

## 概要

本部ははじめにの基礎物理の内容をいっそう深めるための数学的な内容を準備する。第3部の多様体、微分幾何を引き継ぎ、外積空間から複体、鎖体、ホモロジー、結び目理論、グラフ理論の基礎を学ぶ。これらは新しい物理学の概念を表現していくのに必須な道具になる。本シリーズに共通した物理を動的イメージでとらえなおす目的においても重要な役割を持つ。特に本部では深谷賢治氏の文献を多く引用する。数学者であつて物理の理論に深い洞察をされている方である。氏の著作を読み込めば学生諸君にも新しい指針が見つかるだろう。そして位相的場の理論を学び、る物理の対称性や保存則の背景にある数理を深めていく。本部は未完成部分が多く、今後加筆修正する予定である。参考文献を見て学習に役立ててほしい。

# 1 数学的準備

## 1.1 コンパクト

第1部、4部でもコンパクトであるという概念は、無限と有限を区別する上で重要になる。

第4部でみたように位相空間の部分集合において

**定義 1.** 任意の開被覆が有限部分被覆を持てばコンパクトである。

例えば数直線上の閉区間やユークリッド空間内の有界閉集合はコンパクトである。

また  $n$  次元球は通常の位相に対し、コンパクトである。

$\mathcal{O}$  をその開集合系とする位相空間（特に距離空間）

$$(X, \mathcal{O}) \tag{1.1}$$

の部分集合に対し、

$$A \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \quad (O_\lambda \in \mathcal{O}) \tag{1.2}$$

となるならば有限個の  $\lambda_n$  を選び

$$A \subset \bigcup_{k=1}^n O_{\lambda_k} \quad (O_{\lambda_k} \in \mathcal{O}) \tag{1.3}$$

とすることができれば  $A$  は  $X$  のコンパクト集合である。

また、点列がどこかに収束点を持てばコンパクトになる。

## 1.2 レトラクト

**定義 2.** レトラクション (retraction)

$X$  を位相空間とし、 $A$  を  $X$  の部分空間とする。この時

$$r : X \rightarrow A$$

がレトラクション (retraction) とは、全ての  $a \in A$  に対して

$$r(a) = a$$

となることである。つまり、 $A$  を  $X$  の部分空間としたから包含写像を

$$\iota : A \hookrightarrow X$$

とすると、レトラクションは連続写像  $r$  で

$$r \circ \iota = id_A$$

となり、 $r$  の包含との合成が恒等写像になるものである。

例えば任意の空ではない空間はなんらかの方法で点にリトラクトする。  
つまり、

定理 1.  $X$  上の任意の相異なる 2 点  $x, y$  に対して、

$$U \cup V = \phi (\text{空集合})$$

であるような  $x$  の開近傍  $U$  および  $y$  の開近傍  $V$  が必ず存在するハウスドルフ空間なら  $A$  は  $X$  の閉集合になる。

### 1.2.1 変位レトラクト [108]

ここで今後ホモロジーの計算をするときに便利は道具を用意する。

定義 3. 変位レトラクション

$Y$  は位相空間  $X$  の部分空間とし、次を包含写像とする。

$$\iota : Y \rightarrow X$$

$Y$  内の点  $y$  に対しては  $r(y) = y$  であるような連続写像

$$r : X \rightarrow Y$$

が存在して、 $id_X$  から

$$\iota \circ r := X \rightarrow Y$$

へのホモトピーを

$$\Phi : X \times [0, 1] \rightarrow X$$

として、 $Y$  内の点を固定するものが存在するとき  $Y$  を  $X$  の変位レトラクトといい、 $r$  は変位レトラクションという。

この時、定義から

$$\iota \circ r \sim id_X$$

$$r \circ \iota \sim id_Y$$

が成り立つので  $X$  と  $Y$  はホモトピー同値になり

$$X \sim Y$$

となる。

連続写像

$$F : X \times [0, 1] \rightarrow X$$

が空間  $X$  の部分空間  $A$  への変位レトラクションであるとは  
全ての  $x \in X, a \in A$  に対して

$$F(x, 0) = x, F(x, 1) \in A, \text{ and } F(a, 1) = a$$

が成り立つことをいう。つまり、変位レトラクションはレトラクションと  $X$  上の恒等写像との間のホモトピー同値である。

例えば空間  $X$  の変位レトラクトとして 1 点を持つということは  $X$  が弧状連結であり、可縮であることと同じである。

### 1.3 Dirac デルタ関数時間の連続性

$\delta$  関数は正規分布から次のように密度関数としての定義できる。

定義 4. デルタ関数

$$\delta(x) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \quad (1.4)$$

また、Sinc 関数の近似からも定義できる。

$$\delta(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sin kx}{\pi x} \quad (1.5)$$

次の Heaviside-StepFunction との関係が深い

定義 5. ステップ関数

$$\theta_0(x) \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ 1 & (x > 0) \end{cases} \quad (1.6)$$

$$\theta_0(x) = \int_{-\infty}^x \delta(\xi) d\xi \quad (1.7)$$

つまりステップ関数の微分がデルタ関数である。

フーリエ変換を用いると  $\delta$  関数は次のように導くことができる。

$f(x)$  が次のようにおけるから

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0, \pm 1, \dots} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny} \right) e^{iny} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \sum_{n=0, \pm 1, \dots} f(y) e^{in(x-y)} \right\} dy \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \Delta(x-y) f(y) dy \end{aligned} \quad (1.8)$$

ただし、

$$\Delta(x-y) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0, \pm 1, \dots} e^{in(x-y)}$$

である。これは

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} d\omega$$

とおけば次のデルタ関数の積分公式を導ける。

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-y) f(y) dy$$

また、 $ax = y$  とおくと

$$\int_{-L}^L f(x) \delta(ax) dx = \int_{-aL}^{aL} f\left(\frac{y}{a}\right) \delta(y) \frac{dy}{a} = \frac{f(0)}{a}$$

となるので

$$\delta(ax) = \delta(x)/a \quad (1.9)$$

であることがわかる。また、正規分布から導けたように  $\delta(x)$  は偶関数だから

$$\delta(-x) = \delta(x)$$

$$x\delta(x) = 0$$

である。よって次のような性質を持つ。

$$\int \delta(x)f(x)dx = 0$$

$$\int \delta(x-a)f(x)dx = f(a) \tag{1.10}$$

上の式の両辺を  $x$  で微分すると

$$\int f'(x)\delta(x-a)dx + \int f(x)\delta'(x-a)dx = 0$$

よって 1.10 より

$$\int f(x)\delta'(x-a)dx = -f'(a)$$

という性質を持つ。

また、 $g = x^2 - b^2 = (x+b)(x-b) = 0$  であることから  $x = b$  の近傍で  $g$  は

$$g = 2b(x-b)$$

$x = -b$  の近傍で

$$g = -2b(x+b)$$

のように振る舞う。これから

$$\delta(x^2 - b^2) = \delta(2b(x-b)) + \delta(-2b(x+b))$$

となることがわか。さらに一般的な  $g(x)$  が  $x_0$  で単根を持てば、

$$g(x) \doteq g'(x_0)(x - x_0)$$

とおけるので式 1.9 から次の重要な公式が得られる。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(g(x))dx = \frac{f(x_0)}{|g'(x_0)|}$$

さらに  $N$  個の単純 0 点を持てば

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(g(x))dx = \sum_{i=1}^N \frac{f(x_i)}{|g'(x_i)|}$$

となることから

$$\delta(g(x)) = \sum_{i=1}^N \frac{\delta(x - x_i)}{|g'(x_i)|}$$

のように振る舞っていることがわかる。

これから例えば次の関係が成り立つ。

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x} \delta(x^2 - a^2) dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x} \frac{\delta(x-a) + \delta(x+a)}{2a} dx \\ &= \frac{e^{-a} + e^a}{2a}\end{aligned}$$

さらに次のような離散的な和を導くこともできる。

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \delta(\sin x) dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x} \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\delta(x - n\pi)}{|\cos n\pi|} \right) dx \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \delta(x - n\pi) dx \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(n\pi)^2}\end{aligned}$$

このように通常の関数に  $\delta$  関数をかけ、積分させると非常にシンプルに積分結果を得ることができる。ただし、これは基本的に式 1.8 のようにフーリエ変換していることが重要である。

**定義 6.** デルタ関数：フーリエ

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} d\omega$$

と考えると

佐藤の超関数としての定義は次のようになる。

**定義 7.** デルタ関数：超関数

$$\delta(x) = \frac{-1}{2\pi i} \left( \frac{1}{x + i0} - \frac{1}{x - i0} \right) \quad (1.11)$$

## 1.4 Hilbert 空間

量子力学は無限次元のヒルベルト空間上に展開される。そこではじめにヒルベルト空間について考えてみる。複素数を  $\mathbf{C}$  として  $l_2$  ノルムが任意の可算集合  $D$  に対して有限に決まるとする。

$$l_2 = \left\{ x | x : D \rightarrow \mathbf{C} \left( \sum_{i \in D} x(i) x^*(i) \right)^{1/2} \right\} < \infty \quad (1.12)$$

ヒルベルト空間次のような内積が定義できる空間である。  $l_2(D) \times l_2(D) \rightarrow \mathbf{C}$

$$\langle x_1, x_2 \rangle = \sum_{i \in D} x_1(i) x_2^*(i)$$

$l_2$  の要素が可算集合  $D$  により指標付けされるベクトルと考えることができる。

これにより量子力学の純粋状態がヒルベルト空間上の独立した単位ベクトルとして表すことができる。

式 1.12 よりさらに無限大  $L_2$  にまで拡張すると極限をとり

$$\langle f | g \rangle = \int_a^b f^*(t) g(t) dt < \infty$$

とすると  $L_2$  を線形空間とすることができる。さらに次のノルムとユークリッド距離を導入する。

$$\|\psi\| = \sqrt{\langle \psi | \psi \rangle}$$

$$\text{dist}(\phi, \psi) = \|\phi - \psi\|$$

これでヒルベルト空間に距離トポロジーと連続性の概念が入る。

ヒルベルト空間を  $\mathcal{H}$  で表す。この空間においてベクトルのノルムは次のように定義される。

$$\|\phi\| = \sqrt{\phi \cdot \phi} \quad (1.13)$$

このノルムを利用して2つのベクトルのユークリッド距離は

$$\|\phi' - \phi\| = \sqrt{\phi' \cdot \phi'} \quad (1.14)$$

これは基底ベクトル  $|j\rangle$  を用いて次のように複素数の係数で展開できるので

$$\phi = \sum_j |x^j + iy^j|j\rangle \quad (1.15)$$

先のベクトル間の距離は

**定義 8. 距離**

$$\|\phi' - \phi\| = \sum_j \left\{ (x'^j - x^j)^2 + i(y'^j - y^j)^2 \right\}^{1/2} \quad (1.16)$$

となる。また、これから内積  $\langle \phi' | \phi \rangle$  が次のようになることがわかる。

$$\langle \phi' | \phi \rangle = \frac{1}{4} \left\{ \|\phi' + \phi\|^2 - \|\phi' - \phi\|^2 + i\|\phi' + \phi\|^2 - i\|\phi' - \phi\|^2 \right\}^{1/2} \quad (1.17)$$

ここで曲線を表す  $\psi_t$  を次のように定義する。

$$t \rightarrow \psi_t \quad (0 \leq t \leq 1) \quad (1.18)$$

そしてこの曲線の長さを求めるためには次のように区分に分け、順序付けが可能であることを仮定する。

$$0 \leq t_0 \leq t_1 \cdots t_n \leq 1 \quad (1.19)$$

これによって次のように曲線の長さ  $s$  上限をユークリッド和として定義できる。

$$s = \sup \sum_j^n \|\psi_{t_{j-1}} - \psi_{t_j}\| \quad (1.20)$$

ここで曲線を表す  $\psi_t$  のパラメーター  $t$  による微分が定義できてこれもヒルベルト空間に属するとする。

$$\frac{d}{dt} \psi = \dot{\psi} \in \mathcal{H} \quad (1.21)$$

よって曲線の長さは  $t$  による積分に置きかえられて式 1.17 から

$$\begin{aligned} s &= \int_0^1 \frac{ds}{dt} dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{\langle \dot{\psi}_t | \dot{\psi}_t \rangle} dt \end{aligned} \quad (1.22)$$

となる。

つまり量子場において空間の距離は区分的に定義された波動関数の時間微分の内積が決めることになる。  
一方で量子場では shorodinger 方程式が成立するのでハミルトニアン  $H$  が与えられれば

$$i\hbar\dot{\psi} = H\psi \quad (1.23)$$

が成り立つ。

よって式 1.22 から

$$s = \frac{1}{\hbar} \int_{t_0}^t \sqrt{\langle \psi | H^2 \psi \rangle} dt = \frac{(t - t_0)}{\hbar} \sqrt{\langle \psi | H^2 \psi \rangle} \quad (1.24)$$

となる。また、曲線に沿っての速さも次のように  $t$  に無関係に決まる。

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\langle \dot{\psi}_t | \dot{\psi}_t \rangle} = \frac{1}{\hbar} \sqrt{\langle \psi | H^2 \psi \rangle} \quad (1.25)$$

むしろ  $t = 0$  で発散するので逆数にした次の値に意味がある。

$$\frac{dt}{ds} = \left( \langle \dot{\psi}_t | \dot{\psi}_t \rangle \right)^{-1/2} = \hbar \left( \langle \psi | H^2 \psi \rangle \right)^{-1/2} \quad (1.26)$$

ヒルベルト空間の無限小時間推進がハミルトニアンそのものであることから時間推進のユニタリー演算子が

$$U(t) = \exp\left(\frac{Ht}{i\hbar}\right) \quad (1.27)$$

である。

## 1.5 エルミート演算子

波動関数  $\Psi, \Phi$  の内積 (inner product) を次のように定義する。

定義 9. 内積

$$\langle \Phi | \Psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx (\Phi(x))^* \Psi(x)$$

これは正の値を持ち、次の性質がある。複素数  $a, b$  について

$$\langle a\Phi | \Psi \rangle = a^* \langle \Phi | \Psi \rangle$$

$$\langle \Phi | b\Psi \rangle = b \langle \Phi | \Psi \rangle$$

である。さらに、これから 0 または正値をもつノルム (norm) 次のように定義できる。

$$\|\Psi\| \equiv \sqrt{\langle \Psi | \Psi \rangle}$$

さらに  $A, D$  は任意の演算子であればエルミート共役が定義できて

$$\langle A^\dagger \Phi | \Psi \rangle = \langle \Phi | A\Psi \rangle$$

$$\langle \Phi | A^\dagger \Psi \rangle = \langle A\Phi | \Psi \rangle$$

例えば演算子  $D$  を

$$D = \frac{\partial}{\partial x}$$

とおくと

$$\langle \Phi | D^\dagger \Psi \rangle = \langle D\Phi | \Psi \rangle \quad (1.28)$$

が成り立つということは、右辺から次の2行目に部分積分を用いると表面項  $\Psi(\pm\infty) = \Phi(\pm\infty) = 0$  とすれば

$$\begin{aligned} \langle D\Phi | \Psi \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left( \frac{\partial}{\partial x} \Phi(x) \right)^* \Psi(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx (\Phi(x))^* \left( -\frac{\partial}{\partial x} \Psi(x) \right) \end{aligned}$$

となるから式 1.28 から

$$D^\dagger = -\frac{\partial}{\partial x}$$

であることがわかる。一般に演算子の積については

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$$

エルミート演算子であれば

$$A^\dagger = A$$

である。

## 1.6 同時固有値

$A, B$  が可換であれば、例えば次の固有方程式が  $\Psi_a$  に成り立つ場合

$$A\Psi_a = a\Psi_a$$

両辺に  $B$  を作用させると  $AB = BA$  であれば

$$BA\Psi_a = Ba\Psi_a$$

$$A(B\Psi_a) = a(B\Psi_a)$$

とみなすことができる。そこで  $B\Psi_a = \Psi_b$  とおけば次の固有方程式が成り立つことになる。

$$A\Psi_b = a\Psi_b$$

つまり、 $\Psi_a, \Psi_b$  は共通の固有値  $a$  を持つ同時固有関数である。

これは  $A, B$  が非可換である場合は成り立たない。

## 1.7 有理曲線

### 定義 10. 有利曲線

$d$  次有理曲線とは 2 次元複素ベクトル空間  $\mathbb{C}^2$  に無限遠直線を加え複素射影平面をつくる。そこでリーマン球面から複素射影平面への正則写像

$$\phi : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C}P^2$$

は  $z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  を変数とする多項式  $f, g, h$  を用いて

$$\phi(z) = \left( \frac{f(z)}{h(z)}, \frac{g(z)}{h(z)} \right)$$

のように表すことができる。この時

$$f(a) = g(a) = h(a) = 0$$

になるような  $a$  を除外することができる。よって  $f, g, h$  を一斉に定数倍する時を除き、一意に  $\phi(z)$  が決まる。 $f, g, h$  の多項式の次数で一番大きいものを  $d$  とし、これを  $\phi$  の次数という。

