e} \quad (15.104)$$

を定義する。図ではわかりにくいがこの  $\mathbf{e}', \mathbf{r}, \mathbf{e}$  は互いに直交している。

さらに  $\mathbf{r}$  に直行する次の複素単位ベクトルを定義する。

$$\psi \equiv \frac{\mathbf{e} + i\mathbf{e}'}{\sqrt{2}} \quad (15.105)$$

よってこのベクトルは次の関係を満たす。

$$|\psi|^2 = \psi^* \psi = 1$$

よって両辺を微分すれば0になるから微分は  $\psi' = d\psi/dr$  として

$$\text{Im}\psi^* \psi' = 0, \text{Im}\psi^* d\psi = 0 \quad (15.106)$$

が成り立つ。  $\text{Im}$  で虚数部分を取るのは  $\psi$  の微分から虚数が出てくるためにであるが、後にこれは物理的な意味を持つ。またベクトル  $\mathbf{e}$  の局所単位標構として図のように  $u(\mathbf{r}), v(\mathbf{r})$  を設定しておく。

球座標をとり、

$$\mathbf{r} = (r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta)$$

と表すと

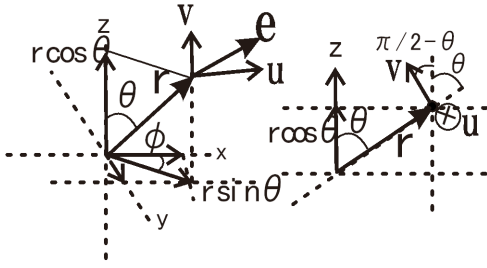


図 15.3:  $\mathbf{r}$  と共に動く標構

$\mathbf{e}$  は  $\mathbf{r}$  を始点とする単位ベクトルであり、 $\mathbf{r}$  と直交することから  $r = 1$  とする。  
 $x$  成分である  $\mathbf{u}$  は  $\mathbf{r}$  の各成分において

$$\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}, \phi \rightarrow \phi + \frac{\pi}{2}$$

で置き換えて、 $\mathbf{v}$  は  $\mathbf{r}$  の各成分において

$$\theta \rightarrow \frac{\pi}{2} - \theta, \phi \rightarrow \phi$$

で置き換えると

$$\mathbf{u} = (-\sin \phi, \cos \phi, 0), \quad \mathbf{v} = (-\cos \theta \cos \phi, -\cos \theta \sin \phi, \sin \theta)$$

となる。したがって

$$\mathbf{e} = \mathbf{u} + \mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\sin \phi - \cos \theta \cos \phi, \cos \phi - \cos \theta \sin \phi, \sin \theta)$$

これは確かに  $\mathbf{r}$  方向の単位ベクトル

$$\mathbf{e}_r = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$$

と直交し、

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}_r = 0$$

が成り立つ。さらに  $\mathbf{e}'$  はこれらと直交する単位ベクトルだから

$$\mathbf{e}' = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} (\sin \phi - \cos \theta \cos \phi, -\cos \theta \sin \phi - \cos \phi, \sin \theta)$$

そこでこの2つのベクトルから次の単位複素ベクトルを定義する。

$$\begin{aligned} \mathbf{n}(\mathbf{r}) &\equiv \frac{\mathbf{u}(\mathbf{r}) + i\mathbf{v}(\mathbf{r})}{\sqrt{2}} & (15.107) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} ((-\sin \phi, \cos \phi, 0) + i(-\cos \theta \cos \phi, -\cos \theta \sin \phi, \sin \theta)) \end{aligned}$$

すると式 15.105 より複素ベクトル  $\psi$  が  $\mathbf{n}$  の倍数になることがわかる。

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{\mathbf{e} + i\mathbf{e}'}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{2} (-\sin \phi - \cos \theta \cos \phi, \cos \phi - \cos \theta \sin \phi, \sin \theta) \\ &\quad + \frac{i}{2} (\sin \phi - \cos \theta \cos \phi, -\cos \phi - \cos \theta \sin \phi, \sin \theta) \\ &= \mathbf{n} \cdot \left( \frac{1-i}{\sqrt{2}} \right) \end{aligned}$$

面白いことに  $\mathbf{n}, \mathbf{e}$  の決め方にかかわらず複素数の共通因子が出てくる。  
そこで一般にこの因子を  $\exp i\alpha$  といけば

$$\psi = \mathbf{n} \exp(-i\alpha) \quad (15.108)$$

と  $\alpha$  を位相に持つ振幅  $\mathbf{n}$  の単振動子をおける。式 15.107 は  $\alpha = \pi/4$  の場合である。  
さらにこの  $\alpha$  は経路  $C$  の関数であり微分し、式 15.106 から  $\text{Im}\psi^* d\psi = 0$  を利用して

$$\text{Im} \{ \mathbf{n}^* \exp(i\alpha) (\mathbf{dn} \exp(-i\alpha) - i d\alpha \mathbf{n} \exp(-i\alpha)) \} = 0$$

$$\mathbf{n}^* d\mathbf{n} = i \mathbf{n}^* \mathbf{n} d\alpha$$

となるからこれから  $\alpha$  の 1 形式をつくると  $i d\alpha = \mathbf{dn} / \mathbf{n}$  とみなせるので  $\mathbf{n}^*$  と  $\mathbf{dn}$  に直交する方向に  $d\alpha$  を考え

$$d\alpha = \text{Im} \left[ \frac{\mathbf{n}^* d\mathbf{n}}{\mathbf{n}^* \mathbf{n}} \right]$$

$$d\alpha = \text{Im} \{ \mathbf{n}^* \wedge d\mathbf{n} \}$$

となりおける。  $\{ \mathbf{n}^* \wedge d\mathbf{n} \}$  が純虚数である必要がある。これから  $\alpha$  は次のような積分であらわすことができる。2 行目で外積が入ったのでストークスの定理が使えて周積分になる

$$\begin{aligned} \alpha(C) &= \oint d\alpha = \text{Im} \left\{ \oint \mathbf{n}^* \wedge d\mathbf{n} \right\} \\ &= \text{Im} \iint_{\partial S=C} \mathbf{dn}^* \cdot \mathbf{dn} \end{aligned} \quad (15.109)$$

面積分から周積分に変化したことが重要でこれにより、1 周してきた時の単位ベクトルの向きの変化がはじめの  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  には依存しないで変わるわけである。これはもちろん球面上でなくて平面上の場合は  $\alpha(C)$  は恒等的に 0 である。式 15.104 が 2 次元では存在しないので複素数を導入する必要がなくなるためである。このように円周上のベクトルの回転を球面上に押し上げた位相が幾何学的位相である。

式 15.107 は  $\alpha = \pi/4$  の場合であったが一般に

$$\mathbf{n}(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{n}'(\mathbf{r}) \exp(i\mu(\mathbf{r}))$$

のように変換しても式 15.109 の値に変化を与えない。式 15.109 を球面上の局所座標  $X_1, X_2$  を用いて書き換えると  $X_1 = \theta_1, X_2 = \phi$  として

$$\alpha(C) = \text{Im} \iint_{\partial S=C} dX_1 dX_2 (\partial_1 \mathbf{n}^* \partial_2 \mathbf{n} - \partial_2 \mathbf{n}^* \partial_1 \mathbf{n})$$

となる。

### 15.3.6 量子論的平行移動

さて、前節の議論を量子論に拡張するために次のブラケット表示を用いる。まず式 15.106 は

$$\text{Im} \langle \psi | d\psi \rangle = 0$$

が成り立つことになる。つまりあるベクトルとその全微分は直交する。  
経路  $C$  により位相が  $\gamma(C)$  で変化したとして式 15.108 から次のように表現する。

$$\langle \psi_{\text{initial}} | \psi_{\text{final}} \rangle = \exp\{i\gamma(C)\}$$

この時の  $\gamma(C)$  を量子論的幾何学位相 (quantum\_geometric\_phase) と呼ぶ。

この位相の詳細を見るために式 15.108 から状態ベクトルは座標  $X$  を用いて前節の方向ベクトル  $\mathbf{n}$  のように位相部分に分離し、

$$|\psi\rangle = |n(X)\rangle \exp(i\gamma) \quad (15.110)$$

ただし、 $X$  は 1 変数であるとする。これから式 15.109 を次のように書き換える。

$$\begin{aligned} \gamma(C) &= \oint d\gamma = -\text{Im} \oint \langle n|dn\rangle \\ &= -\text{Im} \iint_{\partial S=C} \langle dn \wedge dn\rangle \\ &= -\iint_{\partial S=C} V(X) \end{aligned} \quad (15.111)$$

ここで次の 2 形式  $V$  を定義する。

$$V \equiv \text{Im} \langle dn \wedge dn\rangle \quad (15.112)$$

するとこれは経路  $C$  を通過した時の幾何学的位相が与える flux である。

$V$  は前節でみたようにゲージ変換に対して不変である。

$$|n(X)\rangle \rightarrow |n'(X)\rangle \equiv |n(X)\rangle \exp[i\mu(X)] \quad (15.113)$$

位相はエネルギーにも影響をうける。

$$i\hbar |\dot{\Psi}\rangle = \hat{H} |\psi\rangle$$

を満たすものとして

$$\hat{H}(X) |\psi\rangle = E_n(X) |\psi\rangle$$

を考えて断熱的な解を

$$|\Psi\rangle \approx |\psi\rangle \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' E_n(X(t'))\right]$$

のようにおく。これから前節のベクトルのように閉経路  $\gamma(C)$  だけ移動させた時の角度の差を考えると

$$\langle \Psi_{final} | \Psi_{initial} \rangle = \exp[i(\gamma_d + \gamma(C))] \quad (15.114)$$

1 周する周期を  $T$  として

$$\gamma_d = -\frac{i}{\hbar} \int_0^T dt E_n(X(t))$$

これがエネルギーによる位相差となることが考えられる。

これを確かめてみよう。 $\gamma_d$  はエネルギーから来るものだから

$$\gamma_d = -\frac{1}{\hbar} \int_0^T dt \langle \Psi | \hat{H} | \Psi \rangle$$

とおける。問題は幾何学的位相  $\gamma(C)$  をどう決めるかであるが、これまでの実験的な結果から

座標  $X_n$  は第  $n$  番目の固有状態であるようにヒルベルト空間の射影の 1 つと考え、

スピンの数が  $\sigma = 1/2, 1, 3/2$  の各場合について  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$ ,  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  としてハミルトニアンはこの内積の関数と考え、

$$\hat{H} = F(\sigma \cdot \mathbf{X})$$

と書く。幾何学的位相が  $n$  に依存し、経路  $C$  が  $X = 0$  での角度を  $\Omega(C)$  として

$$\gamma_n(C) = -n\Omega(C)$$

とく。これから次のように式 15.110 を書き換えると式 15.114 から

$$|\Psi_{initial}\rangle = \sum_n a_n |n\rangle$$

$$|\Psi_{final}\rangle = \sum_n a_n |n\rangle \exp[i(\gamma_{dn} + \gamma(C))]$$

となる。これからある物理量  $A$  を経路に沿って観測すると終状態の  $H$  と交換しないので対角項と非対角項で分けると次のようになる。

$$\begin{aligned} \langle \hat{A} \rangle &= \langle \Psi_{fin} | \hat{A} | \Psi_{fin} \rangle \\ &= \sum_n |a_n|^2 \langle n | \hat{A} | n \rangle + 2\text{Re} \sum_{m \neq n} a_n^* a_m \langle m | \hat{A} | n \rangle \\ &\times \cos\{|\gamma_{dn} + \gamma_n(C)| - |\gamma_{dm} + \gamma_m(C)|\} \end{aligned}$$

となる。

### 15.3.7 Hannay's angle

幾何学的位相を量子力学に当てはめたのは Hannay であった。N 次元の古典的な場を考え、局所座標を  $q = (q_1, q_2, \dots, q_N)$  と運動量  $(p_1, p_2, \dots, p_n)$  とするとハミルトニアンは

$$H(q, p; X)$$

で特徴づけられる。そこで、古典的な単振動が円運動と対応を広げて、座標  $X$  が N 次元のトーラス上の位相空間に描かれるとする。 $(\theta = \theta_1, \dots, \theta_N)$  Hannay の角度は古典的な 2 形式で表される。 $\langle \cdot \rangle$  で平均を表すとすると

$$\langle \cdot \rangle = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_0^{2\pi} d\theta_1 \dots d\theta_N$$

従って式 15.112 から 2 形式が  $\hbar \rightarrow 0$  として

$$V(X) \rightarrow -\langle dp \wedge dq \rangle / \hbar \quad (15.115)$$

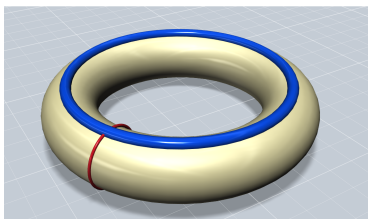


図 15.4:  $dp$  の 1 つが青い輪、 $dq$  の 1 つが赤い輪

のように古典論との近似が成立するとすると  $n$  次元トーラス上で次のように  $2N$  次元の複素数を用いて次のように  $q, p$  を統一して表す。

$$\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_N) \equiv \frac{\mathbf{q} + i\mathbf{p}}{\sqrt{2\hbar}}$$

で表すと式 15.115 から  $\hbar \rightarrow 0$  として式の量子力学的表現は

$$V(X) \rightarrow \text{Im} [\langle dn^* \wedge dn \rangle]$$

と書くことができる。

### 15.3.8 Quantum Geometric Tensor

先に拡大された位相空間上の 2 形式の量子的な位相を  $V(X)$  で定義した。

これからをテンソル空間をつくることができる。

2 階の反対称テンソルとしてヒルベルト空間への射影を考え、

$$V_{ij}(X) = \text{Im} [\langle \partial_i n | \partial_j n \rangle - \langle \partial_j n | \partial_i n \rangle]$$

するとこれは式 15.113 のようなゲージ変換に対して不変である。

このようなゲージ不変のテンソルは他にもつくることができる。さらに一般的なテンソルが次のように定義できる。

$$T_{ij}(X) \equiv \langle \partial_i n | (1 - |n\rangle \langle n|) | \partial_j n \rangle \quad (15.116)$$

これは  $T_{ij} = T_{ji}^*$  を満たすエルミートである。射影  $|n\rangle \langle n|$  はゲージ不変である。

虚数部分の  $T_{ij}$  は  $g_{ij} = \text{Re}[T_{ij}]$  を実対称テンソルとして

$$T_{ij} - \text{Re}[T_{ij}] = iV_{ij}/2$$

$$T_{ij} = g_{ij} + iV_{ij}/2$$

という関係がある。 $V_{ij}$  を量子的にとらえるとそのフラックスが位相を  $\gamma(C)$  を与える。

したがって  $g_{ij}$  は符号を持つだろうと考える。

これは経路に依存する値をとり、相対論的な計量に対応するのでこれを量子論的計量 (quantum\_metric\_tensor) という。

例えば式 15.116 から近い状態  $|1\rangle, |2\rangle$  の距離変化がパラメタ空間において

$$\Delta s_{12}^2 = 1 - |\langle 1|2\rangle|^2$$

と表されるとして両者の状態を近づけると

$$\begin{aligned} ds^2 &= \langle dn | (1 - |n\rangle \langle n|) | dn \rangle = \langle \partial_i n | (1 - |n\rangle \langle n|) | \partial_j n \rangle dX_i dX_j \\ &= T_{ij} dX_i dX_j = g_{ij} dX_i dX_j \end{aligned}$$

### 15.3.9 経路順位相

平行移動の演算子を平行移動子 (parallel transporter) を次で定義する。

$x$  から  $x + dx$  までの変化では

$$U(C_{x+dx,x}) = 1 + igA_\mu(x)dx^\mu \quad (15.117)$$

[16] と改めておくと  $A_\mu(x)$  は Lie 群  $G$  の Lie 代数  $g$  の元である。 $G$  がユニタリ群  $U$  であれば  $A_\mu(x)$  は  $N \times N$  のエルミート行列であるがさらに  $G$  の行列式が 1 であれば群  $SU(N)$  になり、この時  $A_\mu(x)$  は対角和が 0 になる。そこで  $SU(N), U(N), GL(N)$  などの  $N \times N$  のゲージ場を考えると  $P_{x,y}$  を時空間での  $y$  から  $x$  への経路とし平行移動の演算子は



$$U(P_{x,y}) = P \exp \left( \int_y^x dx^\mu A_\mu(x) \right) \quad (15.118)$$

で表す。これは例えば経路が  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$  であれば

$$\begin{aligned} U_{123} &= U(P_{32} \circ P_{21}) = U(P_{32})U(P_{21}) \\ &= \exp \left( \int_1^2 dx^\mu A_\mu(x) \right) \exp \left( \int_2^3 dx^\mu A_\mu(x) \right) \end{aligned}$$

となる。この式は次のように曲線的な経路を微小直線の和として考えることで導くことができる。時空上の微小変化を考えると  $A_\mu$  が一定と考え、直線的な微小変化を  $S$  とすると

$$U(S_{x,y}) = 1 + (x^\mu - y^\mu)A_\mu + O((x - y)^2) \quad (15.119)$$

と表す。またこの場合経路が  $x$  方向への微小変化であるとして次のように置き換える

$$\begin{aligned} U(S_{x+\epsilon,x}) &= \exp \left( \int_x^{x+\epsilon} dx^\mu A_\mu \right) \\ &= 1 + \epsilon^\mu A_\mu + O((\epsilon^\mu)^2) \end{aligned} \quad (15.120)$$

両辺の変化量をとれば

$$dU(S_{x+\epsilon,x}) = \epsilon^\mu A_\mu \quad (15.121)$$

これからゲージ場を次のように定義できる。ただし原点は単位元  $U(0) = 1$  である。

$$A_\mu(x) = \lim_{\epsilon^\mu \rightarrow 0} \frac{U(S_{x+\epsilon,x}) - 1}{\epsilon^\mu} \quad (15.122)$$

従ってこの微小直線変化を足し合わせて  $U(P)$  ができるとすると  $x$  から  $y$  は  $M$  を整数として途中の経路点を  $z_M^\mu$  で表すと指数関数の定義から

$$\begin{aligned} U(P_{y,x}) &= \lim_{M \rightarrow \infty} U(S_{y,g_{M-1}}) \cdots U(S_{g_1,x}) \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} (1 + (y^\mu - z_{M-1}^\mu)A_\mu(x)) \cdots (1 + (z_1^\mu - x^\mu)A_\mu(z_1)) \\ &= P \exp \left( \int_x^y dx^\mu A_\mu(x) \right) \end{aligned} \quad (15.123)$$

となる。exp の前の  $P$  は順序演算子で添え字の符号を順番に並べる働きをする。

開いた経路を  $P$  とすると式 15.123 は下図左のように曲線を直線近似し、足し合わせをしている。

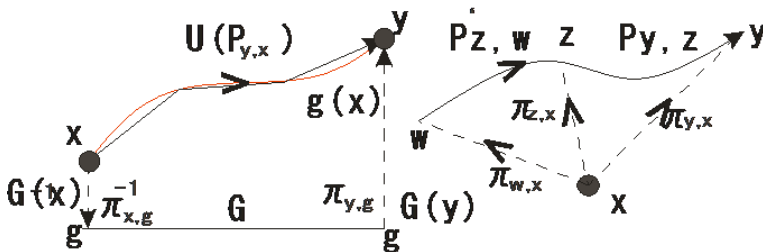


図 15.5: 経路の足し合わせ

この時、局所的なゲージ変換  $g(x)$  のもとで

$$\{U(P_{x,y})\}_{g(x)} = g(x)U(P_{x,y})g(y)^{-1} \quad (15.124)$$

と書くことにする。

ここで1点  $x$  で閉じた経路の位相を  $U_{cl}$  とかく。例えば  $C_{x+\epsilon}$  が閉じた経路であれば

$$S_{x,x+\epsilon} \circ C_{x+\epsilon} \circ S_{x+\epsilon,x} \quad (15.125)$$

と経路が連結されると考え、式 15.120 より

$$U_{cl}(S_{x,x+\epsilon} \circ C_{x+\epsilon} \circ S_{x+\epsilon,x}) = U_{cl}(C_x) + \epsilon^\mu [U_{cl}(C_x), A_\mu] + O(\epsilon^2) \quad (15.126)$$

となる。そこで直線的に見えた経路も図右のようなループが関わっていると考えると  $y$  から  $x$  への経路に  $\pi_{y,g}^{-1}$  と  $\pi_{x,g}$  関与し、群  $G$  によって

$$U(\pi_{y,g}) = G(y) \quad (15.127)$$

と書く。図右のように  $P_{y,x}$  は次のように表され

$$\pi_{y,g}^{-1} \circ P_{y,x} \circ \pi_{x,g} \quad (15.128)$$

1つの閉じたループを表す。従って  $x$  から  $y$  の位相変化は式 15.123 を満たすように

$$\begin{aligned} U(P_{y,x}) &= U(\pi_{y,g})U_{cl}(\pi_{y,g}^{-1} \circ P_{y,x} \circ \pi_{x,g})U(\pi_{x,g}^{-1}) \\ &= G(y)U_{cl}(\pi_{y,g}^{-1} \circ P_{y,x} \circ \pi_{x,g})G(x)^{-1} \\ &= G(y)G(y)^{-1}U(P_{y,x})G(x)G(x)^{-1} \\ &= U(P_{y,x}) \end{aligned}$$

と閉じたループから開いた経路をつくることができる。よって図右のような  $w \rightarrow z \rightarrow y$  の場合は同様に

$$\begin{aligned} U(P_{y,z})U(P'_{z,w}) &= G(y)U_{cl}(\pi_{y,x}^{-1} \circ P_{y,z} \circ \pi_{z,x})G(z)^{-1}G(z)U_{cl}(\pi_{z,x}^{-1} \circ P'_{z,w} \circ \pi_{w,x})G(w)^{-1} \\ &= G(y)U_{cl}(\pi_{y,x}^{-1} \circ P_{y,z} \circ P'_{z,w} \circ \pi_{w,x})G(w)^{-1} \\ &= U(P_{y,z} \circ P'_{z,w}) \end{aligned}$$

を得る。 $U(P)$  は  $G(y)$ ,  $\pi_{y,x}$  を要素にもつ  $U_{cl}(C)$  によって一意に決まるわけではない。 $U'(P)$ ,  $G'(y)$  との間に次のようなゲージ変換があっても  $U(P)$  は変化しない。

$$g(y) = G'(y)U_{cl}(\pi_{y,g}'^{-1} \circ \pi_{y,g})G(y)^{-1} \quad (15.129)$$

$P_{y,x}$  が  $x$  から  $y$  への経路であり、 $C_y$  が  $y$  でのループであるとする。すると

$$P_{y,x}^{-1} \circ C_y \circ P_{y,x} \quad (15.130)$$

この写像は  $x$  でのループであり基点を変換できる。このように  $y$  と  $x$  が入れ替えられる時ホロノミとして同相である。

また次の  $x$  を基点としたループと  $y$  を基点としたループと往復の経路の位相変化は同等である。

$$U_{cl}(P_{y,x}^{-1} \circ C_y \circ P_{y,x}) = U(P_{y,x}^{-1})U_{cl}(C_y)U(P_{y,x}) \quad (15.131)$$

### 15.3.10 Wilson variable

ここで  $C_x$  が  $x$  でのループでの閉じたループであるとし、この閉じた位相を  $U_{cl}(C_x)$  で表す。そしてウィルソン値 (Wilson variable)  $W(C)$  を次で定義する。

$$W(C_x) \equiv \text{tr} U_{cl}(C_x) \quad (15.132)$$

位相の対角和なのでウィルソン値は一般に複素数をとる。式 15.131 からこの値は基点に無関係である。また  $U_{cl}(C_x)$  の値は一意的に  $W(C_x)$  を決めない。一対一の対応ではない。また

$$\overline{W(C \circ C')} = W(C' \circ C) \quad (15.133)$$

である。対称群の性質から  $U_{cl}(C_x)$  は  $N \times N$  の行列であれば  $i_1, \dots, i_{N+1}, j_1, \dots, j_{N+1}$  は 1 から  $N$  までの添え字として

$$0 = \sum_{\pi \in S_{N+1}} (-1)^\pi \sigma_{i_{\pi(1)}, j_1} \cdots \sigma_{i_{\pi(N+1)}, j_{N+1}} \quad (15.134)$$

が成り立つ。ただし  $\pi$  は位数  $N+1$  の対称群  $S_{N+1}$  に含まれる全ての置換  $\sigma$  である。また、 $\pi$  のパリティは  $(-1)^\pi$  で表される。

先の節の単体の境界演算子は閉じたループであれば

$$\partial(p_0 p_1 p_2 \cdots p_n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i (p_0 p_1 p_2 \cdots p_{i-1} p_{i+1} \cdots p_n) = 0$$

のように定義されていた。従ってば 15.134 はいくつかの単体をまとめた  $C_i$  のグループであると考えればよい。

もし  $C_1, \dots, C_{N+1}$  が  $N+1$  個の  $x$  を基点とした閉じたループであれば

$$C_1 + \cdots + C_{N+1} \rightarrow U_{cl}(C_1)_{i_1, j_1} \cdots U_{cl}(C_1)_{i_{N+1}, j_{N+1}} \quad (15.135)$$

と置き換えれば 15.134 は次のように応用できる。

$$0 = \sum_{\pi \in S_{N+1}} (-1)^\pi W_\pi(C_1, \dots, C_{N+1}) \quad (15.136)$$

ただし、 $\pi$  が例えば次のようなサイクルに分解できれば

$$\pi = (a_1 \cdots a_A)(b_1 \cdots b_B) \cdots (z_1 \cdots z_z) \quad (15.137)$$

$W_\pi$  は次のように分解ができることになる。

$$W_\pi(C_1, \dots, C_{N+1}) = W(C_{a_1} \circ \cdots \circ C_{a_A}) W(C_{b_1} \circ \cdots \circ C_{b_B}) \cdots W(C_{z_1} \circ \cdots \circ C_{z_z}) \quad (15.138)$$

例えば  $N=1$  で可換な場合は次のように表される。

$$0 = W_{(1)(2)}(C_1, C_2) - W_{(12)}(C_1, C_2) = W(C_1)W(C_2) - W(C_1 \circ C_2) \quad (15.139)$$

例えば  $N=2$  で可換な場合は次のように表される。

$$\begin{aligned} 0 &= W_{(1)(2)(3)}(C_1, C_2, C_3) - W_{(12)(3)}(C_1, C_2, C_3) - W_{(13)(2)}(C_1, C_2, C_3) - W_{(23)(1)}(C_1, C_2, C_3) \\ &\quad + W_{(123)}(C_1, C_2, C_3) + W_{(132)}(C_1, C_2, C_3) \\ &= W(C_1)W(C_2)W(C_3) - W(C_1 \circ C_2)W(C_3) - W(C_1 \circ C_2)W(C_3) - W(C_2 \circ C_3)W(C_1) \\ &\quad + W(C_1 \circ C_2 \circ C_3) + W(C_1 \circ C_3 \circ C_2) \end{aligned}$$

次にホモロジーの考えを応用し、ウィルソンループを考えてみる。

$\alpha$  をスカラーとして

$$W(\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2) = \alpha_1 W(C_1) + \alpha_2 W(C_2) \quad (15.140)$$

$W$  は無限のヒルベルト空間にあると考えるが  $U_{cl}$  は有限の次元を持つ行列である。そこで空間内の曲線を同一視する必要がある。これを次のように曲線  $Z$  で連結されれば同型であると考ええる。

$$C \sim C' \quad \text{if } W(C \circ Z) = W(C' \circ Z) \quad (15.141)$$

### 15.3.11 位相変換

$dx, dy$  で張られる微少面積の平行四辺形を移動した場合は

$$\begin{aligned} U(C_{xx}) &= U(C_{y,y+dy}) \circ U(C_{x,x+dx}) \circ U(C_{y+dy,y}) \circ U(C_{x+dx,x}) \\ &= (1 + igA_\mu(x)dx^\mu) (1 + igA_\nu(y)dy^\nu) (1 - igA_\mu(x+dx)dx^\mu) (1 - igA_\nu(y+dy)dy^\nu) \\ &= (1 + igA_\mu(x)dx^\mu + igA_\nu(y)dy^\nu - g^2 A_\mu(x)A_\nu(y)dx^\mu dy^\nu) \\ &\quad \times (1 - igA_\mu(x+dx)dx^\mu - igA_\nu(y+dy)dy^\nu - g^2 A_\mu(x+dx)A_\nu(y+dy)dx^\mu dy^\nu) \\ &= 1 + ig(A_\mu(x) - A_\mu(x+dx))dx^\mu + ig(A_\nu(y) - A_\nu(y+dy))dy^\nu \\ &\quad + g^2(A_\mu(x)A_\mu(x+dx))dx^\mu dx^\mu + g^2(A_\nu(y)A_\nu(y+dy))dx^\nu dx^\nu \\ &\quad + g^2(A_\mu(x)A_\nu(y+dy) - A_\mu(x)A_\nu(y))dx^\mu dy^\nu \\ &\quad + g^2(A_\nu(y)A_\mu(x+dx) - A_\mu(x+dx)A_\nu(y+dy))dy^\nu dx^\mu \\ &\quad + ig^3(A_\mu(x)A_\nu(y)A_\mu(x+dx) - A_\mu(x)A_\mu(x+dx)A_\nu(y+dy))dx^\mu dx^\mu dy^\nu \\ &\quad + ig^3(A_\mu(x)A_\nu(y)A_\nu(y+dy) - A_\nu(y)A_\mu(x+dx)A_\nu(y+dy))dx^\mu dy^\nu dy^\nu \\ &\quad + g^4(A_\mu(x)A_\nu(y)A_\mu(x+dx)A_\nu(y+dy))dx^\mu dy^\nu dx^\mu dy^\nu \end{aligned}$$

上の  $g$  について1次のみを見ると

$$\begin{aligned} U(C_{xx}) &= 1 + ig(A_\mu(x) - A_\mu(x+dx))dx^\mu + ig(A_\nu(y) - A_\nu(y+dy))dy^\nu \\ &= 1 + ig(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)dx^\mu dy^\nu \end{aligned}$$

結局平行移動で元に戻れば

$$U(C_{xx}) = 1 + igF_{\mu\nu}(x)dx^\mu dy^\nu \quad (15.142)$$

でありこれは式の拡張である。これは恒等演算子ではなく、ゲージ場の強さと経路のつくる面積に依存する。曲線  $C$  は連続であるので  $t$  でパラメトライズでき、曲線上の任意の点を  $x = z^\mu$  とすると

$$z^\mu = C^\mu(t) \quad t \in [0, s] \quad (15.143)$$

と表現できる。終点  $x^\mu(s)$  を変化させたとき  $U(C_s)$  は次の微分方程式に従う。

$$\frac{d}{dt}U(C_s) = igA_\mu(x)\frac{dx^\mu}{ds}U(C_s) \quad (15.144)$$

この式は初期条件として  $U(C_0) = 1$  を与えると Dyson の公式に従い次のように順序演算子  $P$  を用いて解くことができ、

$$\begin{aligned}
U(C_s) &= P \exp \left\{ ig \int_0^s dt \frac{dx^\mu}{dt} A_\mu(x(t)) \right\} \\
&\equiv P \exp \left\{ ig \int_{C_s} dx^\mu A_\mu(x) \right\}
\end{aligned}$$

特に可換であれば順序演算子は必要なくなる。

$$U(C) = \exp \left\{ ig \int_{C_s} dx^\mu A_\mu(x) \right\}$$

また  $C$  が閉じた曲線であれば Stokes の定理から  $S$  を  $C$  を境界とする面  $C = \partial S$  として

$$U(C) = \exp \left\{ ig \oint_{C_s} dx^\mu A_\mu(x) \right\} = \exp \left\{ ig \frac{1}{2} \int_S dS^{\mu\nu} F_{\mu\nu}(x) \right\} \quad (15.145)$$

特にこの位相因子はアハラノフ-ボーム位相因子 (Aharonov-Bohm\_Phase\_Factor) という。共変微分も式から次のように平行移動演算子で置き換えることができる。

$$D_\mu \phi(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\phi(x + \Delta x) - U(C_{x+\Delta x, x}) \phi(x)}{\Delta x} \quad (15.146)$$

非可換の場合は粒子の移動が経路に応じて波動関数の位相に寄与することがわかる。

平行移動の演算子  $U(C_s)$  は経路の端点  $s$  のみに依存している。

局所ゲージ変換のもとで一般的なループは

$$U(C_s) \rightarrow U'(C_s) = U(x_\mu(s)) U(C_s) U^\dagger(x_\mu(0)) \quad (15.147)$$

もし、経路が閉じたループであれば  $U(C)$  のトレースはループの始点に関係なくゲージ不変になる。

$$W \equiv Tr(U(C)) \quad (15.148)$$

これをウイルソンループ演算子 (Wilson\_loop\_operator) という。

### 15.3.12 ゲージ対称性 [38]

トポロジカルなゲージ論で Yang-Mills 理論には  $N = 2$  のねじれた超対称性があることがわかった。

平坦な空間ではねじれはラグランジアンに変化を与えない。

そこで次のような WilsonLoop の作用を定義する。

$$W_R(C) = Tr P \exp \oint_C (A_\mu dx^\mu + i\Phi_0^E ds)$$

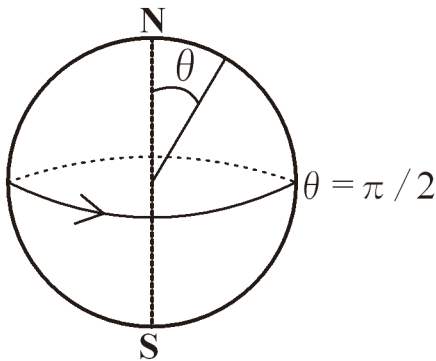


図 15.6:  $S^4$  上の WilsonLoop

## 16 Yang-Mills 場 [106]

第 4 部で微分幾何について学び、第 5 部で主束上で Riemannian 幾何では Christoffel の接続を古典的に見てきた。

さらに第 6 部ではホモロジーや結び目という位相場について学んだ。

これらをバンドルのフレーム  $B(M)$  に応用し、Yang-Mills 場という。物理上では非常に重要になる理論をこれから学ぶ。

Yang-Mills 場は 1954 年に C.N.Yang と R.L.Mills によって初めて定式化された。

### 16.1 陽子、中性子場 [109]

陽子と中性子は共にスピン 1/2 を持つフェルミオンである。

そこでアイソスピンと呼ばれる 2 次元内部空間を持つベクトルを次で定義する。

$$N(x) = \begin{pmatrix} p(x) \\ q(x) \end{pmatrix}$$

この  $N(x)$  核子場という。

### 16.2 混合場 [106]

非アーベル群に基づくゲージ場である。素粒子が複数ある場合について発展させてみる。

素粒子の組が  $n$  ある場合についてこの多重項を次のように区別する。

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix} \quad (16.1)$$

$U \in SU(N)$  のうち独立な要素の数は  $N^2 - 1$  なので  $N \times N$  行列  $L_a (a = 1, 2, \dots, N^2 - 1)$  と実数のパラメータ  $\lambda$  を用いて Lie 群は次のようにかける。

$$U = \exp(-i\lambda_a L_a) \quad (16.2)$$

ここで  $L_a$  を基本表現の生成子という。

交換積もまた、同じ Lie 群に属することから

次の交換関係を満たす。

$$[L_a, L_b] = iC_{abc}L_c \quad (16.3)$$

ここで  $C_{abc}$  は反交換の実定数で構造定数とよばれる。単純 Lie 群であれば  $K$  を定数として

$$\text{Tr}(L_a, L_b) = K\delta_{ab} \quad (16.4)$$

この構造定数を用いて次のような  $N^2 - 1$  個の  $(N^2 - 1) \times (N^2 - 1)$  行列の組  $T_a$  を次のようにつくると

$$(T_a)_{bc} \equiv -iC_{abc} \quad (16.5)$$

これは先と同じ交換関係を満たす。

$$[T_a, T_b] = iC_{abc}T_c \quad (16.6)$$

$$\text{Tr}(T_a, T_b) = \frac{1}{2}\delta_{ab} \quad (16.7)$$

さらにこれから

$$\frac{i}{2}C_{abc} = \text{Tr}([T_a, T_b], T_c) \quad (16.8)$$

が成り立つ。

従って  $(N^2 - 1) \times (N^2 - 1)$  行列  $\exp(-i\lambda_a T_a)$  は群  $SU(N)$  の随伴表現になる。

行列要素は実数になり、実ベクトルに作用する。例えば  $SU(2)$  の場合基本表現は  $2^2 - 1 = 3$  個あり構造定数は

$$C_{ijk} = \epsilon_{ijk} \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \quad (16.9)$$

である。

基本表現の生成子は Pauli 行列の半分になるので固有値が  $1/2$  となり半整数表現と呼ばれる。

これに対し、随伴表現の生成子の固有値は整数になる。

先と同様に座標  $x$  に依存した局所ゲージ変換をユニタリ行列を  $U$  として次のように表す。

$$\phi(x) \rightarrow \phi' = U(x)\phi(x)$$

$$U(x) = \exp(-i\omega_a(x)L_a)$$

また、生成子を用いてゲージ場と共変微分を次のように定義する。

$$A^\mu = A_a^\mu L_a \quad (16.10)$$

$$D^\mu = \partial^\mu + igA^\mu(x) \quad (16.11)$$

$g$  はゲージ場と物質場の結合定数である。場の強さを表すとみてよい。

局所ゲージ変換によりゲージ場は  $(D^\mu\phi)^\dagger(D_\mu\phi)$  を不変にするために次のように変換される。

$$A^\mu \rightarrow U(x)A^\mu(x)U(x)^{-1} - \frac{i}{g}U(x)(\partial^\mu U(x)^{-1}) \quad (16.12)$$

ゲージ場自身のラグランジアン密度は  $U(1)$  に従が、次のようにおく。

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{4}F_a^{\mu\nu}F_{a\mu\nu} \quad (16.13)$$

$$\begin{aligned} F_a^{\mu\nu}(x) &= \partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x) - gC_{abc}A_b^\mu(x)A_c^\nu(x) \\ &= \partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x) + ig[A^\mu(x), A^\nu(x)] \end{aligned} \quad (16.14)$$

ただし、

$$A^\mu = A_a^\mu L_a, \quad F^{\mu\nu}(x) = F_a^{\mu\nu}(x)L_a \quad (16.15)$$

このように  $N$  個のクラインゴルドン場とゲージ場の共存系のラグランジアン密度は

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_K = (D^\mu\phi)^\dagger(D_\mu\phi) - m^2\phi^\dagger\phi - \frac{1}{4}F_a^{\mu\nu}F_{a\mu\nu} \\ &= (\partial^\mu\phi + igA_a^\mu L_a\phi)^\dagger(\partial_\mu\phi + igA_{\mu a}L_a\phi) - m^2\phi^\dagger\phi - \frac{1}{4}F_a^{\mu\nu}F_{a\mu\nu} \end{aligned} \quad (16.16)$$

のようにおける。  $\mathcal{L}$  は  $\partial^\mu \phi, \phi, \partial^\mu A^\nu, A^\nu$  の関数になる。

そこでの  $A_a^\mu$  に対するラグランジュの方程式を求めてみると  $A_{\mu a} = g_{\mu\nu} A_a^\nu$  だから

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_a^\mu} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_a^\mu)} &= g_{\mu\nu} (D^\nu \phi)^\dagger i g L_a \phi - i g L_a \phi^\dagger (g_{\mu\nu} D^\nu \phi) - g C_{abc} g_{\mu\nu} A_{b\mu}(x) F_a^{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \partial_\mu F_a^{\mu\nu} \\ &= 0 \end{aligned}$$

よって  $g_{\mu\nu}$  を消去し、4元電流密度に対応して

$$j_a^\nu \equiv -i g ((D^\nu \phi)^\dagger L_a \phi - L_a \phi^\dagger (D^\nu \phi)) \quad (16.17)$$

と定義すると、

$$\partial_\mu F_a^{\mu\nu} - g C_{abc} A_{b\mu}(x) F_a^{\mu\nu} = j_a^\nu \quad (16.18)$$

がゲージ粒子の従う方程式となる。

また、式 16.11 を式 16.17 に代入すると

次のように結合定数  $g$  についての 1 次の物質場との項と 2 次ゲージ場との相互作用の項に分けて表現できる。

$$j_a^\nu = -i g (\phi^\dagger (\partial^\nu L_a - L_a \partial^\nu) \phi) - g^2 A_b^\nu \phi^\dagger \{L_a, L_b\} \phi \quad (16.19)$$

基本表現の生成子  $L_a$  は式 16.3 のように交換関係を満たすが、ゲージ場との作用には Fermion のように反交換関係が現れる。

$U(1)$  の電磁場と同様にここでの電場、磁場も次のように定義できる。

$$E^k \equiv F^{k0}, \quad B^k \equiv \frac{1}{2} \epsilon^{kij} F^{ij} \quad (16.20)$$

これから式 16.14 より電磁場の場合より余分な項が加わり、

$$\mathbf{E}_a = -\nabla A_a^0 - \frac{\partial \mathbf{A}_a}{\partial t} - g C_{abc} \mathbf{A}_b A_c^0 \quad (16.21)$$

$$\mathbf{B}_a = -\nabla \times \mathbf{A}_a + \frac{1}{2} g C_{abc} \mathbf{A}_b \times \mathbf{A}_c \quad (16.22)$$

となる。これから磁場の発散をとると、

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_a = \frac{1}{2} g C_{abc} \nabla \cdot (\mathbf{A}_b \times \mathbf{A}_c) \quad (16.23)$$

となり  $\mathbf{A}_b, \mathbf{A}_c$  は平行ではないので発散は 0 ではなく、磁場の湧き出しであるモノポールがあることになる。またこの時のハミルトニアンは

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x A^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^0 A^\mu)} + \int d^3x \phi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^0 \phi)} + \int d^3x \phi^\dagger \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^0 \phi^\dagger)} - \int d^3x \mathcal{L} \\ &= \int d^3x \left( \frac{1}{2} (\mathbf{B}_a^2 + \mathbf{E}_a^2) + \pi^\dagger \pi + (\mathbf{D}\phi)^\dagger (\mathbf{D}\phi) \right) \end{aligned} \quad (16.24)$$

となる。



### 16.3 複素代数場

前節で紹介した複素解析空間  $\mathbb{C}$  上に Yang-Mills 場を構成する。

準備として  $\mathbb{C}$  上に代数空間  $(X, \mathcal{A})$  を考える。

$X$  は基底空間、で  $\mathcal{A}$  束は複素代数場  $\mathbb{C}$  algebraized\_space の作る束で、基底  $X$  のつくる空間上で反交換代数を満たすとする。

同じ  $\mathcal{A}$  束は一般化座標の組にあるとし、 $\mathbb{C} \subset \mathcal{A}$  として

$$\mathbb{C} \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{A}$$

を満たす写像  $\epsilon$  がある。最初の  $\mathbb{C}$  の要素を次のように決める。

$$\epsilon(\lambda) := \lambda \cdot \mathbf{1}_{\mathcal{A}}$$

ここで  $\mathbf{1}_{\mathcal{A}}$  は  $\mathcal{A}$  の単位セクションである。  $\lambda$  は任意の複素数である。一方で基底  $X$  上で  $\mathcal{A}$  モジュール  $\epsilon$  を考え、

次のような演算子を考える。

$$\partial : \mathcal{A} \rightarrow \epsilon$$

$\epsilon$  は第 4 部で扱ったベクトル束の複素拡張版で次のような 2 つの性質を持っていることがわかる。

- $\partial$  は  $\mathbb{C}$  線形である。
- $\partial$  はライプニッツ則を満たす。

従って微分則の次の関係を満たす。

$$\partial(s \cdot t) = s \cdot \partial(t) + t \cdot \partial(s)$$

次のように初期設定をしておく。

$$\epsilon \equiv \Omega$$

すぐ後で次のように番号を振る。

$$\Omega \equiv \Omega^1$$

よって、ここでの状態は次の 3 つの量で特徴できる。

$$(\mathcal{A}, \partial, \Omega)$$

次に  $n$  次の外微分演算子  $d$  を正の整数をとるものとして

$$(d^n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$$

とし、特に 0 次元の場合を

$$\partial \equiv d^0$$

とする。したがって第 2 部の微分 p 形式から

$$d^n : \Omega^n \rightarrow \Omega^{n+1}, n \in \mathbb{Z}$$

とすると、 $\Omega$  次のように外微分形式でかける。

$$\Omega^n := \bigwedge_{i=1}^n (\Omega^1)^i \equiv \Omega^1 \wedge \cdots \wedge \Omega^1, n \in \mathbb{N}$$

ただし、

$$\Omega^0 := \mathcal{A}$$

である。一般には次の微分則が成り立つ。

$$d^{p+q}(s \wedge t) = d^p(s) \wedge t + (-1)^p s \wedge d^q(t)$$

ただし、 $U$  を  $X$  の開集合として  $U \subseteq X, p, q$  は正の整数として

$$s \in \Omega^p(U), t \in \Omega^q(U)$$

$$d^1 \circ d^0 \equiv d^1 \circ \partial = 0$$

よって全ての  $p \geq 2$  について

$$d^{p+1} \circ d^p \equiv 0$$

であり、よく知られた複体の条件を満たし、

$$d \circ d = dd = d^2 = 0$$

が成り立つ。また、前節の deRham の複体を用いて写像  $\epsilon, d^0$  を

$$\mathbb{C} \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{A} \equiv \Omega^0 \xrightarrow{d^0 \equiv \partial} \Omega^1$$

として、 $\mathbb{C}$  ベクトル場のチェインが次のように連続する。

$$0 \rightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{\epsilon} \Omega^0 \xrightarrow{\partial} \Omega^1 \xrightarrow{d^1} \dots \Omega^n \xrightarrow{d^n} \Omega^{n+1} \rightarrow \dots$$

重要な関係が

$$\partial \circ \epsilon = 0$$

である。古典論では

$$\partial_{\mathbb{C}} = 0$$

であるが、式の  $\mathbb{C}_X$  複体は  $X$  が  $\mathbb{C}$  代数空間と関係して、鎖複体をつくる。 $\mathbb{Z}_+$  を正の整数として

$$(\Omega^*, d) \equiv \{(\Omega^n, d^n)\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$$

## 16.4 インスタントン [12]

後に扱う経路積分の考え方は Euclid 計量を持つ空間でのみ定義できる。このときは **Euclid** 的作用の極小値を求め、そのまわりに量子的揺らぎを考慮して計算する。この極小値をインスタントンという。

物理的に擬粒子として扱われている。

そこで  $\mathbb{R}^4$  上で  $SU(2)$  を考え、Yang-Mills 理論に応用してみる。この場合の主束は  $P(\mathbb{R}^4, SU(2))$  である。 $\mathbb{R}^4$  は可縮だから場の強さをあらわす。ゲージポテンシャルは

$$\mathcal{A} = A_\mu^\alpha T_\alpha dx^\mu$$

と成分表示する。ここで  $T_\alpha \equiv \sigma_\alpha / 2i$  は前部であつかったリー環  $\mathfrak{su}(2)$  をつくるので構造定数  $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$  を用いて

$$[T_\alpha, T_\beta] = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} T_\gamma$$

となり、場の強さは

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &\equiv d\mathcal{A} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} = \frac{1}{2} \mathcal{F}_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \\ \mathcal{F}_{\mu\nu} &= \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu + [\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu] = F_{\mu\nu}^\alpha T_\alpha \\ F_{\mu\nu}^\alpha &= \partial_\mu A_{\nu\alpha} - \partial_\nu A_{\mu\alpha} + \epsilon_{\alpha\beta\gamma} A_{\mu\beta} A_{\nu\gamma} \end{aligned} \tag{16.25}$$

であり Bianchi 恒等式は第 5 部の接続形式から

$$D\mathcal{F} = d\mathcal{F} + [\mathcal{A}, \mathcal{F}] = 0$$

で表すことが出来る。Yang-Mills 作用は Euclid 的計量にするために  $*$  は Hodge 作用を表す。

$$\mathcal{S}_{YM}[\mathcal{A}] = \frac{1}{4} \int_M \text{tr}(\mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu}) = -\frac{1}{2} \int_M \text{tr}(\mathcal{F} \wedge *\mathcal{F})$$

とかける。また、共変微分も

$$D_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} = 0, \quad D*\mathcal{F} = 0$$

と書くことができる。このときインスタントンに対応する場の強さは自己双対 (反自己双対) の形になり

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \pm *\mathcal{F}_{\mu\nu}$$

という関係になるので作用は自己双対 (反自己双対) で

$$\mathcal{S}_{YM}[\mathcal{A}] = -\frac{1}{2} \int_M \text{tr}(\mathcal{F} \wedge *\mathcal{F}) = \mp \frac{1}{2} \int_M \text{tr}(\mathcal{F} \wedge \mathcal{F})$$

という関係がある。インスタントンの位相的な関係は  $|x| \rightarrow L$  の時、次の図から作用は次の変化の元で有限になる。

$$A_\mu(x) \rightarrow g(x)^{-1} \partial_\mu g(x)$$

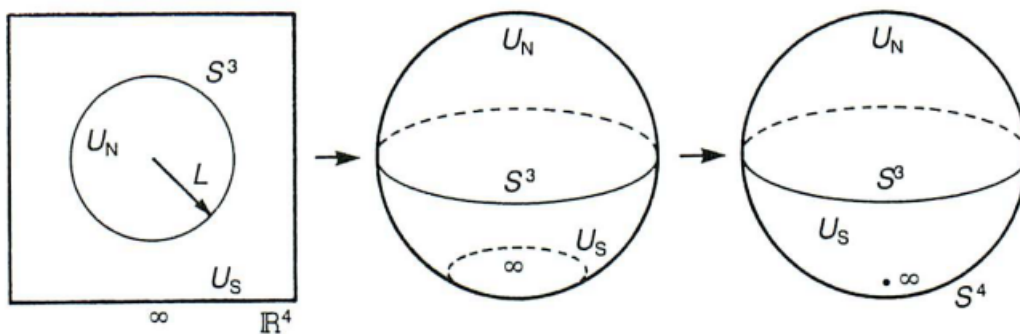


図 16.1: [12] より:  $\mathbb{R}^4$  の  $S^4$  への 1 点コンパクト化を表す

式  $|x| = L$  は 3 次元球面を表す。これに図のように無限遠  $\infty$  を加える。写像  $g$  を  $g: S^3 \rightarrow SU(2)$  とすると前部からホモロジーは

$$\pi_3(SU(2)) \simeq \mathbb{Z}$$

で分類できた。  $\mathbb{R}^4$  に無限遠を加えて  $S^4$  の南極が無限遠点、北極が原点になるようにコンパクト化する。次の 2 つのチャートを用意する。

$$U_N = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid |x| \leq L + \epsilon\}$$

$$U_S = \{x \in \mathbb{R}^4 | |x| \geq L - \epsilon\}$$

ここでは振れは無いとして  $U_S$  上のゲージポテンシャルは

$$\mathcal{A}_S(x) \equiv 0, \quad x \in U_S$$

となるように選ぶ。この時のファイバー束に関する情報は赤道である  $S^3 = U_N \cap U_S$  上の  $\mathcal{A}_N$  が持つ。

$\mathcal{A}_S \equiv 0$  だから  $x \in U_N \cap U_S$  として変換関数  $t_{NS}$  を用いて第 4 部の接続の式から変換関数の変化のみに依存し、

$$\mathcal{A}_N = t_{NS}^{-1} \mathcal{A}_S t_{NS} + t_{NS}^{-1} dt_{NS} = t_{NS}^{-1} dt_{NS}$$

となる。ここで先の写像  $g: S^3 \rightarrow SU(2)$  は変換関数  $t_{NS}$  と同一視できる。これから写像  $g$  を分類するのは  $t_{NS}$  を分類することと同じで

$$\pi_3(SU(2)) = \mathbb{Z}$$

により分類できる。

ここで写像  $g: S^3 \rightarrow SU(2)$  の写像度を求めてみよう。第 6 部の写像度から

$n$  次元の向きづけられた閉じた多様体を  $M, N$  とする。  $M$  から  $N$  の中へのなめらかな写像

$$\psi: M \rightarrow N \tag{16.26}$$

があると  $N$  上の  $n$  形式  $\omega$  を  $M$  上の  $n$  形式  $\psi^*\omega$  に引き戻す写像を次のように定義する。

$$\psi^*: H^n(N) \rightarrow H^n(M) \tag{16.27}$$

この時、 $\int_N \omega$  と  $\int_M \psi^*\omega$  の積分を考える。  $\psi$  は微分同相 (1 対 1 で逆も  $C^\infty$  級) とは限らないから次のようにおく。

$$\int_M \psi^*\omega = \deg(\psi) \int_N \omega \tag{16.28}$$

この時の実数  $\deg(\psi)$  を写像次数 (degree of mapping) という。

写像次数  $\deg(\psi)$  は  $M$  から  $N$  への写像  $\psi$  によって  $N$  が何回覆われるかの実効回数を表した。

そこで Coleman の処方により

$$t^4 \mathbf{1} + t^i \sigma_i \in SU(2) \leftrightarrow t^2 + (t^4)^2 = 1$$

により  $SU(2) \simeq S^3$  が成り立つので  $g: S^3 \rightarrow SU(2)$  の写像は

$$\pi_3(SU(2)) \simeq \pi_3(S^3) \simeq \mathbb{Z}$$

で分類できる。少なくとも定数写像として

$$g_0: x \in S^3 \rightarrow e \in SU(2) \tag{16.29}$$

また恒等写像  $S^3 \rightarrow S^3$  として

$$g_1: x \rightarrow \frac{1}{r} [x^4 \mathbf{1} + x^i \sigma_i], \quad r^2 = \mathbf{x}^2 + (x^4)^2 \tag{16.30}$$

は  $\pi_3(SU(2))$  の写像度 1 の類を決めている。また、

$$g_n \equiv (g_1)^n: x \rightarrow r^{-n} [x^4 \mathbf{1} + x^i \sigma_i]^n$$

は  $\pi_3(SU(2))$  の写像度  $n$  の類を決めている

例えば磁気モノポールの強さは  $\mathcal{F} = dA$  を球面  $S^2$  上で積分すれば求められた。類似の関係がインスタントン数にも存在する。

インスタントンは  $S^4$  で定義されるので  $S^4$  上で 4 形式を求めておく。  $\mathcal{F}$  が 2 形式だから自然な 4 形式は

$$\mathcal{F} \wedge \mathcal{F}$$

である。そこで **Bianchi 恒等式**

$$d\mathcal{F} + [A, \mathcal{F}] = 0$$

を用いて

$$\begin{aligned} d(\text{tr}(\mathcal{F} \wedge \mathcal{F})) &= \text{tr}(d\mathcal{F} \wedge \mathcal{F} + \mathcal{F} \wedge d\mathcal{F}) \\ &= \text{tr}(-[A, \mathcal{F}] \wedge \mathcal{F} - \mathcal{F} \wedge [A, \mathcal{F}]) = 0 \end{aligned}$$

となる。**Poincaré** の補題から閉形式  $\text{tr}(\mathcal{F} \wedge \mathcal{F})$  は局所的に完全で

$$\text{tr}(\mathcal{F} \wedge \mathcal{F}) = dK \tag{16.31}$$

とおける。ここで  $K$  は局所 3 形式である。これから **dr\_Rham** コホモロジを用いて

$$\text{tr}(\mathcal{F} \wedge \mathcal{F}) \in H^4(S^4)$$

である。第 6 部の複素ベクトルでチャーン類を紹介したが、 $\text{tr}(\mathcal{F} \wedge \mathcal{F})$  は第 2Chern 指標で  $K$  はその Chern\_Simon 形式になっている。

ここで式 16.31 を証明してみよう。局所 3 形式の  $K$  は具体的に

$$K = \text{tr} \left[ AdA + \frac{2}{3} \mathcal{A}^3 \right]$$

で与えられる。これは  $\wedge$  記号を省略してかくと式 16.25 から  $dA = \mathcal{F} - \mathcal{A}^2$  とおけるので

$$\begin{aligned} dK &= \text{tr} \left[ (dA)^2 + \frac{2}{3} (dA \wedge \mathcal{A}^2 - \mathcal{A} \wedge dA \wedge \mathcal{A} + \mathcal{A}^2 \wedge dA) \right] \\ &= \text{tr} \left[ (\mathcal{F} - \mathcal{A}^2) (\mathcal{F} - \mathcal{A}^2) + \frac{2}{3} \{ (\mathcal{F} - \mathcal{A}^2) \mathcal{A}^2 - \mathcal{A} (\mathcal{F} - \mathcal{A}^2) \mathcal{A} + \mathcal{A}^2 (\mathcal{F} - \mathcal{A}^2) \} \right] \\ &= \text{tr} \left[ \mathcal{F}^2 - \mathcal{A}^2 \mathcal{F} - \mathcal{F} \mathcal{A}^2 + \mathcal{A}^4 + \frac{2}{3} (\mathcal{F} \mathcal{A}^2 - \mathcal{A} \mathcal{F} \mathcal{A} + \mathcal{A}^2 \mathcal{F} - \mathcal{A}^2) \right] \end{aligned}$$

ここで対角和については

$$\text{tr} \mathcal{A}^4 = 0, \quad \text{tr} \mathcal{A} \mathcal{F} \mathcal{A} = -\text{tr} \mathcal{A}^2 \mathcal{F} = -\text{tr} \mathcal{F} \mathcal{A}^2$$

が成り立つ。例えば最後の関係は成分で書くと

$$\begin{aligned} \text{tr} \mathcal{A} \mathcal{F} \mathcal{A} &= \frac{1}{2} \text{tr} (\mathcal{A}_\kappa \mathcal{F}_{\lambda\mu} \mathcal{A}_\nu dx^\kappa \wedge dx^\lambda \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu) \\ &= -\frac{1}{2} \text{tr} (\mathcal{A}_\nu \mathcal{A}_\kappa \mathcal{F}_{\lambda\mu} dx^\nu \wedge dx^\kappa \wedge dx^\lambda \wedge dx^\mu) \\ &= -\text{tr} (\mathcal{A}^2 \mathcal{F}) \end{aligned}$$

である。よって

$$\begin{aligned} dK &= \text{tr} \left[ \mathcal{F}^2 - \mathcal{A}^2 \mathcal{F} - \mathcal{F} \mathcal{A}^2 + \mathcal{A}^4 + \frac{2}{3} (\mathcal{F} \mathcal{A}^2 - \mathcal{A} \mathcal{F} \mathcal{A} + \mathcal{A}^2 \mathcal{F} - \mathcal{A}^2) \right] \\ &= \text{tr} \left[ \mathcal{F}^2 - \mathcal{A}^2 \mathcal{F} - \mathcal{F} \mathcal{A}^2 + \mathcal{A}^4 + \frac{2}{3} \left( \mathcal{F} \mathcal{A}^2 + \frac{1}{2} (\mathcal{F} \mathcal{A}^2 + \mathcal{A}^2 \mathcal{F}) + \mathcal{A}^2 \mathcal{F} \right) \right] \\ &= \text{tr} [\mathcal{F}^2] \end{aligned} \tag{16.32}$$

を得る。

この結果から、もう一つ便利な公式を導いておこう。

$A$  をインスタントなゲージ・ポテンシャルとする。このとき

$$\int_{S^4} \text{tr} \mathcal{F}^2 = -\frac{1}{3} \int_{S^3} \text{tr} \mathcal{A}^3 \quad (16.33)$$

が成り立つ。この証明は、前節から北半球の領域の境界を  $S^3 = \partial U_N$  とすると  $S^3$  上では  $\mathcal{F} = 0$  だからまずストークスの定理と 16.32 を用いて

$$\int_{U_N} \text{tr} \mathcal{F}^2 = \int_{U_N} dK = \int_{S^3} K$$

さらにここでは  $\mathcal{A}_S \equiv 0$  だから

$$\int_{U_S} \text{tr} \mathcal{F}^2 = 0$$

である。 $\text{tr} \mathcal{F}^2$  はゲージ変換のもとで不変になり

$$\text{tr} \mathcal{F}^2 \rightarrow \text{tr} [g^{-1} \mathcal{F}^2 g] = \text{tr} \mathcal{F}^2$$

が成り立つ。さらに  $g_0(x) \equiv e$  で束が自明な時は  $S^3$  上だけでなく  $S^4$  全体で  $\mathcal{A} \equiv 0$  とすることができる。この時、 $\mathcal{F} = 0$  となる。従って

$$\int_{S^4} \text{tr} \mathcal{F}^2 = -\frac{1}{3} \int_{S^3} \text{tr} \mathcal{A}^3 = 0$$

である。この式は

$$\mathcal{A}(x) = g(x)^{-1} dg(x), \quad x \in S^4$$

のゲージ変換される任意のゲージポテンシャルについて成立する。

次に式 16.30 の恒等写像

$$g_1 : x \rightarrow \frac{1}{r} [x^4 \mathbf{1} + x^i \sigma_i], \quad r^2 = \mathbf{x}^2 + (x^4)^2$$

により  $S^3$  上に値を持つゲージ・ポテンシャル

$$\mathcal{A} = \frac{1}{r} (x^4 - ix^k \sigma_k) d \left( \frac{1}{r} (x^4 + ix^l \sigma_l) \right)$$

について考える。 $g_1$  は  $S^3$  を  $SU(2) \simeq S^3$  の上に一様に写すので、被積分関数  $\text{tr} \mathcal{A}^3$  は  $S^3$  上の点によらない。例えば、単位球面上の北極点 ( $x^4 = 1, \mathbf{x} = \mathbf{0}$ ) で求めたものは簡単に

$$\mathcal{A} = \left( \frac{1}{r} \right)^2 (i\sigma_k dx^k) = i\sigma_k dx^k$$

となる。よって pauli 行列の性質から

$$\begin{aligned} \text{tr} \mathcal{A}^3 &= i^3 \text{tr} [\sigma_i \sigma_j \sigma_k] dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k \\ &= 2\epsilon_{ijk} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k \\ &= 12 dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \end{aligned}$$

と計算できる。さらに  $S^3$  上の  $(x^1, x^2, x^3)$  は  $S^3$  の各半球上で

$$\omega \equiv dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$$

は北極点では体積要素とみなせるから単位半球の表面積から

$$\int_{S^3} \text{tr} \mathcal{A}^3 = 12 \int_{S^3} \omega = 12 (2\pi^2) = 24\pi^2$$

となる。これから式 16.33 より次のように係数をかければ

$$-\frac{1}{8\pi^2} \int_{S^4} \text{tr} \mathcal{F}^2 = \frac{1}{24\pi^2} \int_{S^3} \text{tr} \mathcal{A}^3 = 1$$

で規格化できる。

次に式 16.29 から写像

$$g_n : S^3 \rightarrow SU(2)$$

を考える。このとき  $g_2 = g_1 g_1$  は写像度が 2 になる。これは次のように示される。

$$g_1 : S^3 \rightarrow SU(2)$$

が与えられると、これを滑らかに変形し。北半球側の被覆  $U_N$  の  $g_{1N}$  は写像度 1 を持ち  $x \in U_S$  に対して  $g_{1N}(x) = e$  となるようにできる。

これからあらゆる変化は  $U_N$  上につくることがでる。同様なことは南半球  $x \in U_S$  でも起きて、この変形は

$$g_2(x) \rightarrow g'_2(x) = \begin{cases} g_{1N}(x) & x \in U_N \\ g_{1S}(x) & x \in U_S \end{cases}$$

となる。ベクトルポテンシャルは次のようになる。

$$\mathcal{A}(x) = g'_2(x)^{-1} dg'_2(x) \quad x \in S^3$$

これから

$$\begin{aligned} \frac{1}{24\pi^2} \int_{S^3} \text{tr} \mathcal{A}^3 &= \frac{1}{24\pi^2} \left( \int_{U_N} \text{tr} (g_{1N}^{-1} dg_{1N})^3 + \int_{U_S} \text{tr} (g_{1S}^{-1} dg_{1S})^3 \right) \\ &= 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

以下同様に対角和の積分になり  $\mathcal{A}(x) = g'_n(x)^{-1} dg'_n(x)$  となる場合は

$$-\frac{1}{8\pi^2} \int_{S^4} \text{tr} \mathcal{F}^2 = \frac{1}{24\pi^2} \int_{S^3} \text{tr} \mathcal{A}^3 = n$$

となることが考えられる。逆に写像度は

$$n = \frac{1}{24\pi^2} \int_{S^3} \text{tr} (g^{-1} dg)^3 = \frac{1}{2} \int_{S^4} \text{tr} \left( \frac{i\mathcal{F}}{2\pi} \right)^2$$

で与えられることになる。これには幾何学的な意味がつけくわえられそうである。Berry の位相については次章で詳しく扱う。

## 17 Berry の位相

高校物理でエネルギー保存則が登場したとき、それまで運動方程式でややこしく解いていた問題が一気に解けて簡単になり、物理学の奥深さに感動？をした読者もいるだろう。エネルギーは物体の運動の背景として個々の物体だけではなく、ぐるっと全体を見渡すことを教えてくれた。そのぐるっとみわたすことは位相に関係する。ここではぐるっと見渡した時に元にもどらないことがおこる。それはその背景が曲がっている時におこるわけだ、高校時代のエネルギーの登場と同様にさらに物理学の深淵を見る場面が登場する。

## 17.1 可積分条件

物理では微分方程式が与えられ、積分できるかどうかは粒子として運動を記述できるかに関わる重要な問題である。

局所的な場と、それを観測する側のグローバルな系があるのでどうしても変数は複雑になる。

今、変数  $(x^1, x^2, \dots, x^n, y)$  を持つ力学系を考え、これらは時間  $t$  の関数であるとする。

$x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$  の関数を  $H_\mu(x)$  として、 $y$  の変化が次のようにこの  $H_\mu(x)$  の和で与えられるとしよう。

$$\frac{dy}{dt} = \sum_{\mu=1}^n H_\mu(x) \frac{dx^\mu}{dt} \quad (17.1)$$

これは、微分方程式なのである微小時間の  $y$  の変化量が全ての  $H_\mu(x)$  で決まることを示す。

このような時に  $y$  の値が

$$y = F(x)$$

のように表すことができれば、積分可能であることになる。

では、こうなったとしよう。すると陰関数微分から

$$\frac{dy}{dt} = \sum_{\mu=1}^n \frac{\partial F}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{dt} \quad (17.2)$$

とならないといけない。これが任意の  $x(t)$  に対して成り立つためには式 17.1、17.2 から

$$\frac{\partial F}{\partial x^\mu} = H_\mu(x)$$

であればよい。これは添え字の入れ替えでの不変性

$$\frac{\partial H_\mu}{\partial x^\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial F}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial F}{\partial x^\nu} = \frac{\partial H_\nu}{\partial x^\mu}$$

となるので

$$\frac{\partial H_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial H_\nu}{\partial x^\mu} = 0 \quad (17.3)$$

が成り立てばよい。これを可積分条件という。

一方で条件 17.1 を保って  $x$  を閉曲線  $C$  に沿って一周すると  $y$  の変化量は

$$\Delta y = \int_C dy = \int_C \sum_{\mu=1}^n H_\mu(x) dx^\mu$$

となるので  $\Delta y \neq 0$  ならば式 17.3 は成り立たないから  $y = F(x)$  となる関数は存在しない。

この  $\Delta y$  閉曲線  $C$  に伴うホロノミーである。が

## 17.2 非可積分位相

[15, 12]

5章でみたように力学系の運動を生成するのは  $H_T$  であった。次のように  $H_T$  をおく。

$$H_T = H + v^\alpha \psi_\alpha (\alpha = 1 \sim R) \quad (17.4)$$

この  $v^\alpha$  が変化しても作用積分が不変であればゲージ変換に対応し、 $R$  の数だけ自由度があるのでこれをゲージ自由度という。

この時、波動関数の位相は変化する。そこで波動関数の位相に局所性という概念を導入する。



つまり 1 周回ってもとに戻るような閉回路を考え、大きく周回する場合と小さく周回する場合で位相差が異なることがありえることを仮定するのである。

これを位相の非可積分性 (phase non-integrability) という。

波動関数が確定した位相を持つ部分  $\phi(x, t)$  と非可積分位相  $\alpha$  に分離できるとする。

$$\psi_1 = \phi e^{i\alpha} \quad (17.5)$$

ただし、その勾配は次のように確定しているとする。

$$a_\mu = \partial_\mu \alpha \quad (17.6)$$

しかし、次の可積分条件は必ずしも成立しないとする。

$$\partial_\mu a_\nu = \partial_\nu a_\mu \quad (\mu \neq \nu) \quad (17.7)$$

また非可積分位相  $\beta$  を持つ場合として

$$\psi_2 = \phi e^{i\beta} \quad (17.8)$$

ただし、

$$b_\mu = \partial_\mu \beta \quad (17.9)$$

とする。

ここで  $\psi_1, \psi_2$  が観測上同じであるためには位相差は  $2\pi$  の整数倍である必要があるので次の条件を課してみる。

$$\int_C (a_\mu - b_\mu) ds^\mu = 2n\pi \quad (n = \dots - 1, 0, 1, \dots) \quad (17.10)$$

さらに経路  $C$  について次のような条件が成り立つとする。

1. 閉回路  $C$  は連続的に 1 点に縮小できる。
2.  $a_\mu, b_\mu$  は閉回路内で連続的に定義できる。

この条件は 17.10 の条件において

$$\int_C (a_\mu - b_\mu) ds^\mu = 0$$

$$n = 0$$

を課することになる。また、この時ストークスの定理が利用できるので、

$$\int_C (a_\mu - b_\mu) ds^\mu = \int_S \text{rot} (a - b)_{\mu\nu} dS^{\mu\nu} = 0$$

よって

$$\text{rot} (a - b) = 0$$

であることになるからベクトル解析の公式から

$$\text{grad} \delta = a - b$$

とおけることになる。式 15.16、17.9 より

$$\text{grad}(\delta - \alpha + \beta) = 0$$

だから

$$\delta = \alpha - \beta$$

が拘束条件としてなり立つことと同等になる。

位相差がこの条件により変化していれば波動関数の重ね合わせの原理が大局的に成立することになる。

例えば運動量演算子  $p_\mu = \hbar \partial_\mu$  を  $\psi_1 = \phi e^{i\alpha}$  に作用させると  $\partial_\mu \alpha_\mu = a_\mu$  は成立したから

$$p_\mu \psi_1 = i\hbar e^{i\alpha} (\partial_\mu + i\partial_\mu \alpha_\mu) \phi = i\hbar e^{i\alpha} (\partial_\mu + ia_\mu) \phi = e^{i\alpha} (i\hbar \partial_\mu - \hbar a_\mu) \phi \quad (17.11)$$

これは第 2 項のせいでゲージ不変になれず、観測量としてふさわしくない。

そこで次のゲージ変換

$$p_\mu \rightarrow \left( p_\mu - \frac{e}{c} A_\mu \right) \quad (17.12)$$

で  $p_\mu$  を再定義すれば、次の関係があれば第 2 項が相殺されることがわかる。

$$A_\mu = \frac{\hbar c}{e} a_\mu \quad (17.13)$$

つまりこれは電磁場のベクトルポテンシャルである。

量子力学では非可積分位相を考慮すると、運動量演算子に場との相互作用の項が自然に出てくる。

この非可積分位相は幾何学的位相、Berry の位相として次の節で詳しくみることにする。

### 17.3 Aharonov-Bohm Effect

[15, 16]

アラハノフ・ボーム効果に非可積分位相を取り入れたのは *Tai Tsun Wu* と *Chen Ning Yang* であった。[15] 彼らは次の図のように半径  $a$  の  $z$  方向に高さをもつ円柱内のみ磁束  $\Phi$  をもつ場を考え、電子線を当てスクリーンに干渉模様が出るというアラハノフ・ボーム効果について次のように説明を与えた。