この  $\phi$  の像はリーマン球の像で有理数になり、 $d$  次有理曲線という。

## 1.8 空間の分類 [77]

第 4 部でもみたように位相空間の分類は通常 2 つの位相空間の間に同相写像があれば同じと考える。位相空間の同相の定義は以下のものであった。

### 定義 11. 同相

連続写像  $f: X \rightarrow Y$  および連続写像  $g: Y \rightarrow X$  が存在し  $g \circ f = id_X \cap f \circ g = id_Y$  が成り立つ

そこでこの命題を否定すると  $g \circ f \neq id_X \cup f \circ g \neq id_Y$  が成立することになる。

例えば次の集合は互いに同相にならない。

- 整数全体に離散集合を入れた空間  $\mathbf{Z}$
- 実数直線  $\mathbf{R}$
- 円周  $S^1 = \{x \in \mathbf{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$
- カントール集合  $C$
- 平面  $\mathbf{R}^2$

ここでカントール集合  $C$  は

離散位相をもつ 2 点からなる集合  $\{0, 1\}$  の可算個の直積  $\{0, 1\}^{\mathbf{N}}$  に積位相を入れたものであり、3 進カントール集合

$$\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} \mid a_i \in \{0, 2\} \right\} \subset [0, 1]$$

と同等である。これらが同相にならない理由は第 4 部の位相空間で学習した内容を用いて

- 同相写像が存在するためには全単射が存在する必要があるが、集合の元の個数が  $\mathbf{Z}$  とそれ以外では異なる。
- 位相空間の性質としてコンパクト性がある。円周  $S^1$ , カントール集合  $C$  にはコンパクト性があるが、それ以外にはない。
- 位相空間の性質として連結性があるが  $\mathbf{Z}$  とカントール集合は連結ではない。

とすることができる。元の個数を表す濃度を  $\aleph$  とすると  $\mathbf{R}$  の濃度は  $\aleph_1$  とし、これは  $\mathbf{Z}$  の部分集合と同じで連続体濃度と呼ばれる。

しかし、 $\mathbf{Z}$  の個数は濃度は  $\aleph_0$  とすると  $\aleph_0 \neq \aleph_1$  である。

ところが次のような工夫をすると  $\mathbf{R}/\{1\}$  つまり、一点を除いた実空間は連結にならないが  $\mathbf{R}^2/\{1\}$  は連結になる。これから

$\mathbf{R}$  とそれ以上の空間が同相にならないことがわかる。坪井氏は次のように表にまとめた。同相でないことがよくわかる。

	元の個数 (濃度)	コンパクト	連結	1 点の補空間 が連結
$Z$	$\aleph_0$	×	×	×
$\mathbf{R}$	$\aleph_1$	×	○	×
円周 $S^1$	$\aleph_1$	○	○	○
カントール集合 $C$	$\aleph_1$	○	×	×
$\mathbf{R}^2$	$\aleph_1$	×	○	○

図 1.1: [77] より

一般に第 4 部でみたサードの定理から  $m < n$  の時に微分可能な全射

$$\mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^n$$

は存在しないことがわかっている。

## 2 単体 [12][77]

ここでは次章のホモロジー群を学ぶための準備をする。準備といってもストークスの定理の一般化を

### 2.1 単体と複体

ホモロジーの世界は距離という概念がなくスタートをする。点と線のできる図形が基本になる。はじめにこの基本図形を定義する。

**定義 12.** 単体

まず標準  $m$ -単体 (**m-simplex**) を次のように表す。

$$\sigma^m = \left\{ (x^1, \dots, x^m) \in \mathbf{R}^m \mid x^i \geq 0, \sum_{i=1}^m x^i \leq 1 \right\} \quad (2.1)$$

これは直観的にした図のような図形になる。

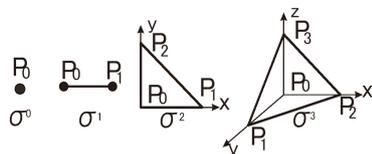


図 2.1:  $\sigma^0, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3$  標準単体の例

点が 0 次に対応し、単体の場合は式 2.1 から境界と内部を含むことに注意する。単体を複数組み合わせると複体  $K$  ができる。

**定義 13.** 単体的複体

この時、 $K$  を単体的複体 (**simplicial complex**) という。

ただし、張り合わせ方に次のルールがあるとする。

- $K$  の単体の任意の辺単体は  $K$  に属する

$$\sigma \in K \cap \sigma' \leq \sigma \rightarrow \sigma' \in K$$

- $\sigma, \sigma'$  が  $K$  の単体であれば共通集合  $\sigma \cap \sigma'$  は空であるか  $\sigma, \sigma'$  の辺単体になる。

$$\sigma, \sigma' \in K \rightarrow \sigma \cap \sigma' = \emptyset \text{ or } \sigma \cap \sigma' \leq \sigma \cap \sigma \cap \sigma' \leq \sigma'$$

例えば次の 3-単体  $\langle p_0 p_1 p_2 p_3 \rangle$  は 0-辺単体  $p_0$  と 2-辺単体  $\langle p_1 p_2 p_3 \rangle$  に分割することができる。

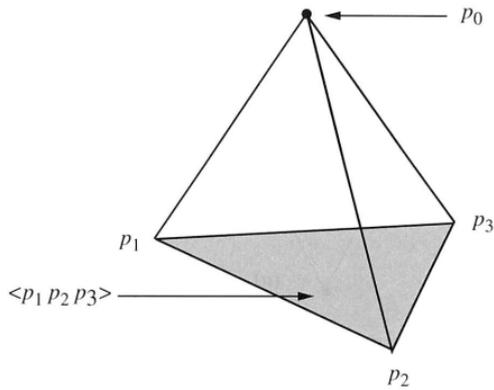


図 2.2: [12] より：単体的複体の例

この場合は 0-辺単体は 4、1-辺単体は 6 つ存在する。一般に  $r$ -単体の中の  $q$ -単体のかず  $N_{rq}$  は

$$N_{rq} = C_{r+1, q+1}$$

で表すことができる。

また、次の図の左は単体的複体であるが右は単体的複体になれない。

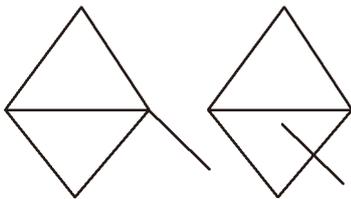


図 2.3: 単体的複体 (左)、とそうでない例 (右)

#### 定義 14. 多面体

単体的複体  $K$  を

$$K = \{s_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$$

とすると、各  $s_\lambda$  は  $\mathbb{R}^N$  の部分集合であるので、和集合

$$|K| = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} s_\lambda$$

を作ると、これも  $\mathbb{R}^N$  の部分位相空間となる。この  $|K|$  を多面体 (**polyhedron**) という。

ここでは  $\|$  記号をつけて表す。

$K$  と  $L$  が異なる単体的複体としても、 $|K|$  と  $|L|$  は  $\mathbb{R}^N$  の部分集合としては一致する。

これから、単体的複体は単なる多面体ではなく、構成要素として、単体がどう組み合わせられているかという情報も含んだ構造物となることに注意する。次の図のように単体的複体としては  $K \neq L$  だが、多面体と見たときには  $|K| = |L|$

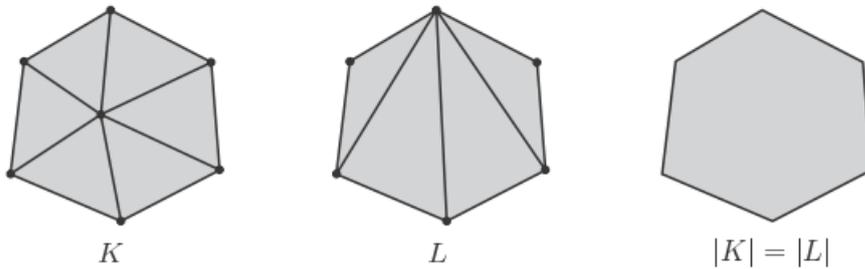


図 2.4: [36] より ; 単体的複体では  $K \neq L$  である。多面体とみれば  $|K| = |L|$  である

## 2.2 三角形分割

単体的複体  $K$  と位相空間  $X$  がある場合

$$f : |K| \rightarrow X$$

が存在すれば  $X$  は三角形分割が可能であるという。以後三角形分割には  $|K|$  の記号を用いることが多い。

例えば円筒  $S^1 \times [0, 1]$  を考えよう。次のように円筒を展開した図を考える。図の左は三角形分割が可能であるが右は可能でない。

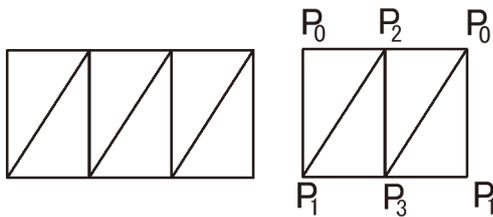


図 2.5: 円筒の三角形分割、右の分割は三角形分割にできない。

これは  $\sigma_2 = \langle p_0 p_1 p_2 \rangle, \sigma'_2 = \langle p_2 p_3 p_0 \rangle$  に対して

$$\sigma_2 \cap \sigma'_2 = \langle p_0 \rangle \cup \langle p_2 \rangle$$

となるが  $\langle p_0 \rangle$  と  $\langle p_2 \rangle$  だけでは共通の単体をもてないし、空でもない。従って 3 角形分割が可能であるためには

左の図では中央に三角形が存在して、のり代として単体で張り合わせができる必要がある。

## 2.3 単体の向き

次に単体に向きを付属させる。次の図のように正の向きを右、反時計回りにきめる。

つまり、順序を入れることになる。

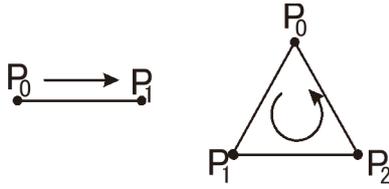


図 2.6: 単体の向き

従って三角形の描き方に正、負ができて次のようになる。

$$\begin{aligned} (p_0, p_1, p_2) &= (p_2, p_0, p_1) = (p_1, p_2, p_0) \\ &= -(p_0, p_2, p_1) = -(p_2, p_1, p_0) = -(p_1, p_0, p_2) \end{aligned}$$

この符号は添え字順に並べた時の奇置換に負になることがわかる。そこで置換演算子を  $P$  として

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ i & j & k \end{pmatrix}, \quad P : \text{Odd} \rightarrow \text{sgn}(P) = -1, \text{Even} \rightarrow \text{sgn}(P) = 1$$

とすると例えば 4 面体  $\sigma^3 = (p_0 p_1 p_2 p_3)$  はこの  $P$  演算子を用いて

$$(p_i p_j p_k p_l) = \text{sgn}(P)(p_0 p_1 p_2 p_3)$$

と表すことができる。これは一般に  $r$ -単体に拡張できる。

## 2.4 境界演算子

外微分形式と面積、体積の関係を見たがさらに一般化するために空間的な幾何を構成する基本要素である。先に定義した単体をここで代数的に扱いやすいように次のように定義する。

### 定義 15. 単体 $\sigma^m$

$n$  次元ユークリッド空間における点の集合

$$\sigma^m = \left\{ x = \sum_{i=0}^m \lambda_i p_i \mid \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1 \right\}$$

を  $m$  単体 (**m-Simplex**) という。

次のように表現する。

$$\sigma^m = (p_0 p_1 \cdots p_m) \tag{2.2}$$

例えば  $\sigma^1$  は線分、 $\sigma^2$  は内部を含む 3 角形である。

$$\begin{aligned} \sigma^1 &= \lambda_0 p_0 + \lambda_1 p_1 \\ &= \lambda_0 p_0 + (1 - \lambda_0) p_1 \end{aligned}$$

単体の向きは  $(p_0 p_1)$  を  $p_0$  から  $p_1$  に向かう線分であるとする。また  $\text{sgn}(p)$  を  $p$  が偶置換なら 1、奇置換なら -1 を表す記号として

$\sigma^2$  は

$$(p_i p_j p_k) = \text{sgn}(p)(p_0 p_1 p_2)$$

である。

定義 16. 境界演算子 (boundary oprator) を  $\partial$  であらわし、

$$\partial(p_0 p_1 p_2 \cdots p_n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i (p_0 p_1 p_2 \cdots p_{i-1} p_{i+1} \cdots p_n) \quad (2.3)$$

と定義する。

例えば

$$\partial(p_0 p_1) = (p_1) - (p_0)$$

$$\partial(p_0 p_1 p_2) = (p_1 p_2) - (p_0 p_2) + (p_0 p_1)$$

$$\partial(p_0 p_1 p_2 p_3) = (p_1 p_2 p_3) - (p_0 p_2 p_3) + (p_0 p_1 p_3) - (p_0 p_1 p_2)$$

また次が成り立つ。

$$\partial(p_0 p_1) + \partial(p_1 p_2) = \partial(p_0 p_2)$$

さらに n-chain を次のように定義する。

$$c = \sum_i a_i \sigma_i^n \quad (2.4)$$

すると境界の境界はないという次の定理が成り立つ。

$$\partial(\partial c) = 0 \quad (2.5)$$

これは

$$\begin{aligned} \partial(\partial(p_0 p_1 p_2 \cdots p_n)) &= \partial \sum_{i=0}^n (-1)^i (p_0 p_1 p_2 \cdots p_{i-1} p_{i+1} \cdots p_n) \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \left\{ \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j (p_0 \cdots p_{j-1} p_{j+1} \cdots p_{i-1} p_{i+1} \cdots p_n) + \sum_{j=i+1}^n (-1)^j (p_0 \cdots p_{i-1} p_{i+1} \cdots p_{j-1} p_{j+1} \cdots p_n) \right\} \\ &= \sum_{j < i}^n (-1)^{i+j} (p_0 \cdots p_{j-1} p_{j+1} \cdots p_{i-1} p_{i+1} \cdots p_n) \\ &\quad - \sum_{i < j}^n (-1)^{i+j} (p_0 \cdots p_{i-1} p_{i+1} \cdots p_{j-1} p_{j+1} \cdots p_n) \\ &= 0 \end{aligned}$$

であり最後の式が奇置換の差が出て消えることから 0 になる。

たとえば次の図のように (a) の 1 単体の境界は  $\partial(p_0 p_2) = p_2 - p_1$

となり存在するが、(b) の単体的複体の例では

$$\begin{aligned} \partial(\partial(p_0 p_1 p_2)) &= \partial((p_1 p_2) - (p_0 p_2) + (p_0 p_1)) \\ &= p_2 - p_1 - (p_2 - p_0) + p_1 - p_0 = 0 \end{aligned}$$

となり、境界を持たない。

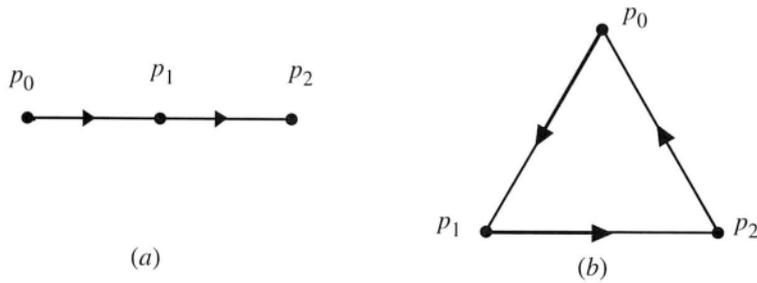


図 2.7: [12] より : (a) は境界があるが、(b) には境界がない

境界を持たない単体は閉形式

$$d(dF) = 0 \tag{2.6}$$

に対応して閉領域と呼ぶ。

## 2.5 鎖群、輪体群

境界を持つ、持たないが、今後重要になるが、これは  $n$  単体に注目したとき、その近辺、 $n+1$ 、 $n-1$  単体との関係が重要になることでもある。

ここで  $K = \{\sigma_\alpha\}$  を向きつけ可能  $n$  次元単体的複体とする。

この時、 $r$ -単体によって生成される自由加群を  $K$  の  $r$  次元鎖群といい  $C_r(K)$  で表す。

$r > \dim K$  の時は  $C_r(K) = 0$  と決めておく。 $C_r(K)$  の元をチェーンという。

### 定義 17. 鎖群

$K$  には  $N$  個の  $r$ -単体があるとすると  $c \in C_r(K)$  は次のように表される。

$$c = \sum_{i=1}^N c_i \sigma_{r,i} \quad c_i \in \mathbb{Z}$$

加群であるので

$$c + c' = \sum_{i=1}^N (c_i + c'_i) \sigma_{r,i}$$

であり、単位元は

$$0 = \sum_i 0 \cdot \sigma_{r,i}$$

であり、逆元は

$$-c = \sum_i (-c_i) \cdot \sigma_{r,i}$$

よって  $C_r(K)$  は階数  $N$  の自由加群である。次のように  $N$  個の  $\mathbb{Z}$  のテンソル和で表される。

$$C_r(K) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}$$

先に定義した境界作用素  $\partial$  は次のようになる。

$$\begin{aligned} \partial p_0 &= 0 \\ \partial_1(p_0 p_1) &= p_1 - p_0 \end{aligned}$$

これは  $p_0$  から  $p_1$  に向かうベクトルである。  
 さらに一般に次のように  $r-1$  チェインが定義できる。` を除外記号として

$$\partial_r \sigma_r \equiv \sum_{i=0}^r (-1)^i (p_0 p_1 \cdots \check{p}_i \cdots p_r)$$