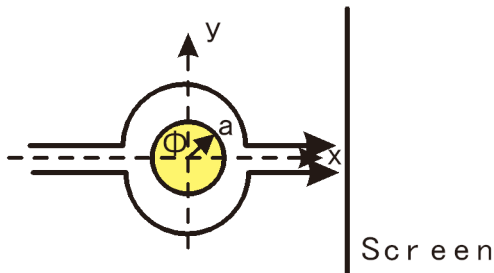


図 17.1: アラハノフ・ボーム効果

アラハノフ・ボーム効果ではベクトルポテンシャル  $A_\mu$  を用いて次の項が出力強度に関係することが示されていた。

$$\alpha = \frac{e}{\hbar c} \oint A_\mu dx^\mu \quad (17.14)$$

ところがこの項は観測にかからない。そこで次のように波動関数の位相部分に関係していると考えた。

$$\psi = \exp(i\alpha)$$

上の図で円柱の上の経路での位相を  $\alpha_1$ 、下の経路での位相を  $\alpha_2$  とするとスクリーン上に強め合う干渉項がでる場合は

$$|\alpha_1 - \alpha_2| = \Delta\alpha = 2n\pi$$

が成り立つ。観測される強度は

$$I = |\psi_1 + \psi_2|^2 \quad (17.15)$$

に比例すると考えるので  
よって波動関数の干渉項は次のようにおける

$$\begin{aligned} \psi_1\psi_2^* + \psi_1^*\psi_2 &= \exp(i(\alpha_1 - \alpha_2)) + \exp(-i(\alpha_1 - \alpha_2)) \\ &= \exp(i\Delta\alpha) + \exp(-i\Delta\alpha) \end{aligned}$$

となるので干渉項に関係している項を  $\Psi$  とするとこれは位相差のみの関数になる。

$$\Psi(\Delta\alpha) \equiv \psi_1\psi_2^* + \psi_1^*\psi_2 \quad (17.16)$$

アラハノフ・ボーム効果の実験の結果からこれを磁束  $\Phi$  を用いて次のようにおけると仮定する

$$\Psi(\Delta\alpha) = \exp(i\Delta\alpha) + \exp(-i\Delta\alpha) = \exp\left(-i\frac{e\Delta\Phi}{\hbar c}\right) \quad (17.17)$$

従って強め合う条件として位相について  $n$  を整数として

$$\frac{e\Delta\Phi}{\hbar c} = 2n\pi \quad (17.18)$$

とすると次のように磁束が量子化されることがわかる。

$$\Delta\Phi = \frac{ch}{e}n \quad (17.19)$$

電子線がソレノイドの外を通り、直接磁場の影響を受けていなくても干渉模様が観測されることは電子線の経路により位相変化がおきていることになる。そこで式 17.13 のゲージ変換が位相におきていると考え、これが座標に依存するとする。

そこで  $\Delta\Phi = \Phi_a - \Phi_b$  のように  $a, b$  で区別するとソレノイドの外では  $a, b$  に区別はなくなるとする。

この時の位相演算子を次のようにおく。

$$\begin{aligned} S &= S_{ab} \equiv \exp(-i\alpha) \\ S_{ab} &= (S_{ba})^{-1} \end{aligned} \quad (17.20)$$

すると次のように波動関数、および式 17.12 よりゲージ場に作用する

$$\begin{aligned} \psi_b &= S^{-1}\psi_a \\ (A_\mu)_b &= (A_\mu)_a - \frac{i\hbar c}{e}S\frac{\partial S^{-1}}{\partial x^\mu} \\ (A_\mu)_b &= (A_\mu)_a + \frac{\hbar c}{e}\frac{\partial\alpha}{\partial x^\mu} \end{aligned}$$

よってベクトルポテンシャルは経路により  $\alpha$  の勾配だけ変化する。ここでゲージ変換が成立するためには  $S$  は1つの値に決まるべきであり、 $\alpha$  については1価である必要はないとする。

このためには 17.14 より

$$\begin{aligned}\Delta\alpha &= \frac{e}{\hbar c} \oint \{(A_\mu)_b - (A_\mu)_a\} dx^\mu \\ &= \frac{e}{\hbar c} (\Delta\Phi) \\ &= \frac{e}{\hbar c} (\Phi_b - \Phi_a)\end{aligned}\tag{17.21}$$

もしも式 17.19 が成立すれば

$$\Delta\alpha = 2\pi n\tag{17.22}$$

となり、 $n$  が変化しても  $S$  がの値に影響がないことが満たされる。

点 P から点 Q への位相変化を次のように書く。

$$\phi_{QP} = \exp\left(\frac{ie}{\hbar c} \int_P^Q A_\mu dx^\mu\right)\tag{17.23}$$

これは次のようなゲージ変換によって実際に観測にかかる値は変化しない。

$$\phi_{QP} = \exp\left(\frac{ie}{\hbar c} a(Q)\right) \exp\left(\frac{ie}{\hbar c} \int_P^Q A_\mu dx^\mu\right) \exp\left(\frac{-ie}{\hbar c} a(P)\right)\tag{17.24}$$

前節の式 17.13 からこれを非可積分位相といった。ゲージ場  $A_\mu$  が特異点を持たないならば  $t=0$  での次のループ積分は式 17.21 より磁束により決まり、

$$\oint A_\mu dx^\mu\tag{17.25}$$

磁束は新たに  $\Phi(r, \theta)$  として図のような円柱座標で表される積分領域に依存するとする。

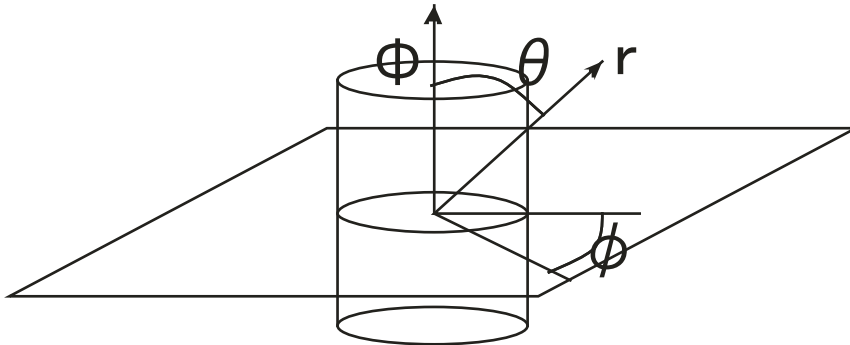


図 17.2: 円柱座標上での磁束

ここで  $\phi$  はここでは方位角で  $0 \rightarrow 2\pi$  で積分する。 $g$  を静止状態でのモノポールの作る場の強さとする。

$$\Phi(g, \theta) = 2\pi g(1 - \cos\theta)\tag{17.26}$$

とおくと下のグラフから

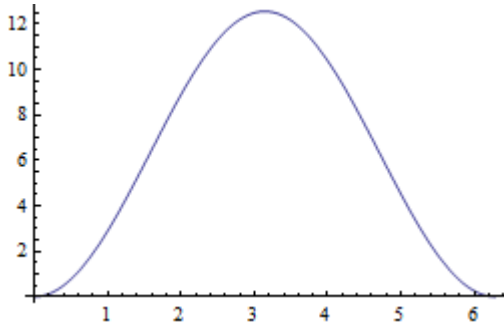


図 17.3:  $\Phi(r, \theta) = 2\pi g(1 - \cos\theta)$  において  $g = 1$  のグラフ

$\theta = 0$  の時、ちょうどソレノイドの境界上にいるとするとこの時の磁束は 0 であり、 $\theta = \pi$  まで広げれば

$$\begin{aligned}\Phi(g, 0) &= 0 \\ \Phi(g, \pi) &= 4\pi g\end{aligned}\tag{17.27}$$

となる。しかし、 $\theta = \pi$  ではループは 1 点に縮むので

$$\Phi(g, \pi) = 0\tag{17.28}$$

でなくてはならない。従ってゲージ場  $A_\mu$  が特異点を持つ必要がある。

そこで今考えている領域を次の  $R_a, R_b$  に分け、2つのプレーンを持つとしよう。この分けられたプレーン上ではゲージ場  $(A_\mu)_a, (A_\mu)_b$  は特異点を持たないとする。 $\delta$  はオーバーラップする領域に対応するとする。

$$R_a : 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} + \delta, \quad 0 < r, \quad 0 \leq \phi < 2\pi$$

$$R_b : \frac{\pi}{2} - \delta < \theta \leq \pi, \quad 0 < r, \quad 0 \leq \phi < 2\pi\tag{17.29}$$

オーバーラップする領域  $\frac{\pi}{2} - \delta < \theta < \frac{\pi}{2} + \delta$  では 2つの領域でゲージ場の各成分について

$$(A_t)_a = (A_r)_a = (A_\theta)_a = 0, \quad (A_\phi)_a = \frac{g}{r \sin \theta} (1 - \cos \theta)\tag{17.30}$$

$$(A_t)_b = (A_r)_b = (A_\theta)_b = 0, \quad (A_\phi)_b = \frac{-g}{r \sin \theta} (1 + \cos \theta)\tag{17.31}$$

従ってオーバーラップする領域での位相は  $S_{ab}$  は

$$\Delta\Phi = \int \{(A_\mu)_b - (A_\mu)_a\} dx^\mu\tag{17.32}$$

として式 17.39 より  $\theta = \frac{\pi}{2}$  だから

$$S = S_{ab} = \exp(-i\alpha) = \exp\left(\frac{-ie}{\hbar c} (\Phi_b - \Phi_a)\right)\tag{17.33}$$

$$= \exp\left(\frac{2ige}{\hbar cr} \Delta x^\mu\right)\tag{17.34}$$

とおけるが

$$\Delta x^\mu = r\phi\tag{17.35}$$

とおけばオーバーラップ領域におけるゲージ変換は

$$S_{ab} = S = \exp\left(\frac{2ige}{\hbar c}\phi\right) \quad (17.36)$$

となる。

$S$  が  $\phi$  に対し、一意であるためには式 17.19 が成立すればよい。  
よって次の Dirac の条件が必要になる。

$$\frac{2ge}{\hbar c} = \text{integer} = N \quad (17.37)$$

従ってこの領域で

$$S_{ab} = \exp(iN\phi) \quad (17.38)$$

となる。よってこの状況では点 P において  $P_a, P_b$  の 2 点があるように位相からは見える。経路 PQ においての位相変化は式 17.24 から次のような表し方をとることができる。

$$\begin{aligned} \phi_{Q_a P_a} &= \exp\left(\frac{ie}{\hbar c} \int_P^Q A_\mu dx^\mu\right) \\ \phi_{Q_b P_b} &= S^{-1}(Q)\phi_{Q_a P_a}S(P) \\ \phi_{Q_a P_a}S(P) &= S(Q)\phi_{Q_b P_b} \end{aligned} \quad (17.39)$$

従って下図のような  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E$  において  $a$  から  $b$  に写る経路がある場合は

$$\phi_{EDCBA} = \phi_{ED_a} S_{ab}(D)\phi_{D_b C B_b} S_{ba}(D)\phi_{B_a A} \quad (17.40)$$

のように位相演算子関わる。

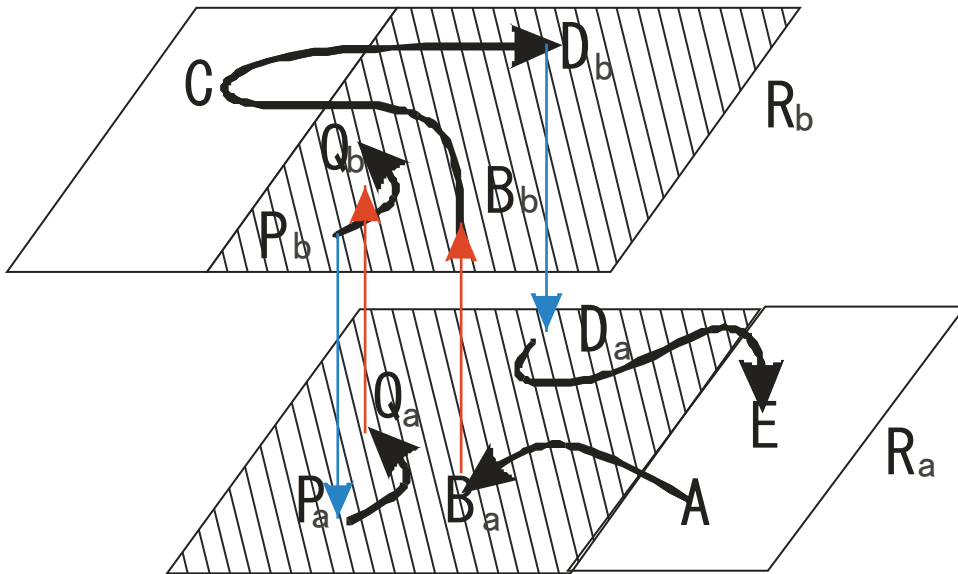


図 17.4: 斜線部がオーバーラップ領域

式 17.39 から次のように同一プレーン内の経路のように変換できる。

$$\begin{aligned}\phi_{EDCBA} &= \phi_{ED_a} \phi_{D_a CBA} \\ \phi_{EDCBA} &= \phi_{ED_b} \phi_{D_b CBA} \\ \phi_{EDCBA} &= \phi_{EDC} \phi_{CBA}\end{aligned}$$

となる。ただし、スタート点  $A$  が図の斜線のオーバーラップ領域に入っているときは

$$\phi_{A_a B A_a} = \phi_{A_b B A_b} \quad (17.41)$$

となるが

$$\phi_{A_a B A_a} \neq \phi_{A_a B A_b} \quad (17.42)$$

であることに注意がいる。アラハノフ・ボーム効果のソレノイドコイル内の磁束  $\Phi$  を用いて位相因子はこのコイルを1周した時には常に

$$\exp\left(\frac{ie}{\hbar c} \Phi\right) \quad (17.43)$$

であった。Dirac の条件式 17.37 が満たされる場合には位相因子は  $r = 0$  の経路を通らないかぎり全て等しくなる。

いいかえればこれは強め合うような干渉条件式 17.16 を満たす特別な場合である。

では Dirac の条件式が満たされない場合はどうかという次のように考えることができる。

一つは領域  $R$  において  $R_a, R_b \dots$  のように分けられることがないということである。

これは式 17.38 が成立しないので式 17.36 は 1 を常にとる。

Dirac の条件式 17.37 が成立しない場合は

$r, \theta$  を固定して  $t = 0$  で  $\phi = 0 \rightarrow 2\pi$  で変化させると経路は球座標で平行になる。よって

$$\exp\left(\frac{ie}{\hbar c} \Phi(r, \theta)\right) = \exp\left(\frac{ie}{\hbar c} 2\pi g(1 - \cos\theta)\right) \quad (17.44)$$

とおくとこれは  $\theta = \frac{\pi}{2}$  において式 17.40 から左辺は  $S$  に依存し、式 17.20 から結局  $\phi$  に依存してしまう。

これは矛盾している。

したがって Dirac の条件式 17.37 が成立しない場合はモノポールの強さ  $g$  は領域  $R$  において物理的な量をとることができない。

## 17.4 グローバルゲージ変換

Dirac の条件が成立するとして非可積分位相を用いてオーバーラップ領域の領域やゲージ場の選択を自由にできることを次に示す。これにはゲージ変換が大きく関係してくる。モノポールの場を拡張して考えてみる。

下図の左には領域  $b$  がエレベータのように上下に動く。これにより領域  $b$  を拡大すると全ての領域  $R$  をカバーできる。

下図の中央には領域  $b$  の中にさらに部分的な領域  $R_c$  が加わる。よってこの時のゲージ変換は

$$(A_\mu)_c = (A_\mu)_b$$

となる。図右は領域  $R_c$  が動いた場合が描いてある。このように多くの可能性がオーバーラップ領域で選択できる。

$(A_\mu)_a, (A_\mu)_b$  から新しい領域  $A_\mu$  へのゲージ変換も多様になる。このように領域を広げていくことをグローバルゲージと呼ぶ。

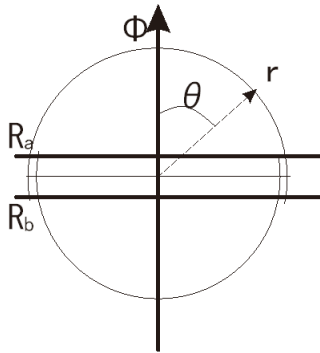


図 17.5: 領域の連結

図のようにそれぞれ選択したゲージには非可積分位相が含まれ領域  $a$  から  $b$  を経由し、 $c$  に渡って

$$\phi_{C_c B A_a} = \phi_{C_c B_b} \phi_{B_b A_a}$$

が満たされる。

異なる領域をとる場合は式 17.37 が成立するがこれは  $A_\mu$  とは関係ない。 $a$  と  $b$  で異なった変化を与えるわけではないので 2 つの異なったゲージが  $a$  と  $b$  で共有されることになる。モノポール場のような場合、式 17.54 からベクトルポテンシャルが与えられる。

しかし実際に  $(A_\mu)_a$ 、 $(A_\mu)_b$  には式 17.38 が成り立つのでそれぞれのゲージ変換がオーバーラップ領域で可能になる。

このようにゲージはどのベクトルポテンシャルも一致させてしまうものではない。1 つのゲージから他のゲージに曲がりながらつながることをグローバルゲージ変換という。ゲージ変換が多く集まりグローバルなゲージ変換を作るときこれらは同じゲージタイプに属するという。

ここで次のような仮定を立てる

1. 位相因子は同じプレーンであれば 1 周した場合同じになる。グローバルゲージ変換ではこれは変化しない。
2. 場の強さである  $f_{\mu\nu}$  はグローバルゲージ変換では変化しない。
3. 式 17.37 の整数  $N$  はゲージグループを区別し、これを  $g_D$  で表すと  $N$  が異なれば異なるグループであり  $N \neq N'$  であればグローバルゲージ変換は無関係である。
4. 同じゲージグループであれば同じゲージにより連続的なつながりが存在する。
5. 同じゲージグループ上で原点  $r = 0$  周りの球積分において磁束の合計ゲージ場には無関係で位相因子のみに依存する。

これらを示すために次のように 2 つのゲージ場の合成を定義する。

$$A^{(\gamma)} = t(A_\mu)^{(\alpha)} + (1-t)(A_\mu)^{(\beta)} \quad 0 \leq t \leq 1$$

$a$  と  $b$  のオーバーラップ領域のベクトルポテンシャルは  $(A_\mu)_a^{(\gamma)}$  または  $(A_\mu)_b^{(\gamma)}$  とかけ、これはオーバーラップ領域に属する元のゲージ変換と関係している。しかし、これは先の仮定 3 と矛盾する。そこでゲージ変換に対応し、モノポール場の強さを

$$g_D \rightarrow N' \frac{\hbar c}{2e}$$

とおくと、異なった強さを持つ 2 つ極のモノポール場を表すことができる。このモノポールの強さは  $r = 0$  を除いて



$$N \frac{\hbar c}{e}$$

定義される。

また  $g_D$  上でのどんなゲージ場も  $\vec{r} = 0$  を含む場合磁場のモノポールの強さは

$$N \frac{\hbar c}{2e} \quad (17.45)$$

である。しかし、電荷や電流による場を  $\vec{r} = 0$  のに付け加えることができて結局磁束の合計は  $\vec{r} = 0$  において

$$2\pi N \frac{\hbar c}{e} \quad (17.46)$$

となる。

次の図のように  $r = 0$  周りの球座標をとると  $g_D$  上で磁束は次のゲージ場のみ依存する。

ストークスの定理から面積分は周積分に置き換えることができて被積分関数がゲージ場の差になるから

$$\Phi = \oint \oint f dx^\mu dx^\nu = \oint \{(A_\mu)_a - (A_\mu)_b\} dx^\mu \quad (17.47)$$

となる。先の仮定 5 ではこの値が次に示すような位相因子  $S_{ab}$  に依存することを示す。

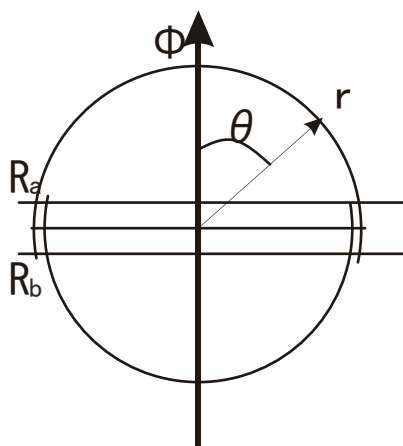


図 17.6: オーバーラップ領域での磁束

積分を上図のような極座標で行うとする。

ストークスの定理は  $\vec{r} = 0$  周りの領域  $R_a, R_b$  のオーバーラップ領域内で  $r = 1$  の半径に書き換えることを示すから

まず上半球を考える。ここでの磁束は次の周積分で与えられる。

$$\Phi_{up} = \oint (A_\mu)_a dx^\mu$$

同様に、下半球では次のようになる。

$$\Phi_{dw} = - \oint (A_\mu)_b dx^\mu$$

よって合計すると次のようにゲージ場の差が被積分関数に現れるから、

$$\Phi_{total} = \oint \{(A_\mu)_a - (A_\mu)_b\} dx^\mu \quad (17.48)$$

となるが、式 17.33 より

$$S_{ab} = \exp\left(\frac{-ie}{\hbar c}(\Phi_b - \Phi_a)\right) \quad (17.49)$$

$$\frac{-ie}{\hbar c}\Delta\Phi = \log(S_{ab}) = \frac{ie}{\hbar c}((A_\mu)_a - (A_\mu)_b)\Delta x^\mu \quad (17.50)$$

となるので

$$\begin{aligned} \Phi_{total} &= \oint \left\{ \frac{\Delta\Phi}{\Delta x^\mu} \right\} dx^\mu \\ &= \oint \{(A_\mu)_a - (A_\mu)_b\} dx^\mu \\ &= \frac{-i\hbar c}{e} \oint \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\log S_{ab}) dx^\mu \end{aligned}$$

となり、各領域でのベクトルポテンシャルの差が磁場の変化  $\Delta\Phi$  を作っていることがわかる。  
結果として

$$\Phi_{total} = \oint \oint f_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \frac{-i\hbar c}{e} \oint \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\log S_{ab}) dx^\mu \quad (17.51)$$

これは Chern-Well の定理の特殊な場合であることを次節で示す。  
例えば  $\theta = \pi$  とすると式 17.37 から

$$\Delta\alpha = 2\pi n = 2\pi \frac{2ge}{\hbar c} \quad (17.52)$$

となるので

$$\begin{aligned} \Phi_{total} &= \frac{-i\hbar c}{e} \oint \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\log(\exp(-i\alpha))) dx^\mu \\ &= 4\pi g \end{aligned}$$

となりこれは式 17.27 を満たしている。つまり位相因子  $S_{ab}$  で特徴つけられるゲージタイプにより磁束の合計は決まる。

式 17.51 の右辺はゲージ場に依存しているように見えるが、ゲージのタイプにより決まる。また単一値をもつ  $S_{ab}$  の対数の勾配を積分したものである。この積分は複素積分の主値に等しく、この場合は  $2\pi i$  である。

## 17.5 非可換ゲージ場

ここまでは可換な電磁場を考察してきたがここでは非可換な  $SU_2$  に属するゲージ場を中心にみていく。ゲージは特定のオーバーラップ領域を選択し、特定の単一値をとるゲージ変換  $S_{ab}$  をこの領域で選択する。この時領域  $R_a \cap R_b, R_a \cap R_b \cap R_c$  において次の関係を満足する。

$$\begin{aligned} S_{ab}S_{ba} &= 1 \\ S_{ab}S_{bc}S_{ca} &= 1 \end{aligned}$$

また次のような関係を満足する無限小生成子を定義する。

$$X_1X_2 - X_2X_1 = X_3 \quad (17.53)$$

この時、局所的な位相変化は  $b_\mu^k$  を新しくゲージ場として定義し、

$$ieA_\mu \rightarrow -eb_\mu^k X_k \quad (17.54)$$

とすると式 17.23 は次のように置き換えられる。経路順への並び変えを  $T$  で表すと

$$\phi_{QP} = \exp \left\{ T \left( \frac{-e}{\hbar c} \int_P^Q b_\mu^k X_k dx^\mu \right) \right\} \quad (17.55)$$

となる。

$iX_k$  の固有値の最小値は  $\pm 1/2$  をとる。具体的に次のように  $X_k$  を定義できる。

$$X_k = -i \frac{\sigma_k}{2} \quad (17.56)$$

ここで  $\sigma_k$  パウリ行列である。電荷であれば最小値が

$$q_0 = \frac{e}{2} \quad (17.57)$$

で表されるので実際の粒子のとる基本的な電荷が  $e, 0, -e$  であることから  $SU_2$  では次のような関係が成り立つ

ゲージ粒子の電荷を  $q$ , 電荷の最小値の大きさを  $q_0$  として

$$\frac{q}{q_0} = 2 \quad (17.58)$$

ここで Dirac のモノポール場を  $SU_2$  で考える。アイソスピンの向きを  $k=3$  にとる。次のように成分を定義する。

$$b_\mu^1 = b_\mu^2 = 0, \quad b_\mu^3 = 1 \quad (17.59)$$

ここで  $A_\mu$  は式 17.48 のように  $a, b, 2$  つの領域で与えられる。17.54 は次のようにも書けるから

$$A_\mu \rightarrow ib_\mu^3 X_k \quad (17.60)$$

よってオーバーラップ領域では位相演算子は式 17.36 より

$$S = \exp \left( -\frac{2ge}{\hbar c} \phi X_3 \right) \quad (17.61)$$

となる。量子条件が成り立てば次の整数条件が成り立つ。

$$\frac{eg}{\hbar c} = N \quad (17.62)$$

$SU_2$  では 17.56 からあたかも 1 周が  $4\pi$  のようにふるまうので

$$\exp(4\pi X_3) = 1 \quad (17.63)$$

となることに注意する。式 17.61, 17.58 から  $\phi$  が  $0 \sim 2\pi$  変化する間に大円を  $D$  周することになる。

この大円は連続的な変形で単位元まで縮小できることになる。よってグローバルなゲージ変換がおきると  $S$  は  $S' = 1$  に縮小し、2 つの領域  $a, b$  は電磁場のように 1 つの領域で表せることになる。よってゲージポテンシャル  $b_\mu^k$  は  $R$  内のあらゆる場所で定義できるようになる。従って次の定理が導ける。

- $SU_2$  ゲージ群においては異なる  $D$  のゲージ変換  $g_D$  はグローバルなゲージ変換に変換ができる。同様に異なるモノポール場もグローバルなゲージ変換により同じタイプのものと考えることができる。

例えば1つのグローバルなゲージ変換  $g_{-1}$  を次で定義する。

$$S_{ab} = \exp(-2\phi X_3) \quad (17.64)$$

$$\frac{e}{\hbar c} = \frac{-1}{g} \quad (17.65)$$

下図のように次のような領域  $R_a, R_b$  での変換を用意する。

$$\xi = \exp[\theta(X_1 \sin\phi - X_2 \cos\phi)] \quad (17.66)$$

$$\eta = \exp[(\pi - \theta)(X_1 \sin\phi - X_2 \cos\phi)] \exp(\pi X_2) \quad (17.67)$$

すると次の関係を満たす。

$$S'_{ab} = \eta S_{ab} \xi = 1 \quad (17.68)$$

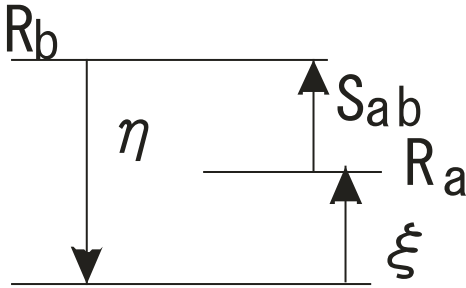


図 17.7:

グローバルゲージ変換後は  $Q = P + dx$  として次のように書くことができる。式 17.60 から

$$\xi(Q) \left[ 1 + \frac{1}{g} (b_\mu^\kappa)'_a X_\kappa dx^\mu \right] \xi^{-1}(P) = 1 + \frac{1}{g} (b_\mu^\kappa)_a X_\kappa dx^\mu \quad (17.69)$$

$$= 1 + \frac{1}{g} (A_\mu)_a X_3 dx^\mu \quad (17.70)$$

となる。 $dx^\mu$  は4元距離  $(t, r)$  だけ離れるので

$$b_t^{\kappa'} = b_r^{\kappa'} = 0 \quad (17.71)$$

$\theta$  方向へは

$$b_\theta^{1'} = \frac{-g}{r} \sin\phi, \quad b_\theta^{2'} = \frac{g}{r} \cos\phi, \quad b_\theta^{3'} = 0 \quad (17.72)$$

$\phi$  方向へは左から  $\xi^{-1}(Q)$ 、右から  $\xi(P)$  を掛けるので

$$1 + \frac{1}{g} (b_\mu^\kappa)'_a X_\kappa r \sin\theta d\phi = \xi^{-1}(Q) \xi(P) + \frac{1}{g} (A_\phi)_a r \sin\theta d\phi \xi^{-1}(P) X_3 \xi(P) \quad (17.73)$$

ここで 17.66 から直接計算すると

$$e^{i\theta\sigma_k} = \cos\theta + i\sigma_k \sin\theta \quad (17.74)$$

が一般に成り立つので

$$\begin{aligned}
\xi^{-1}(Q)\xi(P) &= \xi^{-1}(P+dx)\xi(P) \\
&= \xi^{-1}(Q)\xi(Q-dx) \\
&= \xi^{-1}(Q)(\xi(Q)-\xi'dx) \\
&= 1 - \frac{\xi'}{\xi}dx = 1 - \log[\exp[\theta(X_1\cos\phi + X_2\sin\phi)]] \\
&= 1 - \sin\theta d\phi \left[ (X_1\cos\phi + X_2\sin\phi) - \tan\frac{\theta}{2} \right]
\end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned}
X_1X_3X_1 = X_2X_3X_2 &= \frac{1}{4}X_3 \\
X_1X_3X_2 + X_2X_3X_1 &= 0
\end{aligned}$$

より式 17.74 の公式を利用すると

$$\begin{aligned}
\xi^{-1}(P)X_3\xi(P) &= (\exp[\theta(X_1\sin\phi - X_2\cos\phi)])^{-1} X_3 \exp[\theta(X_1\sin\phi - X_2\cos\phi)] \\
&= \{\cos\theta - \sin\theta(X_1\sin\phi - X_2\cos\phi)\} X_3 \{\cos\theta + \sin\theta(X_1\sin\phi - X_2\cos\phi)\} \\
&= \cos^2\theta X_3 - \sin\theta\cos\theta \{(X_1\sin\phi - X_2\cos\phi)X_3 - X_3(X_1\sin\phi - X_2\cos\phi)\} \\
&\quad - \sin^2\theta (X_1\sin\phi - X_2\cos\phi) X_3 (X_1\sin\phi - X_2\cos\phi) \\
&= \cos^2\theta X_3 - \sin^2\theta \{X_1X_3X_1\sin^2\phi + X_2X_3X_2\cos^2\phi - (X_1X_3X_2 + X_2X_3X_1) \sin\phi\cos\phi\} \\
&\quad - \sin\theta\cos\theta \{(X_1X_3 - X_3X_1) \sin\phi + (X_3X_2 - X_2X_3) \cos\phi\} \\
&= \cos^2\theta X_3 - \frac{1}{4}\sin^2\theta X_3 + \sin\theta\cos\theta (X_2\sin\phi + X_1\cos\phi) \\
&= \sin\theta\cos\theta (X_2\sin\phi + X_1\cos\phi) + () X_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\xi^{-1}(P)X_3\xi(P) &= \left( \exp\left[-i\frac{\sigma_1}{2}\sin\phi - i\frac{\sigma_2}{2}\cos\phi\right] \right)^{-1} X_3 \exp\left[-i\frac{\sigma_1}{2}\sin\phi - i\frac{\sigma_2}{2}\cos\phi\right] \\
&= \left\{ \cos\theta - \frac{i}{2}\sin\theta(\sigma_1\sin\phi - \sigma_2\cos\phi) \right\} X_3 \left\{ \cos\theta + \frac{i}{2}\sin\theta(\sigma_1\sin\phi - \sigma_2\cos\phi) \right\} \\
&= \cos^2\theta X_3 - \frac{i}{2}\sin\theta\cos\theta \{(\sigma_1\sin\phi - \sigma_2\cos\phi)X_3 - X_3(\sigma_1\sin\phi - \sigma_2\cos\phi)\} \\
&\quad + \frac{1}{4}\sin^2\theta(\sigma_1\sin\phi - \sigma_2\cos\phi)X_3(\sigma_1\sin\phi - \sigma_2\cos\phi) \\
&= \cos^2\theta X_3 - \sin^2\theta \{X_1X_3X_1\sin^2\phi + X_2X_3X_2\cos^2\phi - (X_1X_3X_2 + X_2X_3X_1) \sin\phi\cos\phi\} \\
&\quad + \sin\theta\cos\theta \{(X_1X_3 - X_3X_1) \sin\phi + (X_3X_2 - X_2X_3) \cos\phi\} \\
&= \cos^2\theta X_3 - \sin^2\theta \{X_1(X_1X_3 + X_2) \sin^2\phi + X_2(X_2X_3 - X_1) \cos^2\phi\} \\
&\quad - \sin^2\theta \{X_1(X_2X_3 - X_1) + (X_3X_2 - X_1)X_1\} \sin\phi\cos\phi \\
&\quad + \sin\theta\cos\theta (X_2\sin\phi + X_1\cos\phi) \\
&= \cos^2\theta X_3 - \sin^2\theta X_3 - \sin^2\theta \{X_1X_2\sin^2\phi - X_2X_1\cos^2\phi +\} \\
&= \sin\theta (X_2\sin\phi + X_1\cos\phi) + X_3\cos\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\xi^{-1}(P)X_3\xi(P) &= (\exp[\theta(X_1\sin\phi - X_2\cos\phi)])^{-1} X_3\exp[\theta(X_1\sin\phi - X_2\cos\phi)] \\
&= [1 - \theta(X_1\sin\phi - X_2\cos\phi)][X_3 + \theta X_3(X_1\sin\phi - X_2\cos\phi)] \\
&= X_3 - \theta\{(X_1X_3 - X_3X_1)\sin\phi - (X_2X_3 - X_3X_2)\}\cos\phi \\
&\quad - \theta^2(X_1X_3X_1\sin^2\phi - X_2X_3X_1\cos\phi\sin\phi - X_1X_3X_2\sin\phi\cos\phi + X_2X_3X_2\cos^2\phi) \\
&= X_3 + \theta(X_2\sin\phi + X_1\cos\phi) - \theta^2 X_3(X_1^2\sin^2\phi + X_2^2\cos^2\phi - \cos\phi\sin\phi(X_1X_2 + X_2X_1)) \\
&= X_3 + \theta(X_2\sin\phi + X_1\cos\phi) - \theta^2 X_3\dots \\
&= (\theta - \theta^3/3! + \dots)(X_2\sin\phi + X_1\cos\phi) + (1 - \theta^2/2! + \dots)X_3 \\
&= \sin\theta(X_2\sin\phi + X_1\cos\phi) + X_3\cos\theta
\end{aligned}$$

よってこれらから  $\phi$  方向について

$$b_\phi^{1'} = \frac{-g}{r}\cos\theta\cos\phi, \quad b_\phi^{2'} = \frac{-g}{r}\cos\theta\sin\phi, \quad b_\phi^{3'} = \frac{g}{r}\sin\theta \quad (17.75)$$

よって次の関係が確かめられる。

$$\frac{e}{\hbar c} b_\mu^{\kappa'} X_\kappa dx^\mu = -\frac{1}{r^2} \epsilon_{i\kappa j} x^j dx^i X_k \quad (17.76)$$

$$b_4^{\kappa'} = 0, \quad \frac{e}{\hbar c} b_\mu^{\kappa'} = -\frac{1}{r^2} \epsilon_{i\kappa j} x^j \quad (17.77)$$

従って  $b_\mu^{\kappa'}$  の新しいゲージポテンシャルは領域  $R_a$  で解析的になる。つまり新しいポテンシャルもオーバーラップ領域  $R_b$  で

$$\eta S_{ab} \xi R_{g^*} = 1 \quad (17.78)$$

を見たす。従って連続した位相関係があれば解析的なゲージポテンシャルを見だし不連続な波源を回避できる。

次に 17.58 の条件を次のように変更する。

$$\frac{q}{q_0} = 1 \quad (17.79)$$

これは 17.63 を次のように変更し、条件をつけたた SO3 と考えることができる。

$$e^{2\pi X_k} = 1 \quad (17.80)$$

式 17.61 から量子化の条件

$$\frac{2eg}{\hbar c} = N(\text{Integer}) \quad (17.81)$$

において  $N$  が奇数か偶数でふるまいが区別される。奇数の場合は SO3 上の閉じたループは単位元に収縮することができる。

これは SU2 では全ての異なる磁気単極子の場は電荷の連続的な変化によりお互いに連続的に移り変わることができることを意味する。

例えば式 17.65 のように  $g_{-1}$  の原点に磁気単極子のみある場から出発し、

$g_0$  上のゲージポテンシャルは式 17.77 により  $b'$  にゲージ変換され、

さらに  $g_0$  上のゲージポテンシャル  $b'' = \alpha b$   $0 \leq \alpha \leq 1$  により変換されると

この  $b''$  はもはや原点の外で電荷のない状態とはいえなくなる。

しかし、原点を除いて磁荷は存在しない。磁荷も電荷も存在しないということはない。

最初の磁気単極子の状態から  $\alpha$  を 0 から 1 に変化させることで連続的に電荷が変化しながら磁荷のないところにもっていけるのである。

これは U2 の電磁場ではありえないことである。

これは SO3 においても不可能であるが、同じような方法で磁気単極子の強さを変化させることはできる。

このように非可換なゲージ変換は可換な場合と非常に異なる性質を持つ。

電磁場では磁気単極子の強さは電荷を変化させることで変化する。

領域 R には磁気単極子が存在しないとする。しかし領域 R には連続的な磁場は存在でき

$$\nabla H = 0 \quad (17.82)$$

が成り立つ。しかし、SU2 や SO3 の場合非可換であれば

$$\nabla H \neq 0 \quad (17.83)$$

となる。従ってループを通る磁束の定義ができない。しかしながらここで磁束がループの位相因子になることを見た。

従って原点周り球からの磁束の合計は図 17.6 から次のようなループを考えればよい。

$$roop1 : r = 1, \theta = \text{fixed}, \phi = 0 \rightarrow 2\pi \quad (17.84)$$

$\theta$  が 0 から  $2\pi$  まで変化するとループは連続的に変化するが始点と終点が単位元となることに変化はない。

他のいかなるループは球上で連続的にこのループに変形できる。

このようなループを原点周りの *total circuit* と呼ぶことにする。

そこで次のような定理が導ける。

- SO3 または SU2 の領域 R を考え、ゲージ場  $g$  を考える。どんな領域 R 上のゲージ場も原点周りの *total circuit* はゲージ場  $g$  とは独立でゲージタイプ  $g_D$  に依存する。

$$total\ circuit \sim S_{ab}(\phi) \text{ for } \phi = 2\pi \sim 0 \quad (17.85)$$

これを示すには式 17.84 の *roop1* から出発する。

領域  $R_a, R_b$  内の位相因子は  $\Phi^a(\theta), \Phi^b(\theta)$  とするとオーバーラップ領域では

$$S(\phi) = I(e) \quad (17.86)$$

であれば式 17.39 から

$$\Phi^a(\theta) = \Phi^b(\theta) \quad (17.87)$$

が成り立つ。次に図 17.6 から上半球上のループを  $L(\theta)$  であらわすと

$$roop1 \text{ for } \theta = 0 - \pi/2 \sim L(\theta) \text{ for } \theta = 0 \sim \pi/2 \quad (17.88)$$

であるから

$$\Phi^a(\theta) \text{ for } \theta = 0 - \pi/2 \sim \Phi_{L(\theta)}^a \text{ for } \theta = 0 \sim \pi/2 \quad (17.89)$$

これを xy 平面に射影し、次の図のように分解すると

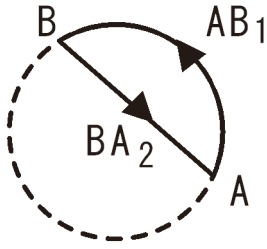


図 17.8: 円周内の 1 つの領域

$$\Phi_{L(\theta)}^a \text{ for } \theta = 0 \sim \pi/2 \sim \Phi_{(BA)_2}^a \Phi_{(AB)_1}^a \text{ for } \theta = 0 \sim \pi/2 \quad (17.90)$$

と表すことができる。ここで  $\Phi_{(BA)_2}^a$  は  $\theta$  に対し連続であり

$$\Phi_{(BA)_2}^a \text{ for } \theta = 0 \sim \pi/2 \sim I(\text{単位元}) \quad (17.91)$$

とみなすことができる。よって

$$\Phi^a(\theta) \text{ for } \theta = 0 \sim \pi/2 \sim \Phi_{(AB)_1}^a \text{ for } \theta = 0 \sim \pi/2 \quad (17.92)$$

とみなせる。同様に下半球側についても

$$\Phi^b(\theta) \text{ for } \theta = \pi/2 \sim \pi \sim \Phi_{(AB)_1}^b \text{ for } \theta = \pi/2 \sim \pi \quad (17.93)$$

が成り立つ。赤道である  $\theta = \pi/2$  では

$$\Phi^a(\theta) = \Phi^b(\theta) \quad (17.94)$$

が成り立つ。 $\Phi^a(\theta), \Phi^b(\theta)$  は次の図のように変換  $S$  で入れ替えることができる。

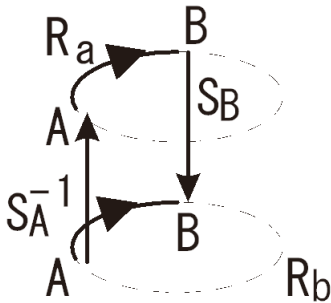


図 17.9: ファイバーの構造

$$\Phi_{(AB)_1}^b = S_B \Phi_{(AB)_1}^a S_A^{-1} \quad (17.95)$$

これはさらに  $S_A = I(\text{単位元})$  と選べば

$$\Phi_{(AB)_1}^b = S_B \Phi_{(AB)_1}^a \quad (17.96)$$

となるので  $\pi$  までのループについて

$$\Phi_{(AB)_1}^a \text{ for } \theta = 0 \sim \pi/2; \Phi_{R_{g^*}^b(AB)_1}^b \text{ for } \theta = \pi/2 \sim \pi \quad (17.97)$$



$$\Phi_{(AB)_1}^a \text{ for } \theta = 0 \sim \pi/2; S_B \Phi_{(AB)_1}^a \text{ for } \theta = \pi/2 \sim \pi \quad (17.98)$$

これから単位元  $I$  について次の関係が導ける。

$$I \text{ for } \theta = 0 \sim \pi/2; S_B \text{ for } \theta = \pi/2 \sim \pi \quad (17.99)$$

とかける。ループを往復すると

$$\Phi_{(AB)_1}^a \text{ for } \theta = 0 \sim \pi/2; \Phi_{(AB)_1}^a \text{ for } \theta = \pi/2 \sim \pi \quad (17.100)$$

であり、これは単位元に収縮することができる。

そこで次のように  $S_B$  を決める。 $\theta$  が  $\pi/2 \sim \pi$  に変化する場合に対して

$$S_B = S_{ab}(\phi) \text{ for } \phi = 4\pi \sim 4\theta \text{ as } \theta = \pi/2 \quad (17.101)$$

$$S_B = S_{ab}(\phi) \text{ for } \phi = 2\pi \sim 0 \text{ as } \theta = \pi \quad (17.102)$$

これらの差からループの和の式 17.85 が導ける。さらに領域を細分化する場合も同様に計算できる。

## 17.6 接続

量子論ではエネルギーとは波動関数の位相を変化させるものと考えることができた。  
例えば  $n$  番目のエネルギー固有状態を  $|n\rangle$  とすると、この時間発展は

$$|\Psi_n; t\rangle = e^{-iE_n t/\hbar} |n\rangle$$

となる。ここでこの系にはあるゆっくりと変化する連続的なパラメタ  $\mathbf{R}$  があるとする。これを断熱パラメタと呼ぶ。

一般的な Berry の位相（幾何学的位相）を考える。

$k$  個のパラメタ  $\mathbf{R} = (R_1, \dots, R_k)$  に依存する量子力学的ハミルトニアンを  $H(\mathbf{R})$  として  $n$  番目の固有状態を

$$H(\mathbf{R})|n; \mathbf{R}\rangle = E_n(\mathbf{R})|n; \mathbf{R}\rangle, \langle n; \mathbf{R}|n; \mathbf{R}\rangle = 1$$

とする。ただし、 $E_n(\mathbf{R})$  は孤立していて、非退化であるとする。また、 $\mathbf{R}$  はパラメタ空間でループをなし、

$$\mathbf{R}(0) = \mathbf{R}(1)$$

を満たす。また、重要な仮定として  $\mathbf{R}$  は断熱変化であるとし、状態は  $n$  番目の固有状態にあるとする。

この仮定のもとでパラメタ空間を経路  $\gamma$  で 1 周したとき、余分な位相因子として

$$\gamma_n \equiv i \oint_{\gamma} \langle n; \mathbf{R} | \frac{\partial}{\partial R^\mu} |n; \mathbf{R}\rangle dR^\mu \quad (17.103)$$

は成分パラメタに沿う固有状態の位相変化で 0 になるとは限らない。

そこでこれを **Berry** の位相という。

これは量子力学的な固有状態が  $|n; \mathbf{R}\rangle$  と  $e^{i\phi}|n; \mathbf{R}\rangle$  が区別できないことが起因している。

この説明には第 4 部でのファーバー束の考え方を利用する。構造群  $G = U(1)$  に選び、

$g \in U(1)$  として

$$[|n; \mathbf{R}\rangle] \equiv \{g|n; \mathbf{R}\rangle g\}$$

これをファイバーの考えを用いて各点  $\mathbf{R}$  に  $U(1)$  の自由度が存在し、パラメタ空間  $M$  上に  $U(1)$  束  $P(M, U(1))$  があるとする。

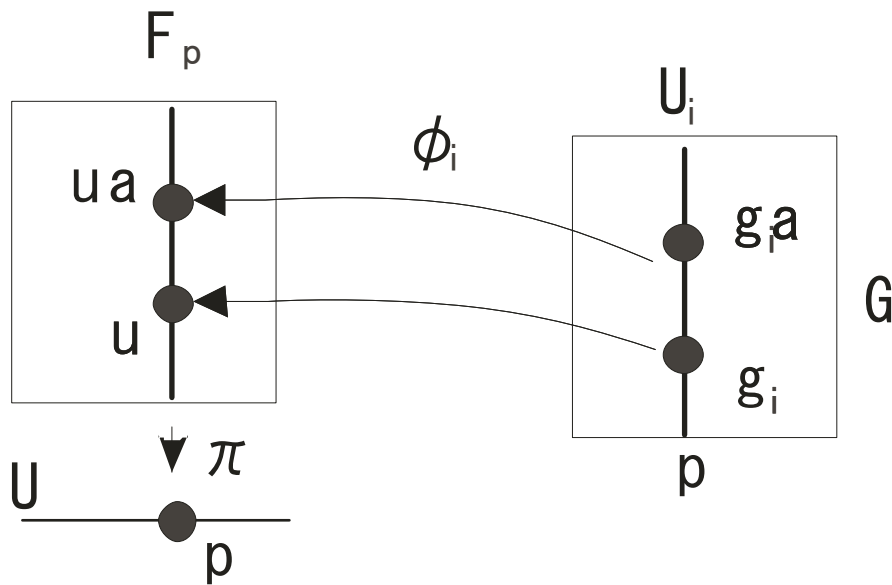


図 17.10: この場合  $p = \mathbf{R}$  である

射影は

$$\pi(|n; \mathbf{R}\rangle) \equiv \mathbf{R}$$

で与えられる。つまり、各点  $\mathbf{R} \in M$  において  $|n; \mathbf{R}\rangle$  の位相を固定することが切断を選ぶことに相当する。そこで  $\sigma(\mathbf{R})$  を  $M$  上のチャート  $U$  の切断として選ぶ。このとき、標準的な局所自明化は  $e$  を単位元とし

$$\phi^{-1}(|n; \mathbf{R}\rangle) = (\mathbf{R}, e)$$

となる。右作用を用いると

$$\phi^{-1}(|n; \mathbf{R}\rangle \cdot g) = (\mathbf{R}, e)g = (\mathbf{R}, g)$$

となる。

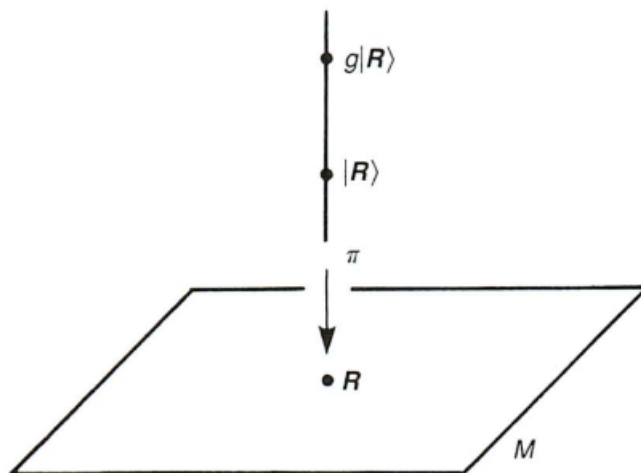


図 17.11: [12] より：断熱パラメタ  $\mathbf{R}$  に依存したファイバー

束構造が定義できたので、第5部の接続  $\mathcal{A}$  では  $X$  を  $M$  上の接ベクトル場として、これは  $TM$  の切断とみなせるから

$$TM \subset TR^N|_M = M \times R^N$$

とかけるので  $X$  は  $R^N$  値で  $M$  上の関数とみなせる。すなわち

$$X : M \rightarrow R^N$$

これから  $dX$  は  $R^N$  値の1次微分形式である。よって接ベクトルと余接ベクトルに分解して

$$dX = \nabla X + A_X \tag{17.104}$$

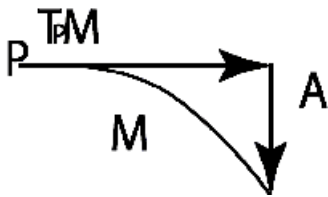


図 17.12: 接ベクトルと余接ベクトル

と書き、 $\nabla X$  は  $TM$  値、 $A_X$  は  $T^\perp M$  値での1次微分形式である。そこで  $TM$  と  $A_X$  は  $T^\perp M$  の成分を比べて

$$\begin{aligned} d(fX) &= df \cdot X + f \cdot dX \\ &= df \cdot X + f \cdot \nabla X + f \cdot A_X \\ &= \nabla(fX) + f \cdot A_X \end{aligned}$$

とすると

$$\nabla(fX) = df \cdot X + f \cdot \nabla X$$

となる。Berry の接続として

$$A = A_\mu dR^\mu \equiv \langle n; \mathbf{R} | (d|n; \mathbf{R}) \rangle = - \langle d\mathbf{R} | \mathbf{R} \rangle$$

で定義する。ここで

$$d = \left( \frac{\partial}{\partial R^\mu} \right) dR^\mu$$

は  $\mathbf{R}$  空間の外微分である。また、よく使う方法で

$$0 = d(\langle \mathbf{R} | \mathbf{R} \rangle) = (d\mathbf{R} | \mathbf{R}) + \langle \mathbf{R} | d\mathbf{R} \rangle = \langle \mathbf{R} | d\mathbf{R} \rangle^\dagger + \langle \mathbf{R} | d\mathbf{R} \rangle$$

となるので  $A$  は反 Hermite である。

接続は各チャートをつなげるものだから局所切断  $\sigma_i(\mathbf{R}) = |\mathbf{R}\rangle_i$ ,  $\sigma_j(\mathbf{R}) = |\mathbf{R}\rangle_j$  とし、これらは右からの変換関数  $t_{ij}(\mathbf{R})$  により

$$|\mathbf{R}\rangle_j = |\mathbf{R}\rangle_i t_{ij}(\mathbf{R})$$

で結ばれる。これから  $A_i$  の変換則を導こう。

ここからは、 $n$  を省略すると

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_j(\mathbf{R}) &= {}_j \langle \mathbf{R} | d|\mathbf{R}\rangle_j = {}_j \langle \mathbf{R} | d(\mathbf{R})_i t_{ij}(\mathbf{R}) \\ &= t_{ij}(\mathbf{R})^{-1} {}_i \langle \mathbf{R} | (d|\mathbf{R}\rangle_i t_{ij}(\mathbf{R}) + |\mathbf{R}\rangle_i dt_{ij}(\mathbf{R})) \\ &= t_{ij}(\mathbf{R})^{-1} {}_i \langle \mathbf{R} | d|\mathbf{R}\rangle_i t_{ij}(\mathbf{R}) + |\mathbf{R}\rangle_i dt_{ij}(\mathbf{R}) \\ &= \mathcal{A}_i(\mathbf{R}) + t_{ij}(\mathbf{R})^{-1} dt_{ij}(\mathbf{R}) \end{aligned}$$

となる。この第2項が変化量である。つまり

$$\Delta \mathcal{A}_i(\mathbf{R}) = t_{ij}(\mathbf{R})^{-1} dt_{ij}(\mathbf{R})$$

であり、これは変換関数の変化量と共に変換関数の逆行列がかかる。逆が存在するような形でないと接続ができない。

この条件を満たす1形式の集合  $\{\mathcal{A}_i\}$  は  $P(M, U(1))$  上に **Ehrensman** 接続を定める。

そこで  $\mathcal{A}$  の場の強さ  $\mathcal{F}$  は **Berry** の曲率と呼ばれ次のように2形式でつくられる。

$$\mathcal{F} = d\mathcal{A} = (d\langle \mathbf{R} |) \wedge (d|\mathbf{R}\rangle) = \left( \frac{\partial \langle \mathbf{R} |}{\partial R^\mu} \right) \left( \frac{\partial |\mathbf{R}\rangle}{\partial R^\nu} \right) dR^\mu \wedge dR^\nu \quad (17.105)$$

2形式にしてみると、対称性がきれいになりつつ。

## 17.7 非縮退系

次に具体的に非縮退系の場合を考える。固有状態  $|n; \mathbf{R}\rangle$  の時間変化は

$$|\Psi_n, t\rangle = e^{-iE_n t/\hbar} |n; \mathbf{R}\rangle$$

であり、位相が変化する。

例えばスピンの場合に磁場に相当するようなものとして連続的パラメタ  $\mathbf{R}$  を考える。

磁場の向きの変化がゆっくりであればスピンの向きは磁場の向きに追従し、磁場方向の成分

$$\left( \mathbf{S} \cdot \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|} \right)_{\mathbf{B}}$$

を一定に保つ。

従って、磁場が変化しても  $n$  番目の順位の変化はないのでこれを量子力学的断熱変化という。

この時の位相は時間変化するので

$$\exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_n t\right) \rightarrow \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_0^t E_n[\mathbf{R}(t')] dt'\right)$$

のように置き換えないといけない。

ところがこの場合の位相変化には自然に幾何学的な位相  $\gamma_n$  が加わる。

ハミルトニアンがパラメタ  $\mathbf{R}(t)$  の関数の場合、あるゲージ固定の条件のもとに、固有方程式

$$H[\mathbf{R}(t)]|n; \mathbf{R}(t)\rangle = E_n[\mathbf{R}(t)]|n; \mathbf{R}(t)\rangle \quad (17.106)$$

が成り立ち、さらに時間変化に対してはシュレディンガー方程式

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi_n, t\rangle = H[\mathbf{R}(t)]|\Psi_n, t\rangle \quad (17.107)$$

が成り立つ。1つの解として 17.107, 17.106 から境界条件

$$\mathbf{R}(0) = \mathbf{R}_0$$

があり、式 17.103 から

$$|\Psi_n, t\rangle = \exp\left(i\gamma_n(t) - \frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' E_n[\mathbf{R}(t')]\right) |n; \mathbf{R}(t)\rangle \quad (17.108)$$

とおく。

第 1 項を幾何学的位相、第 2 項を力学的な解とした。式 17.107 に代入すると

$$\begin{aligned} 0 &= \left(H - i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\right) |\Psi_n, t\rangle \\ &= \left(H - i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\right) \exp\left(i\gamma_n(t) - \frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' E_n[\mathbf{R}(t')]\right) |n; \mathbf{R}(t)\rangle \\ &= \exp\left(i\gamma_n(t) - \frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' E_n[\mathbf{R}(t')]\right) \left(H + \hbar \frac{d\gamma_n}{dt} - E_n[\mathbf{R}(t)] - i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\right) |n; \mathbf{R}(t)\rangle \end{aligned} \quad (17.109)$$

となる。

実空間に  $\gamma$  の実全微分が現れるので左から  $|n; \mathbf{R}(t)\rangle$  を作用させると、式 17.107, 17.106 から次の項しかのこらない。

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma_n(t)}{dt} &= i\langle n, \mathbf{R}(t) | \frac{\partial}{\partial t} |n, \mathbf{R}(t)\rangle \\ &= i\langle n, \mathbf{R}(t) | \nabla_{\mathbf{R}} |n, \mathbf{R}(t)\rangle \cdot \dot{\mathbf{R}}(t) \end{aligned}$$

これは位相の時間変化を表すので図のような閉じたループ  $C$  を考えると周期  $T$ 、長さを  $S$  として

$$\begin{aligned} \gamma_n[C] &= \int_0^T dt \dot{\mathbf{R}} \cdot i\langle n, \mathbf{R} | \nabla_{\mathbf{R}} |n, \mathbf{R}\rangle \\ &= \oint_C d\mathbf{R} \cdot i\langle n, \mathbf{R} | \nabla_{\mathbf{R}} |n, \mathbf{R}\rangle \\ &= - \oint_C d\mathbf{R} \cdot \mathbf{A}_n(\mathbf{R}) \\ &= - \oint_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{B}_n(\mathbf{R}) \end{aligned} \quad (17.110)$$

である。

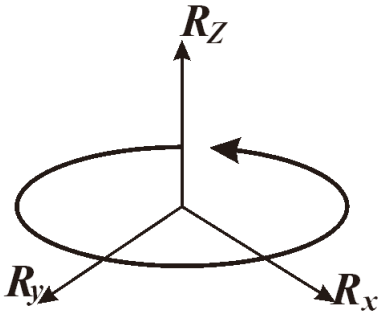


図 17.13: 閉じたループ  $C$  の周期を  $T$  長さを  $S$  とする

ただし、 $\mathbf{A}_n(\mathbf{R})$  はベクトルポテンシャルの類推から **Berry** 接続として

$$\mathbf{A}_n(\mathbf{R}) = -i\langle n, \mathbf{R} | \nabla_{\mathbf{R}} |n, \mathbf{R}\rangle \quad (17.111)$$

とする。

これが接続であることは式 17.110 から Berry の位相が

$$e^{i\gamma[C]} = \exp\left(-i \oint_C d\mathbf{R} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{R})\right) \quad (17.112)$$

と表すことから確認できる。

さらに  $\mathbf{B}_n(\mathbf{R})$  は式 17.105 から Berry 曲率として

$$\mathbf{B}_n(\mathbf{R}) = -\nabla_R \times i\langle n, \mathbf{R} | \nabla_R | n, \mathbf{R} \rangle \quad (17.113)$$

を定義すれば

$$\mathbf{B}_n(\mathbf{R}) = \nabla_R \times \mathbf{A}_n(\mathbf{R})$$

が成り立つ。これはパラメタ  $\mathbf{R}$  の経路  $C$  を実際の距離  $S$  上の積分に置き換えているし、接続  $\mathbf{A}_n(\mathbf{R})$  を射影空間上見ることに相当する。

ここで次のような局所ゲージ変換を状態に与えると

$$|n, \mathbf{R}\rangle' = e^{i\Lambda(\mathbf{R})} |n, \mathbf{R}\rangle$$

Berry 接続の変化は位相が  $\mathbf{R}$  の関数だから

$$\begin{aligned} \mathbf{A}'(\mathbf{R}) &= -i \left( \langle n, \mathbf{R} | e^{-i\Lambda(\mathbf{R})} \right) \nabla_R \left( e^{i\Lambda(\mathbf{R})} |n, \mathbf{R}\rangle \right) \\ &= \mathbf{A}_n(\mathbf{R}) + \nabla_R \Lambda(\mathbf{R}) \end{aligned}$$

となり、実空間に位相勾配が余分に加わる。つまり位相の勾配だけ接続がずれる。

しかし、おもしろいことに曲率は

$$\nabla_R \times \nabla_R \Lambda(\mathbf{R}) = 0$$

が成り立ち、変化しない。量子的な観測において位相変化がみられない。曲率はたとえ位相変化があっても同じものとして観測される。

これから **Berry** の位相の幾何学的な理解ができる。

式 17.110 の曲面はループ  $C$  により縁が与えられる図のような曲面である。

ところがファイバーを導入して、立体化したので上側の  $S_1$  下側の  $S_2$  などを選択することができて、積分単位  $dS_1, dS_2$  がきまる。

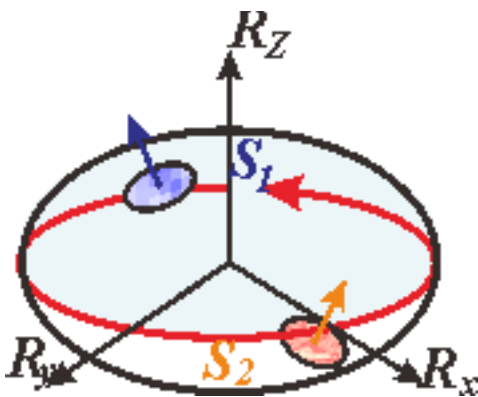


図 17.14: Berry の位相は裏表の曲面の選び方によらない

Berry の位相が図の  $S_1, S_2$  に依存しないならば位相の周期性のみ相違が出るはずだから

$$\int_{S_1} d\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{B}_n(\mathbf{R}) = \int_{S_2} d\mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{B}_n(\mathbf{R}) + 2\pi N, \quad (N \in \mathcal{Z})$$

である。これから

$$\int_{S_1-S_2} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{B}_n(\mathbf{R}) = 2\pi N \quad (17.114)$$

であり、注目すべきはこれが後節の Dirac の量子化条件に等しいことである。さらに式 15.111 から Berry の位相は同じベクトルの外積が 0 になることから

$$\begin{aligned} \gamma_n[C] &= \int d\mathbf{S} \cdot \nabla \times i \langle n, \mathbf{R} | \nabla | n, \mathbf{R} \rangle \\ &= \int d\mathbf{S} \cdot i \langle \nabla n, \mathbf{R} | \times | \nabla n, \mathbf{R} \rangle \\ &= \sum_{m \neq n} i \langle \nabla n, \mathbf{R} | m, \mathbf{R} \rangle \times \langle m, \mathbf{R} | \nabla n, \mathbf{R} \rangle \end{aligned}$$

つまり、Berry の位相は同じ  $n = m$  の時には 0 になって見えない。また次の恒等式を微分すると 0 であるから

$$\begin{aligned} \langle n | n \rangle &= 1 \\ \langle n | \nabla n \rangle^* &= \langle \nabla n | n \rangle = - \langle n | \nabla n \rangle \end{aligned}$$

が成り立つので  $\langle n | \nabla | n \rangle$  は純虚数でないといけない。また、次の固有方程式

$$H[\mathbf{R}] |n, \mathbf{R}\rangle = E_n[\mathbf{R}] |n, \mathbf{R}\rangle$$

を微分すると

$$(\nabla H[\mathbf{R}]) |n, \mathbf{R}\rangle + H[\mathbf{R}] |\nabla n, \mathbf{R}\rangle = \nabla E_n[\mathbf{R}] |n, \mathbf{R}\rangle + E_n[\mathbf{R}] |\nabla n, \mathbf{R}\rangle$$

左から

さらにこの式から  $\langle m, \mathbf{R} |$  をかけ、まとめると

$$(E_n - E_m) \langle m, \mathbf{R} | \nabla n, \mathbf{R} \rangle = \langle m, \mathbf{R} | \nabla (H - E_n) | n, \mathbf{R} \rangle$$

となるので  $E_n$  が一定であれば

$$\langle m, \mathbf{R} | \nabla | n, \mathbf{R} \rangle = \frac{\langle m, \mathbf{R} | \nabla H[\mathbf{R}] | n, \mathbf{R} \rangle}{E_n - E_m}$$

となるので式 17.113 から

$$\begin{aligned} \gamma_n[C] &= - \int d\mathbf{S} \cdot \mathbf{B}_n(\mathbf{R}) \\ &= -i \sum_{m \neq n} \frac{\langle n, \mathbf{R} | \nabla H[\mathbf{R}] | m, \mathbf{R} \rangle \times \langle m, \mathbf{R} | \nabla H[\mathbf{R}] | n, \mathbf{R} \rangle}{(E_n - E_m)^2} \end{aligned}$$

となる。これはゲージ不変な観測量である。次に Berry の位相の性質を浮き出す重要な 2 つの例を見る。

## 17.8 速さの異なる 2 種類系

原子、と電子のように速い自由度  $\mathbf{r}$  を持つ系と遅い自由度  $\mathbf{R}$  を持つ系を考える。物理的にはゆっくり振動する電場ポテンシャルのある中で運動する電子の系である。速い電子の自由度は、どう遅い原子の自由度に影響を与えるかをみてる。

この場合のハミルトニアンを

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{\mathbf{P}^2}{2M} + U(\mathbf{r}, \mathbf{R}) \quad (17.115)$$

とする。ここで遅い自由度は近似的に  $\mathbf{R}$  に凍り付いていると考えて瞬間的な部分ハミルトニアンを

$$h(\mathbf{R}) = \frac{\mathbf{P}^2}{2m} + V(\mathbf{r}, \mathbf{R}) \quad (17.116)$$

として固有方程式をここでも  $|n, \mathbf{R}\rangle = |\mathbf{R}\rangle$  で表すと

$$h(\mathbf{R})|\mathbf{R}\rangle = \epsilon_n(\mathbf{R})|\mathbf{R}\rangle \quad (17.117)$$

となる。縮退はないとして **Berry** の接続は式 17.111 より、

$$\mathcal{A}(\mathbf{R}) = \langle \mathbf{R} | d | \mathbf{R} \rangle \quad (17.118)$$

であり、**Berry** の曲率は式 17.113 より

$$\mathcal{F} = (d\langle \mathbf{R} |) \wedge (d | \mathbf{R} \rangle) = \left( \frac{\partial \langle \mathbf{R} |}{\partial R^\mu} \right) \left( \frac{\partial | \mathbf{R} \rangle}{\partial R^\nu} \right) dR^\mu \wedge dR^\nu \quad (17.119)$$

である。

ここで例を見るために全波動関数は

$$\Psi(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = \Phi(\mathbf{R})|\mathbf{R}\rangle$$

とかけるとして、遅い自由度の波動関数  $\Phi(\mathbf{R})$  が満たす有効なシュレディンガー方程式を求めよう。

式 17.115 の固有方程式は  $\mathbf{P}^2 \Phi | \mathbf{R} \rangle = -\nabla^2 (\Phi | \mathbf{R} \rangle)$  だから  $\nabla_R$  は  $\mathbf{R}$  のみに作用するとして

$$\begin{aligned} H\Psi(\mathbf{r}, \mathbf{R}) &= -\frac{1}{2M} (\nabla_R^2 \Phi(\mathbf{R}) + 2\nabla_R \Phi(\mathbf{R}) \cdot \nabla_R + \Phi(\mathbf{R}) \nabla_R^2) | \mathbf{R} \rangle - \Phi(\mathbf{R}) \left( \frac{1}{2m} \nabla_r^2 - V(\mathbf{r}) \right) | \mathbf{R} \rangle \\ &= E_n(\mathbf{R}) \Phi(\mathbf{R}) | \mathbf{R} \rangle \end{aligned}$$

となる。そこで左から  $| \mathbf{R} \rangle$  をかけ、シュレディンガー方程式 17.117 を用いると

$$-\frac{1}{2M} (\nabla_R^2 \Phi(\mathbf{R}) + 2\nabla_R \Phi(\mathbf{R}) \langle \mathbf{R} | \nabla_R | \mathbf{R} \rangle + \Phi(\mathbf{R}) \langle \mathbf{R} | \nabla_R^2 | \mathbf{R} \rangle) + \epsilon_n(\mathbf{R}) \Phi(\mathbf{R}) = E_n(\mathbf{R}) \Phi(\mathbf{R}) \quad (17.120)$$

となる。

ただしここでは次の **Born-Oppenheimer** 近似を用いて対角成分以外の行列成分を無視している。

$$\langle n, \mathbf{R} | \nabla_R | n', \mathbf{R} \rangle = 0, \quad n' \neq n$$

従って、 $|\Phi(\mathbf{R})\rangle$  に対する有効ハミルトニアンは

$$H_{eff}(n) \equiv -\frac{1}{2M} \left( \frac{\partial}{\partial R^\mu} + \mathcal{A}_\mu(\mathbf{R}) \right)^2 + \epsilon_n(\mathbf{R})$$

と与えられる。ただし、 $\mathcal{A}_\mu$  は **Berry** の位相の接続で

$$\mathcal{A}_\mu(\mathbf{R}) = \left\langle \mathbf{R} \left| \frac{\partial}{\partial R^\mu} \right| \mathbf{R} \right\rangle \quad (17.121)$$

の成分である。

この結果は興味あることに速さの異なる 2 種類系は **Berry** の接続を導いている。

**Berry** の位相が相対的な運動量のように振る舞い、速い自由度が遅い自由度と結合するベクトルポテンシャルを導く。

さらに固有値  $\epsilon_n(\mathbf{R})$  は有効ハミルトニアンのポテンシャルのように振る舞うとみなすことができる。

逆にベクトルポテンシャルが速さの異なる 2 粒子系から得られることは

これを波動関数  $|\mathbf{R}\rangle$  の位相自由度によるゲージ対称性の自発的生成と呼ぶこともある。



## 17.9 断熱変化

次に断熱変化を記述するシュレディンガー方程式は古典論からの拡散方程式から

$$H(\mathbf{R}(t))|\mathbf{R}(t), t\rangle = i \frac{d}{dt} |\mathbf{R}(t), t\rangle \quad (17.122)$$

とかける。ここで  $|\mathbf{R}(t), t\rangle$  は明らかな  $t$  依存性と、 $\mathbf{R}(t)$  による間接的な  $t$  依存性をもつ。そこで Berry はこの波動関数を次のようにおいた。

$$|\mathbf{R}(t), t\rangle = \exp\left(-i \int_0^t E_n(t) dt\right) \exp(i\gamma(t)) |\mathbf{R}(t)\rangle \quad (17.123)$$

ただし、 $|\mathbf{R}(t)\rangle$  は、 $H(\mathbf{R})$  の規格化された瞬間的固有状態

$$H(\mathbf{R})|\mathbf{R}\rangle = E_n(\mathbf{R})|\mathbf{R}\rangle, \quad \langle \mathbf{R}|\mathbf{R}\rangle = 1$$

である。前指数関数内の位相は力学位相であり、後ろの指数関数内の位相が Berry の位相である。ここであえて Berry の位相の関与する部分のみを抜き出すために

$$\mathcal{H} \equiv H(\mathbf{R}) - E_n(\mathbf{R}) \quad (17.124)$$

を定義すると便利である。この  $\mathcal{H}$  を用いてシュレディンガー方程式は

$$\mathcal{H}(\mathbf{R})|\mathbf{R}(t), t\rangle = i \frac{d}{dt} |\mathbf{R}(t), t\rangle \quad (17.125)$$

となるが、ゼロエネルギーの固有状態を

$$\mathcal{H}(\mathbf{R})|\mathbf{R}(t)\rangle = 0$$

と決めると修正されたシュレディンガー方程式 17.125 の解は

$$|\mathbf{R}(t), t\rangle = e^{i\gamma(t)} |\mathbf{R}(t)\rangle$$

となる。式 17.110 からこの Berry の位相が

$$\gamma(t) = i \int_0^t dt \frac{dR^\mu}{dt} \left\langle \mathbf{R}(t) \left| \frac{\partial}{\partial R^\mu} \right| \mathbf{R}(t) \right\rangle = i \int_{\mathbf{R}(0)}^{\mathbf{R}(t)} \langle \mathbf{R}(t) | d | \mathbf{R}(t) \rangle \quad (17.126)$$