$r = 0$  の場合は

$$\partial_0 \sigma_0 \equiv 0$$

である。

例えば次のように境界演算子が作用すると次元が 1 つ下がり符号が順番に入れ替わる和になる。

$$\partial_3(p_0 p_1 p_2 p_3) = (p_1 p_2 p_3) - (p_0 p_2 p_3) + (p_0 p_1 p_3) - (p_0 p_1 p_2)$$

これを  $c = \sum_i c_i \cdot \sigma_{r,i}$  に作用させる

$$\partial_r c = \sum_i c_i \cdot \partial_r \sigma_{r,i}$$

従って境界作用素は次のように次元を下げていく

$$\partial_r : C_r(K) \rightarrow C_{r-1}(K)$$

この境界作用素によって鎖体にも複体をつくることができる。

#### 定義 18. 鎖複体

$K$  を  $n$  次元単体的複体とすると定義から核と像について

$$C_{n+1}(K) = 0, \text{ Im} \partial_0 = 0$$

が成り立つので  $i: 0 \hookrightarrow C_n(K)$  を包含写像として

$$0 \hookrightarrow C_n(K) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(K) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_2} C_1(K) \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \xrightarrow{\partial_0} 0 \quad (2.7)$$

と表すことができ、これを鎖複体  $C(K)$  という。

さらに、鎖が閉じていれば次の輪体になる。

#### 定義 19. 輪体

また、 $c \in C_r(K)$  が

$$\partial_r c = 0$$

を満たす場合  $c$  を  $r$ -輪体 (**cycle**) といい、この集合を  $Z_r(K)$  で表す。

この関係は第 4 部で学んだ微分形式と同等になっている。

鎖群  $C_r(K)$  の部分群でもあるので  $r$  次元輪体群 (**cycle\_group**) と呼ぶ。

この時重要なのは 2.7 から輪体には境界がないので、次のように境界演算子の核になる。

$$Z_r(K) = \text{Ker} \partial_r \quad (Z_0(K) = C_0(K))$$

#### 定義 20. 境界輪体

$K$  を  $n$  次元単体的複体として  $c \in C_r(K)$  とし、 $d \in C_{r+1}(K)$  が存在し、

$$c = \partial_{r+1} d$$

が成り立てば  $c$  は  $r$ -境界輪体 (**boundary\_cycle**) といい、この集合を  $B_r(K)$  で表す。

$B_r(K)$  は  $C_r(K)$  の部分群をなし  $r$  次元境界輪体群 (boundary\_cycle\_group) と呼ぶ。  
 この時重要なのは 1 つ次元の大きな境界演算子の像になることで

$$B_r(K) = \text{Img} \partial_{r+1} \quad (B_n(K) = 0)$$

が成り立つ。これらは次節の Homology において重要な役割を担う。  
 境界の境界がないことから

$$\partial_r \circ \partial_{r+1} = 0$$

であるから  $C_{r+1}(K) \rightarrow C_{r-1}(K)$  は恒等的に零写像である。  
 また  $c$  が  $r$ -輪体であれば  $c = \partial_{r+1}d$  だから  $c$  は  $r+1$  チェインの境界である。  
 これから輪体と境界輪体との関係として

$$Z_r(K) \supset B_r(K) \tag{2.8}$$

が成り立つ。従って輪体の族は図右のように準同型写像

$$\partial : C_p(K) \rightarrow C_{p-1}(K)$$

の核であり、 $C_p(K)$  の部分群が  $Z_p(K)$  である。  
 これに対し境界輪体群は図左のように

$$\partial c_{p+1} = b_p$$

で表され

$$\ker \partial_p = Z_p(K) \tag{2.9}$$

$$\text{Im} \partial_{p+1} = B_p(K) \tag{2.10}$$

とまとめることができる。

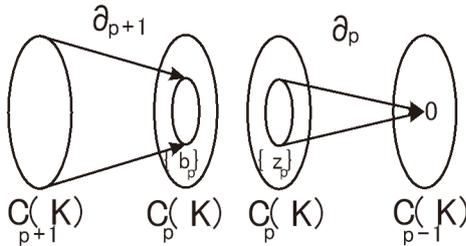


図 2.8:  $\text{Im} \partial_{p+1} = B_p(K)$  の図が左、 $\ker \partial_p = Z_p(K)$  が右である

## 2.6 単体近似 [108]

単体を細かく細分していけば連続的な写像ができると思われる。これを単体写像という。

### 定義 21. 単体の内部

まず、単体の内部として次を定義しておく。

$n$  次元単体  $\sigma = |v_0, v_1, \dots, v_n|$  に対して、

$$\sum_{i=0}^n a_i \vec{v}_i \quad (a_i > 0 \cap \sum_{i=0}^n a_i = 1)$$

を満たす点全体を  $\text{Int}(\sigma)$  で定義し、内部と呼ぶ。ただし、 $0$  次元単体の内部はそれ自身とする。

内部を除いた部分として境界  $\partial(\sigma)$  が定義できる。

第4部でポアンカレの補題を考える場合にインターバル区間  $[1, 0]$  を考え、星状領域を定義した。ここでも、今後利用することが多い開星状近傍を次で定義する。

**定義 22. 開星状近傍**

単体的複体を  $K$  とし、その多面体を  $|K|$  で表す。この  $|K|$  の点集合  $\{x\}$  に対し、 $x$  を含むような内部の合併集合を  $x$  の  $K$  における開星状近傍と呼び  $St(x; K)$  で表すことにする。

簡単には  $x$  を内部に含むような単体である。微妙ではあるが、 $x$  を含む単体とすると一意に決まらない。また、 $|K|$  の部分集合を  $A$  とすると

$$\bigcup_{x \in A} St(x; K)$$

を  $A$  の  $K$  における開星状近傍と呼び、 $St(A; K)$  で表す。

例えば次の図で表される単体的複体  $K$  を考えると  $|K|$  内の点  $A, B, C, D$  の開星状近傍が図のようになる。

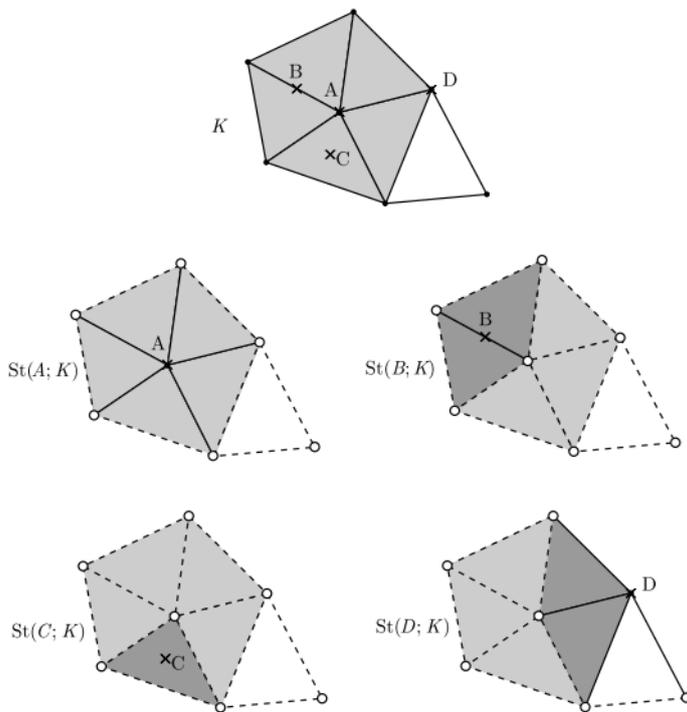


図 2.9: [108] より:開星状近傍は濃い部分。破線、白丸は含まれない

図でみるように

**定理 2. 開星状近傍は開集合になる**

これを示すために

$A \subset |K|$  について開集合の任意の合併集合は開だから  $|K|$  内の任意の点  $x$  に対して、 $St(x; K)$  が開になることがいえればよい。

そのために商集合

$$|K|/St(x; K)$$

は閉になることを示せば良い。

そこで  $y \in |K|/St(x; K)$  を持ってくる、 $y \notin St(x; K)$  なので  $y$  は  $x$  を含むどの単体の内部でもないことになる。

よって  $y$  は  $x$  を含む単体の境界か、その外 ( $x$  を含まない側) にないといけない。  
 これは  $y$  が  $x$  を含まない単体に含まれることを表す。  
 従って、全ての単体が閉であるから、おの有限合併集合の  $|K|/St(x; K)$  は閉集合になる。

この結果の有用性は、細分化を進めていくと、  
 開星状集合は距離空間の開近傍のようにいくらでも狭い領域をつくることが可能なることにある。  
 つまり、単体近似の条件として  
 多面体  $|K|, |L|$  と連続写像

$$f : |K| \rightarrow |L|$$

を考える。

### 定義 23. 単体近似

単体近似とは  $\Phi : K \rightarrow L$  の単体写像が  
 任意の  $x \in |K|$  に対して、 $f(x)$  が  $L$  の単体  $\tau$  に含まれるなら  $|\Phi|(x)$  も  $\tau$  に含まれる。  
 これは次のように言い換えることができる。  
 $K$  の任意の頂点  $v$  に対し、

$$f(St(v; K)) \subset St(\Phi(v); L)$$

また、任意の連続写像  $\Phi : K \rightarrow L$  に対して  $d$  を十分に大きくとると単体近似

$$\Phi : D^d(K) \rightarrow L \tag{2.11}$$

が存在する。

これを示すためにまず、 $d$  を十分大きくとると  $D^d(K)$  のどの頂点  $v$  対しても

$$f(St(v; D^d(K))) \subset St(\omega; L)$$

となる  $L$  の頂点  $\omega$  が存在する。

## 2.7 特異複体 [69]

1 章の特異  $q$  単体  $\sigma^q$  を用いて位相空間  $X$  の特異  $q$  次元鎖群と呼ばれる加群  $S_q(X)$  を次のように定義する。

$$c = c_1 \sigma_1^q + \cdots + c_r \sigma_r^q$$

ただし、 $c_i \in \mathbb{Z}$  である。また、 $q$  が負の数の時には

$$S_q(X) = \{0\}$$

としておく。ここで重要なのはこの加群  $S_q(X)$  は非常にたくさんあり、単体  $\sigma^q : \Delta^q \rightarrow X$  の写像を具体化するのとはとても大変であるが、そうしなくともホモロジーをとることで簡単になることである。

境界作用素  $\partial_q : S_q(X) \rightarrow S_{q-1}(X)$  は単体の時と同じように

$$\partial_q(\sigma^q) = \sum_{i=0}^q (-1)^i \sigma_i^{q-1}$$

とする。ただし、 $\sigma_i^{q-1}$  は  $\sigma^q$  の第  $i$  番目の面でこれは  $q$  次元単体  $\Delta^q = \langle A_0 A_1 \cdots A_q \rangle$  の頂点  $A_i$  の対面になっている。  $q-1$  次元単体

$$\Delta^{q-1} = \langle A_0 A_1 \cdots A_{i-1} A_{i+1} \cdots A_q \rangle$$

の上に写像  $\sigma^q$  を制限して得られる写像

$$\sigma^{q-1} : \Delta^{q-1} \rightarrow X$$

である。

### 定義 24. 特異複体

一般に加法について群となる可換な加群  $S_q (q \in \mathbb{Z})$  と境界演算子  $\partial_p$  が全ての  $q \in \mathbb{Z}$  に対して  $\partial_{q-1} \circ \partial_q = 0$  を満たす時、次の連鎖

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{q+1}} S_q \xrightarrow{\partial_q} S_{q-1} \cdots \quad (2.12)$$

がある時、特異複体といい  $S_*(X)$  で表す。

## 2.8 錐複体

単体的複体の例として次のようなものを錐複体という。

簡単には三角錐の頂点を基点に選んだ単位のようなものである。

### 錐複体

$\sigma^n := |v_0, v_1 \cdots, v_n|$  を  $n$  次元単体とする。ベクトル場

$$\{\vec{x}, \vec{v}_0, \cdots, \vec{v}_n\}$$

が 1 次独立になるような点  $x$  に対して、 $n+1$  次元単体  $x * \sigma^n$  を

$$x * \sigma^n := |x, v_0, v_1 \cdots, v_n|$$

として定義する。単体的複体  $K$  と  $K$  の頂点の集合と 1 次独立になるような点  $x$  に対して次を定義する。

$$x * K := K \cup \{x * \tau \mid \tau \in K\}$$

この時、 $x * \sigma^n, x * K$  を  $\sigma^n$  と  $K$  の  $x$  を頂点とする錐と呼ぶ。

この時、次の定理が成り立つ。

### 定理 3. 錐

$n$  次元単体の定める単体的複体  $\Delta^n$  は  $\Delta^{n-1}$  の錐になる。

$$|v_0, v_1 \cdots, v_n| = v_n * |v_0, v_1 \cdots, v_{n-1}|$$

## 2.9 単体上の積分

ここまで幾何的な単体を見てきたが、これをここでは積分で表すことを考える。

鎖をつくり、つなげる操作は前節のように連続できればまさに積分を表している。

はじめにユークリッド空間における  $r$ -単体上に  $r$ -形式の積分を定義する。

そこで標準的  $r$ -単体  $\bar{\sigma}_r = (p_0 p_1 \cdots p_r)$  とし、

$$p_0 = (0, 0, \cdots, 0)$$

$$p_1 = (1, 0, \cdots, 0)$$

...

$$p_r = (0, 0, \cdots, 1)$$

である。次の図のように  $\{x^\mu\}$  を  $\mathbb{R}^r$  の座標として式 2.1 より

$$\bar{\sigma}_r = \left\{ (x_1, \cdots, x^r) \in \mathbb{R}^r \mid x^\mu \geq 0, \sum_{\mu=1}^r x^\mu < 1 \right\}$$

で一般に表すことができる。

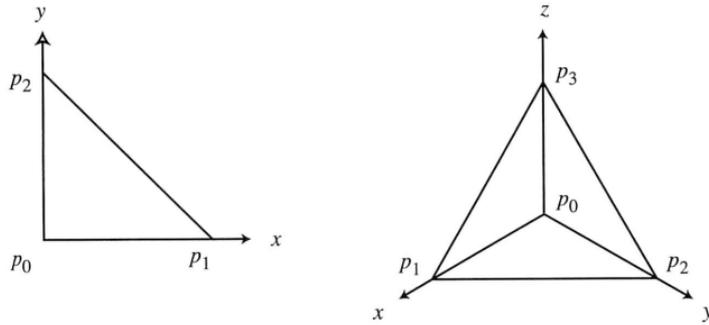


図 2.10: [12] より : 標準的な 2 単体  $(p_0p_1p_2)$  と 3 単体  $(p_0p_1p_2p_3)$

この時、 $\mathbb{R}^r$  における  $r$ -形式は体積要素

$$\omega = a(x)dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^r$$

となり、 $\bar{\sigma}_2$  上で積分すると  $\omega = dx \wedge dy$  とおいて、

$$\int_{\bar{\sigma}_2} \omega = \int_{\bar{\sigma}_2} dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy = \frac{1}{2}$$

となる。

### 2.9.1 1 の分割

次に通常の空間に組み立てられる点と線のブロックの標準単体を多様体  $M$  上に拡張して考えると特異単体  $s^r$  になる。

#### 定義 25. 特異 $r$ 単体

この変換には写像  $\phi$  が  $\mathbf{R}^r$  内の  $r$ -単体  $\sigma^r$  の多様体  $M$  への写像として

$$\phi : \sigma^r \rightarrow M$$

という役割を担う。

この写像  $\phi$  が必ずしも正則ではないという意味で先の特異  $r$ -単体 (singular  $r$ -simplex) という。

簡単には空間内にきれいな三角形や四面体のように入るとはかぎらず、つぶれたり、ゆがんだりしても OK という意味である。

多様体  $M$  上の  $r$ -鎖 (chain) は

$$c^r = \sum_i \lambda_i s_i^r$$

で表すことができる。

ただし、

#### 定義 26. 1 の分割

$\lambda$  は 1 の分割 (重心座標ともいう)

$$\sum_{i=0} \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geq 0 \tag{2.13}$$

を満たすとする。この基準を入れることで積分が見やすくなる。  
この境界は  $\partial c$  で表すことができ境界の境界はないので

$$\partial(\partial c) = 0$$

が成り立つ。例えば図の  $\Delta^2$  について中央の平面図形を使い  $P_1$  から 1 周すれば

$$\begin{aligned}\partial(P_0P_1P_2) &= (P_1P_2) + (P_2P_0) + (P_0P_1) \\ &= (P_1P_2) - (P_0P_2) + (P_0P_1)\end{aligned}\tag{2.14}$$

$$\begin{aligned}\partial(\partial(P_0P_1P_2)) &= \partial((P_1P_2) - (P_0P_2) + (P_0P_1)) \\ &= P_2 - P_1 - (P_2 - P_0) + (P_1 - P_0) \\ &= 0\end{aligned}\tag{2.15}$$