と表すことができる。

この場合は領域内に共通した時間時間  $t$  と局所的な  $t$  を実質分けていることに留意する。

## 17.10 ホロノミー

第5部であつかったファイバー束の考えを用いると Berry の位相はまさに主束  $P(M, U(1))$  上の接続に伴うホロノミーであることを示そう。

第5部では例えば  $M: \mathcal{R} - \{0\}$  上にファイバー  $\mathcal{R}$  束と接続 1 形式の  $\omega$  をとり、次のループ  $\gamma$

$$\gamma: g \rightarrow g + 2\pi \quad g \in \mathcal{R}$$

と写像

$$\tau_\gamma: \pi^{-1}((1, 0)) \rightarrow \pi^{-1}((1, 0))$$

を定義する。  $\pi(u) = p$  をとるファイバー上の点  $u \in P$  を取り、  $M$  上の点  $p$  におけるループの集合を  $C_p(M)$  とする。

$$C_p \equiv \{\gamma : [0, 1] \rightarrow M | \gamma(0) = \gamma(1) = p\}$$

次の集合

$$\Phi_u = \{g \in G | \tau_\gamma(u) = ug, \gamma \in C_p(M)\}$$

は構造群  $G$  の部分群になる。これを  $u$  におけるホロノミ群という。

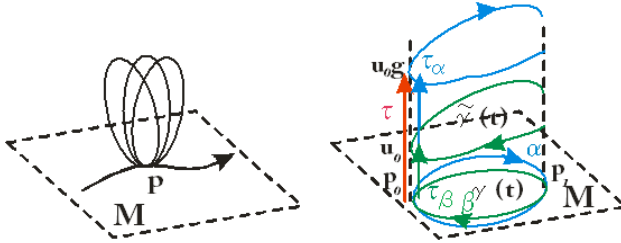


図 17.15: 図左のように  $p$  におけるループは幾通りもある。ファイバー上での変換  $\tau$  は垂直移動になる。

上図右のように写像  $\tau$  はファイバー上の変換で  $\tau(u) = ug$  となる。

そこで、ここでは  $M$  上のチャート  $U$  の切断として

$$\sigma(\mathbf{R}) = |\mathbf{R}\rangle$$

をとる。  $\mathbf{R} : [0, 1] \rightarrow M$  を  $U$  におけるループとする。第 5 部で扱った水平持ち上げにより

$$\tilde{\mathbf{R}}(t) = \sigma(\mathbf{R}(t)) g(\mathbf{R}(t))$$

と書く。ここでファイバー  $g(\mathbf{R}(0))$  を  $U(1)$  の単位元を選ぶ。以後簡単のため、  $g(\mathbf{R}(t)) = g(t)$  と書く。これで自然な切断がとれるので  $G$  の元  $g(t)$  は局所的に

$$\frac{dg_i(t)}{dt} = -\mathcal{A}_i(X)g_i(t)$$

とかけたので

$$\frac{dg(t)}{dt} g(t)^{-1} = -\mathcal{A}(d/dt) = -\left\langle \mathbf{R}(t) \left| \frac{d}{dt} \right| \mathbf{R}(t) \right\rangle \quad (17.127)$$

とかける。自然な切断がとれたから 1 パラメタ群として

$$g(t) = \exp(i\gamma(t))$$

と表せるから式 17.127 に代入し、

$$i \frac{d\gamma(t)}{dt} = -\left\langle \mathbf{R}(t) \left| \frac{d}{dt} \right| \mathbf{R}(t) \right\rangle$$

が得られる。これによりホロノミ群はあからさまには見えなくなる。

これを積分すると

$$\gamma(1) = i \int_0^1 \left\langle \mathbf{R}(s) \left| \frac{d}{ds} \right| \mathbf{R}(s) \right\rangle ds = i \int_{\mathbf{R}(0)}^{\mathbf{R}(1)} \langle \mathbf{R} | \nabla_{\mathbf{R}} | \mathbf{R} \rangle d\mathbf{R}$$

となるが、ここで  $\mathbf{R}(0) = \mathbf{R}(1)$  から

$$|\mathbf{R}(0)\rangle = |\mathbf{R}(1)\rangle$$

とすると

$$\gamma(1) = i \oint \langle \mathbf{R} | \nabla_{\mathbf{R}} | \mathbf{R} \rangle d\mathbf{R}$$

であり、この時  $e^{i\gamma(1)}$  は下図のように第 5 部で見たホロノミーになる。つまり  $|\tilde{\mathbf{R}}(1)\rangle$  と  $|\mathbf{R}(0)\rangle$  の差は位相のみとなる。

$$|\tilde{\mathbf{R}}(1)\rangle = \exp\left(-\oint \langle \mathbf{R} | d|\mathbf{R}\rangle\right) \cdot |\mathbf{R}(0)\rangle \quad (17.128)$$

これが Berry の位相だということもできる。

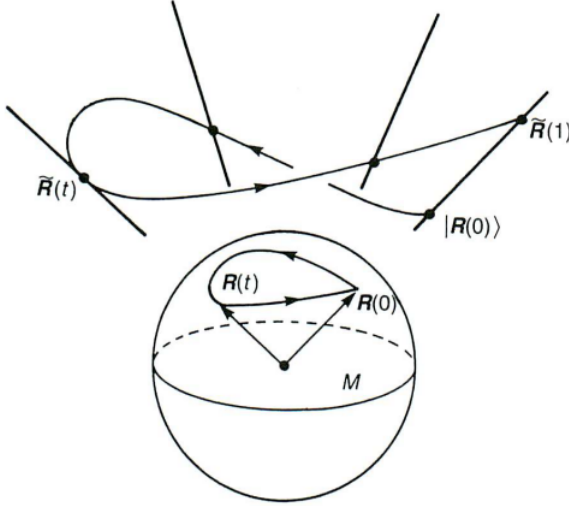


図 17.16: [12] より: 始点  $|\mathbf{R}(0)\rangle$  から持ち上げで異なるファイバー束を接続していく。

ファイバー束上を接続され  $|\mathbf{R}(0)\rangle$  と  $|\tilde{\mathbf{R}}(1)\rangle$  は閉じていないが底空間  $M$  上の射影ではループになる。この時の差

$$|\tilde{\mathbf{R}}(1)\rangle - |\tilde{\mathbf{R}}(0)\rangle$$

はループが閉じてないずれを表し、ホロノミーと呼ばれる。これが Berry の位相とみなせる。 $S$  を  $M$  における曲面で  $\mathcal{F}$  は次の 2 形式になっているのでストークスの定理から式 17.128 は式 17.119 の Berry の曲率を用いて次のようにかける。

$$\begin{aligned} |\tilde{\mathbf{R}}(1)\rangle &= \exp\left(-\oint \langle \mathbf{R} | d|\mathbf{R}\rangle\right) \cdot |\mathbf{R}(0)\rangle \\ &= \exp\left(-\oint_S \mathcal{F}\right) |\mathbf{R}(0)\rangle \end{aligned}$$

となる。ただし

$$\mathcal{F} = (d\langle \mathbf{R} |) \wedge (d|\mathbf{R}\rangle)$$

である。これは逆に場の強さと位相  $\gamma$  との関係も明らかにしている。

## 17.11 磁場中のフェルミオン

次に磁場中のスピン 1/2 を持つ粒子を考える。パラメタ  $\mathbf{R}$  は外部磁場に対応し、固有値  $\pm|R|$  を考える。これを満たすハミルトニアンは  $\sigma$  をパウリ行列として

$$H(\mathbf{R}) = \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} R_3 & R_1 - iR_2 \\ R_1 + iR_2 & -R_3 \end{pmatrix}$$

とおく。ここでも式 17.124 の処方箋を用いて Berry の位相に有効なハミルトニアンを次のように求める。

$$\mathcal{H} \equiv H(\mathbf{R}) - E_n(\mathbf{R}) = H(\mathbf{R}) - |\mathbf{R}|$$

を用いて

$$|\mathbf{R}\rangle_N \equiv \frac{1}{\sqrt{2R(R+R_3)}} \begin{pmatrix} R+R_3 \\ R_1+iR_2 \end{pmatrix} \quad (17.129)$$

とする。この場合のゲージポテンシャルは式 17.121 から

$$\mathcal{A}_N(\mathbf{R}) = {}_N \langle \mathbf{R} | \frac{\partial}{\partial R^\mu} | \mathbf{R} \rangle = -i \frac{R_2 dR_1 - R_1 dR_2}{2R(R+R_3)} \quad (17.130)$$

である、場の強さは

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= d\mathcal{A} = (d\langle \mathbf{R} |) \wedge (d| \mathbf{R} \rangle) \\ &= \frac{i}{2} \frac{R_1 dR_2 \wedge dR_3 + R_2 dR_3 \wedge dR_1 + R_3 dR_1 \wedge dR_2}{R^3} \end{aligned}$$

となる。ここで状態  $|\mathbf{R}\rangle$  は孤立しているとしたが、 $\mathbf{R} = 0$  では明らかに 2 つの固有状態が縮退している。

ここは特異点とみなすことができ物理的には第 5 章でみた磁気モノポールになる。

これは次のように確かめられる。 $\mathbf{R}$  空間での極座標を用いて

$$R_1 = R \sin \theta \cos \phi, \quad R_2 = R \sin \theta \sin \phi, \quad R_3 = R \cos \theta$$

で式 17.129 から

$$|\mathbf{R}\rangle_N = \frac{1}{\sqrt{1+\cos\theta}} \begin{pmatrix} 1+\cos\theta \\ \sin\theta(\cos\phi+i\sin\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad (17.131)$$

であるが、 $\theta = \pi$  の時も特異点となるので、ここでは  $R_3 = -R$  であり、この状態を南極  $|\mathbf{R}\rangle_S$  とすれば同じ固有値を持つが別の固有ベクトルとして、位相のみ変化させ

$$\begin{aligned} |\mathbf{R}\rangle_S &\equiv e^{i\phi} |\mathbf{R}\rangle_N = \begin{pmatrix} e^{i\phi} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2R(R-R_3)}} \begin{pmatrix} R_1 - iR_2 \\ R - R_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

とする。この固有ベクトルは  $\theta = 0$  すなわち  $R_3 = R$  とすると特異である。

これらの固有ベクトルから式に従って Berry のゲージ・ポテンシャルを求めると式 17.130 から

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_N &= -i \frac{R_2 dR_1 - R_1 dR_2}{2R(R+R_3)} = \frac{1}{2} i (1 - \cos\theta) d\phi, \quad \theta \neq \pi \\ \mathcal{A}_S &= i \frac{R_2 dR_1 - R_1 dR_2}{2R(R-R_3)} = \frac{1}{2} i (1 + \cos\theta) d\phi, \quad \theta \neq 0 \end{aligned} \quad (17.132)$$

となる。これらは次のゲージ変換で結ばれている。

$$\mathcal{A}_S = \mathcal{A}_N - id\phi = \mathcal{A}_N + e^{i\phi} de^{-i\phi}$$

この時、接続

$$g(\pi/2, \phi) = \exp(-i\phi)$$

は変換関数  $t_{NS}$  そのものである。式 17.132 は強さ  $-\frac{1}{2}$  の Wu-Yang のモノポールベクトルポテンシャルという。

これは後に式 18.41 で扱う。このモノポールの磁束  $\Phi$  は

$$\begin{aligned}
\Phi &= \oint_S \text{rot} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \\
&= \int_{U_N} dA_N + \int_{U_S} dA_S \\
&= \int_{S^1} A_N - \int_{S^1} A_S \\
&= - \int_0^{2\pi} d\phi \\
&= -2\pi
\end{aligned} \tag{17.133}$$

ここではパラメタ空間は  $S^2$  である。 $S^2$  の各点  $\mathbf{R}$  において状態が位相の自由度をもつ。これはファイバー束  $P(S^2, U(1))$  で表すことができるが、これは、まさにモノポールを表す。パラメタ  $\mathbf{R}$  を指定すると  $n$  番目の固有状態  $|n; \mathbf{R}\rangle$  に対応するファイバーを得る。

これは同値類として  $[|\mathbf{R}\rangle]$  を持ち、射影  $\pi$  によって、状態を定義しているパラメタに写すことができる。

$$\pi : e^{i\alpha} |\mathbf{R}\rangle \rightarrow \mathbf{R} \in S^2$$

ただし、全空間を1つの接続だけでは記述できない。従ってこの場合の束は自明ではないことになる。自明ではないことはどこかに特異点があり、この場合は原点  $\mathbf{R} = 0$  では  $\mathbf{B} = 0$  であり、モノポールがあることを示す。

ここでは縮退が起きている。

次に前節でも用いたホロノミーについてみておく、 $S^2$  上の基準点  $\mathbf{R}(0)$  をとり、ベクトル  $|\mathbf{R}(0)\rangle$  を選ぶ。 $S^2$  上のループ  $\mathbf{R}(t)$  を選び、

このループに沿ってベクトル  $|\mathbf{R}\rangle$  を平行移動させる。図でみたように元に戻った時、ベクトルには位相差が生じ、

$$\exp(i\gamma(1)) |\mathbf{R}\rangle$$

になる。この時の位相  $\gamma$  は  $\pi^{-1}(\mathbf{R}) \rightarrow \pi^{-1}(\mathbf{R})$  となり、これが Berry の位相に相当する。式 17.126 より

$$\gamma(1) = i \oint_{\mathbf{R}} \mathcal{A} = i \int_S \mathcal{F}$$

となる。つまり、微分形式と同じように  $\mathcal{F} = d\mathcal{A}$  の関係から導くことができる。Berry の位相  $\gamma(1)$  は曲面を  $S$  を貫く磁束として理解ができる。式 17.132 より、

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_S &= i \frac{R_2 dR_1 - R_1 dR_2}{2R(R - R_3)} = \frac{1}{2} i (1 + \cos \theta) d\phi \\
\mathcal{A}_N &= -i \frac{R_2 dR_1 - R_1 dR_2}{2R(R + R_3)} = \frac{1}{2} i (1 - \cos \theta) d\phi
\end{aligned}$$

2つの式を足すと、

$$d\phi = - \frac{R_2 dR_1 - R_1 dR_2}{(R - R_3)(R + R_3)}$$

が得られる。従ってこれは  $R = \pm R_3$  において特異である。

## 17.12 AB 効果

AB 効果を Berry の位相を用いて考える。 $\mathbf{R}$  周りのハミルトニアンをベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  を用いて

$$H(\mathbf{p} + e\mathbf{A}, \mathbf{r} - \mathbf{R}(t))$$

とおくと、ベクトルポテンシャルのない場合の固有方程式は

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{r} - \mathbf{R})\psi_n^0(\mathbf{R}) = E_n\psi_n^0(\mathbf{R})$$

に対してベクトルポテンシャルのある場合を断熱近似を用いて考えると

$$H(\mathbf{p} + e\mathbf{A})\psi_n(\mathbf{R}) = E_n\psi_n(\mathbf{R})$$

は

$$\left(\hbar\frac{\nabla}{i} + e\mathbf{A}\right)\psi_n(\mathbf{R}) = \exp\left(-i\frac{e}{\hbar c}\int_{\mathbf{R}}^{\mathbf{r}} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r})\right)\mathbf{p}\psi_n^0(\mathbf{R}) - e\mathbf{A}\psi_n(\mathbf{R}) + e\mathbf{A}(\mathbf{r})\psi_n(\mathbf{R})$$

だから

$$H(\mathbf{p} + e\mathbf{A})\psi_n(\mathbf{R}) = \exp\left(-i\frac{e}{\hbar c}\int_{\mathbf{R}}^{\mathbf{r}} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r})\right)H(\mathbf{p})\psi_n^0(\mathbf{R})$$

と書き直され、次のように波動関数の位相変化に帰着する。

$$\psi_n(\mathbf{R}) = \exp\left(-i\frac{e}{\hbar c}\int_{\mathbf{R}}^{\mathbf{r}} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r})\right)\psi_n^0(\mathbf{R})$$

よって位相部分が

$$\begin{aligned} i\gamma &= -\int d\mathbf{R} \cdot (n, \nabla_{Rn}) \\ &= -\frac{e}{\hbar} \int d\mathbf{R} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{R}) + (n_0|\nabla_{Rn_0}) \\ &= -i\frac{2\pi}{\Phi_0} \int d\mathbf{R} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{R}) + i\gamma_0 \end{aligned}$$

ベクトルポテンシャルの存在が

$$\exp\left(-i\frac{2\pi}{\Phi_0} \int d\mathbf{R} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{R})\right)$$

の位相変化を与えていることがわかる。特に  $\mathbf{R}$  が  $C = \partial S$  の境界線の閉曲線を作る場合は

$$\begin{aligned} \gamma &= -\frac{2\pi\Phi}{\Phi_0} \\ \Phi &= \int_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{B}, \quad \mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A} \end{aligned} \tag{17.134}$$

で与えられる。この結果は前節の式 17.21 と同じである。

### 17.13 経路積分と AB 効果

局所的な位相変換がゲージ変換では重要であることを見た。ここでは経路積分を利用してより一般化してみる。位相因子  $W$  については一価であるとは限らないがその微分  $\frac{dW}{dt}$  が一価である場合を考える。世界線として

$$\mathbf{r}(t) : t \in [t_i, t_f]$$

により始点  $\mathbf{r}_i$  と終点  $\mathbf{r}_f$  を考え、これを固定した時、特異点を横切らないという前提があれば

$$\int_{t_i}^{t_f} dt \frac{dW(\mathbf{r}(t), t)}{dt} = \int_i^f dW = W_f - W_i$$

が一般に成り立つ。しかし、AB 効果をみる場合、重要なのは特異点を含む場合である。空間 3 次元の系で  $z$  軸が特異点の集合になるような場合を次の図のように考える。

図左のように、粒子の経路を  $P(t_i, r_i) - P'(t_f, r_f)$  として  $W$  の特異線となる  $z > 0$  をよこぎらずに変形する場合は

$$\int_{C_2} dW - \int_{C_1} dW = \int_{C_2 - C_1} ds \cdot \nabla W = \int_{\partial S} ds \cdot \nabla W = \int_S dS \cdot \text{rot} \nabla W = 0$$

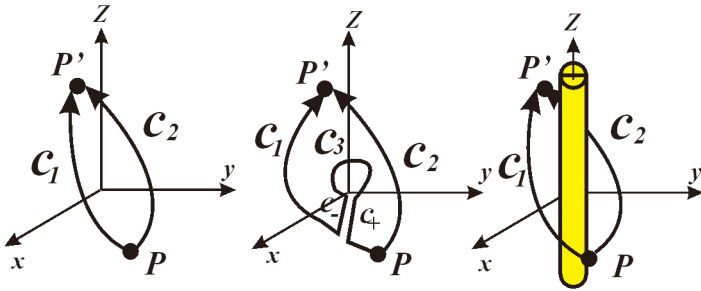


図 17.17: 特異線になる  $z$  軸を横切る場合右、横切らない経路左

よって

$$\int_{C_2} dW = \int_{C_1} dW = W(\mathbf{r}_f, t_f) - W(\mathbf{r}_i, t_i)$$

であり経路に依存しない、端点のみの差になる。

しかし、図中のように  $z$  軸を横切るような経路を考えると

$$\int_{C_2} dW = \int_{C_1 + C_+ + C_3 + C_-} dW = \int_{C_1 + C_3} dW = \int_{C_1} dW + \int_{C_3} dW$$

したがって次の項が余分に加わることになる。 $\vec{\nabla} W = \mathbf{A}' - \mathbf{A} = \delta \mathbf{A}, \delta \mathbf{B} = \text{rot} \delta \mathbf{A}$  として

$$\begin{aligned} \int_{C_3} dW &= \int_{C_3} ds \cdot \nabla W = \int_{C_3} ds \cdot \delta \mathbf{A} \\ &= \int_S \mathbf{dS} \cdot \text{rot} \delta \mathbf{A} \\ &= \int_S \mathbf{dS} \cdot \delta \mathbf{B} \\ &= \Phi \end{aligned}$$

である。図では特異点の周りを1周しているが、さらに  $n$  回、回る場合や逆回りする場合も考えられる。この回転数  $n$  を用いて経路積分の表記は

$$\psi(\mathbf{r}, t, n) = \int d\mathbf{r} K'(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') \psi(\mathbf{r}', t') \quad (n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots)$$

この時の積分核は作用積分から  $C_3$  経路を1周毎に  $\chi$  の作用があるとして

$$\begin{aligned} K'(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') &= \int_{C(n); P'; P} D\{\mathbf{r}(t)\} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt L'(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) \right\} \\ &= C_0 \chi^n \int_{P'; P} D\{\mathbf{r}(t)\} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt L'(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) \right\} \end{aligned}$$

ただし、 $\Phi_0 = h/e$  を磁束単位として

$$\chi = \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{C_3} dW \right\} = \exp \left\{ 2\pi i \frac{\Phi}{\Phi_0} \right\}$$

$$C_0 = \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} n \int_{C(0)=C_1} dW \right\}$$

である。つまり、特異点の回りを  $n$  回まわることにより、位相変化

$$\Delta\phi = n\frac{e}{\hbar}\Phi = \frac{n\Phi}{\Phi_0}$$

を受ける。これは古典的には表れることのない量子力学的な特徴である。つまり、量子場ではベクトルポテンシャルが本質的な役割を果たす。AB 効果の実験の場合図右のように狭い領域に閉じ込められた無限に長いソレノイドコイルの周りの経路の差が円柱座標  $(r, \phi, z)$  を用いて図 7.7 より

$$W = \frac{\Phi}{2\pi}\phi$$

とすると

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}W &= \frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial\phi}\hat{e}_\phi \\ &= \frac{\Phi}{2\pi r}\hat{e}_\phi \\ &= \Phi\frac{\hat{z}\times\hat{\mathbf{r}}}{2\pi r^2} \\ &= \delta\mathbf{A}\end{aligned}$$

であるから

$$\text{rot}\mathbf{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\Phi}{2\pi}\right) = 0$$

にも関わらず

$$\int_S d\mathbf{S}\cdot\delta\mathbf{B} = \int_S d\mathbf{S}\cdot\text{rot}\delta\mathbf{A} = \int_{C_3} d\mathbf{r}\cdot\delta\mathbf{A} = \int d\mathbf{r}\cdot\vec{\nabla}W = \Phi$$

$$\delta\mathbf{B} = \text{rot}\delta\mathbf{A} = \Phi\delta(\mathbf{r})\hat{z}$$

である。

## 17.14 縮退系

ここで系に対称性があり、同じエネルギー準位を持つ複数の状態のある縮退した系を考える。

簡単のため 2 重に縮退した断熱変化を考えよう。あるパラメタ  $\mathbf{R}(t)$  が時刻  $t_0$  で  $\mathbf{R}_0$  を出発し、ゆっくり変化する場合を考える。

同じエネルギー準位  $E_n(\mathbf{R}(t))$  に属する 2 つの状態を

$$|n, 1, \mathbf{R}(t)\rangle, |n, 2, \mathbf{R}(t)\rangle$$

とすると  $t_0$  においては

$$|n, 1, \mathbf{R}_0\rangle, |n, 2, \mathbf{R}_0\rangle$$

であったとする。時間が経過するとこの状態が交差していくことになるから、状態ベクトルは 2 つの状態の和であり、位相変化は時間に対しては全体に共通しているとし、式より、

$$|\Psi_{n,1}; t\rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_0^t dt' E_n(\mathbf{R}(t'))\right) (\Omega_{11}(t) |n, 1, \mathbf{R}(t)\rangle + \Omega_{21}(t) |n, 2, \mathbf{R}(t)\rangle)$$

$$|\Psi_{n,2}; t\rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_0^t dt' E_n(\mathbf{R}(t'))\right) (\Omega_{12}(t) |n, 1, \mathbf{R}(t)\rangle + \Omega_{22}(t) |n, 2, \mathbf{R}(t)\rangle)$$



となる。これを1式で表現すると添え字  $\beta = 1, 2$  を追加し、

$$|\Psi_{n,\beta}; t\rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' E_n(\mathbf{R}(t'))\right) \left( \sum_{\alpha=1,2} \Omega_{\alpha\beta}(t) |n, \alpha, \mathbf{R}(t)\rangle \right) \quad (17.135)$$

状態ベクトルが物理的な状態であるためにはノルムを保存するのでこれから行列  $\Omega_{\alpha\beta}$  はユニタリでなくては  
いけない。初期条件から

$$\Omega_{\alpha\beta}(0) = \delta_{\alpha\beta}$$

である。したがって縮退がない場合時間変化に依存した Berry の位相  $e^{i\gamma(t)}$  は式 17.108 からユニタリ行列  $\Omega$  に置き換わるわけである。式 17.109 と同様にシュレディンガー方程式から  $\gamma = 1, 2$  として行列  $\Omega$  にかが  $t$  のみの関数だから

$$\begin{aligned} 0 &= \left( H - i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) |\Psi_{n,\beta}; t\rangle \\ &= \left( H - i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' E_n[\mathbf{R}(t')]\right) \sum_{\gamma} \Omega_{\gamma,\beta}(t) |n, \gamma, \mathbf{R}(t)\rangle \\ &= \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' E_n[\mathbf{R}(t')]\right) \sum_{\gamma} \left( \Omega_{\alpha\beta}(t) (H - E_n) - i\hbar \frac{d\Omega_{\gamma\beta}}{dt} + \Omega_{\gamma\beta}(-i\hbar) \frac{\partial}{\partial t} \right) |n, \gamma, \mathbf{R}(t)\rangle \end{aligned}$$

前回と同様に左から  $\langle n, \alpha, \mathbf{R}(t) |$  をかけるとシュレディンガー方程式から () 内の第1項は消えるので次のように  $\Omega$  の全微分が得られる。これに  $\frac{\partial}{\partial t} = \dot{\mathbf{R}} \nabla_{\mathbf{R}}$  を用いると

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega_{\alpha\beta}(t)}{dt} &= - \sum_{\gamma} \left\langle n, \alpha, \mathbf{R} \left| \frac{\partial}{\partial t} |n, \gamma, \mathbf{R}(t)\rangle \right. \right\rangle \Omega_{\gamma\beta}(t) \\ &= -\dot{\mathbf{R}}(t) \cdot \sum_{\gamma} \langle n, \alpha, \mathbf{R} | \nabla_{\mathbf{R}} |n, \gamma, \mathbf{R}(t)\rangle \Omega_{\gamma\beta}(t) \\ &= -i \sum_{\gamma} \dot{\mathbf{R}}(t) \cdot \mathbf{A}_{\alpha\gamma}(\mathbf{R}(t)) \Omega_{\gamma\beta}(t) \end{aligned}$$

ただし、次で **Berry** の接続行列を定義する。

$$\mathbf{A}_{\alpha\beta}(\mathbf{R}(t)) = -i \langle n, \alpha, \mathbf{R} | \nabla_{\mathbf{R}} |n, \beta, \mathbf{R}\rangle$$

これにより、時刻  $t$  と  $t + dt$  の時間変化に対応して  $\Omega$  の変化が次のようになる。

$$\begin{aligned} \Omega(t + dt) &= \Omega(t) - idt \dot{\mathbf{R}}(t) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{R}(t)) \Omega(t) + \dots \\ &= \left( 1 - idt \dot{\mathbf{R}}(t) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{R}(t)) \right) \Omega(t) + \dots \\ &\simeq \exp\left(-idt \dot{\mathbf{R}}(t) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{R}(t))\right) \Omega(t) \end{aligned}$$

したがって

$$dt \cdot \dot{\mathbf{R}}(t) = \Delta \mathbf{R}$$

とおくと、時間推進は  $e^{-i\Delta \mathbf{R} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{R})}$  を繰り返しかければいいという経路積分の手法が使える。  
順序積  $P$  を用いて

$$\begin{aligned} P \exp\left(-i \int_{\mathbf{R}_0}^{\mathbf{R}(t)} d\mathbf{R} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{R})\right) \\ = \dots e^{-i\Delta \mathbf{R}_3 \cdot \mathbf{A}(\mathbf{R}_0 + \Delta \mathbf{R}_1 + \Delta \mathbf{R}_2)} e^{-i\Delta \mathbf{R}_2 \cdot \mathbf{A}(\mathbf{R}_0 + \Delta \mathbf{R}_1)} e^{-i\Delta \mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{A}(\mathbf{R}_0)} \end{aligned}$$

とすると、 $\Omega(0) = 1$  だから

$$\Omega(t) = P \exp\left(-i \int_{\mathbf{R}_0}^{\mathbf{R}(t)} d\mathbf{R} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{R})\right) \quad (17.136)$$

と  $\Omega$  が求まる。

したがって  $\mathbf{R}$  が 1 周して元に戻る場合を考えると。周期を  $T$  としてもとの  $\mathbf{R}_0$  に戻った時の Berry の位相行列は

$$\Omega(C) = P \exp \left( -i \oint_C d\mathbf{R} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{R}) \right) \quad (17.137)$$

となるが、これは縮退がない場合の Berry の位相が式 17.112 から

$$e^{i\gamma[C]} = \exp \left( -i \oint_C d\mathbf{R} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{R}) \right)$$

であったことから縮退があることにより順序積により位相行列がつくられている。

## 17.15 ゲージ変換

縮退がない場合はゲージ変換は位相変換であった。ここで縮退  $\gamma$  がある場合どうなるかを考えておこう。そのために縮退し 2 つの状態の混合としてのゲージ変換を  $U$  をユニタリ行列として

$$|n, \alpha, \mathbf{R}\rangle' = \sum_{\gamma} U_{\gamma\alpha}(\mathbf{R}) |n, \gamma, \mathbf{R}\rangle \quad (17.138)$$

とすると、位相行列の変換は  $\mathbf{A}_n(\mathbf{R}) = -i \langle n, \mathbf{R} | \nabla_{\mathbf{R}} | n, \mathbf{R} \rangle$  だったから  $\mathbf{A}_n(\mathbf{R})$  の変換則を求めてみると

$$\begin{aligned} \mathbf{A}'_{\alpha\beta}(\mathbf{R}) &= -i \langle n, \alpha, \mathbf{R} | \nabla_{\mathbf{R}} | n, \beta, \mathbf{R} \rangle' \\ &= -i \langle n, \gamma, \mathbf{R} | U_{\alpha\gamma}^{\dagger}(\mathbf{R}) \nabla_{\mathbf{R}} U_{\delta\beta}(\mathbf{R}) | n, \delta, \mathbf{R} \rangle \\ &= U_{\alpha\gamma}^{\dagger}(\mathbf{R}) (-i \langle n, \gamma, \mathbf{R} | \nabla_{\mathbf{R}} | n, \delta, \mathbf{R} \rangle) U_{\delta\beta}(\mathbf{R}) \\ &= U_{\alpha\gamma}^{\dagger}(\mathbf{R}) \mathbf{A}_{\gamma\delta}(\mathbf{R}) U_{\delta\beta}(\mathbf{R}) - i U_{\alpha\gamma}^{\dagger}(\mathbf{R}) (\nabla_{\mathbf{R}} U_{\delta\beta}(\mathbf{R})) \langle n, \gamma, \mathbf{R} | n, \delta, \mathbf{R} \rangle \end{aligned}$$

となるので結局接続の変換則が

$$\mathbf{A}'(\mathbf{R}) = U^{\dagger}(\mathbf{R}) \mathbf{A}(\mathbf{R}) U(\mathbf{R}) - i U^{\dagger}(\mathbf{R}) \nabla_{\mathbf{R}} U(\mathbf{R})$$

となることがわかる。これから時間推進が  $U^{\dagger}U = UU^{\dagger} = 1$  を用いると

$$\begin{aligned} e^{-i\Delta\mathbf{R} \cdot \mathbf{A}'(\mathbf{R})} &= 1 - i\Delta\mathbf{R} \cdot \mathbf{A}'(\mathbf{R}) \\ &= 1 - i\Delta\mathbf{R} \cdot U^{\dagger}(\mathbf{R}) \mathbf{A}(\mathbf{R}) U(\mathbf{R}) - \Delta\mathbf{R} \cdot U^{\dagger}(\mathbf{R}) \nabla_{\mathbf{R}} U(\mathbf{R}) \\ &= U^{\dagger}(\mathbf{R}) (1 - i\Delta\mathbf{R} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{R})) (U(\mathbf{R}) - \Delta\mathbf{R} \cdot \nabla_{\mathbf{R}} U(\mathbf{R})) \\ &= U^{\dagger}(\mathbf{R}) e^{-i\Delta\mathbf{R} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{R})} U(\mathbf{R} - \Delta\mathbf{R}) \end{aligned}$$

式 17.136 から  $\Omega$  の変換則が  $\mathbf{R}_0$  から  $\mathbf{R}_0$  に戻る場合に次のようになる。

$$\Omega'(C) = U^{\dagger}(\mathbf{R}_0) \Omega(C) U(\mathbf{R}_0) \quad (17.139)$$

この時の周期を  $T$  として、状態ベクトルの変化は式 17.135 から

$$\begin{aligned} |\Psi_{n,\beta}; T\rangle' &= \sum_{\gamma} |\Psi_{n,\gamma}; T\rangle U_{\gamma\beta} \\ &= \exp \left( -\frac{i}{\hbar} \int_0^T dt E_n[\mathbf{R}(t)] \right) \sum_{\eta,\gamma} |n, \eta, \mathbf{R}_0\rangle \Omega_{\eta\gamma} U_{\gamma\beta} \\ &= \exp \left( -\frac{i}{\hbar} \int_0^T dt E_n[\mathbf{R}(t)] \right) \sum_{\alpha,\eta,\delta,\gamma} |n, \eta, \mathbf{R}_0\rangle U_{\eta\alpha} U_{\alpha\delta}^{\dagger} \Omega_{\delta\gamma} U_{\gamma\beta} \\ &= \exp \left( -\frac{i}{\hbar} \int_0^T dt E_n[\mathbf{R}(t)] \right) \sum_{\alpha} |n, \alpha, \mathbf{R}_0\rangle' \Omega'_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

となり変換された位相行列が出てくる。この行列の対角和は式 17.137 から

$$W \equiv \text{tr} \Omega(C) = \text{tr} P \exp \left( -i \oint_C d\mathbf{R} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{R}) \right)$$

で定義され、これは前節で紹介した Wilson Loop である。。順序積が式 17.139 の繰り返しであり、トレースは行列の積順に関係しないので Wilson Loop はゲージ不変量である。

## 17.16 断熱近似と経路積分

[19]

アラハノフ・ボーム効果を 2 準位のハミルトニアンとして

$$\hat{H} \left( \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}, x, A_k(x) \right) = \frac{1}{2m} \left( \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} - eA(x) \right)^2$$

とする。ただし式 18.27 に対応し、時間独立なポテンシャル

$$A_k(x) = \frac{B}{2} (-y, x, 0) \text{ for } r = \sqrt{x^2 + y^2} \leq a$$

$$A_k(x) = \frac{a^2 B}{2r^2} (-y, x, 0) \text{ for } r = \sqrt{x^2 + y^2} \geq a$$

とし、場に電場は存在しないとする。先に見たように z 方向に半径 a の円柱があり、この中には磁場が存在する。

第 1 量子化をこれに施すと式から周期的な時間変化  $T$  の位置ベクトルで内積をとると  $L = p \cdot \dot{q} - H$  から

$$\left\langle x(T) \left| \exp \left( -\frac{i}{\hbar} \int_0^T \hat{H} dt \right) \right| x(0) \right\rangle = \int Dp Dx \text{Exp} \left[ \frac{i}{\hbar} \int_0^T \left( p \cdot \dot{x} - \frac{1}{2m} (p - eA)^2 \right) dt \right]$$

ここで積分測度  $Dp = D(p - eA)$  だから  $p \rightarrow p + eA$  で書き換えると

$$\left\langle x(T) \left| \exp \left( -\frac{i}{\hbar} \int_0^T \hat{H} dt \right) \right| x(0) \right\rangle = \int Dp Dx \text{Exp} \left[ \frac{i}{\hbar} \int_0^T \left( (p + eA) \cdot \dot{x} - \frac{1}{2m} p^2 \right) dt \right]$$

さらに時間の周積分を空間の周積分に置き換える

$$\begin{aligned} \left\langle x(T) \left| \exp \left( -\frac{i}{\hbar} \int_0^T \hat{H} dt \right) \right| x(0) \right\rangle &= \int Dp Dx \text{Exp} \left[ \frac{i}{\hbar} \int_0^T \left( (p + eA) \cdot \dot{x} - \frac{1}{2m} p^2 \right) dt \right] \\ &= \int Dp Dx \text{Exp} \left[ \frac{i}{\hbar} \int_0^T dt \left( (p \cdot \dot{x} - \frac{1}{2m} p^2) + \frac{ie}{\hbar} \int_0^T A \cdot \dot{x} dt \right) \right] \\ &= \int Dp Dx \text{Exp} \left[ \frac{i}{\hbar} \int_0^T dt \left( (p \cdot \dot{x} - \frac{1}{2m} p^2) + \frac{ie}{\hbar} \int_C A \cdot dx \right) \right] \end{aligned} \quad (17.140)$$