となった。

第 4 部で微分形式の引き戻しを見た。2.7 が微分形式と同じ関係になっていることを考え、第 4 部の微分  $p$  形式の引き戻しを復習すると

$$\alpha = \sum_{i_1 < \dots < i_p} f_{i_1 \dots i_p} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

とおいて

$$\pi : [a_1, b_1] \times \dots \times [a_p, b_p] \rightarrow U$$

で引き戻すと

$$\pi^* \alpha = \sum_{i_1 < \dots < i_p} f_{i_1 \dots i_p} (\pi(t_1, \dots, t_p)) \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \pi_{i_1}}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial \pi_{i_1}}{\partial t_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \pi_{i_p}}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial \pi_{i_p}}{\partial t_p} \end{pmatrix} dt_1 \wedge \dots \wedge dt_p$$

であり、これは

$$\int_{\pi} \alpha = \int_{id} \gamma^* \alpha$$

射影と恒等写像が積分領域としてが、式 2.13 で 1 の分割をするように、ここでの恒等写像は微分  $p$  形式で

$$id : [a_1, b_1] \times \dots \times [a_p, b_p] \rightarrow [a_1, b_1] \times \dots \times [a_p, b_p]$$

があることであり、この直方体  $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_p, b_p]$  の上に微分  $p$  形式  $f dt_1 \wedge \dots \wedge dt_p$  を次のように関数に対応させる。

$$\int_{id} f(t_1, \dots, t_p) dt_1 \wedge \dots \wedge dt_p = \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_p}^{b_p} f(t_1, \dots, t_p) dt_1 \dots dt_p$$

ここで  $\psi : V \rightarrow W$  を  $m$  次元ユークリッド空間の開集合  $V$  から  $n$  次元ユークリッド空間の開集合  $W$  への  $C^\infty$  級写像とする。

$W$  上の微分  $p$  形式から  $C^\infty$  級写像  $\pi : [a_1, b_1] \times \dots \times [a_p, b_p] \rightarrow V$  があれば

$$\int_{\pi} \psi^* \alpha = \int_{id} \pi^* \psi^* \alpha = \int_{id} (\psi \circ \pi)^* \alpha = \int_{\psi \circ \pi} \alpha$$

となった。これを利用して、直方体を単体に置き換える。

$r$ -単体  $\Delta^r$  の近傍として  $r$  形式を次のように引き戻しで定義する。

これによって単体  $\sigma^1$  上の  $\phi^*\omega$  積分が  $\gamma$  上の  $[0, 1]$  積分と置き換わることができるようになる。

$$\phi^*\omega \equiv \sum_{i_1 \cdots i_r} a_{i_1 \cdots i_r} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}$$

これから次のように積分がつくられることを表す。

$$\int_{s'} \omega = \sum_{i_1 \cdots i_r} \int \cdots \int a_{i_1 \cdots i_r} dx^{i_1} \cdots dx^{i_r} = \int_{\Delta'} \phi^*\omega$$

一般に  $r$ -鎖  $c^r = \sum_i \lambda_i s_i^r$  上の  $\omega$  積分は 2.13 によって

$$\int_{c'} \omega = \sum_i \lambda_i \int_{s_i'} \omega \quad (2.16)$$

とかける。ここでようやく多様体  $M$  上の特異  $r$  単体  $s^r$  上の積分が

**定義 27.** 特異  $r$  単体上の積分

$$\int_{s^r} \omega = \sum_{i_1 \cdots i_r} \int \cdots \int a_{i_1 \cdots i_r} dx^{i_1} dx^{i_2} \cdots dx^{i_r} = \int_{\sigma^r} \phi^*\omega \quad (2.17)$$

と定義できる。

## 2.10 ストークスの定理

ある物理量が時空間の限られた領域に連続的に存在するとき、これを足し合わせる必要がある場合がある。

この時、時空間の次元全てにわたって足し合わせるのではなく、ある条件を満たせば

この次元を前部で微分形式と共に議論したストークスの定理を用いて減らすことができる。

これらは時空間と物質との関係を見る上では重要である。

先の単体の 1 次結合  $c$  を考え、 $M$  の  $r$ -単体  $s_r$  に対して、 $f(\bar{\sigma}_r) = s_r$  を満たす滑らかな写像を考える。

また、 $\omega \in \Omega^{r-1}, c \in C_r(M)$  とする。

$$f: \bar{\sigma}_r \rightarrow M$$

先の結果から引き戻し  $f^*$  を用いて  $df^* = 0$  を使うと

$$\int_{s_r} d\omega = \int_{\bar{\sigma}_r} f^*(d\omega) = \int_{\bar{\sigma}_r} d(f^*\omega)$$

とかける。また、 $\omega$  も  $f^*\omega$  も  $r-1$  形式だから写像によって

$$\int_{\partial s_r} \omega = \int_{\partial \bar{\sigma}_r} f^*\omega$$

が成り立つ。

**定理 4.** ストークスの定理は

$$\int_{s_r} d\omega = \int_{\partial s_r} \omega$$

となる。よってこれを証明するのは  $\mathbb{R}^r$  における  $(r-1)$  形式  $\psi$  について

$$\int_{\bar{\sigma}_r} d\psi = \int_{\partial\bar{\sigma}_r} \psi$$

が示されればよい。

ストークスの定理を幾何的に見るために2つの領域を持つ場合を考えよう。

基本的な区間  $[0, 1]$  を考える。これをインターバルと呼ぶ。

はじめに  $k$  次元キューブ上において

$$I^k = [0, 1]^k \subset \mathbb{R}^k$$

として  $k$  次元微分形式を

$$\omega = f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k$$

に対し、 $\omega$  の  $I^k$  上での積分を次のように定義する。

$$\int_{I^k} \omega = \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x^1, \dots, x^k) dx^1 \cdots dx^k$$

ここで写像  $\phi$  が微分同相な写像とし、引き戻し  $\phi^*$  が存在するとする。 $\phi$  が向きを保てば  $\epsilon = 1$ 、保たなければ  $\epsilon = -1$  として

$$\int_{I^k} \phi^* \omega = \epsilon \int_{I^k} \omega$$

が成り立つ。はめこみ写像  $\phi: I^k \rightarrow R^n$  と微分形式  $\omega = \sum_J f_J dx^J \in \Omega(R^n)$  を考えると写像  $\phi$  に沿う  $\omega$  の積分を次のように定義する。

$$\int_{\phi} \omega = \sum_{|J|=k} \int_{I^k} \phi^* (f_J dx^J) \tag{2.18}$$

例えば次のドーナツを少々切り取った表面の図形を考えると、これは点線に沿って5枚の折り紙を張り合わせてできることがわかる。

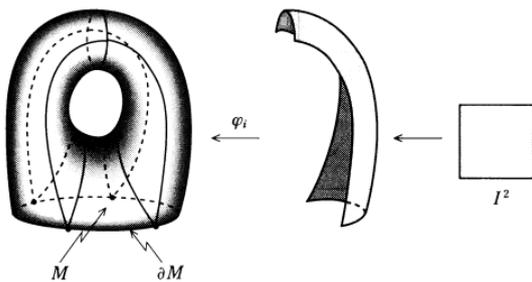


図 1.1 曲面  $M$  に沿う積分:  $M$  をキューブからの像に分解する。  
図では、曲面  $M$  を5枚のキューブからの像に分解している。

図 2.11: 「曲線・曲面と接続の幾何」小沢哲也より

この時は

$$\int_M \omega = \sum_{i=1}^5 \int_{\phi_i} \omega$$

である。

2次元では次のように1形式の2つの和となる。領域  $D$  の近傍として

$$\omega = f dx + g dy \quad (2.19)$$

領域  $D$  を図 2.12 のような正方形にとる。

この場合の2形式は

$$\begin{aligned} d\omega &= df \wedge dx + dg \wedge dy \\ &= -\frac{\partial f}{\partial y} dx \wedge dy + \frac{\partial g}{\partial x} dx \wedge dy \end{aligned}$$

となるので内部を含む領域  $D$  の積分は次のように  $ds = dxdy$  を基準にとると差が出てきて

$$\int_D d\omega = \int_0^1 \int_0^1 \left( -\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial x} \right) dxdy \quad (2.20)$$

となる。この積分を ( ) の中で2つに分ける。 $f, g$  を2変数のように考えて

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \left( -\frac{\partial f}{\partial y} dy \right) dx &= \int_0^1 \left( -f(x, y) \Big|_{y=0}^{y=1} \right) dx \\ &= \int_0^1 (-f(x, 1) + f(x, 0)) dx \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \left( \frac{\partial g}{\partial x} dx \right) dy &= \int_0^1 (g(x, y) \Big|_{x=0}^{x=1}) dy \\ &= \int_0^1 (g(1, y) - g(0, y)) dy \end{aligned} \quad (2.22)$$

つまり、端点を固定し、直交軸に分けた基本区間での積分に次元が落とせるわけである。

ここで端点を固定し、図右のような2つの経路を考えたわけであるが、これを1つのループとみなすことを考えよう。

まず、 $\psi$  方向の変化についてパラメタ  $t$  を用いて関数  $\phi_i(t)$  を

$$\phi_i : [0, 1] \rightarrow R^2; \quad \phi_i(t) = (t, i) \quad i = \{0, 1\}$$

とおくと 2.19 から次の図左のように

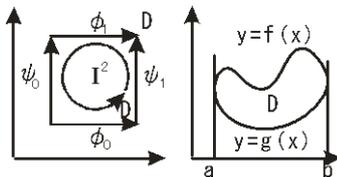


図 2.12: ストークスの定理

$i = 0$  の場合は  $y$  方向を 0 で固定し、

$$\int_{[0,1]} \phi_0^* \omega = \int_0^1 f(t, 0) dt$$

$i = 1$  の場合は  $y$  方向を 1 で固定し、

$$\int_{[0,1]} \phi_1^* \omega = \int_0^1 f(t, 1) dt$$

と統一的に表現できる。

同様にもう一つの次元  $y$  方向の変化について同じ  $t$  がつかえるとして

$$\psi_i : [0, 1] \rightarrow R^2; \psi_i(t) = (i, t) \quad i = \{0, 1\} \quad (2.23)$$

$i = 0$  の場合は  $\psi$  方向を  $0$  で固定し、

$$\int_{[0,1]} \psi_0^* \omega = \int_0^1 g(0, t) dt$$

$i = 1$  の場合は  $\psi$  方向を  $1$  で固定し、

$$\int_{[0,1]} \psi_1^* \omega = \int_0^1 g(1, t) dt$$

と表すことができる。

*Proof.* ストークスの定理

従って式 2.20 は式 2.21、式 2.22 より、向きを反時計回りにとり、

$$\int_D d\omega = \int_0^1 (-f(x, 1) + f(x, 0)) dx + \int_0^1 (g(1, y) - g(0, y)) dy \quad (2.24)$$

$$= \int_{[0,1]} \phi_0^* \omega - \int_{[0,1]} \phi_1^* \omega - \int_{[0,1]} \psi_0^* \omega + \int_{[0,1]} \psi_1^* \omega \quad (2.25)$$

$$= \int_{\partial D} \omega \quad (2.26)$$

とすることができる。よってストークスの定理が得られた。

$$\int_D d\omega = \int_{\partial D} \omega \quad (2.27)$$

つまり  $D$  の近傍で定義された微分形式  $\omega$  を  $\psi^*$  で  $I^2$  の近傍に引き戻して考えればストークスの定理が成立する。□

面積を出すための積分の操作はその面積の境界に対応した周積分に置き換えられる。

単に積分区間としていた領域は元の多様体の境界になっているわけで、多様体との関係がこの式に含まれることが重要である。

この定理は汎用性が高く多くの分野で応用される。

### 2.10.1 一般化

ここで射影を用いて一般的にストークスの定理を証明しよう。そのために先の単体と鎖を利用する。

$\omega$  を多様体  $M$  の  $r$ -形式、鎖  $c$  を  $M$  上の  $(r+1)$ -鎖とする。式 2.16

$$c = \sum_i \lambda_i \int_c s_i^{r+1}$$

と表す。この時、鎖  $c$  上の  $r+1$  形式の足し合わせが

$$\int_c d\omega = \sum_i \lambda_i \int_c d\omega$$

この時一般的な微分形式に対してもストークスの定理 (**Stoke's thorem**) は次のように成り立つ。

定理 5. ストークスの定理 2

$$\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega \quad (2.28)$$

*Proof.* この定理を示すためには特異単体  $s^r$  において

$$\int_{s^{r+1}} d\omega = \int_{\partial s^{r+1}} \omega$$

を示せばいい。標準単体  $\sigma^r$  から多様体  $M$  への写像  $\phi$  をもってくる。次数は保存するから

$$\phi(\sigma^{r+1}) = s^{r+1}$$

前節より、 $d\omega$  は引き戻され、 $d(d\omega) = 0$  だから

$$\int_{s^{r+1}} d\omega = \int_{\sigma^{r+1}} \phi^* d\omega = \int_{\sigma^{r+1}} d(\phi^* \omega)$$

よって一般的に次を示せばいいことになる。

$$\int_{\sigma^{r+1}} d\theta = \int_{\partial \sigma^{r+1}} \theta$$

これにより多様体上からユークリッド空間上の計算で済ませることができる。すでに第 2 部で微分形式を扱ってきたから  $\mathbf{R}^{r+1}$  上の  $r$ -形式は

$$\theta = \sum_{i=1}^{r+1} A_i(x) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \cdots \wedge dx^{r+1}$$

と書けた。簡単のため  $\theta$  が単項式の場合は

$$\theta = A(x^1, \dots, x^{r+1}) dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^r$$

$$d\theta = (-1)^r \frac{\partial A(x^1, \dots, x^{r+1})}{\partial x^{r+1}} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^r \wedge dx^{r+1}$$

の場合を考える。標準  $\sigma^{r+1}$  単体では

$$(x^1, \dots, x^{r+1}) \in \mathbf{R}^{r+1}, \quad x^i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{r+1} x^i \leq 1$$

となるから積分区間が  $[0, 1 - \sum_{i=1}^r x^i]$  となることに注意して

$$\begin{aligned} \int_{\sigma^{r+1}} d\theta &= (-1)^r \int_{\sigma^{r+1}} \frac{\partial A(x^1, \dots, x^{r+1})}{\partial x^{r+1}} dx^1 \cdots dx^r dx^{r+1} \\ &= (-1)^r \int_{x^i \geq 0, \sum x^i \leq 1} dx^1 \cdots dx^r \int_0^{1 - \sum_{i=1}^r x^i} \frac{\partial A}{\partial x^{r+1}} dx^{r+1} \\ &= (-1)^r \int_{x^i \geq 0, \sum x^i \leq 1} \left[ A \left( x^1, \dots, x^r, 1 - \sum_{i=1}^r x^i \right) - A(x^1, \dots, x^r, 0) \right] dx^1 \cdots dx^r \quad (2.29) \end{aligned}$$

となる。ここで標準単体  $\sigma^{r+1} = (P_0 P_1 \cdots P_{r+1})$  の頂点  $P$  を

$$P_0 = (0, 0, \dots, 0), \quad P_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, \quad P_{r+1} = (0, 0, \dots, 1)$$

とすると境界演算子を用いて

$$\begin{aligned} \partial \sigma^{r+1} &= (P_1 P_2 \cdots P_{r+1}) + (-1)^{r+1} (P_0 P_1 \cdots P_r) \\ &\quad - (P_0 P_2 \cdots P_{r+1}) + (P_0 P_3 \cdots P_{r+1}) + \cdots + (-1)^r (P_0 \cdots P_{r-1} P_r) \end{aligned}$$

となる。この式の第2行は図のような射影面として考える。  
 第2行は射影面上の標準  $r$  単体なので  $x^1, x^2, \dots, x^r$  のどれかは0となる。  
 例えばでは  $x_1 = 0$  だから図では  $P_2 = P_r$  とみなして、

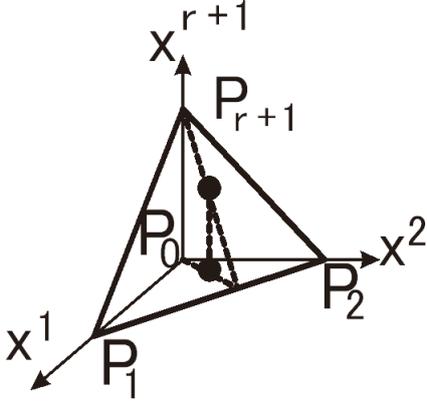


図 2.13:  $P_1 \dots P_r P_0$  への射影

$$\theta = A dx^1 \wedge \dots \wedge dx^r = 0$$

である。よって

$$\int_{\partial \sigma^{r+1}} \theta = \int_{(P_1 P_2 \dots P_{r+1})} \theta + (-1)^{r+1} \int_{(P_0 P_1 \dots P_r)} \theta$$

この時、 $(P_0 P_1 \dots P_r)$  は標準  $r$ -単体だから  $x^{r+1} = 0$  となるので第2項は

$$(-1)^{r+1} \int_{(P_0 P_1 \dots P_r)} \theta = (-1)^{r+1} \int_{\sigma'} A(x^1, \dots, x^r, 0) dx^1 \dots dx^r \quad (2.30)$$

さらに第1項は図のように射影して

$$\begin{aligned} \int_{(P_1 P_2 \dots P_{r+1})} \theta &= \int_{(P_1 P_2 \dots P_r P_0)} A \left( x^1, \dots, x^r, 1 - \sum_{i=1}^r x^i \right) dx^1 \dots dx^r \\ &= (-1)^{r+1} \int_{(P_0 P_1 \dots P_r)} A \left( x^1, \dots, x^r, 1 - \sum_{i=1}^r x^i \right) dx^1 \dots dx^r \\ &= (-1)^{r+1} \int_{\sigma'} A \left( x^1, \dots, x^r, 1 - \sum_{i=1}^r x^i \right) dx^1 \dots dx^r \end{aligned} \quad (2.31)$$

となる。従って式 2.30 と式 2.31 を足せば式 2.29 が得られる。

これで式 2.28 のストークスの定理が示された。 □

### 2.10.2 0 形式応用例

もっとも単純な応用例として閉区間  $D = [a, b]$  を  $\mathbf{R}$  内の領域とする。

$\omega$  は 0 形式であり一般的なスカラ関数  $F(x)$  とすれば

$$\int_D dF = \int_{\partial D} F = F(b) - F(a)$$

これは関数の変化量の領域内での足し合わせが端点の差できることを表し、積分の定義になっている。

つまり微分 0 形式には全微分が対応する。

$$dF = \frac{dF}{dx^i} dx^i$$

### 2.10.3 1 形式応用例

閉曲線  $C$  で囲まれた  $\mathbf{R}^2$  の領域を  $D$  とすると 1-形式  $\omega$  として

$$\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

とおくと、

$$d\omega = \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy$$

と書けるのでストークスの定理から次の関係式が得られる。

$$\int_{C=\partial D} (Pdx + Qdy) = \int \int_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy$$

これは平面における Green の公式である。

さらに閉曲面  $S$  で囲まれた  $\mathbf{R}^3$  の領域に拡張すると

$$\omega = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

とおける。この時、

$$d\omega = \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left( \frac{\partial P}{\partial yz} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy$$

となるのでストークスの定理から

$$\begin{aligned} & \int_{C=\partial S} (Pdx + Qdy + Rdz) \\ &= \int \int_S \left[ \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left( \frac{\partial P}{\partial yz} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy \right] \end{aligned}$$

これは 3 次元のベクトル解析の公式

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) d\mathbf{S}$$

に等しい。

さらに  $\mathbf{R}^3$  の領域  $V$  の境界面を  $S$  として  $\omega$  が次のような 2 形式であれば

$$\omega = P(x, y, z)dy \wedge dz + Q(x, y, z)dz \wedge dx + R(x, y, z)dx \wedge dy$$

$$d\omega = \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz$$

となるのでストークスの定理から

$$\begin{aligned} & \int \int_{S=\partial V} (P(x, y, z)dy \wedge dz + Q(x, y, z)dz \wedge dx + R(x, y, z)dx \wedge dy) \\ &= \int \int \int_V \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz \end{aligned}$$

これも 3 次元のベクトル公式

$$\int \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int \int \int_V (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV$$

となりこれはガウスの発散公式である。

### 2.10.4 ストークスの定理の一般化 2

まず式 2.24 の一般化について見てみよう。

$n$ 次元多様体  $M$  が向き付け可能であればどの点においても  $0$  とはならない  $n$ -形式があり局所座標近傍  $U(x^1, x^2, \dots)$  において

$$dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n$$

を  $U$  の体積要素という。さらに  $U$  と重なる局所近傍の座標系  $V(y^1, y^2, \dots)$  があれば

$$\begin{aligned} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n &= \frac{\partial x^1}{\partial y^\alpha} dy^\alpha \wedge \dots \wedge \frac{\partial x^n}{\partial y^\gamma} dy^\gamma \\ &= \det \left[ \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\nu} \right] dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n \end{aligned} \quad (2.32)$$

となる。 $n$ 次元多様体  $M$  上で  $n$ 形式  $\omega$  は 1 次元ベクトル空間になるから関数  $f(x^1, x^2, \dots, x^n)$  について

$$\omega = f dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n \quad (2.33)$$

とおける。この時  $U$  上の積分は

$$\int_U \omega = \int \dots \int_U f dx^1 dx^2 \dots dx^n$$

のようにスカラー値を得る。領域  $U$  が単一の座標系で覆われていれば  $M$  が向き付け可能であるので開被覆

$$\{U_\alpha\}$$

を足しあわせて最大次数の微分形式を

$$\int_{U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_\alpha} \omega = \int_M \omega$$

と表す。

$\{U_\alpha\}$  に対応する 1 の分割を  $\{\rho_\alpha\}$  とし、コンパクトな集合の外で 0 になるような  $n$ 次微分形式  $\omega$  として

$$\int_M \omega = \sum_\alpha \int_{U_\alpha} \rho_\alpha \omega$$

と表す。これが成り立つためには

$$\rho_\alpha \omega = a dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n \quad (2.34)$$

とにおいて

$$\int_{U_\alpha} \rho_\alpha \omega = \int_{U_\alpha} a dx^1 dx^2 \dots dx^n$$

となる必要がある。

積分は座標系に依存し、別の座標系  $V(y^1, y^2, \dots)$  があれば座標変換関数は  $J$  をヤコビアンとして

$$\int_{U_\alpha} a dx^1 dx^2 \dots dx^n = \int_{U_\alpha} a |J| dy^1 dy^2 \dots dy^n$$

と表すことができる。ここで  $J$  はヤコビアンで次の行列式で与えられる。

$$J = \det(\partial x^i / \partial y^j)$$

ただし任意の  $\alpha, \beta$  について

$$U_\alpha \cap U_\beta$$

でヤコビアン  $J$  は正にとることができるとし、これを  $M$  に向きをつけたという。  
ここで境界の存在を次のように考える。

**定理 6. 境界積分 1**

向きのついた  $n$  次元多様体  $M$  上で  $n-1$  形式  $\omega$  がコンパクトな台 (コンパクトの集合の外では 0 になる) を持つ時、 $n-1$  微分形式に対して

$$\int_M d\omega = 0 \quad (2.35)$$

が成り立つ。

まずこれを証明するために  $M = R^n$  で、その領域

$$D = \{(x^1, x^2, \dots, x^n); 0 < x^i < 1\} \quad (2.36)$$

を考える。この領域  $D$  の外で  $a = 0$  とできれば境界があると考えerわけである。  
除外記号を  $\check{\cdot}$  とし  $\omega$  が  $n-1$  形式になるためには

$$\omega = \sum_i a_i dx^1 \wedge \dots \wedge \check{dx}^i \wedge \dots \wedge dx^n \quad (2.37)$$

と表す。1 の分割の性質を利用すると

$$\begin{aligned} \int_M d\omega &= \int_D \frac{\partial a}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge \check{dx}^i \wedge \dots \wedge dx^n \\ \int_M d\omega &= \int_0^1 \dots \int_0^1 \left( \int_0^1 \frac{\partial a}{\partial x^i} dx^i \right) \wedge \dots \wedge \check{dx}^i \wedge \dots \wedge dx^n \end{aligned}$$

ここで式 2.36 から  $a(1) = a(0) = 0$  であるから

$$\int_M d\omega = \int_0^1 \dots \int_0^1 [a \Big|_0^1] \wedge \dots \wedge dx^n = 0$$

となる。

境界を持つ多様体として  $R^n$  ではなく、例えば次の上半空間  $H^n$  を定義する。

$$H^n = \{(\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n); \xi^n \geq 0\}$$

ある  $U_\alpha$  は  $\psi$  により  $H^n$  の境界を含む開集合と同相になる。 $H^n$  の境界に対応した  $M$  の部分がありこれを  $M$  の境界  $\partial M$  と書く。

$\partial M$  は  $n-1$  次元であり、 $M$  に向きがあれば  $\partial M$  に向きが自然にできる。すなわち

$$x^1 = \xi^1 \circ \psi_\alpha, \dots, x^n = \xi^n \circ \psi_\alpha$$

が与えられた向きの座標系であれば  $\{x^1, x^2, \dots, x^{n-1}\}$  を  $U_\alpha \cap \partial M$  の局所座標系ととれば  $\partial M$  に向きがつく。  
実際  $\{y^1, y^2, \dots, y^n\}$  が  $U_\beta$  内の座標系とすると  $x^n = 0$  とし  $x^1, x^2, \dots, x^{n-1}$  を動かしても  $y^n = 0$  であるので

$$y^n \in \partial M \cap U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow y^n = 0 \quad (2.38)$$

であり変換関数は

$$\frac{\partial y^n}{\partial x^i} = 0, \quad i = 1, \dots, n-1$$

を満たす。よって式 2.38 を満たす点ではヤコビアン  $J$  が次のようになる。

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^1}{\partial x^{n-1}} & \frac{\partial y^1}{\partial x^n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial y^{n-1}}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^{n-1}}{\partial x^{n-1}} & \frac{\partial y^{n-1}}{\partial x^n} \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial y^n}{\partial x^n} \end{pmatrix}$$

この時、向き付けが可能であるから  $x^n > 0$  の方向と  $y^n > 0$  の方向はいずれも  $M$  の内部で一致しているから

$$\frac{\partial y^n}{\partial x^n} > 0$$

である。また  $J$  の最後の行列をのぞいた行列式も正である。式 2.35 に付け加えて向きのついた  $n$  次元多様体  $M$  上で  $n-1$  形式  $\omega$  がコンパクトな台を持つ時、 $n$  次元多様体  $M$  が境界  $\partial M$  を持つならば

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega \quad (2.39)$$

となることも同じように示すことができる。2.37 から

$$\omega_i = \sum a_i dx^1 \wedge \cdots \wedge \check{dx}^i \wedge \cdots \wedge dx^n$$

とおくと  $i = 1, 2, \dots, n-1$  に対しては。式 2.35 より

$$\int_M d\omega_i = 0$$

となるが  $\partial M$  上では  $\omega_i = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ) なので  $\wedge dx^n$  をのぞいた  $i = n$  の時

$$\omega_n = \sum a_n dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{n-1} \quad (2.40)$$

を考えればよい。再び 1 の分割を利用して  $x^n$  に注目し、

$$\begin{aligned} \int_M d\omega &= (-1)^{n-1} \int_M \frac{\partial a}{\partial x^n} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{n-1} \wedge dx^n \\ &= (-1)^{n-1} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial a}{\partial x^n} dx^1 \cdots dx^n \\ &= (-1)^{n-1} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left( a \Big|_{x^n=0}^{x^n=1} \right) dx^1 \cdots dx^{n-1} \end{aligned}$$

ここで  $a$  は  $x^n = 1$  では  $a = 1$  だから  $\int_{\partial M} \omega$  の定義から

$$\int_M d\omega = (-1)^n \int_0^1 \cdots \int_0^1 a(x^n = 0) dx^1 \cdots dx^{n-1} = \int_{\partial M} \omega \quad (2.41)$$

である。これはストークスの定理を示している。

## 2.11 ドラーム複体

単体上の積分はストークスの定理の一般化を用いるとをさらに一般化できる。 $n$  次元多様体  $M$  上の微分  $p$  形式を  $\alpha$  とすると

$$\alpha = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} f_{i_1 \cdots i_p}(\mathbf{x}) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$$

に対して外微分  $d\alpha$  は

$$d\alpha = \left( \sum_{i_1 < \dots < i_p} f_{i_1 \dots i_p} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \right) = \sum_{i_1 < \dots < i_p} df_{i_1 \dots i_p} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

で表される  $p+1$  形式である。

また、微分  $p$  形式の  $\alpha$  の外微分  $d\alpha$  について、

$$d \circ d : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^{d+2}(M) \sim 0$$

のように 0 と準同型になることが次のように偶奇の符号から示される。一般に

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta$$

だったから  $\alpha = df, \beta = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$  とすると

$$\begin{aligned} d(d(f_{i_1 \dots i_p} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p})) &= d(df_{i_1 \dots i_p}) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \\ &+ df_{i_1 \dots i_p} \wedge d(dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}) \\ &= d\alpha \wedge \beta + \alpha \wedge d\beta \end{aligned}$$

となる。また、

$$\begin{aligned} d(df) &= d\left(\sum_{i=1}^n f_i dx_i\right) \wedge \left(\sum_{j=1}^n f_j dx_j\right) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i \wedge dx_j \\ &= \sum_{1 \leq j < i \leq n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j \partial x_i}\right) dx_i \wedge dx_j \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$d(dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}) = 0$$

従って次のように 0 で囲まれる。

#### 定理 7. ドラーム複体

これによって式 2.7 に対応した

$$0 \rightarrow \Omega^0(U) \xrightarrow{d} \Omega^1(U) \xrightarrow{d} \Omega^2(U) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Omega^n(U) \rightarrow 0$$

が得られた。また、

$$d \circ d : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^{d+2}(M) \sim 0$$

が成り立つ。この系列をドラーム複体といい、 $\Omega^*(M)$  で表す。

複体に対しては

$$\text{Im}(d) \subset \ker(d)$$

であるので、この差を測る群とし次節にてコホモロジー群が重要な役割を果たす。

ここで例を 1 形式と 2 形式について見てみよう。 $R^n$  での領域  $U$  上に 1 形式を

$$\omega = \sum_{i=1}^n a_i dx^i$$

とおき、領域  $U$  内の曲線  $\gamma$  のパラメタ表示をさせる写像  $\phi$  を局所座標に依存する形で次のように定義する。

$$\phi: t \rightarrow \gamma(x^1(t), x^2(t), \dots, x^n(t))$$

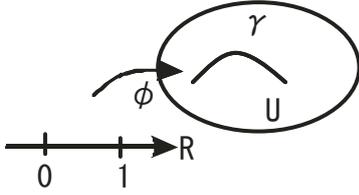


図 2.14: 写像  $\phi$  が領域  $U$  内のパラメタ表示を与える。

例えば  $U$  上の単位円は単体  $[0, 1]$  と次のように対応する。

$$\phi: t \rightarrow (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t), \quad t \in [0, 1]$$

ストークスの公式 2.41 から

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

から  $\gamma$  の境界

$$\partial\gamma = t$$

とおければ  $\gamma$  上での 1 形式  $\omega$  の積分を次のように級数に展開して表す

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega &= \int_{\gamma} (a_1 dx^1 + a_2 dx^2 + \dots + a_n dx^n) \\ &= \int_t d\omega \\ &= \int_{t=0}^{t=1} (d(a_1 dx^1) + d(a_2 dx^2) + \dots + d(a_n dx^n)) \\ &= \int_{t=0}^{t=1} \left( a_1(\phi(t)) \frac{dx^1}{dt} + a_2(\phi(t)) \frac{dx^2}{dt} + \dots + a_n(\phi(t)) \frac{dx^n}{dt} \right) dt \\ &= \int_0^1 \phi^* \omega \end{aligned}$$

これは標準 1 単体  $\sigma^1 = [0, 1]$  上で引きもどし写像  $\phi^* \omega$  によって表されたことになる。  
よって

$$\begin{aligned} \phi^* \omega &= f(t) dt \\ f(t) &= \sum_{j=1}^n a_j(x^1(t), x^2(t), \dots, x^n(t)) \frac{dx^j}{dt} \end{aligned} \quad (2.42)$$

とおける。

定理 8.  $\gamma$  上の  $[0, 1]$  積分は次のように単体  $\sigma^1$  上の  $\phi^* \omega$  積分に置き換わる。

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\phi(\sigma^1)} \omega = \int_{\sigma^1} \phi^* \omega$$

例えば円周上への写像を

$$\phi(t) : t \rightarrow (x^1(t), x^2(t)) = (\cos \pi t, \sin \pi t)$$

とおくと、この場合は  $\omega = \sum_{i=1}^n a_i dx^i$  から

$$\omega = a_1 dx^1 + a_2 dx^2$$

ただし、 $d\omega = 0$  から

$$d\omega = dx^1 \wedge dx^2 - dx^1 \wedge dx^2$$

とするために

$$\omega = x^1 dx^2 - x^2 dx^1$$

として、

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} (x^1 dx^2 - x^2 dx^1)$$

とおける。

とおくとこれは円周上の連続点になる。よって局所的であれば引き戻しが存在できる。式 2.42 により次のように 1 形式ができる。

$$\begin{aligned} \phi^* \omega &= f(t) dt \\ &= \left( -x^2(t) \frac{dx^1(t)}{dt} + x^1(t) \frac{dx^2(t)}{dt} \right) dt \\ &= \left( -\sin \pi t \frac{d \cos \pi t}{dt} + \cos \pi t \frac{d \sin \pi t}{dt} \right) dt \\ &= \pi dt \end{aligned}$$

この時、括弧の中の  $d/dt$  と括弧の外の  $dt$  が極めて巧妙に作用し、結果として同じ 1 形式だが位相を返すことがわかる。

実は引き戻しというまわりくどい操作はこの連続した位相を引き出すためのものである。

しかし、位相に  $dt$  がかかる 1 形式で表現されるが次の操作で位相のみを取り出すことができる。

標準単体を  $\sigma^1 = [0, 1]$  とする。円周の経路  $\gamma$  が対応する単位区間  $[0, 1]$  に引き戻され、1 形式ができたので次のように単体上の積分になる。

$$\int_{\gamma} \omega = \int_0^1 \phi^* \omega = \int_{\phi(\sigma^1)} \omega = \int_{\sigma^1} \pi dt = \pi$$