ここで最後の項は量子条件から磁束  $\Phi$  を用いて  $B = \nabla \times A$  から

$$\Phi = \int_s B \cdot ds \quad (17.141)$$

$$\int_C A \cdot dx = n\Phi \text{ as Integer}$$

とするとこの  $n$  を用いて

$$\begin{aligned} \left\langle x(T) \left| \exp \left( -\frac{i}{\hbar} \int_0^T \hat{H} dt \right) \right| x(0) \right\rangle &= \sum_n \int [DpDx]_{(n)} \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \int_0^T dt \left( (p \cdot \dot{x} - \frac{1}{2m} p^2) + \frac{ie}{\hbar} n\Phi \right) \right] \\ &= \sum_n \left\langle x(T) \left| \exp \left( -\frac{i}{\hbar} \int_0^T \hat{H} dt \right) \right| x(0) \right\rangle_n \exp \left( \frac{ie}{\hbar} n\Phi \right) \end{aligned}$$

となるので結局相互作用の影響は位相にかかる。また、有限和になるので干渉性が復活してくる。

## 18 ファイバー束

幾何学的な位相についてみてきたが、これは第2、3、5部であつかったファイバー束を考えた時の底空間からの持ち上げの位相として考えてみよう。これまでの例を再考してみる。

### 18.1 Maxwell 作用

接続の考えはそのままゲージ理論に関係する。

そこで第5部第1章の電磁気論の場の強さが  $U(1)$  ゲージ理論のから導かれることをみておこう。

1次元で考えるので無視して、ここでは構造定数  $f_{\alpha\beta}^\gamma = 0$  とする。底空間  $M$  は4次元 Minkowski 空間とする主束  $P$  は

$$P = \mathbb{R}^4 \times U(1)$$

とする。ゲージポテンシャルは

$$\mathcal{A} = A_\mu dx^\mu$$

と表す。このゲージポテンシャル  $\mathcal{A}$  は通常のポテンシャルポテンシャルに比べリー環の因子  $i$  だけ異なるので

$$A_\mu = i\mathcal{A}_\mu$$

であり、場の強さはポテンシャルの変分から

$$\mathcal{F} = d\mathcal{A}$$

となるので、これを成分にすると、1形式に対して

$$d\omega_1 = \left( \frac{\partial\omega_y}{\partial x} - \frac{\partial\omega_x}{\partial y} \right) dx \wedge dy + \left( \frac{\partial\omega_z}{\partial y} - \frac{\partial\omega_y}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left( \frac{\partial\omega_x}{\partial z} - \frac{\partial\omega_z}{\partial x} \right) dz \wedge dx$$

のようになったから成分表示では

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\mu\nu} &= d\mathcal{A} \\ &= \frac{\partial\mathcal{A}_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial\mathcal{A}_\mu}{\partial x^\nu} \end{aligned}$$

となるので  $\mathcal{F}$  は Bianchi 恒等式

$$d\mathcal{F} = \mathcal{F} \wedge \mathcal{A} - \mathcal{A} \wedge \mathcal{F} = 0$$

が成り立つ。これは  $\mathcal{F}$  が完全形式で、 $d\mathcal{F}$  が閉形式から

$$d\mathcal{F} = d^2\mathcal{A} = \frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial x^2} dx = 0$$

から成分表示で

$$\partial_\lambda \mathcal{F}_{\mu\nu} + \partial_\nu \mathcal{F}_{\lambda\mu} + \partial_\mu \mathcal{F}_{\nu\lambda} = 0$$

となる。そこで

$$d\mathcal{F} = iF_{\mu\nu}$$

とすると 3 次元空間成分  $i, j, k = 1, 2, 3$  を用いて

$$E_i = F_{io}$$

$$B_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} F_{jk}$$

となり、これは *Maxwell* 方程式である。このように幾何的に *Maxwell* 方程式が導ける。さらに次のように **Maxwell** 作用を  $A$  を汎関数として

$$S_M[A] \equiv -\frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^4} \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu} d^4x$$

で定義すると力学的な方程式が導ける。さらに作用は  $\mathcal{F}_{\mu\nu}$  の双対を

$$*\mathcal{F}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \mathcal{F}^{\kappa\lambda} \epsilon_{\kappa\lambda\mu\nu}$$

とすると

$$\int_{\mathbb{R}^4} \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu} d^4x = \int_{\mathbb{R}^4} \mathcal{F} \wedge *\mathcal{F} d^4x$$

と置き換えられるので

$$S_M[A] \equiv -\frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^4} \mathcal{F} \wedge *\mathcal{F} d^4x$$

が成り立ち、

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4} \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) \\ F_{\mu\nu} * F^{\mu\nu} &= \mathbf{B} \cdot \mathbf{E} \end{aligned}$$

が成り立つので運動方程式

$$\partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} = 0$$

からは次の *Maxwell* 方程式が具体的に求まる。

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0$$

## 18.2 Dirac モノポール

[12, 15]

前節でスピノルの固有関数から Berry の接続を導いた。この時の曲率は Dirac のモノポールのようになる。そこで実際に Dirac のモノポールについてみていく。

*Maxwell* 方程式では磁場、電場については非対称性が残る。これを回避する方法として Dirac は磁気単極子の導入を試みた。 $r = 0$  の原点にこの磁荷  $g$  があるとすると点磁荷モノポールは

$$\sigma = g\delta(\mathbf{r}) \tag{18.1}$$

磁束密度の発散は

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 4\pi g\delta^3(\mathbf{r}) \quad (18.2)$$

となる。これは

$$\Delta(1/r) = -4\pi\delta^3(\mathbf{r})$$

$$\nabla(1/r) = -\mathbf{r}/r^3$$

という関係式を用いると左辺が

$$4\pi g\delta(\mathbf{r}) = -g\Delta(1/r) \quad (18.3)$$

$$= -g\nabla(\nabla(1/r)) \quad (18.4)$$

$$= \nabla\left(\frac{g\mathbf{r}}{r^3}\right) \quad (18.5)$$

となるので磁束密度は

$$\mathbf{B} = \frac{g\mathbf{r}}{r^3} \quad (18.6)$$

である。磁束  $\Phi$  は

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi g \quad (18.7)$$

となる。

そこで北極側でベクトルポテンシャルを  $A^N$  として前節のように Berry の接続を一对一の関数をつくるため、

$$A_x^N = \frac{-gy}{r(r+z)} \quad A_y^N = \frac{gx}{r(r+z)} \quad A_z^N = 0 \quad (18.8)$$

とおくとこれは  $\operatorname{rot}\mathbf{A} = \mathbf{B}$  を満たす。

ここでは  $r = 0$  の原点も含めるために Heaviside-StepFunction を  $\theta$  として

$$\theta(z) = \int_{-\infty}^z \delta(\xi) d\xi \quad (18.9)$$

を使うと、原点付近を含む表現として

$$\operatorname{rot}\mathbf{A}^N = \frac{g\mathbf{r}}{r^3} + 4\pi g\delta(x)\delta(y)\theta(-z) \quad (18.10)$$

を付け加えて定義する。この時、 $z$  軸の負の部分 ( $\theta = \pi$ ) を除き、 $\operatorname{rot}\mathbf{A} = \mathbf{B}$  となる。

この  $z$  軸に沿う特異性を DiracString と呼ぶ。この第 2 項があるおかげで任意の領域  $D$  の境界を  $\partial D$  とし、ソレノイドの作る磁場を  $B_{sol}$  として

$$\oint_{\partial D} \mathbf{B}_{sol} \cdot d\mathbf{S} = 0 \Leftrightarrow \nabla \cdot \mathbf{B}_{sol} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \quad (18.11)$$

となることを防ぐことができる。

この特異性は座標に依存しない。そこで次に南極側でベクトルポテンシャルを  $A^S$  として

$$A_x^S = \frac{gy}{r(r+z)} \quad A_y^S = R_{g*} \frac{-gx}{r(r+z)} \quad A_z^S = 0 \quad (18.12)$$

とすると今度は  $z$  軸の正の部分 ( $\theta = -\pi$ ) を除き  $\operatorname{rot}\mathbf{A} = \mathbf{B}$  を満たす。このような特異性が残るのは式 18.7 が示すように周積分原因であり、周積分のループは一点に縮まないことによる。特異性がない場合は  $\operatorname{rot}\mathbf{A} = \mathbf{B}$  から

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \text{rot} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \text{div}(\text{rot} \mathbf{A}) dV = 0 \quad (18.13)$$

が成り立つ。このような特異性は1種類のベクトルポテンシャルで表すことにこだわらなければ回避できる。ベクトルポテンシャルを  $A^S, A^N$  を用意すれば Wu と Yang は次のように解決できることを示した。 $A^S, A^N$  を球座標に変換し前節のように

$$\mathbf{A}^N(r) = \frac{g(1 - \cos \theta)}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\phi \quad (18.14)$$

$$\mathbf{A}^S(r) = \frac{-g(1 + \cos \theta)}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\phi \quad (18.15)$$

$$\mathbf{e}_\phi = -\sin \phi \mathbf{e}_x + \cos \phi \mathbf{e}_y \quad (18.16)$$

例えばベクトルポテンシャル  $A^N$  の  $\theta, \phi$  の変化は x 成分、y 成分について次の図のようになる。

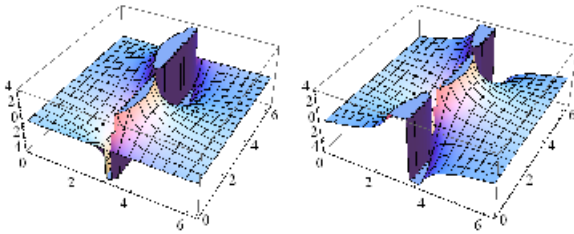


図 18.1:  $A^N$  の x,y 成分

北半球と南半球の交差する領域は赤道になる。重要な点はこの差は積分してしまえば見えなくなるような視点をもつことで

$$\int A^N ds - \int A^S ds = \oint A ds = \Lambda$$

とみなせることで、この時この赤道上でゲージ変換

$$A^N - A^S = \text{grad} \Lambda \quad (18.17)$$

が成り立つ。

$$\text{grad}(f) = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi \quad (18.18)$$

だから

$$\begin{aligned} A^N - A^S &= \frac{2g}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\phi \\ &= \text{grad}(2g\phi) \end{aligned} \quad (18.19)$$

が得られるので2つのベクトルポテンシャルの差は決まり、

$$\Lambda = 2g\phi \quad (18.20)$$

である。下図のように  $\Lambda$  は  $\theta = \pi, \theta = 0$  では定義されない量であるが赤道上では  $\theta = \pi/2$  であるから定義できる。

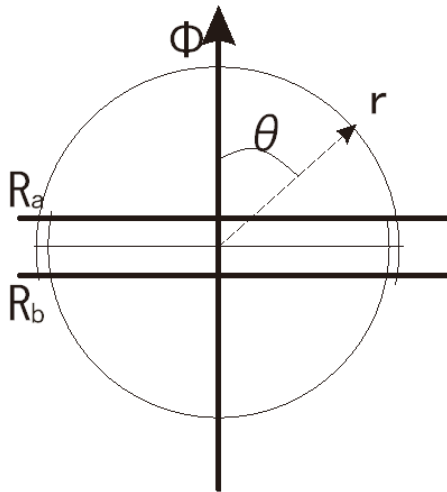


図 18.2:

よって、この時の全磁束がストークスの定理から  $s$  を赤道上の円周として

$$\begin{aligned}
 \Phi &= \oint_S \text{rot} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \\
 &= \int_{U_N} \text{rot} \mathbf{A}^N \cdot d\mathbf{S} + \int_{U_S} \text{rot} \mathbf{A}^S \cdot d\mathbf{S} \\
 &= \oint_s \mathbf{A}^N \cdot ds - \oint_s \mathbf{A}^S \cdot ds \\
 &= \oint_s \text{grad}(2g\phi) \cdot ds \\
 &= 4\pi g
 \end{aligned}$$

を得る。結局、接続  $\mathbf{A}$  の差のみが有効である。

例えば、磁化  $g$  のモノポールの磁場の中で電子が運動するとどうなるだろうか。

電荷  $e$ 、質量  $m$  としてシュレディンガー方程式は

$$\frac{1}{2m} \left( p - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 \psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}) \quad (18.21)$$

この式はゲージ変換に対して不変であることは既に見た。そこで前節の  $A^N$  と  $A^S$  はゲージ変換よりむすばれているとすると式 18.19 より  $\psi^N$  と  $\psi^S$  を北極と南極の波動関数とすると位相が変化し、

$$\psi^S = \exp\left(\frac{-ie(2g\phi)}{\hbar c}\right) \psi^N \quad (18.22)$$

となる。 $\phi$  の変化に対して波動関数が 1 価になる条件として次の Dirac の量子化条件が得られる。

$$\frac{2eg}{\hbar c} = n \quad (18.23)$$

これは

$$g = n \frac{\hbar c}{e} \quad (18.24)$$

で磁荷と電荷が結ばれ、一方が自然数であれば片方も自然数になる条件になっている。



### 18.3 Dirac String

不連続な位相変化がある場合について具体的に見てみよう。

円周上で次のような 1 変数 *Schödinger* 方程式を満たす場合を考える。

$$-\frac{1}{2} \left( \frac{d}{d\theta} \right)^2 \psi(\theta) = E(\theta)$$

ただし、 $A$  は定数とすると 1 周で  $2\pi A$  位相変化するとして次のように境界条件を課す。

$$\psi(2\pi) = e^{-2\pi A} \psi(0)$$

この方程式の固有関数と固有値は次のように求まる。

$$\begin{aligned} \psi &= \sum_n \phi_n(\theta) \\ \phi_n(\theta) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i(n-A)\theta} \\ E_n &= \frac{1}{2} (n-A)^2 \end{aligned} \tag{18.25}$$

従って固有関数  $\phi_n(\theta)$  は円周上で 1 価ではない。

しかし、この時の非可積分位相を

$$\alpha(\theta) = - \int_0^\theta A d\theta' = -A\theta$$

と定義して、 $\phi_n(\theta)$  から分離すると次のようにおける

$$\begin{aligned} \phi'_n(\theta) &= e^{-i\alpha} \phi_n(\theta) \\ &= e^{iA\theta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i(n-A)\theta} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{in\theta} \end{aligned}$$

つまり  $\phi'_n(\theta)$  は円周上で確定した位相を持つことができ、同じ式 18.25 の固有値を持つ。

そこで例として次の図のように無限に長いソレノイドコイルを考える磁場  $B$  が

$$\mathbf{B} = (0, 0, B_0) \tag{18.26}$$

で与えられているとする。この時ベクトルポテンシャルは次のように  $z$  成分以外を持ち、

$$\mathbf{A} = \text{rot}\mathbf{B} = \frac{1}{2} \mathbf{B} \times \mathbf{r} = \frac{1}{2} B_0 (-y, x, 0) \tag{18.27}$$

この時、ゲージ場の強さは  $z$  軸からの距離に関係した関数  $\rho$  で決まる。これは常に  $z$  軸に垂直である。

ソレノイドコイルの外では  $\mathbf{B} = 0$  としよう。しかし、注意すべきは  $\mathbf{B} = 0$  でも  $\mathbf{A} = 0$  ではない。磁場  $\mathbf{B}$  は磁束密度であるから磁束  $\Phi$  は次のように与えられる。ソレノイドコイルの半径を  $a$  とすると、

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{ndS} = B_0 \pi a^2 \tag{18.28}$$

これはストークスの定理から線積分に変換できて

$$\Phi = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = B_0 \pi a^2 \tag{18.29}$$

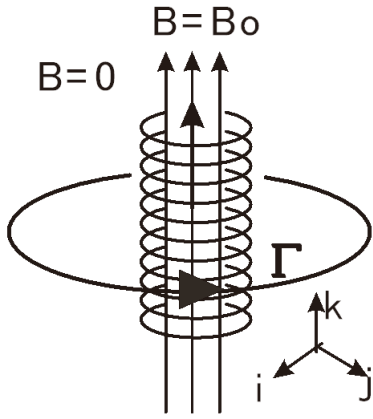


図 18.3: ソレノイド外の磁場は 0 である。

となる。ではいかにしてソレノイドの外の  $\mathbf{A}$  を求めるべきか、1 つは  $\mathbf{B}$  に比例する形で

$$\mathbf{A} \propto (-y, x, 0)$$

であり図の閉曲線  $\Gamma$  の半径を  $\rho_0$  とすると半径が大きくなれば  $A$  は弱くなると考えるべきだから

$$|\mathbf{A}| \propto \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

である。以上の考察から

$$\mathbf{A} = \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2}} (-y, x, 0)$$

とおける。よって式 17.9 に代入し、

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \frac{2\pi k \rho_0}{\rho_0} = B_0 \pi a^2$$

から定数  $k$  が次のように求まる。

$$k = \frac{B_0 a^2}{2}$$

これからソレノイドコイル内と外でベクトルポテンシャルは次のように求まる。

$$\mathbf{A}_{in} = \frac{1}{2} B_0 (-y, x, 0)$$

$$\mathbf{A}_{out} = \frac{1}{2} \frac{B_0 a^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} (-y, x, 0) \quad (18.30)$$

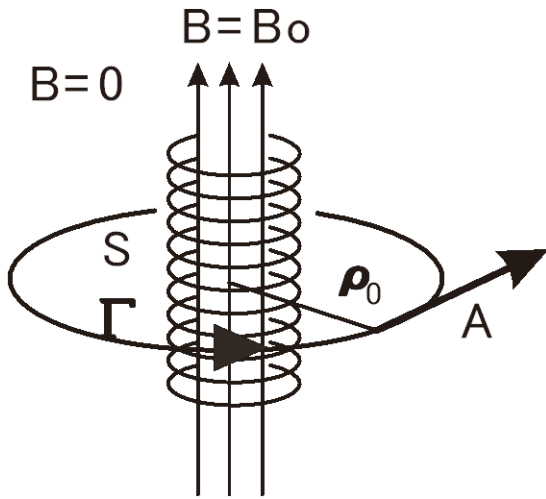


図 18.4: ソレノイド外のベクトルポテンシャルは 0 ではない

境界においてベクトルポテンシャルは一致しない、ソレノイドの内と外で何か不連続なことが起きているのだろうか。

あるいはこれまでの論述に問題があるのだろうか。そこで次のような関数を用意する。

$$\phi = \text{ArcTan} \frac{y}{x} \quad (18.31)$$

これは  $x$  軸から  $y$  軸方向にみた角度を表している。しかし、次の図で見ると  $y=0$  では定義されない領域を持つ。

ここでは  $\phi$  が  $\pi$  から  $-\pi$  に一気にジャンプするかのようである。

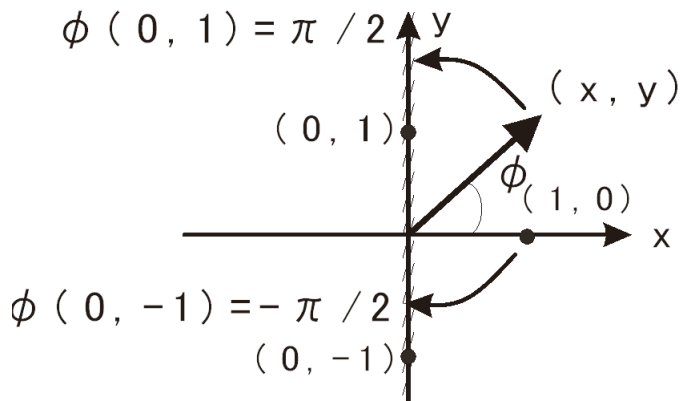


図 18.5: この位相は連続しない

3次元のグラフ表した様子は次ようになる。



図 18.6:

この関数を微分すると次のようになる。

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \text{ArcTan} \frac{y}{x} = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1 + (y/x)^2} = \frac{-y}{x^2 + y^2} \quad (18.32)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \text{ArcTan} \frac{y}{x} = \frac{\frac{1}{x}}{1 + (y/x)^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad (18.33)$$

この結果は式 18.30 より、まさに  $A_x, A_y$  に比例定数を除いて一致している。そこでパラメタ  $t$  を導入し、次のような関数を定義する。

$$\chi(t, x, y, z) = -\frac{B_0 a^2}{2} \phi(x, y) \quad (18.34)$$

そして次のようにベクトルポテンシャルを書き直す。

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \chi \quad (18.35)$$

これは次のように成分表示される。

$$\mathbf{A}' = \frac{B_0 a^2}{2} \begin{pmatrix} \frac{-y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{B_0 a^2}{2} \begin{pmatrix} \frac{-y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (18.36)$$

領域  $y = 0, x < 0$  では特異的であり注意がいる。連続的な関数がとれるのは図 18.6 のようにこの平面の反空間である。

そこで  $z$  成分を無視すると次の図のように 2 次元の問題として考えることができる。  $\chi$  は  $x < 0$  の領域で不連続である。

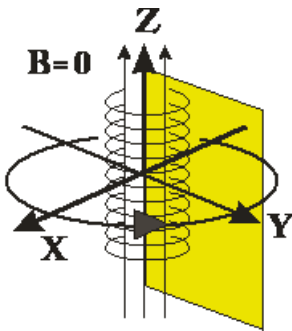


図 18.7: 不連続になる半平面

この様子を  $\delta$  関数を参考にして考えてみる。ディラックのデルタ関数は次のような不連続的な性質を持っていた。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0) \quad (18.37)$$

デルタ関数はヘビサイドのステップ関数  $\theta$  によって次のようにも定義できた。

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (18.38)$$

$$\delta(x) = \frac{d\theta}{dx} \quad (18.39)$$

この関数はまさしく  $x = 0$  でジャンプしている。

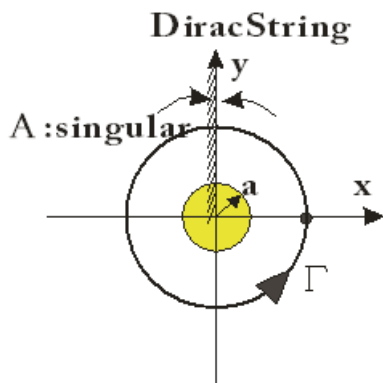


図 18.8: Dirac のひも

このステップ関数により

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta}{dx} f(x) dx &= [\theta(x)f(x)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \theta(x)f'(x) dx \\ &= -[f(x)]_0^{\infty} = f(0) \end{aligned}$$

となるから式 18.37 が成り立つ。ベクトルポテンシャルの連続性はこのようなステップ関数のような不連続な関数を原点におくことで保たれている。これは古典的な物理学においても原点で特異な (0 で割るような) 場合に考慮する必要がある。ある連続的な関数が  $g(x_0) = 0$  となっていれば

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(g(x))dx = \frac{f(x_0)}{|g'(x_0)|}$$

が成り立つ。ただし  $g(x)$  は一価の関数である。

## 18.4 Wu-Yang モノポール [12]

電磁気での底空間は  $U(1)$  で向きを入れることができ、自明な束であった。

そこで底空間が自明ではない例として Dirac のモノポールを考える。ポアンカレの補題によれば、場の強さ  $\mathcal{F} = dA$  が成り立ち、大域的に完全形式にはなる。そこで簡単のために時間にはよらない場合を考える。

Wu-Yang(1975) は Dirac のモノポールのトポロジカルな構造を第 2,3,5 部で取り上げたファイバー束で説明した。

$\mathbb{R}^3 - \{0\}$  を考え、この中の球を完全に被覆できるチャートとして  $\mathbf{A}^N, \mathbf{A}^S$  を考えて、特異性を除き、1 対 1 の対応が場との間にできるようにする。磁場は  $g$  をモノポールの強さとして、

$$\mathbf{B} = g\mathbf{r}/r^3$$

と考える。前節の式 18.19 結果から 2 つのチャートを結ぶゲージ変換は

$$\mathbf{A}^N - \mathbf{A}^S = \frac{2g}{r \sin \theta} \hat{e}_\phi = \text{grad}(2g\phi), \quad \Lambda = 2g\phi$$

だったことを利用する。ただし、 $\Lambda$  は  $\theta = 0$  and  $\theta = \pi$  では定義されていないが、ここでは  $\theta = \pi/2$  のみを考えるので問題はない。

この時の全磁束はガウスの法則から

$$\Phi = \oint_S \text{curl} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_{U_N} \text{curl} \mathbf{A}^N \cdot d\mathbf{S} + \int_{U_S} \text{curl} \mathbf{A}^S \cdot d\mathbf{S}$$

だからストークスの定理から

$$\begin{aligned}
\Phi &= \oint_S \text{rot} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \\
&= \int_{U_N} \text{rot} \mathbf{A}^N \cdot d\mathbf{S} + \int_{U_S} \text{rot} \mathbf{A}^S \cdot d\mathbf{S} \\
&= \oint_s \mathbf{A}^N \cdot ds - \oint_s \mathbf{A}^S \cdot ds \\
&= \oint_s \text{grad}(2g\phi) \cdot ds \\
&= 4\pi g
\end{aligned} \tag{18.40}$$

となった。この結果が次のようにファイバー束の接続から導くことができる。

Dirac モノポールは第 2 部の Hopf 写像でもみたように  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$  の空間で定義され、この空間は  $\mathbb{S}^2$  と同じホモトピーであったので、ここでの  $U(1)$  束として  $P(\mathbb{S}^2, U(1))$  とする。 $\mathbb{S}^2$  は次の 2 つのチャートで被覆する。

$$U_N \equiv \left\{ (\theta, \phi) \mid 0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi + \epsilon \right\}, U_S \equiv \left\{ (\theta, \phi) \mid \frac{1}{2}\pi - \epsilon \leq \theta \leq \pi \right\}$$

$\omega$  を  $P$  上の Ehresmann 接続とし、 $U_N, U_S$  上の切断を  $\sigma_N, \sigma_S$  とし、ゲージポテンシャルは式から

$$\mathcal{A}_N = \sigma_N^* \omega, \quad \mathcal{A}_S = \sigma_S^* \omega$$

で定義する。 $\mathcal{A}_N, \mathcal{A}_S$  は例えば次の Wu-Yang ゲージポテンシャルを利用する。

$$\mathcal{A}_N = ig(1 - \cos \theta)d\phi, \quad \mathcal{A}_S = -ig(1 + \cos \theta)d\phi \tag{18.41}$$

$t_{NS}$  を変換関数として  $S^1$  の赤道から  $U(1)$  の構造群への写像を担う。これは第 3 部のホモロジーから

$$\pi_1(U(1)) \simeq \mathbb{Z}$$

で分類された。そこで第 2 部の束写像の例でみたように

$$t_{NS} = \exp[i\psi(\phi)] \quad \psi \in \mathbb{R}$$

と置けば、接続は第 2 部の接続の式から

$$\mathcal{A}_N = t_{NS}^{-1} \mathcal{A}_S t_{NS} + t_{NS}^{-1} dt_{NS} = \mathcal{A}_S + id\psi$$

とおける。よって式 18.41 から

$$d\psi = -i(\mathcal{A}_N - \mathcal{A}_S) = 2gd\phi$$

となるので  $\phi$  が 0 から  $2\pi$  まで変化する間に  $\psi(\phi)$  が

$$\Delta\psi \equiv \int d\psi = \int_0^{2\pi} 2gd\phi = 4\pi g$$

従って  $t_{NS}$  の一意的な定義を要請すると  $\Delta\psi$  は  $2\pi$  の倍数の必要が出てくる。

$$\Delta\psi/2\pi = 2g \in \mathbb{Z}$$

つまり、磁気モノポールの量子化条件が導かれた。ここでの整数  $2g$  はファイバー束が属するホモトピー類を表している。

この数は  $F_N = d\mathcal{A}_N, \mathcal{F}_N = i\mathcal{F}_N$  の対応から得られて、全フラックスを  $\Phi$  とすると式 18.40 から

$$\begin{aligned}
\Phi &= \oint_S \text{rot} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \\
&= \int_{U_N} dA_N + \int_{U_S} dA_S \\
&= \int_{S^1} A_N - \int_{S^1} A_S \\
&= 2g \int_0^{2\pi} d\phi \\
&= 4\pi g
\end{aligned} \tag{18.42}$$

したがって場の強さがファイバー束のねじれ具合を決める。これが曲率を決めていく構造になるわけである。この一般化により連続する時間についても同じ構造を持たせる必要があり、これは次部で扱う。

## 18.5 Aharonov-Bohm 効果 [12]

Aharonov-Bohm 効果については既に前節でふれた。この例は実際の空間において、ファイバー束の対応を明らかにすることができる。

実験は図のように電荷  $e$  の電子のビームが  $-\infty$  ら入り、スクリーン  $C$  上に干渉模様をつくる。ソレノイドの長さは無限とし、ビームの真ん中に置かれている。電子は磁場を感じることはないが、ベクトルポテンシャルは影響を受ける。

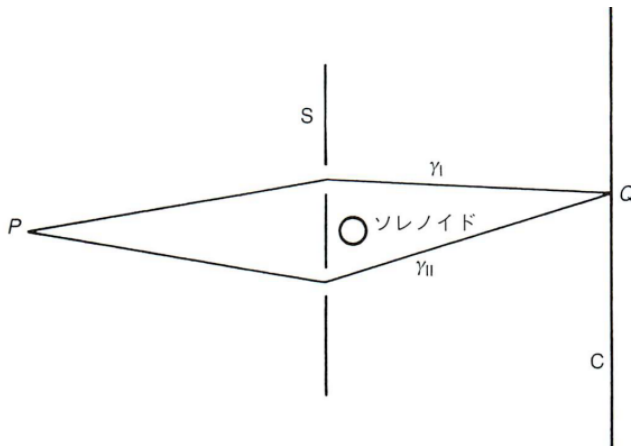


図 18.9: [12] より：磁場  $B$  はソレノイドの外に漏れないとする

簡単にするためにソレノイドの半径は次の磁束を保つが無限小とみなせるとすると式 15.90 から

$$\begin{aligned}
\Phi &= \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} \\
\mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \left( -\frac{y\Phi}{2\pi r^2}, \frac{x\Phi}{2\pi r^2}, 0 \right), \quad A_0 = 0
\end{aligned} \tag{18.43}$$

とする。これは磁場のないソレノイドの外側であってもベクトルポテンシャルの  $x, y$  成分は存在していることをあたわしている。

そこで、装置の影響を考慮したポテンシャル  $V(r)$  を加えたハミルトニアンは

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} - ieA_\mu \right)^2 + V(r)$$

図において2つの経路の波動関数  $\psi_1, \psi_2$  を区別する場合、 $\mathbf{A} \neq 0$  であれば位相変化を考慮し、( $i = 1, 2$ ) として、

$$\psi'_i(r) = \exp\left(ie \int_P^r \mathbf{A}(r') \cdot dr'\right) \psi_i(r)$$

のようになる。そこでP点から離れた基準点で  $\psi'_1(P) = \psi'_2(P)$  となるような  $\psi_1, \psi_2$  の重ね合わせを考える。スクリーン上のQ点での振幅は経路が区別できる場合は

$$\begin{aligned} \psi'_1(Q) + \psi'_2(Q) &= \exp\left(ie \int_{\gamma_1} \mathbf{A}(r') \cdot dr'\right) \psi_1(Q) + \exp\left(ie \int_{\gamma_2} \mathbf{A}(r') \cdot dr'\right) \psi_2(Q) \\ &= \exp\left(ie \int_{\gamma_2} \mathbf{A}(r') \cdot dr'\right) \left[ \exp\left(ie \int_{\gamma_1 - \gamma_2} \mathbf{A}(r') \cdot dr'\right) \psi_1(Q) + \psi_2(Q) \right] \end{aligned} \quad (18.44)$$

となる。

$$\Phi = \oint \mathbf{A} dr' = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

とすると式 18.44 は次の位相部分の関係式

$$e^{i(\Phi_a - \Phi_b)} = 2\pi n$$

があれば干渉模様に変化はないことを意味する。

これはまさにファイバー束で扱った切断の条件に相当する。Aharonov-Bohm 効果は基本的に2次元で考えると  $M = \mathbb{R}^2$  の多様体を考え、主束  $P(M, U(1))$  とその伴束  $E = P \times_{\rho} \mathbb{C}$  を考える。これは第2部でもあつかった複素直線束であり、その切断が波動関数  $\psi$  になっている。そこで前回と同じ処方で

Lie 環に値を持つ1次微分形式

$$\mathcal{A} = iA = iA_{\mu} dx^{\mu}$$

を定義する。この局所接続に伴う共変微分は第5部の結果から

$$\mathcal{D} = d + \mathcal{A}$$

とおけ、この時の  $\mathcal{A}$  は式 18.43 のベクトルポテンシャルが対応する。

$$d\mathcal{A} = \mathcal{F} = 0$$

であったから、接続は局所平坦と考えてよく、原点にあるソレノイドを囲む単位円  $S^1$  を考え、 $e^{i\theta}$  ( $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ) でパラメタ表示する。

この時の  $S_1$  上の接続は式 18.43 で  $r = 1$  として

$$\mathcal{A} = i \frac{\Phi}{2\pi} d\theta$$

とおける。波動関数は切断の条件を満たすはずだから局所接続に従って  $S^1$  に沿って平行移動するはずである。よって共変微分が0になるはずだから

$$\mathcal{D}\psi(\theta) = \left( d + i \frac{\Phi}{2\pi} d\theta \right) \psi(\theta) = 0$$

を満たす必要がある。これを満たす解は

$$\psi(\theta) = e^{-i\Phi\theta/2\pi}$$

である。従ってこの切断  $\psi$  を取ると磁束  $\Phi$  のみ位相に関与し、電子の速度には依存しない。

よってホロノミー  $\Gamma: \pi^{-1}(\theta = 0) \rightarrow \pi^{-1}(\theta = 0)$  は1周回転として

$$\Gamma: \psi(0) \rightarrow e^{-i\Phi} \psi(0)$$

となることがわかる。



## 19 トポロジカル絶縁体

### 19.1 2準位系

Berry の位相の具体例としてスピン 1/2 と磁場の結合したハミルトニアンを見ていく

$$H[\mathbf{R}] = \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

ただし、

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (19.1)$$

2準位は次のような状態ベクトルで表すことができる。ゲージ自由度の位相因子を  $e^{-i\psi/2}$  とし式 9.5 から  $\mathbf{R} = R(\sin\theta \cos\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\theta)$  とすると固有値  $E_+ = |\mathbf{R}|$ ,  $E_- = -|\mathbf{R}|$  に対する固有ベクトルが

$$|+, \mathbf{R}\rangle = e^{-i\psi/2} \begin{pmatrix} e^{-i\phi/2} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{+i\phi/2} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

$$|-, \mathbf{R}\rangle = e^{-i\psi/2} \begin{pmatrix} e^{-i\phi/2} \sin \frac{\theta}{2} \\ -e^{+i\phi/2} \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

となる。これから Berry 接続は

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_+(\mathbf{R}) &= -i \langle +, \mathbf{R} | \nabla_{\mathbf{R}} | +, \mathbf{R} \rangle \\ &= -ie^{+i\psi/2} \left( e^{+i\phi/2} \cos \frac{\theta}{2}, e^{-i\phi/2} \sin \frac{\theta}{2} \right) \cdot e^{-i\psi/2} \\ &\quad \left( \begin{array}{l} -\frac{i}{2} \nabla(\psi + \phi) e^{-i\phi/2} \cos \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \nabla\theta e^{-i\phi/2} \sin \frac{\theta}{2} \\ -\frac{i}{2} \nabla(\psi - \phi) e^{+i\phi/2} \sin \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2} \nabla\theta e^{+i\phi/2} \cos \frac{\theta}{2} \end{array} \right) \\ &= -i \left[ -\frac{i}{2} \nabla\psi - \frac{i}{2} \nabla\phi \left( \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} (-\nabla\psi - \nabla\phi \cos\theta) \end{aligned} \quad (19.2)$$

となり、位相だけに依存することがわかる。そこで  $\mathbf{R}$  と、 $|+, \mathbf{R}\rangle = |\theta, \phi\rangle$  が一対一に対応するように  $\psi$  を決めておくと便利である。

$$\psi = -\phi, \mathbf{A}_+^N(\mathbf{R}) = \frac{1}{2} (1 + \cos\theta) \nabla\phi = \frac{1 + \cos\theta}{2R \sin\theta} e_\phi$$

$$\psi = +\phi, \mathbf{A}_+^S(\mathbf{R}) = \frac{1}{2} (-1 - \cos\theta) \nabla\phi = \frac{-1 - \cos\theta}{2R \sin\theta} e_\phi$$

Dirac のモノポールでもそうだが下図のように  $\mathbf{A}^N$  は  $\theta = \pi$  で特異、 $\mathbf{A}^S$  は  $\theta = 0$  で特異になる。