これは図の線積分の値に一致している。

つまり積分区間が境界であることで単体と引き戻しを組み合わせ積分区間に直接作用し、 $\omega$  の回転を積分し出すことができる。

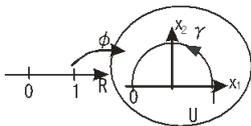


図 2.15:  $\gamma$  上での 1 形式  $\omega$  の積分引きもどしにより  $\int_{\sigma^1} \pi dt$  になる。

### 2.11.1 微分 2 形式

次にパラメタ  $t$  が 1-単体の足し合わせで連続的に拡張していけることを見よう。  
 パラメタが 2 つになる場合を見てみる。 $r$ - 双対鎖において  $r = 2$  の場合を具体的に見てみよう。  
 3 次元ユークリッド空間をとり、向きづけられた表面を  $c^2$  とし、微分 2 形式を

$$\omega = a_1 dx^2 \wedge dx^3 + a_2 dx^3 \wedge dx^1 + a_3 dx^1 \wedge dx^2$$

とおく。またパラメタ  $(u^1, u^2)$  を用いて

$$x^1(u^1, u^2), x^2(u^1, u^2), x^3(u^1, u^2)$$

とするとこの時の写像  $\phi$  は

$$\phi: (u^1, u^2) \in U \subset R^2 \rightarrow (x^1(u^1, u^2), x^2(u^1, u^2), x^3(u^1, u^2)) \in R^3$$

でありこれによって図のように表面  $c^2$  に写される。このとき  $R^2$  上の標準 2 単体を  $\sigma^2$  とする。

$$\phi(\sigma^2) = c^2$$

よって次のようヤコビアンを用いて積分ができる。

$$\begin{aligned} \int_{c^2} \omega &= \int_{\sigma^2} \phi^* \omega \\ &= \int \int_{\sigma^2} [a_1 (x^1(u^1, u^2), x^2(u^1, u^2), x^3(u^1, u^2)) \frac{\partial(x^2, x^3)}{\partial(u^1, u^2)} \\ &\quad + a_2 (x^1(u^1, u^2), x^2(u^1, u^2), x^3(u^1, u^2)) \frac{\partial(x^3, x^1)}{\partial(u^1, u^2)} \\ &\quad + a_3 (x^1(u^1, u^2), x^2(u^1, u^2), x^3(u^1, u^2)) \frac{\partial(x^1, x^2)}{\partial(u^1, u^2)}] du^1 du^2 \end{aligned}$$

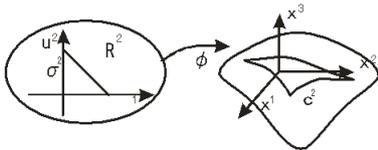


図 2.16: 曲面上の積分を引き戻しの写像を利用して  $R^2$  上の積分にする。

## 3 準同形写像 [36]

### 3.1 自己準同型環

第 4 部で群について学んだ。簡単に復習すると、まず、環を次のように定義した。

**定義 28.** 環

環  $\mathfrak{A}$  とは群の性質を満たし、加法についで可換群でありさらに乗法について次の演算が成り立つものをいう。

- 環  $\mathfrak{A}$  の任意の元  $a, b, c$  に対し、結合律  $a(bc) = (ab)c$  が成り立つ。
- 環  $\mathfrak{A}$  の任意の元  $a, b, c$  に対し、左分配律  $a(b+c) = (ab) + (ac)$  が成り立つ。

- 環  $\mathfrak{R}$  の任意の元  $a, b, c$  に対し、右分配律  $(b + c)a = (ba) + (ca)$  が成り立つ。

さらに次を満たせばユニタリ環という。

- $a1 = 1a$

### 定義 29. イデアル

環  $\mathfrak{R}$  の群の部分集合  $I$  が加法について閉じていて

$$x \in \mathfrak{R}, y \in I \rightarrow xy, yx \in I \quad (3.1)$$

である時、 $I$  を両側イデアルという。

イデアル  $I$  が与えられると環  $\mathfrak{R}$  に次の関係で

$$x - y \in I \quad (3.2)$$

同値関係を定義できる。これにより同値類がつくられ重要な剰余環

$$\mathfrak{R}/I \quad (3.3)$$

が定義できる。

環の例としては有理数全体の集合  $Q$  複素数全体の集合  $C$ 、さらに正の整数  $n$  を法として整数の集合  $Z/nZ$  も環をなす。

### 定義 30. 環準同型

環準同型とは環における乗法と加法に対して可換な写像  $f$  である。

- $f(a + b) = f(a) + f(b)$
- $f(ab) = f(a)f(b)$
- $f(1) = 1$

準同型の核はイデアルになり後節で詳しく扱う、次の準同型定理が成り立つ。

### 定義 31. 準同型定理 (homomorphism\_thorem)

環  $\mathfrak{R}$  の核による商群  $\mathfrak{R}/\ker f$  と  $\text{Img } f$  とは互いに同型である。

可換環であり加群としての構造と両立する積の構造をもてば多元環という。多元環と準同型であるためには

$$f(ax + by) = af(a) + bf(y) \quad (3.4)$$

$$f(xy) = f(x)f(y) \quad (3.5)$$

$G$  が群であり  $G$  上の自己準同型  $f, g$  に対し

$$f(x)g(y) = g(y)f(x) \quad (3.6)$$

がどんな  $x, y \in G$  に対して成り立つなら  $f$  と  $g$  は加法可能であるといい、

$$(f + g)(x) := f(x)g(x) \quad x \in G \quad (3.7)$$

とおける。

**定義 32. 自己準同型環**

さらに  $G$  が可換群であれば  $G$  上の自己準同型の全体を  $End(G)$  と書き、 $End(G)$  で加法が定義され、これが環になる。

これを  $G$  の自己準同型環という。

さらに今後環  $R$  上で加群であることが前提になる場合が多い。加群を次のように定義しておく。

**定義 33. 加群**

$r, s \in R, x, y \in M$  として次が成り立てば  $R$  左加群という。

$$r(x + y) = rx + ry$$

$$(r + s)x = rx + sx$$

$$(rs)x = r(sx)$$

$$1_R x = x$$

自己準同型環  $End(G)$  の上に加群が定義されると例えばベクトル場のような扱いができるようになる。

### 3.2 準同型写像

**定義 34. 準同型写像**

2つの加群  $M_1, M_2$  の間の写像  $\phi : M_1 \rightarrow M_2$  が任意の  $x, y \in M_1$  に対して

$$\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y) \tag{3.8}$$

を満たすとき、 $\phi$  を加群  $M_1$  から  $M_2$  への準同型写像という。

ただし、左辺の  $+$  は加群  $M_1$  における和であり、右辺の  $+$  は加群  $M_2$  における和である。

これから

$$\phi(x) + \phi(0) = \phi(x + 0) = \phi(x)$$

が成り立つので、

$$\phi(0) = 0$$

である。また、

$$\phi(x) + \phi(-x) = \phi(x - x) = \phi(0) = 0$$

が成り立つので

$$\phi(-x) = -\phi(x)$$

が成り立つ。

**定義 35. 同型写像**

とくに写像  $\phi : M_1 \rightarrow M_2$  が全単射であれば  $\phi$  は同型写像になる。

この時は逆写像  $\phi^{-1}$  も

$$\phi^{-1}(u + v) = \phi^{-1}(u) + \phi^{-1}(v)$$

を満たす。同型写像が存在すれば

$$M_1 \simeq M_2$$

と書く。

例えば加群  $\mathbb{Z}$  から  $\mathbb{Z}$  への写像を

$$f(x) := 3x, (x \in \mathbb{Z})$$

は準同型写像である。次のように 2 変数を持って準同型写像になる。

$$g(x_1, x_2) := 8x_1 - 6x_2$$

さらに複素数全体の集合  $\mathbb{C}$  から  $H$  への写像  $h$  を

$$h(a + ib) := \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

で定義すると、写像  $h: \mathbb{C} \rightarrow H$  は加群の同型写像になる。この時は積に対しても

$$h(xy) = h(x)h(y)$$

を満たすので式 3.5 から環の同型写像にもなっている。

### 定義 36. 核と像

準同型写像  $\phi: M_1 \rightarrow M_2$  に対して

$$\ker \phi := \phi^{-1}(0) = \{x \in M_1 | \phi(x) = 0\} \subset M_1$$

で定義すると、これは  $M_1$  の部分加群になる。なぜなら

$$\begin{aligned} x, y \in \ker \phi &\Leftrightarrow \phi(x) = 0, \phi(y) = 0 \\ &\Leftrightarrow \phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y) = 0, \phi(-x) = -\phi(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow x + y, -x \in \ker \phi \end{aligned}$$

となる。 $\ker \phi$  を準同型写像の核 (**kernel**) という。

一方で、像  $\text{Im}$  または  $\text{Img}$  と書くことにするが、

$$\text{Im} \phi := \phi(M_1) = \{\phi(x) | x \in M_1\} \subset M_2$$

で定義する。これは  $M_2$  の部分群になっている。なぜなら

$$\phi(x), \phi(y) \in \text{Im} \phi \Rightarrow \phi(x) + \phi(y) = \phi(x + y) \in \text{Im} \phi, \phi(-x) = -\phi(x) \in \text{Im} \phi$$

となるので、 $\text{Im} \phi$  は準同型写像になる。

準同型写像  $\phi: M_1 \rightarrow M_2$  が単射である必要十分条件は

$$\ker \phi = \{0\}$$

である。

これは次のように示すことができる。

$$\begin{aligned} \phi: \text{One} - \text{One} &\Leftrightarrow \phi(x) = \phi(y) \rightarrow x = y \\ &\Leftrightarrow \phi(x) - \phi(y) = \phi(x - y) = 0 \rightarrow x - y = 0 \\ &\Leftrightarrow \phi(z) = 0 \rightarrow z = 0 \\ &\Leftrightarrow \ker \phi = \{0\} \end{aligned}$$

また、一般に加群  $M$  の部分加群があれば包含写像  $\iota$  として

$$\iota: N \hookrightarrow M$$

は準同型写像であり、単射になる。(全単射とは限らない) よって

$$\ker \iota = \{0\}, \text{Im} \iota = N$$

が成り立つ。

### 3.3 商加群

定義 37. 法として合同

加群  $M$  の部分加群  $N$  があったとき、2つの源  $x, y \in M$  に対して

$$x - y \in N$$

の時、

$$x \equiv y \pmod{N} \tag{3.9}$$

と書き、 $x$  と  $y$  は  $N$  を法として合同という。

この時、部分加群には必ず  $0$  が含まれるので反射律が任意の  $x \in M$  に対して

$$x - x = 0 \in N$$

が成り立ち、さらに

$$x = y \pmod{N}$$

であれば  $x - y \in N$  となるので

$$y - x = -(x - y) \in N$$

となり、

$$y = x \pmod{N}$$

が成り立ち、対称律も成り立つ。さらに、

$$x = y \pmod{N}$$

$$y = z \pmod{N}$$

が成り立てば

$$x - z = x - y + (y - z) \in N$$

となるので推移律も成り立つ。

従って次の定理が成り立つ。

定理 9. 同値関係

$x$  と  $y$  が合同であれば  $x$  と  $y$  は同値である。

定義 38. 剰余類

$a \in M$  を代表元として、この同値関係で同値類をつくることができ

$$[a] := \{x \in M \mid x \equiv a \pmod{N}\} = \{x \in M \mid x - a \in N\}$$

この同値類  $[a]$  のことを  $N$  を法とする剰余類 (residu class) という。

さらに

定義 39. 商加群

このような同値類の集合は加群になり  $N$  を法とする  $M$  の商加群 (quotient module) という。

$$M/N := \{[a] \mid a \in M\}$$

と書く。

定理 10. 剰余類の和は代表元に関係なく剰余類になる。

Proof.  $a' \in [a], b' \in [b]$  とすると  $a' - a \in N, b' - b \in N$  であり、 $N$  が部分加群であるから

$$(a' + b') - (a + b) = (a' - a) + (b' - b) \in N$$

となり、

$$(a' + b') = (a + b) \pmod{N}$$

□

準同型定理は加群にも存在する。

定理 11. 準同型定理

加群の同型写像  $\phi: M_1 \rightarrow M_2$  が与えられた時、部分加群

$$\ker \phi \subset M_1, \text{Im} \phi \subset M_2$$

があつて

$$M_1 / \ker \phi \simeq \text{Im} \phi$$

が成り立つ

Proof. はじめに  $\phi: M_1 \rightarrow M_2$  の写像の行き先を  $\text{Im} \phi$  に制限しておいて

$$\tilde{\phi}: M_1 \rightarrow \text{Im} \phi$$

とみなせば  $\tilde{\phi}$  は全射になる。また、 $x, y \in M_1$  に対して、

$$x \sim y \Leftrightarrow \phi(x) = \phi(y)$$

と定めるとこれは同値関係を表す。このとき

$$\begin{aligned} x \sim y &\Leftrightarrow \phi(x - y) = \phi(x) - \phi(y) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - y) \in \ker \phi \\ &\Leftrightarrow x \equiv y \pmod{\ker \phi} \end{aligned}$$

となるので商集合  $M_1 / \sim$  は商加群  $M_1 / \ker \phi$  となる。

関係  $\sim$  に関する同値類  $[x]$  を写像  $\tilde{\phi}$  で移すことを

$$\Phi: (M_1 / \sim) \rightarrow \text{Im} \phi$$

$$[x] \mapsto \Phi([x]) := \phi(x)$$

と書けば  $\Phi$  は全単射になる。もともと  $\phi$  が加群の準同型写像であったから  $\Phi$  もまた、準同型写像である。よって

$$\Phi: (M_1 / \ker \phi) \rightarrow \text{Im} \phi$$

が成り立つ。

□

これによって、例えば準同型写像  $\phi: M_1 \rightarrow M_2$  と元  $k_0 \in M_2$  が与えられ、次の方程式

$$\phi(x) = k_0$$

を解くような場合を考えよう。これは集合

$$\phi^{-1}(k_0) = \{x \in M_1 | \phi(x) = k_0\}$$

を表示できればよい。そこで特殊解  $\phi(x_0) = k_0$  が見つかった場合を考えると、一般解は

$$\phi^{-1}(k_0) = [x_0] = \{x_0 + m | m \in \ker \phi\}$$

で与えられる。つまり、 $\phi^{-1}(k_0)$  が空集合ではない必要十分条件が

$$k_0 \in \text{Im} \phi$$

である。一方、解の一意性、つまり  $\phi^{-1}(k_0)$  が2つ以上の元を含まないために必要十分条件は

$$\ker \phi = \{0\}$$

となる。この時、短系列は後の式 6.6 で示す完全系になる。

$$\ker \phi \xrightarrow{i} M_1 \xrightarrow{\phi} \text{Im} \phi$$

つまり、方程式  $\phi(x_0) = k_0$  を解くとは、この短完全系列を作ることに等しい。

## 4 基本群 [12]

### 4.1 変形収縮

下図のように穴の開いた円板とあいあていない円板を用意する。穴の開いていない円板上のループ  $\alpha$  は連続的に1点に縮めることができるが

穴のあるほうの  $\alpha$  は1点に縮めない。もし、 $\alpha$  から  $\beta$  が連続的に変形できればホモトピックであるという。

そうすると  $b$  の穴のない円板で  $Y$  とホモトピックな仲間が1種類しかない。しかし、 $a$  の  $X$  は穴の周りを何周するかという分類ができる。

このような分類はホモトピー類とよばれ、整数  $n \in \mathbb{Z}$  で特徴づけることができる。群構造をみたます場合には基本群と呼ばれる。

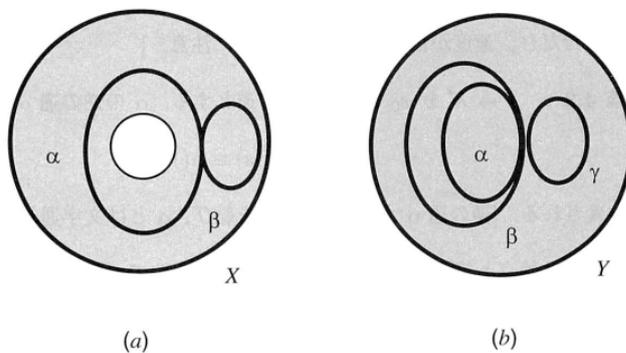


図 4.1: [12] より : 穴あり円板と穴なし円板上のループ

ホモトピーの世界では距離を持たないので、収縮、伸張ができる。

この特徴は、非常に強力であるが、後にみるように収縮させるひもには、厚みがあるように、重なる場合の上下を区別することになる。

つまり、ここでの背景として次のように位相平面と単位インターバルの積空間から位相平面への写像

$$H: X \times I \rightarrow X$$

を考えることが多い。例えば  $f: X \rightarrow R$  が存在し、

$$f|_R = id_R$$

となれば  $R$  は  $X$  の収縮であるといい。  $f$  を収縮写像という。

この時次の図のように  $X$  の全体の点が  $R$  に写像される際に  $R$  の点は全て固定しておかないといけない。

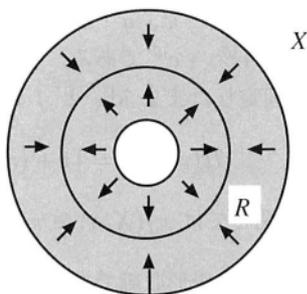


図 4.2: [12] より：円環  $X$  を収縮させると円  $R$  ができる。

また、今後、変形するというをよく使うがそれも次のように定義しておく。

連続写像  $H: X \times I \rightarrow X$  が存在し、任意の  $x \in X$  に対して

$$H(x, 0) = x, H(x, 1) \in R$$

および、任意の  $t \in I, x \in R$  に対して

$$H(x, t) = x$$

が成り立てば  $R$  は  $X$  の変形収縮である。

しかし次の図ののでは  $R$  は穴があるので  $X$  の変形収縮ではない。

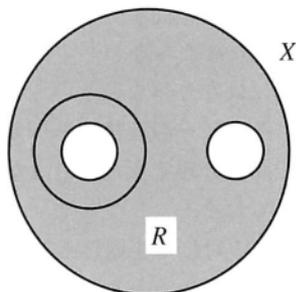


図 4.3:  $X$  を連続変形しても  $R$  にならない。

これは、どんなパラメタ  $t \in I$  を選んでも

$$H(x, t) = x$$

とすることができないことを表す。

## 4.2 同値

後節でホモトピーでの同値を定義するが、ここでそのイメージをつかんでおく。基本空間を構成していくにあたってまず円周  $S^1$  を考える。

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$$

として、写像

$$p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$$

$$p: x \mapsto \exp(ix)$$

を考える。

例えば次の図のように、写像  $p$  により、 $0 \in \mathbb{R}$  は  $1 \in S^1$  に写される。 $p$  のもとで  $\mathbb{R}$  が  $S^1$  の周りに巻き付いていると考えればよい。

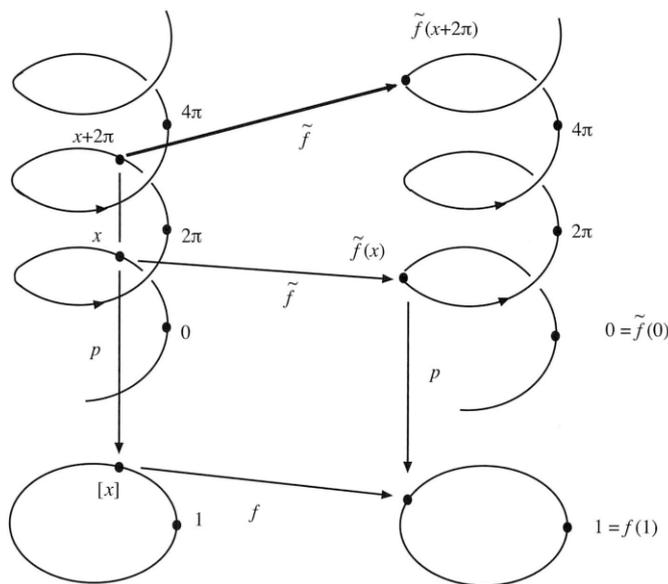


図 4.4: [12] より：写像  $p$  により円周上に写る次数  $n$  は  $f$  が属する写像のホモトピー類を決める。

この写像は 1 対 1 にならない。

$$x - y = 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$$

であれば同じ円周上の点に写る。これを前節の同値関係 3.9 から

$$x \sim y$$

と書いて、同値 (equivalence) であるという。また同値類は

$$[x] = \{y \mid x - y = 2\pi m, m \in \mathbb{Z}\}$$

と書き、

$$\exp(ix) \in S^1$$

と同一視され、

$$S^1 \simeq \frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}$$

と表す。次に写像

$$\tilde{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\tilde{f}(0) = 0, \tilde{f}(x + 2\pi) \sim \tilde{f}(x)$$

を満たすとする。この時、任意の  $x \in \mathbb{R}$  に対して、

$$\tilde{f}(x + 2\pi) = \tilde{f}(x) + 2n\pi \tag{4.1}$$

が成り立つ。これも円周上で写されることを考えると明らかである。そこで  $x \sim y$  の時  $x = y + 2\pi m$  とおけるから、式 4.1 から

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) - \tilde{f}(y) &= \tilde{f}(y + 2\pi m) - \tilde{f}(y) \\ &= 2\pi nm \end{aligned}$$

となる。 $nm$  という  $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}$  が出てくるところが面白い。結果として

$$\tilde{f}(x) \sim \tilde{f}(y)$$

が示せた。これから  $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  は

$$f([x]) = p \circ \tilde{f}(x)$$

により、連続写像

$$f : \frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}} \rightarrow \frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}$$

を定める。

### 4.3 ループ [12]

#### 定義 40. 道 (path)

$X$  を位相空間とし、 $I = [0, 1] = \{t \in \mathbb{R} | 0 \leq t \leq 1\}$  とする。連続写像

$$\alpha : I \rightarrow X, \alpha(0) = x_0, \alpha(1) = x_1 \tag{4.2}$$

$$t \mapsto \alpha(t)$$

を始点  $x_0$ 、終点  $x_1$  を持つ道 (path) という。

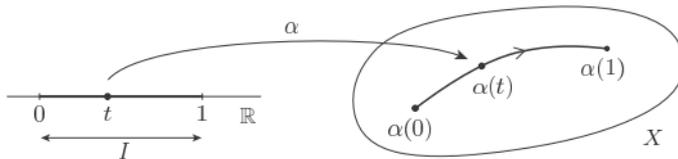


図 4.5: [36] より：インターバルからの連続的な写像で道ができる。

ただし、

$$\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto t$$

$$\beta : I \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto t^2$$

とすると同じ像

$$\text{Im}\alpha = \text{Im}\beta = [0, 1]$$

のように同じ像をとるが、両者は任意の時刻  $t$  で同じ道は通らないことに注意する。

位相空間において  $x_0 \in X$  を始点、 $x_1 \in X$  を終点とする道全体の集合を

$$P(X; x_0, x_1)$$

のように書く。さらに次のように道が閉じると特別にこれをループという。

ここでは、距離はみないが、閉じているか、閉じていないかは見られるのである。

電磁気では閉じた電流があれば、その内側に向きを持った磁場が生じるが、閉じていないと、この磁場に一定の向きを持ったベクトルをあてはめることができない。

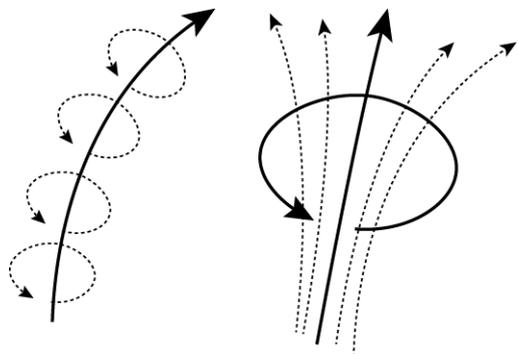


図 4.6: 電流と磁場の関係

#### 定義 41. ループ (loop)

このときの  $\alpha$  が

$$\alpha(0) = \alpha(1) = x_0 \tag{4.3}$$

を満たせば、基点  $x_0$  を持つループ (loop) という。

ループの基点を  $x_0$  として、この基点のみであれば定点ループという。

さらに、道  $\alpha(t)$  に対して次で道の逆を定義しておく

#### 定義 42. 道の逆

$$\alpha^{-1} : I \rightarrow X, t \mapsto \alpha^{-1}(t) := \alpha(1-t) \tag{4.4}$$

ただし、道の逆は  $\alpha^{-1}$  と書くが、これは  $\alpha$  の逆行列ではないので注意する。

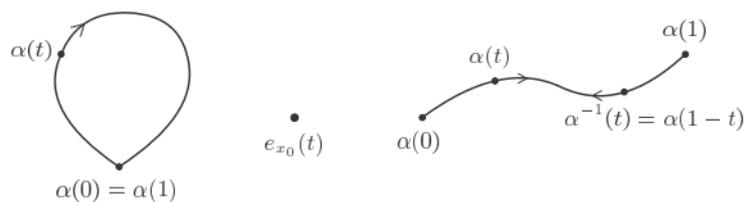


図 4.7: [36] より：ループと定点ループ、道の逆

## 4.4 次数

以下に登場してくるホモロジーは同値類の分類を表すが、これに整数  $\mathbb{Z}$  を用いる。これは以下に示すように巻数と対応する。

### 定義 43. 次数

ここで基点  $1 \in S^1$  を動かさないことを考える。

$$f : S^1 \rightarrow S^1$$

さらに

$$\tilde{f}(0) = 0, \tilde{f}(x + 2\pi) = \tilde{f}(x) + 2\pi n$$

を満たす写像

$$\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

とすると、 $f, \tilde{f}$  との間には 1 対 1 の対応がある。このとき整数  $n$  を次数といい、

$$n = \deg(f)$$

と書く。

$x$  が  $S^1$  を 1 回る間に、 $f(x)$  は  $S^1$  を  $n$  回る。

例えば次数は次のようにホモトピックかどうかにかえる。

$$f, g : S^1 \rightarrow S^1$$

として

$$f(0) = g(0) = 1$$

のように基点を決めれば、次数が等しくなれば  $f$  と  $g$  はホモトピックである。

$$\deg(g) = \deg(f)$$

次に

$$\tilde{f} : x \rightarrow nx$$

とすると

$$\deg(f) = n$$

となるような

$$f : S^1 \rightarrow S^1$$

を誘導する。これから任意の  $n \in \mathbb{Z}$  に対して、 $\deg(f) = n$  を満たす写像  $f : S^1 \rightarrow S^1$  を対応させることができる。

## 4.5 ループ積

$f, g : S^1 \rightarrow S^1$  に対応して、ループの積を

### 定義 44. 道の積

$$f * g \tag{4.5}$$

とする。

$$\tilde{f}(x + 2\pi) = \tilde{f}(x) + 2\pi n$$

$$\tilde{g}(x + 2\pi) = \tilde{g}(x) + 2\pi m$$

とおけるから

$$f * g(x + 2\pi) = f * g(x) + 2\pi(m + n)$$

従って

$$\deg(f * g) = \deg(f) + \deg(g)$$

がなりたつ。log 演算のように次数は振る舞う。

これにより、位相空間内の道やループには次の図のように代数的な構造を持たすことができる。例えば次の図を考える。

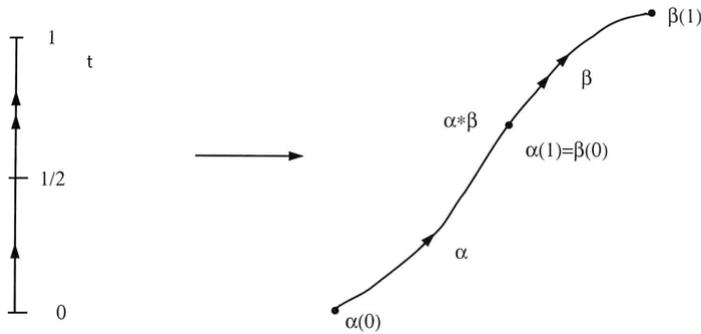


図 4.8: [12] より : 道の積で  $[0, 1]$  のインターバルをつなげる。

この図は次の積で表すことができる。

$$\alpha * \beta = \begin{cases} \alpha(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2s - 1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

これは、最初の半分が  $\alpha(I)$  に沿って進み、残り半分を  $\beta(I)$  に沿って進むことを表している。これを道の積という。

しかし、次の図のように積をつくることによって、前半は道  $\alpha$  を 2 倍のペースで、後半は道  $\beta$  を 2 倍のペースで進むことになる。

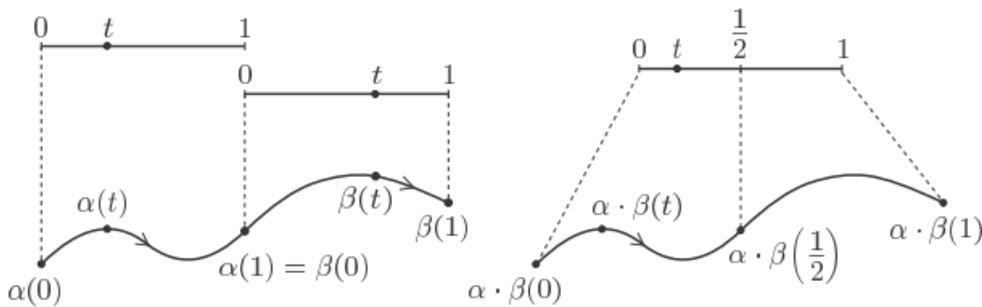


図 4.9: [36] より : 道  $\alpha$  と  $\beta$  との積  $\alpha * \beta$

これを応用し、3つの積を考えることができる。この時、先の時間配分があるので

$$(\alpha * \beta) * \gamma \neq \alpha * (\beta * \gamma) \tag{4.6}$$

であることに注意する。つまり  $(\alpha * \beta) * \gamma$  では

$$0 \leq t \leq \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \tag{4.7}$$

と配分するが、 $\alpha * (\beta * \gamma)$  では

$$0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4}, \frac{3}{4} \leq t \leq 1 \quad (4.8)$$

と配分する。この写像は別として区別される。従って重要な定理として

**定理 12. 道の積**

道は結合律を満たさない

ことがわかる。

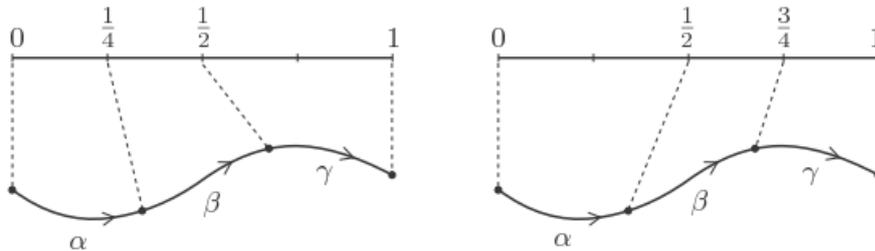


図 4.10: [36] より : 道は結合律を満たさない。  $(\alpha * \beta) * \gamma \neq \alpha * (\beta * \gamma)$

**4.6 弧状連結性**

**定義 45. 連結**

位相空間  $X$  が連結であるとは、次のような空ではない開集合  $U, V$  が存在しないことである。

$$U \cup V = X \text{ And } U \cap V = \emptyset$$

さらに

**定義 46. 弧状連結**

位相空間  $X$  が弧状連結であるとは、 $X$  の任意の 2 点  $x_0, x_1$  に対し、閉区間  $[0, 1]$  から  $X$  への連続写像  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  において、

$$\gamma(0) = x_0, \gamma(1) = x_1$$

を満たすものが存在することである。

弧状連結であれば  $U \cup V = X \text{ And } U \cap V = \emptyset$  な  $U, V$  は存在しないので連結である。

これを使って次のように同型を表すことができる。

**定義 47. 同型**

$X$  を弧状連結な位相空間とし、 $x_0, x_1 \in X$  とする。この時  $\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_1)$  は同型である。

次の図のように道

$$\eta : I \rightarrow X : \eta(0) = x_0, \eta(1) = x_1$$

を考え、 $\alpha$  を  $x_0$  におけるループとする。この時、図から

$$\eta^{-1} * \alpha * \eta$$

が  $x_1$  でのループになる。

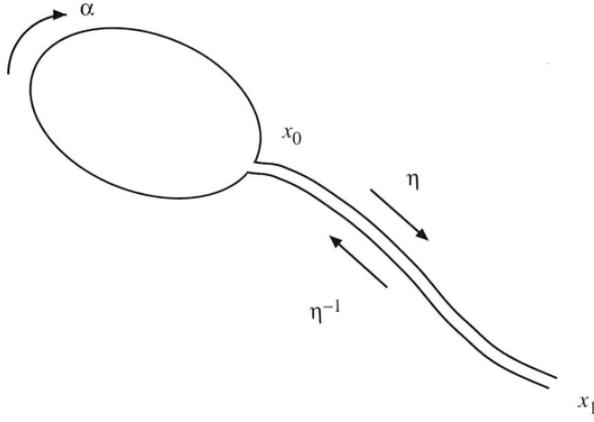


図 4.11: [12] より:  $x_0$  におけるループから  $x_1$  におけるループに広げる。

よって、ループの同値類があり、次のように表す。

$$[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$$

これから次のように誘導して、同値類をつくることできる。

$$[\alpha'] = [\eta^{-1} * \alpha * \eta] \in \pi_1(X, x_1)$$

これで対応する写像が決まり、

$$P_\eta : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1), P_\eta([\alpha]) = [\alpha']$$

とかくと次のように  $P_\eta$  は同型写像になることが示される。

まず、準同型となることを示す。  $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(X, x_0)$  に対して

$$\begin{aligned} P_\eta([\alpha] * [\beta]) &= [\eta^{-1} * [\alpha] * [\beta] * \eta] \\ &= [\eta^{-1} * [\alpha] * [\eta] * [\eta^{-1}] * [\beta] * [\eta]] \\ &= P_\eta([\alpha]) * P_\eta([\beta]) \end{aligned}$$