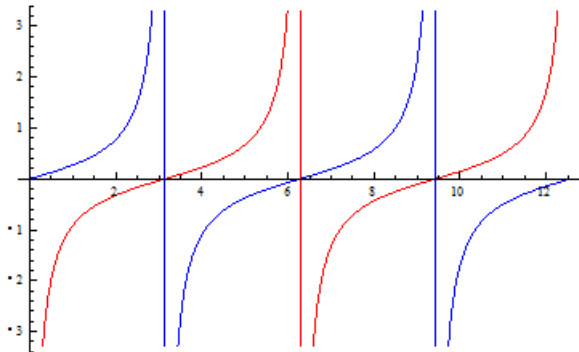


図 19.1:  $\mathbf{A}^N$  は青、 $\mathbf{A}^S$  は赤

したがって2つの関数があれば特異点を回避できる。単一のゲージで固定するとパラメタ領域で Berry の接続は定義できなくなる。接続とは傾き  $\tan \theta$  を切り替えてなめらかにつなげる作業でもある。

次に  $\mathbf{A}_-(\mathbf{R})$  についても位相変換することで次のように得られる。

$$\theta \rightarrow \pi - \theta, \phi \rightarrow \pi - \phi, \psi \rightarrow \psi + \pi/2$$

の時、

$$|+, \mathbf{R}\rangle \rightarrow |-, \mathbf{R}\rangle$$

となるので

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_-(\mathbf{R}) &= -i \langle -, \mathbf{R} | \nabla_{\mathbf{R}} | -, \mathbf{R} \rangle \\ &= \frac{1}{2} (-\nabla \psi + \nabla \phi \cos \theta) \end{aligned}$$

$$\psi = +\phi, \mathbf{A}_-^N(\mathbf{R}) = \frac{1}{2} (-1 + \cos \theta) \nabla \phi = \frac{-1 + \cos \theta}{2R \sin \theta} e_\phi$$

$$\psi = -\phi, \mathbf{A}_-^S(\mathbf{R}) = \frac{1}{2} (+1 + \cos \theta) \nabla \phi = \frac{+1 + \cos \theta}{2R \sin \theta} e_\phi$$

となる。

したがって Berry の曲率が

$$\mathbf{B}_\pm(\mathbf{R}) = \nabla \times \mathbf{A}_\pm^N(\mathbf{R}) = \nabla \times \mathbf{A}_\pm^S(\mathbf{R}) \quad (19.3)$$

$$= \pm \frac{1}{2} \frac{\mathbf{R}}{R^3} \quad (19.4)$$

これは次節の式 18.6 と同じ結果であり、Dirac のモノポールに相当する。

## 19.2 磁場中の2次元電子系

3次元磁場中の2次元電子系のハミルトニアンを

$$H(p_x, p_y) = \frac{1}{2m} \left( \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2$$

とおく。ベクトルポテンシャルは  $\mathbf{B}(0, 0, B)$  とするから、Landau ゲージを用いて  $y$  成分のみで

$$\mathbf{A} = \text{rot} \mathbf{B} = (0, Bx, 0)$$

とすると

$$H(p_x, p_y) = \frac{1}{2m} \left( p_x^2 - \left( p_y - \frac{e}{c} Bx \right)^2 \right)$$

と書き直すことができる。これは座標の  $y$  成分を持たないために運動量の  $y$  方向は保存する。

したがって規格化された波動関数は  $y$  方向の波数は一定として

$$\psi(x, y) = \frac{e^{ik_y y}}{\sqrt{L_y}} \phi_{k_y}(x)$$

とする。よって、 $p_y$  を書き換えて

$$\begin{aligned} H(p_x, \hbar k_y) &= \frac{1}{2m} \left( p_x^2 - \left( \hbar k_y - \frac{e}{c} Bx \right)^2 \right) \\ &= \frac{1}{2m} p_x^2 + \frac{e^2 B^2}{2mc^2} \left( x + \frac{\hbar c k_y}{|e|B} \right)^2 \end{aligned}$$

となる。ここでモノポールの時の類推から次のように置き換えをする。

$$\omega_c = \frac{|e|B}{mc}, \quad X = \frac{\hbar ck_y}{|e|B} = -l_B^2 k_y, \quad l_B = \sqrt{\frac{\hbar c}{|e|B}} \quad (19.5)$$

として結果を置きかえると、よく知られた単振動のハミルトニアン

$$H(p, \omega) = \frac{1}{2m} p_x^2 + \frac{m\omega_c^2}{2} (x - X)^2$$

と同じになるので固有関数も調和振動の結果を利用して変数分離された固有状態が

$$\phi_n(x) = \left( \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi} l_B} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x}{l_B}\right)^2\right) H_n\left(\frac{x}{l_B}\right)$$

ただし  $H_n$  はエルミート多項式で

$$\begin{aligned} H_n &= (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) \\ &= n! \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^m (2x)^{2n-2m}}{m! (2n-2m)!} \end{aligned}$$

である。これから次が求まる。

$$\psi_{n,X}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{L_y}} e^{i\frac{X}{l_B} y} \phi_n(x - X)$$

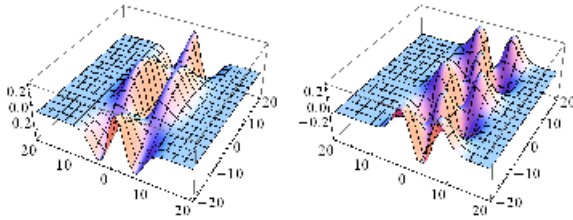


図 19.2:  $n = 2$  の場合の  $k_y$  による広がり、左図の方の  $X$  が大きい

この関数は  $y$  方向に広がっていて  $x$  方向には  $X$  の周りに  $\sqrt{2n+1}l_B$  程度の幅を持つ。一方でエネルギー固有値は

$$E_n \hbar \omega_c \left( n + \frac{1}{2} \right)$$

であり、これを Landau 単位という。

興味あることがおきるのは  $x$  方向に電場  $E$  を付け加えてた時だ。

この時ハミルトニアンは運動量ではなく、エネルギーに変化が加わるから

$$H(p_x, p_y) = \frac{1}{2m} \left( p_x^2 + \left( p_y - \frac{e}{c} Bx \right)^2 \right) - eEx \quad (19.6)$$

とかける。ここで中心座標の  $x$  成分  $X$  と運動量の  $y$  成分  $\hbar k_y$  が先の類推から  $Ect = Bx$ ,  $\omega_c = \frac{|e|B}{mc}$  とおいたので

$$\begin{aligned} t &= \frac{mc}{eB} \\ p_y &\rightarrow \frac{e}{c} Bx, \quad p'_y \rightarrow eEt \rightarrow mc \frac{E}{B} \end{aligned}$$

で対応しているとして中心座標  $X$  の関係が式 19.5 から

$$X = -\frac{l_B^2}{\hbar} \left( \hbar k_y + mc \frac{E}{B} \right)$$

とすると、これを用いて  $l_B = \sqrt{\frac{\hbar c}{|e|B}}$  から

$$\begin{aligned} H(p_x, \hbar k_y) &= \frac{1}{2m} p_x^2 + \frac{1}{2m} \left( \hbar k_y - \frac{e}{c} Bx \right)^2 - eEx \\ &= \frac{1}{2m} p_x^2 + \frac{1}{2m} \left( -mc \frac{E}{B} - \frac{\hbar}{l_B^2} X - \frac{e}{c} Bx \right)^2 - eEx \\ &= \frac{1}{2m} p_x^2 + \frac{1}{2m} \left( -mc \frac{E}{B} - \frac{e}{c} B(x - X) \right)^2 - eEx \\ &= \frac{1}{2m} p_x^2 + \frac{m}{2} \left( \frac{eB}{mc} \right)^2 (x - X)^2 + \frac{m}{2} \left( \frac{E}{B} \right)^2 + \frac{2mc}{2m} \frac{eE}{Bc} B(x - X) - eEx \\ &= \frac{1}{2m} p_x^2 + \frac{m}{2} \omega_c^2 (x - X)^2 - eEX + \frac{m}{2} \left( \frac{cE}{B} \right)^2 \end{aligned}$$

を得る。従って調和振動子の場合と比べてエネルギー固有値は次のように  $X$  に依存した形となる。

$$E_{n,X} = \hbar \omega_c \left( n + \frac{1}{2} \right) - eEX + \frac{m}{2} \left( \frac{cE}{B} \right)^2$$

波動関数は電場がない場合と同じで、等ポテンシャル面に沿った  $y$  方向に沿って伸びている。電場方向に幅  $\sqrt{2n+1}l_B$  程度の広がりを持つ。  $y$  方向に長さ  $L_y$  の周期的境界条件を課すと

$$k_y = \frac{2\pi}{L_y} m$$

となる。  $k_y$  および、  $X$  のとりうる値の範囲は  $x$  軸方向の系の幅 ( $0 \sim L_x$ )、すなわち、  $X_{max} - X_{min} = l_B^2 (2\pi/L_y)(m_{max} - m_{min})$  より、

$$X = l_B^2 \frac{2\pi}{L_y} m, \quad 0 \leq m \leq N_\phi = \frac{L_x L_y}{2\pi l_B^2} \quad (19.7)$$

となり、Landau 準位には  $N_\phi$  個の状態があり、  $E = 0$  の場合は縮退している。電子数  $N_e$  と、この縮重度  $N_\phi$  の比

$$\nu = \frac{N_e}{N_\phi}$$

を占有率という。各状態での速度の期待値は

$$\begin{aligned} p_x &= 0 \\ p_y &= \frac{eB}{c} X - mc \frac{E}{B} \end{aligned}$$

から次のようになる。

$$\langle n, X | v_x | n, X \rangle = \left\langle n, X \left| \frac{p_x}{m} \right| n, X \right\rangle = 0$$

$$\begin{aligned} \langle n, X | v_y | n, X \rangle &= \left\langle n, X \left| \frac{p_y - (e/c)Bx}{m} \right| n, X \right\rangle = 0 \\ &= \left\langle n, X \left| \frac{eB}{m} (X - x) - c \frac{E}{B} \right| n, X \right\rangle \\ &= -c \frac{E}{B} \end{aligned}$$

よって全ての状態は  $n, X$  によらない。一定の速さ  $-c \frac{E}{B}$  で電場と磁場に直交する方向に運動していることがわかる。

### 19.3 量子ホール効果

ディラックのモノポールの量子化がベリーの位相から自然に導けたよう、Hall 伝導率の量子化も行える。この時、電流が中身もつまっている場と、境界だけの場にあるかどうかでどう異なるかを見てみたい。

### 19.4 Laughlin 理論

2次元の平面を円筒状に丸めて、y 方向のみに周期的な境界条件  $\phi(L_y + y) = \phi(y)$  があるシリンダー系を考える。この時境界部分に局在状態が出現するだろうか。

磁束はシリンダー方向に貫いているとする。磁束は時間に対して線形的な変化をしよう。起電力  $V = \phi/T$  だが時刻 0 で 0、時刻  $T$  で  $\phi_0 = h/e$  とすると、誘導電場は周の長さ  $L_y$  なので

$$E_y = \frac{h}{eT} \frac{1}{L_y}$$

この時、y 方向に流れる電流の密度は  $p_y \rightarrow \hbar k = \frac{e\Phi}{cL_y}$  から y 成分のみが  $\Phi$  の関数だから

$$\begin{aligned} j &= \frac{c}{L_x} \frac{\partial}{\partial \Phi} \langle H_{total} \rangle = \frac{c}{L_x} \frac{\partial}{\partial \Phi} \left\langle \sum_{i=1}^{Ne} \left\{ \frac{p_{ix}^2 + \{p_{iy} - (e/c)A_y\}^2}{2m} - eEx_i \right\} \right\rangle \\ &= \frac{e}{L_x L_y} \left\langle \sum_{i=1}^{Ne} \left\{ \frac{p_{iy} - (e/c)A_y}{m} \right\} \right\rangle = j_y \end{aligned} \quad (19.8)$$

よって

$$j_y = \frac{c}{L_x} \frac{\partial E_{total}}{\partial \Phi}$$

電荷  $Q$  は

$$Q = j_x L_y T = -eN$$

となる。2次元シリンダー系に垂直な一様磁場とシリンダー方向に仮想的に挿入され、 $p' = \frac{e}{c}A$  の変化をうけるから磁束はベクトルポテンシャルは磁束が

$$\Phi = \oint A dr$$

だから

$$\mathbf{A} = (0, Bx - \Phi/L_y, 0)$$

で書くことができる。これからハミルトニアンが

$$H(p_x, \hbar k_y) \rightarrow H(p_y, \hbar k_y + \frac{e\Phi}{cL_y})$$

と変換されることになる。ところが  $\Phi \rightarrow \Phi + \Delta\Phi$  の磁束変化に対し、波動関数は式 19.7 から

$$\Delta X = \frac{L_x}{N_\phi}$$

だけ変化することになる。

ここで磁束量子を次のようにおく、

$$\phi_0 = \frac{hc}{|e|}$$

よって磁場の影響は y 方向の波数が

$$k_y \rightarrow k_y - \frac{2\pi}{L_y} \left( \frac{\Phi}{\phi_0} \right)$$

と変換を受けるか、中心座標の x 成分が

$$X \rightarrow X + \left( \frac{\Phi}{\phi_0} \right) \frac{L_x}{N_\phi}$$

のように変わることを意味する。これが  $\phi_0$  を単位としてとなりの波と重なる。

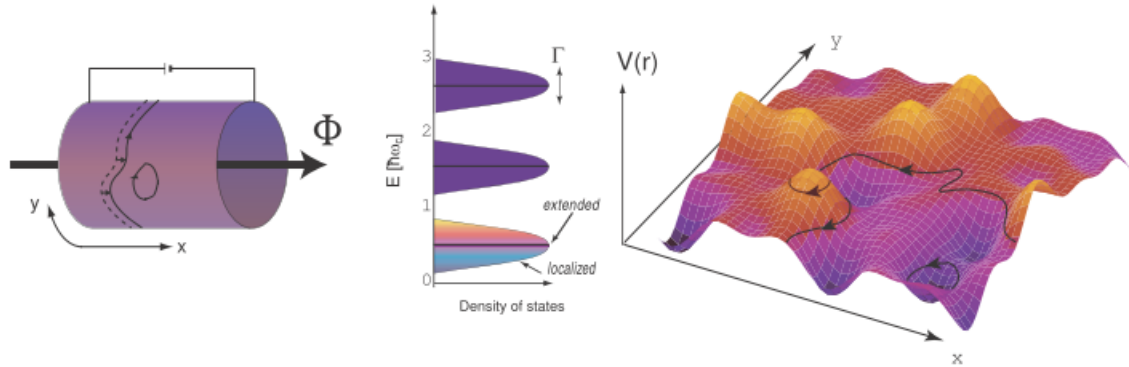


図 19.3: トポロジカル絶縁体・超伝導体の基礎理論 野村健太郎, 2013

この解釈は磁束の変化がゲージ変換によって波動関数の位相に吸収され、

$$\Delta\Phi = n\phi_0$$

の場合は帳消しになる。これがゲージ不変性である。

さて、シリンダー系の内部に不純物があると図の左のように内部に閉曲線をつくると考える。するとどれも単連結になるので磁束の挿入に対して変化はない。逆に磁束を挿入した際の変化は各 Landau 準位の中心に存在する非局在状態のみである。

フェルミ準位以下に  $N$  個の非局在状態に電子が存在する系で両端に電位差  $V$  が与えられると磁束量子 1 本分の変化に対するエネルギーの変化は

$$\Delta E = -eVN$$

と簡単に書ける。これから Hall 電流  $j_y$  と Hall 伝導率  $\sigma_{xy}$  が次のように求まる。

$$j_y = \frac{c}{L_x} \frac{\Delta E}{\Delta\Phi} = \frac{c}{L_x} \frac{-eVN}{hc/|e|} = N \frac{e^2}{h} E$$

$$\sigma_{xy} = -N \frac{e^2}{h}$$

これらの値は Fermi 準位が局在状態中であればその位置に変わらず量子化されることになる。

## 19.5 Chern 数

## 19.6 エッジ状態

ここで図のように 2 次元の電子系がポテンシャル  $U(x)$  によって閉じ込められている場合を考える。無限系では局在が得られなくても有限ではエッジに局在する状態があり得る。

この場合の系のハミルトニアンは

$$H(p_x, p_y) = \frac{1}{2m} \left\{ p_x^2 + \left( p_y - \frac{e}{c} Bx \right)^2 \right\} + U(x)$$

で与え、y 方向の運動量は保存される。

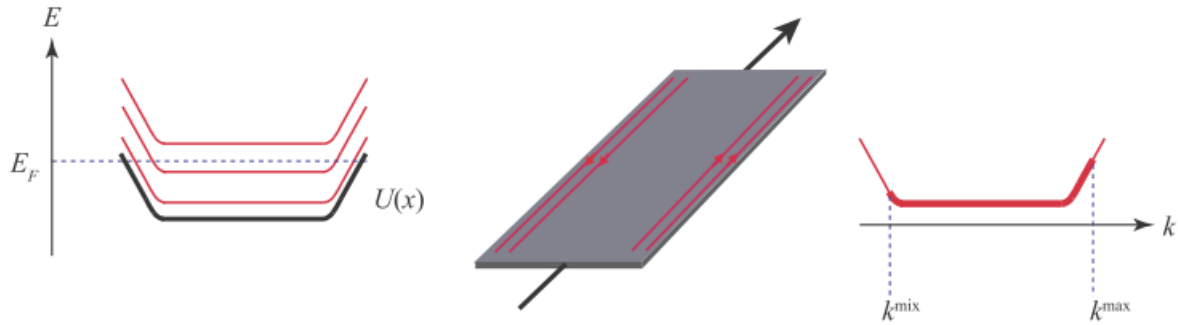


図 19.4: トポロジカル絶縁体・超伝導体の基礎理論 野村健太郎, 2013

このポテンシャル  $U(x)$  の傾きが磁気長に比べて緩やかな場合は  $U(x)$  を展開して 2 次以上の項を無視することができる。これは式 19.6 と同じである。従って図のように系の端ではエネルギーの固有値は大きくなる。これは分散があることを表して、 $E = -\frac{1}{e} \frac{dU}{dx}$  だから、系の端では 1 方向に

$$v = \frac{c}{eB} \frac{dU}{dx}$$

で運動する。この状態をエッジ状態という。

$N$  個のエッジ状態がある時、運ばれる電流を計算しておく。中心座標を  $X$  として、これからの波数表示で

$$X \rightarrow k = -\frac{X}{l_B^2}, \quad E_{n,X} \rightarrow E_n(k)$$

として、 $N$  個のエッジ状態の電流は  $I = envS$  だから  $k_n^{min}, k_n^{max}$  を電子によって占められた最小と最大の波数として

$$\begin{aligned} I &= e \sum_{n=1}^N \int_{k_n^{min}}^{k_n^{max}} \frac{dk}{2\pi} \frac{\partial E_n(k)}{\hbar \partial k} \\ &= \frac{e}{\hbar} \sum_{n=1}^N [E_n(k_n^{max}) - E_n(k_n^{min})] \end{aligned}$$

である。

電流が流れている状態では左右のポテンシャルが異なる。この差が Hall 電圧  $V_H$  として観測される。左側の電極で左の各エッジの化学ポテンシャルの平均、右では右の各エッジ状態の平均が観測される。これから Hall 電圧が

$$eV_H = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N [E_n(k_n^{max}) - E_n(k_n^{min})]$$

よってこの時 Hall 抵抗が

$$R_H = \frac{V_H}{I} = \frac{\hbar}{e^2} \frac{1}{N}$$

と量子化される。 $N$  は反時計回りのエッジ状態の本数である

## 19.7 チャーン数

Hall 伝導率がトポロジカル不変量であることを見てみよう。これら久保公式として知られている内容にもなる。

$y$  方向に電場をかけた時の  $x$  方向の電流密度

$$\langle j_x \rangle_E$$

摂動項を  $V = -eEy$  として摂動論から

$$|n\rangle_E = |n\rangle + \sum_{m \neq n} \frac{\langle m | -eEy | n \rangle}{E_n - E_m} |m\rangle + \dots$$

ただし、 $|n\rangle$  は電場がない時のエネルギー固有値である。従って電場がある場合の Hall 電流は固有エネルギーのフェルミ分布関数で和をとり

$$\begin{aligned} \langle j_x \rangle_E &= \sum_n f(E_n) \langle n |_E \frac{ev_x}{L^2} |n\rangle_E \\ &= \langle j_x \rangle_{E=0} \\ &+ \frac{1}{L^2} \sum f(E_n) \sum_{n \neq m} \left( \frac{\langle n | ev_x | m \rangle \langle m | -eEy | n \rangle}{E_n - E_m} + \frac{\langle n | -eEy | m \rangle \langle m | ev_x | n \rangle}{E_n - E_m} \right) \end{aligned}$$

とかける。ここで速度はハイゼンベルグの関係から

$$v_y = \frac{1}{i\hbar} [y, H]$$

とかけたので、これを行列表現で書くと次のように  $v_y$  の速度成分が現れる

$$\langle m | v_y | n \rangle = \frac{1}{i\hbar} (E_n - E_m) \langle m | y | n \rangle$$

よって、Hall 伝導率  $\sigma_{xy}$  での久保公式が次のように求まる。

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} &= \frac{\langle j_x \rangle_E}{E} \\ &= -\frac{i\hbar e^2}{L^2} \sum_{n \neq m} f(E) \frac{\langle n | v_x | m \rangle \langle m | v_y | n \rangle - \langle n | v_x | m \rangle \langle m | v_y | n \rangle}{(E_n - E_m)^2} \end{aligned}$$

ここで状態ベクトルとしてブロッホ状態

$$|u_{n,\mathbf{k}}\rangle$$

を選ぶと

$$\sigma_{xy} = -\frac{i\hbar e^2}{L^2} \sum_{\mathbf{K}} \sum_{n \neq m} f(E_{n,\mathbf{k}}) \frac{\langle u_{n,\mathbf{k}} | v_x | u_{m,\mathbf{k}} \rangle \langle u_{m,\mathbf{k}} | v_y | u_{n,\mathbf{k}} \rangle - \langle u_{n,\mathbf{k}} | v_x | u_{m,\mathbf{k}} \rangle \langle u_{m,\mathbf{k}} | v_y | u_{n,\mathbf{k}} \rangle}{(E_{n,\mathbf{k}} - E_{m,\mathbf{k}})^2}$$

ところが一般に速度成分は

$$v_j = \frac{\partial H(\mathbf{k})}{\hbar \partial k_\mu}$$

とかけることに留意すると

$$\begin{aligned} \langle u_{m,\mathbf{k}} | v_j | u_{n,\mathbf{k}} \rangle &= \frac{1}{\hbar} (E_{n,\mathbf{k}} - E_{m,\mathbf{k}}) \left\langle u_{m,\mathbf{k}} \left| \frac{\partial}{\partial k_j} \right| u_{n,\mathbf{k}} \right\rangle \\ 0 &= \frac{\partial}{\partial k_j} \langle u_{n,\mathbf{k}} | u_{m,\mathbf{k}} \rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial k_j} u_{n,\mathbf{k}} \middle| u_{m,\mathbf{k}} \right\rangle + \left\langle u_{n,\mathbf{k}} \middle| \frac{\partial}{\partial k_j} u_{m,\mathbf{k}} \right\rangle \end{aligned}$$

を用いて

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} &= -\frac{i\hbar e^2}{L^2} \sum_{\mathbf{K}} \sum_{n \neq m} f(E_{n,\mathbf{k}}) \\ &\left( \left\langle \frac{\partial}{\partial k_x} u_{n,\mathbf{k}} \middle| u_{m,\mathbf{k}} \right\rangle \left\langle u_{n,\mathbf{k}} \middle| \frac{\partial}{\partial k_y} u_{m,\mathbf{k}} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial}{\partial k_y} u_{n,\mathbf{k}} \middle| u_{m,\mathbf{k}} \right\rangle \left\langle u_{n,\mathbf{k}} \middle| \frac{\partial}{\partial k_x} u_{m,\mathbf{k}} \right\rangle \right) \\ &= -\frac{i\hbar e^2}{L^2} \sum_{\mathbf{K}} \sum_n f(E_{n,\mathbf{k}}) \left( \left\langle \frac{\partial}{\partial k_x} u_{n,\mathbf{k}} \middle| \frac{\partial}{\partial k_y} u_{n,\mathbf{k}} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial}{\partial k_y} u_{n,\mathbf{k}} \middle| \frac{\partial}{\partial k_x} u_{n,\mathbf{k}} \right\rangle \right) \\ &= -\frac{i\hbar e^2}{L^2} \sum_{\mathbf{K}} \sum_n f(E_{n,\mathbf{k}}) \left( \frac{\partial}{\partial k_x} \left\langle u_{n,\mathbf{k}} \middle| \frac{\partial}{\partial k_y} u_{n,\mathbf{k}} \right\rangle - \frac{\partial}{\partial k_y} \left\langle u_{n,\mathbf{k}} \middle| \frac{\partial}{\partial k_x} u_{n,\mathbf{k}} \right\rangle \right) \end{aligned}$$



となる。ここで Berry 接続を

$$\mathbf{A}_{n,\mathbf{k}} = -i \left\langle u_{n,\mathbf{k}} \left| \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} \right| u_{n,\mathbf{k}} \right\rangle$$

とすると Fermi 準位がギャップの中にある絶縁体の場合、 $\mathbf{k}$  の和は波数空間全体か Brillouin ゾーン (BZ) 全域でとる。これから次の重要な関係式が得られる。

$$\sigma_{xy} = \nu \frac{e^2}{h} Ch_n = \sum_n \int_{BZ} \frac{d^2 \mathbf{k}}{2\pi} \left( \frac{\partial A_{n,y}}{\partial k_x} - \frac{\partial A_{n,x}}{\partial k_y} \right) \in Z \quad (19.9)$$

ここで  $Ch$  がチャーン数 (Chern\_number) と呼ばれる数で絶縁体の場合は整数値であり、量子化される。添え字  $n$  はバンド指数である。

ベクトル  $\mathbf{A}_n(\mathbf{k})$  が Brillouin ゾーン内の全域で特異点なく正則であればストークスの定理から

$$Ch_n = \frac{1}{2\pi} \oint d\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}_n(\mathbf{k}) = 0 \quad (19.10)$$

となることになる。しかし、ベクトルポテンシャルがモノポールの時のように2つのカバーがあるとうなるか。この領域での波動関数を  $|u^I\rangle, |u^{II}\rangle$  としよう。するとゲージ変換でみたように位相変化の影響を受けて

$$|u_{n,\mathbf{k}}^I\rangle = e^{i\chi(\mathbf{k})} |u_{n,\mathbf{k}}^{II}\rangle$$

となる。よって Berry 接続が式 19.2 から

$$\mathbf{A}^I(\mathbf{k}) = \mathbf{A}^{II}(\mathbf{k}) + \frac{\partial \chi(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}}$$

従って式 19.10 は 0 ではなくなって  $R_I, R_{II}$  の境界回りでは向きが反対になることに注意すると

$$\begin{aligned} Ch_n &= \frac{1}{2\pi} \oint d\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}_n(\mathbf{k}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{R_I} d^2 \mathbf{k} \nabla \times \mathbf{A}_n^I(\mathbf{k}) + \frac{1}{2\pi} \int_{R_{II}} d^2 \mathbf{k} \nabla \times \mathbf{A}_n^{II}(\mathbf{k}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \oint_{\partial R_I} d\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}_n^I(\mathbf{k}) + \frac{1}{2\pi} \oint_{\partial R_{II}} d\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}_n^{II}(\mathbf{k}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \oint_{\partial R_I} d\mathbf{k} \cdot \left( \mathbf{A}_n^I(\mathbf{k}) - \mathbf{A}_n^{II}(\mathbf{k}) \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \oint_{\partial R_I} d\mathbf{k} \cdot \left( \frac{\partial \chi(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}} \right) \\ &= \frac{2\pi N}{2\pi} = N \end{aligned}$$

となり、特異点回りに何回回ったかという巻数  $N$  に一致する。

## 19.8 異常ホール効果

Hall 伝導率を具体的に 2 バンド格子模型に応用してみよう。ただし、ここでは境界がなく、外部磁場が 0 で、スピンの方に偏極がある場合を考える。これを異常ホール効果という。

$\mathbf{k}$  空間でのハミルトニアンをパウリ行列を  $\tau$  として

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\mathbf{k}) &= \epsilon(\mathbf{k}) + \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\tau} \\ &= \begin{pmatrix} \epsilon_0(\mathbf{k}) + R_z(\mathbf{k}) & R_x(\mathbf{k}) - iR_y(\mathbf{k}) \\ R_x(\mathbf{k}) + iR_y(\mathbf{k}) & \epsilon_0(\mathbf{k}) - R_z(\mathbf{k}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

とする。ただし、

$$\mathbf{R}(k_x, k_y) = \begin{pmatrix} R_x(\mathbf{k}) \\ R_y(\mathbf{k}) \\ R_z(\mathbf{k}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \sin k_x a \\ t \sin k_x a \\ m + r \sum_{\mu} (1 - \cos k_{\mu} a) \end{pmatrix} \quad (19.11)$$

として、さらに簡単のために  $t = r = a = 1$  として、 $m$  をパラメタと考える。

また、 $\epsilon_0$  は小さく無視できるとする。

以下では Fermi 準位がギャップのなかにある場合を考える。 $k$  空間の Berry 接続は

$$\begin{aligned} A_{\mu}^{\pm}(\mathbf{k}) &= -i \left\langle \pm, \mathbf{R} \left| \frac{\partial}{\partial k_{\mu}} \right| \pm, \mathbf{R}(\mathbf{k}) \right\rangle \\ &= -i \frac{\partial R_a(\mathbf{k})}{\partial k_{\mu}} \left\langle \pm, \mathbf{R} \left| \frac{\partial}{\partial R_a} \right| \pm, \mathbf{R}(\mathbf{k}) \right\rangle \\ &= \frac{\partial R_a(\mathbf{k})}{\partial k_{\mu}} A_a^{\pm}(\mathbf{R}) \quad (a = x, y, z) \end{aligned}$$

のように  $\mathbf{R}$  空間の Berry 接続と関係する。ここで  $R_z > 0$  の領域では  $\mathbf{A}^N$ ,  $R_z < 0$  の領域では  $\mathbf{A}^S$  を採用する。まず、 $m > 0$  の場合について全ての  $k_x, k_y$  に対して

$$\cos \theta \equiv \frac{R_z}{R} > 0$$

なので Berry 曲率は単一のゲージ  $\mathbf{A}^N$  で与えられ、Brillouin ゾーン全域にわたって正則で巻き数は 0、すなわち、

$$\sigma_{xy} = 0$$

である。

次に  $-2 < m < 0$  の場合を館がる。この時にゲージ  $\mathbf{A}^N$  を用いた場合の Berry 接続  $A_{\mu}^N$  とする。これは図のように原点の周りに渦構造を示し、その中心に特異点がある。

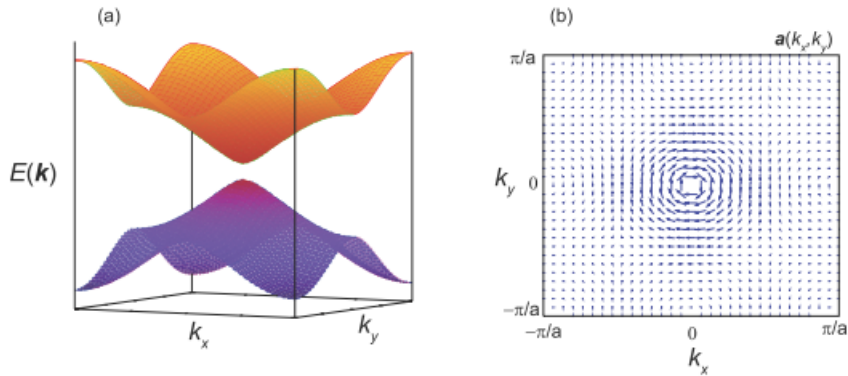


Figure 2.3: (a) 2 バンド模型 (2.39) のエネルギー分散。 (b)  $m < 0$  の場合の Berry 接続  $\mathbf{a}_{\mu}^N(k_x, k_y)$

図 19.5: トポロジカル絶縁体・超伝導体の基礎理論 野村健太郎, 2013

しかし、この特異性は  $\mathbf{A}^S$  へのゲージ変換で取り除くことができ、式 19.9 からチャーン数は 1 である。これは次の図のように単位球の周りに 1 回の覆いがあることになる。

この時の Berry 曲率  $b$  はゲージによらず、磁場  $B$  を用いて、リーマン曲率の時のように単純な形になる。

$$\begin{aligned}
b_z^\pm(\mathbf{k}) &= \frac{\partial A_y^\pm}{\partial k_x} - \frac{\partial A_x^\pm}{\partial k_y} \\
&= \frac{\partial}{\partial k_x} \left( \frac{\partial R_b}{\partial k_y} A_b^\pm(\mathbf{R}) \right) - \frac{\partial}{\partial k_y} \left( \frac{\partial R_a}{\partial k_x} A_a^\pm(\mathbf{R}) \right) \\
&= \frac{\partial^2 R_b}{\partial k_x \partial k_y} A_b^\pm + \frac{\partial R_b}{\partial k_y} \frac{\partial R_a}{\partial k_x} \frac{\partial A_b^\pm}{\partial R_a} - \frac{\partial^2 R_a}{\partial k_x \partial k_y} A_a^\pm - \frac{\partial R_a}{\partial k_x} \frac{\partial R_b}{\partial k_y} \frac{\partial A_a^\pm}{\partial R_b} \\
&= \frac{\partial R_b}{\partial k_y} \frac{\partial R_a}{\partial k_x} \left( \frac{\partial A_b^\pm}{\partial R_a} - \frac{\partial A_a^\pm}{\partial R_b} \right) \\
&= \frac{\partial R_a}{\partial k_x} \frac{\partial R_b}{\partial k_y} \epsilon_{abc} B_c^\pm
\end{aligned}$$

ところがこの磁場は式 19.4 を用いると

$$\begin{aligned}
b_z^\pm(\mathbf{k}) &= \frac{\partial R_a}{\partial k_x} \frac{\partial R_b}{\partial k_y} \epsilon_{abc} \left( \pm \frac{1}{2} \frac{R_C}{R^3} \right) \\
&= \pm \frac{1}{2R^3} \mathbf{R} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial k_x} \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial k_y} \right)
\end{aligned}$$

さらに  $\mathbf{R}$  の単位ベクトルを  $\mathbf{e}_R$  として次の変形が成り立つ。

$$\begin{aligned}
R \mathbf{e}_R \cdot \frac{\partial(R \mathbf{e}_R)}{\partial k_x} \times \frac{\partial(R \mathbf{e}_R)}{\partial k_y} &= R \mathbf{e}_R \cdot \left( R \frac{\partial \mathbf{e}_R}{\partial k_x} + \mathbf{e}_R \frac{\partial R}{\partial k_x} \right) \times \left( R \frac{\partial \mathbf{e}_R}{\partial k_y} + \mathbf{e}_R \frac{\partial R}{\partial k_y} \right) \\
&= R^3 \mathbf{e}_R \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_R}{\partial k_x} \times \frac{\partial \mathbf{e}_R}{\partial k_y} + R^2 \frac{\partial R}{\partial k_x} \mathbf{e}_R \cdot \mathbf{e}_R \times \frac{\partial \mathbf{e}_R}{\partial k_y} \\
&\quad + R^2 \frac{\partial R}{\partial k_y} \mathbf{e}_R \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_R}{\partial k_x} \times \mathbf{e}_R + R \frac{\partial R}{\partial k_x} \frac{\partial R}{\partial k_y} \mathbf{e}_R \cdot \mathbf{e}_R \times \mathbf{e}_R \\
&= R^3 \mathbf{e}_R \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_R}{\partial k_x} \times \frac{\partial \mathbf{e}_R}{\partial k_y}
\end{aligned}$$

となるので結局 Hall 伝導度が次のようにかかる。

$$\sigma_{xy} = -\frac{e^2}{h} \int_{BZ} \frac{d^2 \mathbf{k}}{4\pi} \mathbf{e}_R \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{e}_R}{\partial k_x} \times \frac{\partial \mathbf{e}_R}{\partial k_y} \right) \quad (19.12)$$

これは図 c のように微小領域  $dk_x dk_y$  が  $\mathbf{R}$  空間では  $\mathbf{e}_R(k_x, k_y)$  で張られる単位球に写像され、球面上での面積が

$$d\mathbf{S} = \left( \frac{\partial \mathbf{e}_R}{\partial k_x} dk_x \right) \times \left( \frac{\partial \mathbf{e}_R}{\partial k_y} dk_y \right)$$

従ってこれは波数空間で Brillouin ゾーン全域を被覆するように  $\mathbf{k}$  が変化するとき  $\mathbf{R}$  空間の球を何階覆うかを数えた量が式 19.12 である。よって常に整数値になる。

$m > 0$  の場合は図 a のように Brillouin ゾーン全域を被覆するように  $\mathbf{k}$  が変化しても  $\mathbf{R}$  空間の球面を覆うことができない。この時の巻き数は 0 である。この場合は基底状態が自明な絶縁体であるので量子ホール効果が起こらないで  $\sigma_{xy} = 0$  になる。一方で  $m < 0$  の場合は図 b からわかるように  $\mathbf{k}$  からの写像によって  $\mathbf{R}$  空間の球面を 1 回覆う。この時の基底状態が量子異常ホール効果で

$$\sigma_{xy} = -\frac{e^2}{h}$$

である。

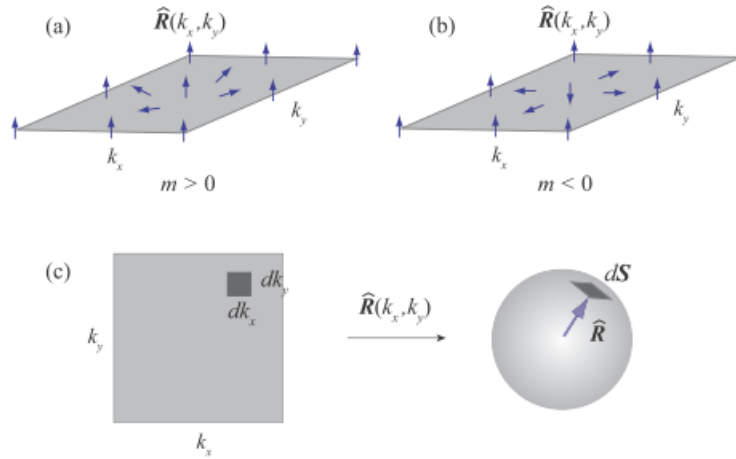


Figure 2.4: 波数  $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$  と単位ベクトル  $\hat{\mathbf{R}}(k_x, k_y)$  との関係。(a) トポロジカルに自明な場合、(b) 非自明な場合。(c) これらは  $\mathbf{k}$  が Brillouin ゾーンを覆うとき、 $\hat{\mathbf{R}}$  ベクトルが単位球を何回覆うかを数える巻つき数 (winding number) で特徴づけられる。

図 19.6: トポロジカル絶縁体・超伝導体の基礎理論 野村健太郎, 2013

### 19.9 境界のある場合

図 (a) のように  $x$  方向にのみ境界条件があり、 $y$  方向には端が存在する場合を考える。右図は並進対称性が  $x$  方向にはあるので波数  $k_x$  を量子数にとり、エネルギー固有値を  $k_y$  の関数として表した図が (b) である。

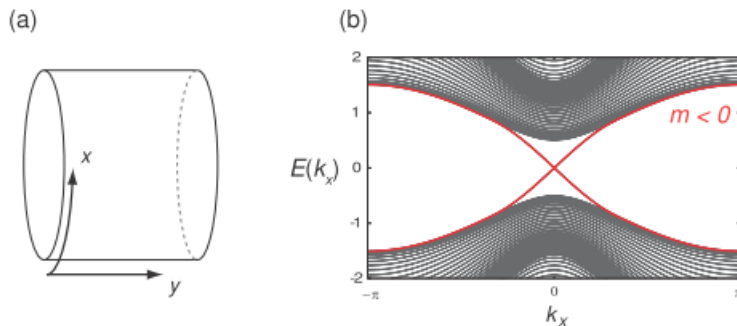


図 19.7: トポロジカル絶縁体・超伝導体の基礎理論 野村健太郎, 2013

$m < 0$  の場合は上下のバンドギャップの間にエッジモードのスペクトルが現れる。 $k_x = 0$  の付近ではスペクトルは  $E = \pm vk$  のように固有値を近似したとして一端の  $E = vk$  と  $E = -vk$  が他端のエッジモードとなり、カイラルなエッジモードになる。 $m > 0$  の場合はこのようなエッジモードは表れない。

つまり  $m > 0$  と  $m < 0$  とではトポロジーが異なる。図の右で見るように  $m = 0$  で2つ状態が隔てられ、そこにギャップが消失する。しかし、真空と  $m > 0$  の領域ではエッジモードは現れず、トポロジカルにつながっている。

## 19.10 クラマースの定理 [28]

時間反転操作の演算子を  $\Theta$  としてこの性質を求めてみよう。スピンのない場合はこれは単に複素共役をとる操作  $\mathbf{K}$  に対応した。

$$\Theta\psi = \psi^*$$

スピンがある場合は時間反転に対して、符号が反転することが期待される。

そこでまず、位置演算子を  $\mathbf{r}$  として

$$|\phi\rangle = \mathbf{r}|\psi\rangle$$

が成り立つとすると、これは時間反転に関し不変であるから

$$\mathbf{r}\Theta|\psi\rangle = \mathbf{r}|\psi'\rangle = |\phi'\rangle = \Theta|\phi\rangle = \Theta\mathbf{r}|\psi\rangle$$

となることが考えられる。すなわち時間反転演算子は

$$\Theta\mathbf{r} = \mathbf{r}\Theta, \quad \Theta^{-1}\mathbf{r}\Theta = \mathbf{r}$$

が成立する。これは位置演算子  $\mathbf{r}$  が時間反転演算子  $\Theta$  に対して不変であることを意味する。これに対して運動量演算子  $\mathbf{p}$  は時間反転に対して符号を変える。

$$\Theta\mathbf{p} = -\mathbf{p}\Theta, \quad \Theta^{-1}\mathbf{p}\Theta = -\mathbf{p}$$

これは、対応原理

$$\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$$

であったことを考えると複素共役をとる作用を  $K$  で表せば  $\Theta = K$  であることがわかる。

ここで電子のスピンを考える。Pauli 行列  $\sigma$  を用いて

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

としておく。角運動量も時間反転で運動量のように符号を変えるだろうか。

$$\Theta^{-1}\mathbf{s}\Theta = -\mathbf{s}$$

パウリ行列を見て明らかのように  $\sigma_2$  以外は実数を成分にするから、全てのスピン演算子  $s_x, s_y, s_z$  が符号を反転させるためには

$$\Theta = -i\sigma_y K$$

一般に時間反転演算子の表現はスピン演算子の表現に依存する。

そこで  $n$  個の電子からなる系を考えるとこの系での時間反転演算子は

$$\Theta = (-i\sigma_{y,1}) \otimes (-i\sigma_{y,2}) \otimes \cdots \otimes (-i\sigma_{y,n}) K \quad (19.13)$$

と書くことができる。ただし、 $K$  は複素共役をとる作用、 $\sigma_{y,i}$  は  $i$  番目の電子にのみ作用するとする。この演算子は純虚数  $\times i$  のテンソル積であり、実数は  $K$  と可換であり、 $\sigma_y^2 = 1$  だから

$$\Theta^2 = (-I_1) \otimes (-I_2) \otimes \cdots \otimes (-I_n)$$

と単位行列のテンソル積でかけることになる。 $n$  個の電子系が時間反転対称性を持てば

$$\Theta^{-1}H\Theta = H \rightarrow [\Theta, H] = 0$$

が成り立つことになる。

従ってこの系のエネルギー固有状態の1つが  $|u_j\rangle$  だったとすると  $\Theta|u_j\rangle$  も固有状態ということになる。ここでは系に縮退がないとすると  $|u_j\rangle$  と  $\Theta|u_j\rangle$  は同じ状態であることになるから、ある数  $c$  を用いて

$$\Theta^2|u_j\rangle = \Theta c|u_j\rangle = \Theta c|u_j\rangle = |c|^2|u_j\rangle$$

が成り立つことになる。これは

$$\Theta^2 = -1$$

では不適であり

$$\Theta^2 = 1$$

であることを意味する。よって  $\Theta^2 = -1$  の時は少なくとも2重に縮退をしていなくてはならない。

この時、式 19.13 から電子が奇数個ある場合は時間反転対称性のある系では、量子状態が少なくとも2重に縮退している。これをクラマースの定理 (Kramers\_theorem) という。

この縮退した状態2つの内積と、共に  $\Theta$  を作用させた状態の内積は変わらないはずだから

$$\langle u_j|\Theta u_j\rangle = \langle \Theta^2 u_j|\Theta u_j\rangle$$

したがって  $\Theta^2 = -1$  の時は

$$\langle u_j|\Theta u_j\rangle = -\langle u_j|\Theta u_j\rangle$$

となってしまうので

$$\langle u_j|\Theta u_j\rangle = 0$$

すなわち2つの状態は直交している。ただし、時間反転演算子は線型演算子ではない。

時間反転演算子によって実空間や波数空間でスピノールがどのように変化するかをしてみる。ここで基底系  $\{|\sigma\rangle\}$  は  $\sigma_z$  の固有状態であるとする。この時、

$$\begin{aligned} \langle \psi|\Theta|\phi\rangle &= \sum_{\sigma\sigma'} \langle \psi|\sigma\rangle \langle \sigma|i\sigma_y|\sigma'\rangle \langle \sigma'|\phi\rangle^* \\ &= \sum_{\sigma\sigma'} \langle \phi|\sigma'\rangle (-1) \langle \sigma'|i\sigma_y|\sigma\rangle \langle \sigma|\psi\rangle^* \\ &= -\langle \phi|\Theta|\psi\rangle \end{aligned} \quad (19.14)$$

$$\begin{aligned} \langle \Theta\psi|\Theta\phi\rangle &= \left[ \sum_{\sigma} \langle \sigma|\psi\rangle \langle \sigma|(-i\sigma_y) \right] \left[ \sum_{\sigma'} i\sigma_y|\sigma'\rangle \langle \sigma'|\phi\rangle^* \right] \\ &= \sum_{\sigma\sigma'} \langle \phi|\sigma'\rangle \langle \sigma|\sigma'\rangle \langle \sigma|\psi\rangle \\ &= \langle \phi|\psi\rangle \end{aligned} \quad (19.15)$$

前部の角運動量 9.3 の式から  $\sigma_y|\pm\rangle$  は

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -i \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるので

$$\Theta|\mathbf{x}, +\rangle = |\mathbf{x}, -\rangle$$

$$\Theta |\mathbf{x}, -\rangle = -|\mathbf{x}, +\rangle$$

であり、まとめて

$$\Theta |\mathbf{x}, \sigma\rangle = \sigma |\mathbf{x}, -\sigma\rangle$$

とかける。波数空間では

$$\begin{aligned} \Theta |\mathbf{k}, \sigma\rangle &= \Theta \left[ \int d^d \mathbf{x} \sum_{\sigma'} |\mathbf{x}, \sigma'\rangle \langle \mathbf{x}, \sigma' | \mathbf{k}, \sigma \rangle \right] \\ &= \int d^d \mathbf{x} \sum_{\sigma'} \sigma' |\mathbf{x}, -\sigma'\rangle \langle \mathbf{x}, \sigma' | \mathbf{k}, \sigma \rangle^* \\ &= \int d^d \mathbf{x} \sum_{\sigma'} \sigma |\mathbf{x}, -\sigma'\rangle \langle \mathbf{x}, -\sigma' | -\mathbf{k}, -\sigma \rangle \\ &= \sigma |-\mathbf{k}, -\sigma\rangle \end{aligned}$$

従って

$$\langle \mathbf{x}, \sigma | \Theta | \psi \rangle = -\langle \psi | \Theta | \mathbf{x}, \sigma \rangle = -\langle \psi | \mathbf{x}, -\sigma \rangle \sigma \quad (19.16)$$

が成り立つから

$$\Theta \begin{pmatrix} \psi_+(\mathbf{x}) \\ \psi_-(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\psi_-^*(\mathbf{x}) \\ \psi_+^*(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \quad \Theta \begin{pmatrix} \psi_+(\mathbf{k}) \\ \psi_-(\mathbf{k}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\psi_-^*(-\mathbf{k}) \\ \psi_+^*(-\mathbf{k}) \end{pmatrix} \quad (19.17)$$

のように  $\mathbf{k}$  空間では  $\mathbf{k}$  の反転が起きる。

### 19.10.1 バンド基底

量子ホール効果では Fermi 準位がギャップ中にあり、電流が電場と垂直方向に流れる。

量子スピンホール効果もこれに似た絶縁体で電流の代わりにスピンの流れが電場と垂直方向に流れ、スピン Hall 伝導率が量子化する。量子ホール効果では時間反転対称性の破れが重要であった。しかしスピン Hall 状態では時間反転対称性が保たれる。これは電流が時間反転に対し、奇であるのに対し、スピン流が偶になっていることに起因する。

スピニアップとダウンに対する 2 つの量子ホール状態のモデルを考える。ハミルトニアンとして次の  $4 \times 4$  の行列を

$$\mathcal{H}^{QSH}(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} \mathcal{H}_+(\mathbf{k}) & 0 \\ 0 & \mathcal{H}_-(-\mathbf{k}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{H}_{QAH}(\mathbf{k}) & 0 \\ 0 & \mathcal{H}_{QAH}^*(-\mathbf{k}) \end{pmatrix}$$

を考える。対角項は式 19.11 と同様に

$$\mathcal{H}_{QAH}(\mathbf{k}) = \mathbf{R}(\mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\tau} \quad \mathbf{R}(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} t \sin k_x a \\ t \sin k_y a \\ m + \sum_{\mu} [1 - \cos k_{\mu} a] \end{pmatrix}$$

とおく。この時の  $\tau$  は副格子の自由度を記述する擬スピンである。

電流とスピン流を次のように表す。

$$\mathbf{j}^c = \mathbf{j}_+ + \mathbf{j}_-$$

$$\mathbf{j}^{sz} = \mathbf{j}_+ - \mathbf{j}_-$$

この時、Hall 電流に対しては  $\mathbf{j}_+, \mathbf{j}_-$  が互いに打ち消す。しかし、スピンホール伝導率は有限の値に量子化される。fermi 準位がギャップ中にある場合はその下にある二つのバンドを考える。

今、スピンの  $z$  成分は保存されていて、アップとダウンの 2 つのエネルギーは常に縮退している。このようなブロッホ状態を  $|u_{+\mathbf{k}}\rangle, |u_{-\mathbf{k}}\rangle$  とする。式 19.4 からこの時の Berry 接続を

$$\mathbf{A}^c(\mathbf{k}) = -i(\langle u_{+\mathbf{k}} | \nabla_{\mathbf{k}} | u_{+\mathbf{k}} \rangle + \langle u_{-\mathbf{k}} | \nabla_{\mathbf{k}} | u_{-\mathbf{k}} \rangle)$$

$$\mathbf{A}^{S_z}(\mathbf{k}) = -i(\langle u_{+\mathbf{k}} | \nabla_{\mathbf{k}} | u_{+\mathbf{k}} \rangle - \langle u_{-\mathbf{k}} | \nabla_{\mathbf{k}} | u_{-\mathbf{k}} \rangle)$$

この前者は電荷の接続、特に後者をスピン Berry 接続という。

これから電荷 Hall 伝導率とスピン Hall 伝導率が次のようになる。

$$\sigma_{xy}^c \frac{\hbar}{e^2} = \int_{BZ} \frac{d^2\mathbf{k}}{2\pi} \nabla_{\mathbf{k}} \times \mathbf{A}^c(\mathbf{k})$$

$$\sigma_{xy}^{S_z} \frac{\hbar}{e^2} = \int_{BZ} \frac{d^2\mathbf{k}}{2\pi} \nabla_{\mathbf{k}} \times \mathbf{A}^{S_z}(\mathbf{k})$$

ただし、時間反転対称性から

$$\sigma_{xy}^c = 0$$

である。スピンの  $z$  成分が保存している場合、時間反転対称な絶縁相は整数のトポロジカル不変量

$$\nu = \sigma_{xy}^{S_z} \frac{\hbar}{e^2} \in \mathbb{Z}$$

となる。

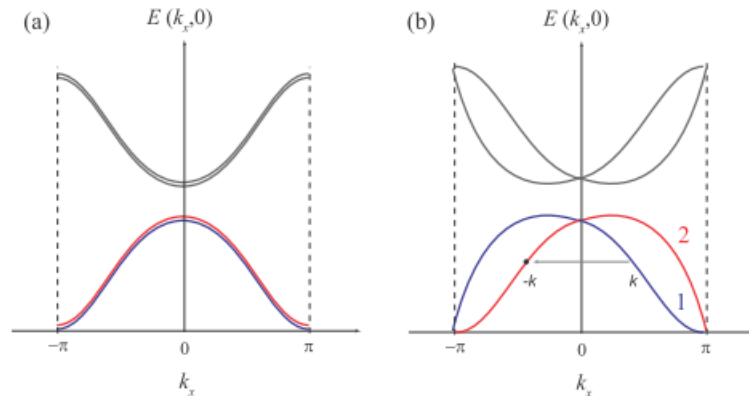


Figure 5.1: エネルギー分散: (a)  $S_z$  が保存する場合。各  $\mathbf{k}$  においてスピニアップとダウンは常に縮退する。(b)  $S_z$  が非保存の場合。スピンの縮退はとけるが、 $|u_{1,\mathbf{k}}\rangle$  とその時間反転  $|u_{2,-\mathbf{k}}\rangle$  の縮退 (Kramers 縮退) は残る。

左図は時間、空間ともに反転対称性がある。右は時間反転のみの対称性がある。

右図の赤と青の線はスピンの場合である。

図 19.8: トポロジカル絶縁体・超伝導体の基礎理論 野村健太郎, 2013 より

$S_z$  が保存しない場合  $[S_z, \mathcal{H}] \neq 0$  のハミルトニアンを考えるとスピン軌道相互作用を考えると次のように非対角項をもつ。

$$\mathcal{H}^{2dTI}(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} \mathcal{H}_{QA}(\mathbf{k}) & \Gamma^\dagger(\mathbf{k}) \\ \Gamma(\mathbf{k}) & \mathcal{H}_{QA}(-\mathbf{k}) \end{pmatrix}$$



この基底での時間反転演算子は  $I$  を  $2 \times 2$  の単位行列として

$$\Theta = -i\sigma_y K = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} K$$

であり、 $\Theta^2 = -1$  である。  $\Gamma$  については  $\Gamma(-\mathbf{k}) = \Gamma^T(\mathbf{k})$  であれば

$$\Theta \mathcal{H}(\mathbf{k}) \Theta^{-1} = \mathcal{H}(-\mathbf{k})$$

を満たす。つまり  $\mathbf{k} = 0$  であれば時間反転対称性がある。

ここでバンドインデックスを  $\alpha, \beta = 1, 2$  として時間反転で  $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$  にかわるから

$$\omega_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) \equiv \langle u_{\alpha-\mathbf{k}} | \Theta | u_{\beta\mathbf{k}} \rangle$$

を導入すると便利である。これから波数  $\mathbf{k}$  の Bloch 状態と波数  $-\mathbf{k}$  の Bloch 状態が時間反転操作で式 19.16 から

$$\begin{aligned} |u_{\alpha-\mathbf{k}}\rangle &= -\Theta |u_{\alpha\mathbf{k}}\rangle \\ &= \sum_{\beta} \Theta |u_{\beta\mathbf{k}}\rangle (-1) \langle u_{\beta\mathbf{k}} | \Theta |u_{\alpha-\mathbf{k}}\rangle \\ &= \sum_{\beta} \Theta |u_{\beta\mathbf{k}}\rangle \omega_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) \\ &= \sum_{\beta} \omega_{\alpha\beta}^*(\mathbf{k}) \Theta |u_{\beta\mathbf{k}}\rangle \end{aligned}$$

が成り立つ。また、先に定義した  $\omega_{\alpha\beta}(\mathbf{k})$  はユニタリであることを次で確認する。

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} \omega_{\gamma\alpha}^{\dagger}(\mathbf{k}) \omega_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) &= \sum_{\alpha} \omega_{\alpha\gamma}^{\dagger}(\mathbf{k}) \omega_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) \\ &= \langle \Theta u_{\gamma\mathbf{k}} | u_{\alpha\mathbf{k}} \rangle \langle u_{\alpha\mathbf{k}} | \Theta u_{\beta\mathbf{k}} \rangle \\ &= \langle \Theta u_{\gamma\mathbf{k}} | \Theta u_{\beta\mathbf{k}} \rangle \\ &= \langle u_{\beta\mathbf{k}} | u_{\gamma\mathbf{k}} \rangle \\ &= \delta_{\beta\gamma} \end{aligned}$$

また、式 19.14 から  $\langle \psi | \Theta | \phi \rangle = -\langle \phi | \Theta | \psi \rangle$  から

$$\begin{aligned} \omega_{\beta\alpha}(-\mathbf{k}) &= \langle u_{\beta(+\mathbf{k})} | \Theta | u_{\alpha(-\mathbf{k})} \rangle \\ &= -\langle u_{\alpha(-\mathbf{k})} | \Theta | u_{\beta(+\mathbf{k})} \rangle \\ &= \omega_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) \end{aligned}$$

を満たす。従って  $\mathbf{k} = 0$  で  $\omega$  は反対称である。 Brillouin ゾーンには  $\mathbf{k} = 0$  の点の他に  $-\mathbf{k}$  と  $\mathbf{k}$  が等価になる点が存在する。

つまり波数の成分が  $k_x, k_y = 0, \pm\pi$  のような時間反転対称な値の時 ( $\mathbf{k} = \Lambda$  と表す) に  $\omega$  は完全に反対称行列になる。

$$\omega(\Lambda) = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{12}(\Lambda) \\ -\omega_{12}(\Lambda) & 0 \end{pmatrix} = \omega_{12}(\Lambda) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

### 19.10.2 Berry 接続行列

波動関数のトポロジーを説明する道具の 1 つを Berry 接続とすることができる。量子 Hall 効果を考えると個々のバンド  $n$  に対し、Berry 接続  $\mathbf{A}_n(\mathbf{k})$  を考えた。ここでは時間反転対称性がある場合を考える。この場合は Kramers 対に対応する 2 つの縮退したバンドがあるので計、 $2 \times 2 = 4$  の Berry 接続成分を考える。

$$\mathbf{A}_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) = -i \langle u_{\alpha\mathbf{k}} | \nabla_{\mathbf{k}} | u_{\beta\mathbf{k}} \rangle$$

各成分は

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}(\mathbf{k}) & \mathbf{A}_{12}(\mathbf{k}) \\ \mathbf{A}_{21}(\mathbf{k}) & \mathbf{A}_{22}(\mathbf{k}) \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{A}^0(\mathbf{k}) + \mathbf{A}^z(\mathbf{k}) & \mathbf{A}^x(\mathbf{k}) - i\mathbf{A}^y(\mathbf{k}) \\ \mathbf{A}^x(\mathbf{k}) + i\mathbf{A}^y(\mathbf{k}) & \mathbf{A}^0(\mathbf{k}) - \mathbf{A}^z(\mathbf{k}) \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{A}^0(\mathbf{k}) \frac{\sigma^0}{2} + \mathbf{A}^a(\mathbf{k}) \frac{\sigma^a}{2} \end{aligned}$$

と表すことができる。この時の第1項を  $U(1)$  部分、第2項を  $SU(2)$  という。 $U(1)$  部分は2つのバンドの対角和に相当し、電荷セクターに対応する。つまり、

$$\mathbf{A}^c = \mathbf{A}^0 = \text{tr}[\mathbf{A}] = -i \langle u_{1\mathbf{k}} | \nabla_{\mathbf{k}} | u_{1\mathbf{k}} \rangle - i \langle u_{2\mathbf{k}} | \nabla_{\mathbf{k}} | u_{2\mathbf{k}} \rangle$$

つまり、時間反転対称性がある場合  $U(1)$  部分は非自明な効果はもたらさない。しかし、 $SU(2)$  部分はスピン自由度あるいはバンドの自由度に対応し、Pauli 行列  $\sigma^a (a = 1, 2, 3)$  はスピン演算子をバンド基底で対角されるようにユニタリ変換したのものと解釈する。

## 参考文献

- [1] 菅野礼治 ゲージ理論の解析力学 2007
- [2] G.M. ザスラフスキー 三島信彦、斉藤徹也、新藤 茂 訳 1989 カオス-古典および量子力学系-
- [3] 内山龍雄 相対性理論 1977 岩波全書
- [4] Tristan Needham **Visual complex analysis** 1997 培風館
- [5] J.W.Noh, A.Fougères, and L.Mandel **Operational approach to the phase of quantum field** 1992 Physical Review A 45
- [6] D.T.Pegg, S.M.Barnett **Phase properties of quantized single-mode electromagnetic field** 1989 Physical Review A 39
- [7] 小林昭七 接続の微分幾何とゲージ理論 1989 裳華房
- [8] 野水克己 現代微分幾何入門 1969 裳華房
- [9] 佐藤光 群と物理 1992 丸善株式会社
- [10] Tristan Needham **Visual Complex Analysis** 1997 OXFORD
- [11] 小沢哲也 曲線・曲面と接続の幾何 1997 培風館
- [12] 中原幹生 理論物理学のための幾何学とトポロジー **I,II** 2000 ピアソン・エデュケーション
- [13] 丹羽雅昭 超伝導の基礎 2002 東京電機大学出版局
- [14] 矢吹治一 量子論における位相 1998 日本評論社
- [15] Tai Tsun Wu, Chen Ning Yang **Concept of nonintegrable factors and global formulation of gauge fields** 1975 Physical Review D 12
- [16] R.Glies **Reconstruction of gauge potentials from Wilson loops** 1981 Physical Review D 24
- [17] Pratul Bandyopadhyay **Geometry, Topology and Quantum Field Theory**

- [18] 深谷賢治 双曲幾何 岩波書店 2004
- [19] Shinichi Deguchi Kazuo Fujikawa **Second-quantized formulation of geometric phases** 2005  
Physical Review A72
- [20] 大貫義朗 鈴木増雄 柏太郎 経路積分の方法 岩波 現代の物理学
- [21] 柏 太郎 サイエンス社 新版 演習 場の量子論
- [22] J.David Jackson **Classic Electrodynamics** 2001
- [23] 中村 哲・須藤彰三 電磁気学 朝倉書店 2012
- [24] Matthew N.O. **Elements of Eletromagnetic**
- [25] **Lectures on Clifford(Geometric) Algebras and Appliations** Rafal Ablamowicz Garret Sobczyk 2003
- [26] Julian Schwinger シュウインガ—量子力学 Springer 2000
- [27] 野村健太郎 トポロジカル絶縁体・超伝導体の基礎理論 September 11, 2013
- [28] 安藤陽一 トポロジカル絶縁体入門 2014
- [29] Brian R. Greene **STRING THEORY ON CALABI-YAU MANIFOLDS** Columbia University
- [30] 深谷 賢治 ゲージ理論とトポロジー 1995 Springer
- [31] Joseph L.Birman **Geometry,Particles,and Fields** Springer
- [32] Charles Nash Sinddhartha Sen **Topoloy and geometry for Physics** Mineola,New York
- [33] 二木 昭人 微分幾何講義-一般理論と現代物理への応用 サイエンス社
- [34] Andre Weil ケーラー多様体論入門 1958 Springer
- [35] 天野勝利 **Hopf** 代数とは 筑波大学
- [36] 谷村省吾 トポロジー・圏論・微分幾何 サイエンス社 SGC-52
- [37] 坪井 俊 幾何学3 微分形式 東京大学出版
- [38] Louis H.Kauffman **KNOTS AND PHYICS** World Sientific 1993
- [39] 服部昌夫 多様体のトポロジー 岩波 2003
- [40] David W. Lyons **An Elementary Introduction to the Hopf Fibration** Lebanon Valley College
- [41] Nicholas Wheeler **Transformational principles latent in the theory of CLIFFORD AL-  
GEBRAS** Reed College Physics Department 2003
- [42] Mathematica Demonstration Richard Hennigan **Rotating the Hopf Fibration**  
<http://www.wolfram.com/>
- [43] Ana Cannas da Silva **Lectures on Symplectic Geometry** 2006

- [44] **Rotations of the three-sphere and symmetry of the Clifford Torus** John McCuan and Lafe Spietz October 5,1998
- [45] Maris Ozols **Geometry of qubit** 2007
- [47] Rupert Way **Dynamics in the Hopf bundle, the geometric phase and implications for dynamical systems** University of Surrey U.K 2008
- [48] Chris J Isham **Modern Differential Geometry for Physicists**
- [50] Robert Gilmore **Lie Groups, Lie Algebras, and Some of Their Applications**
- [51] Bo-Yu Hou, Bo-Yuan Hou **DIFFERENTIAL GEOMETRY FOR PHYSICS** World Scientific 1997
- [52] Thomas J. Bridges **The Orr-Sommerfeld equation on a manifold**
- [53] 佐古彰史 **超対称性ゲージ理論と幾何学** 2007 日本評論社
- [54] 早川尚男 **連続体力学** 京都大学大学院 平成 17 年
- [55] 岡部洋一 **電磁気学** 放送大学 2015
- [56] Bjorn Felsager **Geometry, Particles, and Fields** Springer 1997
- [57] 及川正行 **偏微分方程式** 岩波書店 1955
- [60] 三尾典克 **変形体の力学** 東京大学
- [61] Daniel Z. Freedman and Antoine Van Proeyen **Supergravity** CAMBRIDGE
- [62] V.P Nair **Quantum Field Theory** 2005 Springer
- [63] **Diagrammatica The Path to Feynman Rules** Martinus Veltman 1995 Cambridge University Press
- [64] Martin Ammon Johanna Erdmenger **Gauge/Gravity Duality: Foundations and Applications** 2005 Cambridge University Press
- [65] Kawamura Yoshiharu **相対論的量子力学** 裳華房
- [66] 泰泉寺雅夫 **数物系のためのミラー対称性入門** 2014 サイエンス社
- [67] 堀川穎二 **複素代数幾何学入門** 岩波書店
- [68] Shiing-shen Chern **Complex Manifolds Without Potential Theory** 1995 Springer Verlag New York, LLC
- [69] 安藤哲也 **コホモロジー** 2002 日本評論社
- [70] Joseph Polchinski **String Theory I, II** Cambridge University Press 1998
- [71] 坂本真人 **量子力学から超対称性へ** SGC ライブラリ 96 2012 サイエンス社
- [72] Barton Zwiebach **A First Course in STRING THEORY** 2009 Cambridge University Press
- [73] 深谷 賢治 編 **ミラー対称性入門** 2009 日本評論社
- [74] 白水 徹也 **アインシュタイン方程式** 2012 SGO ライブラリ サイエンス社

- [75] 唐木田健一 ひとりで学べる一般相対性理論 講談社 2015
- [76] 深谷賢治 数学者による数学者のための **StrigDuality** 京都大学
- [77] 坪井 俊 幾何学Ⅷ ホモロジー入門 東京大学出版会
- [78] 佐藤秀司・佐藤周友 代数的サイクルとエタールコホモロジー Springer 2012
- [79] 石橋延幸・村上公一 弦の場の理論 2012 SGO ライブラリ サイエンス社
- [80] 伊藤克司 共形場理論 2011 SGO ライブラリ サイエンス社
- [81] 高柳 匡 ホログラフィー原理と量子エンタングルメント サイエンス社
- [82] 江沢 洋、渡辺敬二、鈴木増雄、田崎清明 繰り込み群の方法 1999 岩波書店
- [83] 今村 洋介 超弦理論の基礎 2010 SGO ライブラリ サイエンス社
- [84] 江口 徹 菅原 祐二 共形場理論 2015 岩波書店
- [85] 西森 秀稔 相転移・臨界現象の統計物理学 倍風館
- [86] Michael E.Peskin, Daniel V.Schroeder **An introduction to quantum Field Theory**
- [87] Charles Kittel and Herbrt Kroemer **THERMAL PHYSICS** W.H.Freeman and Company 1980
- [88] J.J Sakurai **Modern Quantum Mechanics** 1985 The Benbjamin/Cumming Publishng Company,Inc.
- [89] 松田 哲 複素関数 理工系の基礎数学5 岩波書店 1995
- [90] 小林 昭七 複素幾何 岩波書店 2005
- [91] 早川 尚男 非平衡統計力学 サイエンス社 SGC ライブラリ 2006
- [92] Mukund Rangamani & Tadashi Takayanagi **“Holographic Entanglement Entropy“** 2017
- [93] 松枝 宏明 量子系のエンタングルメントと幾何学 森北出版 2016
- [94] 治部真里 高橋康 添削形式による場の量子論 日本評論社 1997
- [95] V.P. ナイア著 阿部泰裕 磯暁 訳 現代的視点からの場の量子論 Springer 2005
- [96] 大津 元一 現代光科学 Ⅷ、Ⅷ 光の物理的基礎 朝倉書店 1994
- [97] 日置 善郎 相対論的量子場 吉岡書店 2008
- [98] 細谷 暁夫 量子コンピューターの基礎 サイエンス社 1999
- [99] Michael A. Nielsen & Isaac L. Chuang **Quantum Computation and Quantum Information** Cambride University press 2010
- [100] Brian C.Hall **Lie Groups,Lie Algebras, and Reprasetations An Elementary Introduction** Springer 2015
- [101] 谷村省吾 ホロノミーと力学系 名古屋大学
- [102] Raffaele Rani **On Parallel Transport and Curvature** 2009
- [103] 塩濱 勝博, 成 慶明 曲面の微分幾何学 日本評論社 2005

- [104] 大槻 知忠 結び目の不変量 共立出版 2015
- [105] 鈴木 増雄 統計力学 岩波書店 1994
- [106] Anastasios Mallios **MODERN DIFFERENTIAL GEOMETRY IN GAUGE THEORIES** Springer 2009
- [107] **Lectures on Geometry** Edited by N.M,J.WOODHOUSE OXFORD university press 2017
- [108] 田中利夫・村上斉 トポロジー入門 サイエンス社 SGC ライブラリ 42 2005
- [109] 川村嘉春 基礎物理から理解するゲージ理論 サイエンス社 SGC ライブラリ 42 2017
- [110] 細谷 裕 ゲージヒッグス統合理論 サイエンス社 SGC ライブラリ 42 2018
- [111] 堺井義秀 山田憲和 野尻美保子 素粒子物理学 KEK 2012
- [112] 鈴木 増雄 経路積分と量子解析 サイエンス社 2017
- [113] David Tong **Quantum Field Theory** Universith of Cambridge 2006
- [114] 並木美喜雄 大場一郎 散乱の量子力学 岩波書店 1997
- [115] 福田礼次郎 フーリエ解析 岩波書店 1995
- [116] Adam Lupu-Sax **Quantum Scattering Theory and Applications** Harvard University 1998
- [117] 佐藤文隆 児玉英雄 一般相対性理論 岩波書店 1992
- [118] 松本幸夫 多様体の基礎 東京大学出版 1989
- [119] Wulf Rossmann **Lie Groups** OXFORD 2002
- [120] 佐武一郎 リー群の話 日本評論社 1982
- [121] F. シャトラン 行列の固有値 Springer 1988
- [122] 生西明夫 中神 臣 作用素環入門 1 岩波 2006
- [123] 黒田成俊 関数解析 共立出版 1980
- [124] 堀田昌寛 量子情報と時空の物理 第2版 サイエンス社 2019
- [125] 砂田利一 行列と行列式 岩波 2003
- [126] 太田 浩一 電磁気学の基礎 東京大学出版会 2013
- [127] J. マトウシエク著 岡本吉央訳 離散幾何学講義 丸善 2001
- [128] 根本香絵 量子力学の考え方 物理で読み解く量子情報論の基礎 サイエンス社 2008
- [129] 甘利 俊一 情報幾何学の新展開 サイエンス社 2014
- [130] Michael A.Nielsen Isaac L. Cauang **Quantum Computation and Quantum Information**
- [131] 佐川弘幸/吉田宣章 量子情報理論 第3版 丸善 2019
- [132] Leo.P.Kadanoff and Gordon Baym 1962 量子情報理論 丸善プラネット
- [133] Rodney Loudon **The quantum theory of light** Oxford University Press 1983
- [135] 長島順清 粒子と場 大阪大学
- [136] MARK THOMSON **Modern Particle Physics** University of Cambridge 2013