次に  $P_\eta$  が全単射であればいいから  $P_\eta$  の逆写像

$$P_\eta^{-1} : \pi_1(X, x_1) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

として、

$$P_\eta^{-1}([\alpha']) = [\eta * \alpha' * \eta^{-1}]$$

を満たすものとして定義する。これは

$$P_\eta^{-1}P_\eta([\alpha]) = P_\eta^{-1}([\eta^{-1} * \alpha * \eta]) = [\eta * \eta^{-1} * \alpha * \eta * \eta^{-1}] = [\alpha]$$

を満たしている。従って逆が存在し、

$$P_\eta^{-1}P_\eta = id_{\pi_1(X, x_0)} \quad (4.9)$$

$$P_\eta P_\eta^{-1} = id_{\pi_1(X, x_1)} \quad (4.10)$$

となるので、全単射であることがわかる。

また、この関係から  $\eta(1) = \zeta(0)$  とすると

$$\begin{aligned} P_{\eta*\zeta}([\alpha]) &= [\zeta^{-1}\eta^{-1}] * [\alpha] * [\eta\zeta] \\ &= [\zeta^{-1}] \cdot (\eta^{-1} * \alpha * \eta) \cdot [\zeta] \\ &= P_{\zeta} \cdot P_{\eta}(\alpha) \end{aligned}$$

となる。

## 4.7 トーラス基本群

ここでループの合成を具体的に見てみよう。  $X, Y$  を弧状連結な位相空間とする。  
この時、

**定理 13.**  $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$  は 1次元ホモトピー類を表し、

$$\pi_1(X, x_0) \oplus \pi_1(Y, y_0)$$

に同型になる。

この定理をまず見る。はじめに、次の射影を定義する。

$$p_1 : X \times Y \rightarrow X$$

$$p_2 : X \times Y \rightarrow Y$$

$\alpha$  は  $(x_0, y_0)$  を基点とする  $X \times Y$  のループである。この時、  
 $\alpha_1 = p_1(\alpha)$  は  $x_0$  における  $X$  内のループになり、 $\alpha_2 = p_2(\alpha)$  は  $y_0$  における  $Y$  内のループになる。  
逆に  $x_0$  における  $X$  内のループ  $\alpha_1$  と  $y_0$  における  $Y$  内のループ  $\alpha_2$  の任意の対は  
一意的に  $(x_0, y_0)$  における  $X \times Y$  内のループ  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$  を決める。そこで、準同型写像

$$\phi : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \rightarrow \pi_1(X, x_0) \oplus \pi_1(Y, y_0)$$

を

$$\phi([\alpha]) = ([\alpha_1], [\alpha_2])$$

で定める。これは逆写像を持つので同型写像になる。このようにホモトピー類を用いると、ざっくりと同型をつくることができてしまう。

この例が次のようにトーラス基本群の場合である。

$T^2 = S^1 \times S^1$  をトーラスとする。この時、先の定理を用いると 1次元ホモトピー類を用いて次のように表すことができる。

$$\pi_1(T^2) \simeq \pi_1(S^1) \oplus \pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

同様に、 $n$  次元トーラス

$$T^n = \underbrace{S^1 \times S^1 \times \cdots \times S^1}_n \quad (4.11)$$

の場合は

$$\pi_1(T^n) \simeq \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_n \quad (4.12)$$

となり、 $n$  個の積と  $n$  個の直和が対応する。

また、円筒  $X = S^1 \times \mathbb{R}$  の場合は高さ方向にも変形収縮できるので

$$\pi_1(X) \simeq \mathbb{Z} \oplus \{e\} \simeq \mathbb{Z}$$

である。

## 4.8 アーベル群 [108]

前章で単体を扱ったが、ここで位相空間  $X$  が三角形分割可能であれば多面体上に基本群をつくることができる。

### 定義 48. 自由可換群

単純に  $n \geq 0$  個の文字  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  が与えられると次の係数に整数  $\mathbb{Z}$  をもつ集合

$$\{a_1x_1 + \dots + a_nx_n \mid a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}\}$$

をつくることができ、次の和を定義できるものを  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  から生成された階数  $n$  の自由可換群 (**FreeAbel\_Group**) という。

次のように表す。

$$\sum_{i=1}^n (a_i + b_i) x_i = \langle \langle x_1, x_2, \dots, x_n \mid - \rangle \rangle$$

階数  $n$  の自由アーベル群は  $a_i + b_i = c_i \in \mathbb{Z}$  とおけるので

$$\mathbb{Z}^n := \overbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}^n$$

と同型になる。

そこで2つの自由アーベル群を

$$E := \langle \langle x_1, x_2, \dots, x_n \mid - \rangle \rangle$$

$$F := \langle \langle y_1, y_2, \dots, y_n \mid - \rangle \rangle$$

とする。表示の記号右の  $-$  は無限巡回群であることを表している。

この間の準同型写像を  $\phi$  とする。この写像の像を同一視した、次の商群を定義する。

$$G := F/\text{Im}(\phi) \tag{4.13}$$

この時、各生成元の像は  $\phi(x_i)$  であり、

$$\phi(x_j) := \sum_{i=1}^n p_{ij} y_i, \quad p_{ij} \in \mathbb{Z}$$

とおける。この写像は行列

$$P := \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nm} \end{pmatrix}$$

によって特徴付けられる。式 4.13 としたことで

$$Py = 0$$

を満たす群という制約がつく。つまり、 $G$  による構造が入ったことになる。

さらに

$$\begin{aligned} \phi\left(\sum_{j=1}^m a_j x_j\right) &= \sum_{j=1}^m a_j \left(\sum_{i=1}^n p_{ij} y_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m p_{ij} a_j\right) y_i \end{aligned}$$

となるので、準同型写像  $\phi$  を  $\mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}^n$  への写像と見なし、縦ベクトルを

$$\vec{a} := \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}, \vec{b} := \begin{pmatrix} b_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

で定義すれば

$$\vec{b} = P\vec{a}$$

が成り立つ。

#### 定義 49. 有限巡回群

$p$  を 2 以上の自然数としたとき、表示  $\langle\langle x|px \rangle\rangle$  を持つアーベル群を

$$\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$$

とすれば、これは位数  $p$  の有限巡回群である。

この位数も行列  $P$  から求めることができる。例えば次で表されるアーベル群を  $E$  とすると

$$P := \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$E$  の表示は

$$E = \langle\langle x, y | 5x - 2y, 4x + 3y \rangle\rangle$$

である。そこで行列の対角化の手順で  $P$  の

1 行目に 2 行目の 2 倍をたす

2 行目に 1 行目の 2 倍をたす

2 列目から 1 列目の 10 倍をひくと

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 23 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 23 \end{pmatrix}$$

となり、これは位数 23 であることを表す。

これによって系列をつくることができる。左右から作用する  $L, R$  を考え、上の行列変換を

$$P' = LPR$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 1 & -10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

で表す。群  $E$  は完全系列

$$\mathbb{Z}^2 \xrightarrow{P} \mathbb{Z}^2 \rightarrow E \rightarrow \{0\}$$

となるが、 $P'$  を用いて

$$\mathbb{Z}^2 \xrightarrow{P'} \mathbb{Z}^2 \rightarrow E \rightarrow \{0\}$$

にも対応している。 $P'$  が対角行列であるので

$$E = \frac{\mathbb{Z}^2}{\text{Im}(P')} = \langle\langle y' | 23y' \rangle\rangle \simeq \frac{\mathbb{Z}}{23\mathbb{Z}}$$

これから重要な次の定理が求まる。

有限の表示を持つアーベル群はいくつかの巡回群の直和と同型になる。

次に自由群は必ずしも可換ではないとする。

**定義 50. 生成系**

群  $G$  の部分集合  $X = \{x_i\}$  任意の元  $g \in G - \{e\}$  が一意的に

$$g = x^{i_1} x^{i_2} \cdots x_n^{i_n}$$

のようかければ  $X$  は  $G$  の生成系であるという。ただし、 $n$  は有限で  $i_k \in \mathbb{Z}$  とし、隣り合う各元  $x_j$  は等しくなく、

$$x_j \neq x_{j+1}$$

である。

また、 $x_j^1 = x_j$  と書き、 $i_j = 0$  は  $g$  の表記から除外し、 $h = a^2 a^{-3} b^{-2} c^0$  とはかかない。この時  $h$  を簡約し

$$h = a^{-1} b^{-2}$$

と表現する。

群  $G$  が生成系を持てば  $G$  は自由群であるという。

このような  $X$  の要素は文字と呼ばれ、文字の積は語と呼ばれる。

さらに指数が 0 になるような

$$\omega = a^0$$

を簡約すると 0 では無く空なる語として 1 で表すことにする。

全て簡約された語は積をつくり、 $X$  で生成される自由群として  $F[X]$  で表す。

この時、 $X = \{a\}$  とすると、この自由群  $F[X]$  は  $\mathbb{Z}$  と同型である。

ここで次のような商群が重要になる。

$F[X]$  は自由群とすると、次のような  $F[X] \rightarrow G$  への自然な準同型写像が定義できる。

$$x^{i_1} x^{i_2} \cdots x_n^{i_n} \rightarrow x^{i_1} x^{i_2} \cdots x_n^{i_n} \in G$$

左辺側の表示が一意であるとは限らないので、これは同型ではない。しかし、 $X$  は  $F[X]$  と  $G$  を生成するので全射ではある。

この時、次のように  $\phi = 0$  となるものは全て同一視してしまうと  $G$  と同型になる。

$$\frac{F[X]}{\ker \phi} \simeq G$$

これは生成系  $X$  と  $\ker \phi$  が群  $G$  の構造を完全に決めるとしてよい。したがって、今後よく利用する生成元とその関係を並べた

$$(x_1, x_2, \cdots, x_p; r_1, r_2, \cdots, r_q)$$

という表示を用いる。例えば

$$\mathbb{Z} = (x; \emptyset)$$

$$\mathbb{Z}_n = (x; x^n)$$

となる。

例として次のような  $X = \{x, y\}$  で生成される自由群を考える。

$$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = \{x^n y^m \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$$

この時

$$xy = yx$$

となるので

$$xyx^{-1}y^{-1} = 1$$

が成り立つ。これから関係

$$r = xyx^{-1}y^{-1}$$

とする。表現は

$$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = (x, y; xyx^{-1}y^{-1})$$

となる。

## 5 ホモトピー類

一般に  $H_r(K)$  の生成元の本数は多面体  $|K|$  を作った時の  $r + 1$  次元の種数に等しい  
前節までに、距離という概念のない図形の扱いをみてきた。伸びても、縮んでも、区別のつかない世界である。

ここで、この世界にいくつかのルールを設けて、理論構築の基礎をつくろう。

興味あることに、あるルールは様々な図形の変形に対して、値を変えなくなる。これが単純な図形変形で留まることなく、

現実の物理量と関係していく。こうした量は位相不変量と呼ばれる。

以下で位相空間  $X$  内で変形可能なループを定義して、その基点を  $x_0$  とするとループの同値類が存在してこれをホモトピー類という。



図 5.1:  $x_0$  を基点としたホモトピー類

次のように位相空間  $X$  と基点  $x_0$  のセットで表す。

$$\pi_1(X, x_0)$$

添え字の 1 は 1 次元のホモトピー類であることを表す。この時の記号  $\pi$  を射影と混同しないように注意したい。

このようにホモトピーを用いると、複雑な構造をもつものも単純に分類できて、つけて、はったり、とったりができるようになる。

これを数学的に表す準備から初めてみよう。

### 5.1 可縮と同一視

はじめにホモロジーの概念として重要な可縮と同一視を考えよう。

境界演算子を  $\partial$  で表す。次のように 2 次元図形  $\sigma$  の境界は 1 次元図形になる。

$$\partial\sigma = \alpha$$

しかし、1 次元の曲線には境界がない。

$$\partial\alpha = 0$$

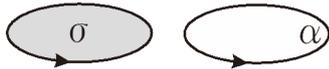


図 5.2:  $\partial\sigma = \alpha$  の関係を表す、 $\partial\alpha = 0$  である。

ポアンカレの補題でみたように、この逆、つまりある 1 次元図形  $\alpha$  について  $\partial\alpha = 0$  ならば  $\partial\sigma = \alpha$  となるような 2 次元図形が存在するかという疑問が出る。

Poincare の補題によれば  $U \subset R^n$  が 1 点に可縮できれば完全であった。

この可縮という概念がホモロジーの世界では 1 つ重要な役割をもつ。

境界のない図形  $\alpha$  が 1 つ次元の高い図形の境界かどうか？

答は図形  $\alpha$  がどんな図形の中に描かれているかに依存する。下図の球面は 1 点可縮なので境界になる図形が存在するが、

穴がある右の図形上にあるとこの 1 次元図形  $\beta$  を境界にする 2 次元図形が描けない。

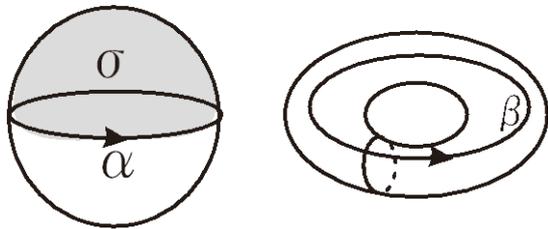


図 5.3: 左の図は 1 点可縮なので  $\partial\alpha = \sigma$  となる図形が存在できる。しかし、右図では穴のせいで存在できない。

このような幾何的な関係がゲージ理論や場の理論に重要な働きをすることになる。

前節で単体的複体から決まる群  $C_r(K), Z_r(K), B_r(K)$  を考えた。

そこでこれらの位相的な不変量を明らかにしていこう。

例えば三角形から決まる 1 次元鎖群は

$$\begin{aligned} C_1(K_1) &= \{i(p_0p_1) + j(p_1p_2) + k(p_2p_0)\}, \quad i, j, k \in \mathbb{Z} \\ &\simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \end{aligned}$$

であり、同じように正方形で考えると同様に 4 辺あるので

$$C_1(K_2) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

よって  $C_1(K_1)$  と  $C_1(K_2)$  は同型にならない。

これから一般に  $C_r(K)$  は位相不変量にはならないし輪体群、境界輪体群  $Z_r(K), B_r(K)$  も同様である。

同型をつくるためには次のような工夫が必要になる。

#### 定義 51. ホモロジー類 (homology\_class)

前部で非斉次座標を用いたように次のような商群が定義できる。

$$H_r(K) \equiv \frac{Z_r(K)}{B_r(K)}$$

ただし、 $r > n, r < 0$  の場合は

$$H_r(K) = 0$$

であるとする。つまり、輪体の境界を同一視して貼り合わせてしまえというわけである。

$H_r(K)$  は  $r$ -輪体の同値類からなる集合でこれをホモロジー類 (homology\_class) という。

これは  $Z_r(K)$  に含まれる  $B_r(K)$  の元を取り除いている。  $B_r(K)$  が  $Z_r(K)$  の部分群なので  $H_r(K)$  は矛盾無く定義できて

$$H_r(K) \equiv \{[z] | z \in Z_r(K)\}$$

と表すことができる。

さらに、位相不変であることは次のように変形ができる。

**定義 52. ホモロガス (homologous)(ホモローグ)**

$z, z'$  が同じ同値類に属することは

$$z - z' \in B_r(K)$$

が成り立つことと同値である。この時、 $z$  は  $z'$  にホモロガス (homologous) といい、

$$z \sim z'$$

と表現する。

前節の可縮はホモロガスの例である。また、この  $z - z'$  がある空間の境界になっている。

これから任意の元  $b \in B_r(K)$  は

$$b - 0 \in B_r(K) \tag{5.1}$$

となるので  $b$  は  $0$  にホモロガスである。

また、任意の三角形分割  $(K, f), (L, g)$  ができれば

$$H_r(K) \simeq H_r(L)$$

であり、三角形分割可能な位相空間  $K$  について

$$H_r(X) \simeq H_r(K)$$

が成り立ち、三角形分割の選び方に関係ない。

これは有用である。

例えば  $K = \{p_0, p_1\}$  を 2 つの 0 単体からなる単体的複体とすると  $B_0(K) = 0$  だから

$$H_0 = \frac{Z_0}{B_0} = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

となる。この時、 $H_0$  は 2 つの独立した生成元を持つという。しかし、 $Z_1$  は 1 単体がないので  $H_1(K) = 0$  である。

また、第 2 部の群論から 2 つの生成元がある時、階数 2 の自由アーベル群 (free Abelian Group) ということができた。

$p$ -単体の生成する自由アーベル群の例が  $p$  次元鎖群  $C^p(K)$  になっている。

従って次のように  $H_r(K)$  の構造を一般的に表すことができる。

$$H_r(K) \simeq \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_r \oplus \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_s$$

$Z_r(K), B_r(K)$  は共に自由アーベル群  $C_r(K)$  の部分群になっているので、同じように自由アーベル群と呼ぶことができる。

よって前半の  $r$  個の部分は階数  $r$  の自由アーベル群をつくるが、商群であることは単純ではなく、

第 2 部の群論でみたように後半の  $s$  個の部分がねじれ部分群 (torsion\_subgroup) である。

$H_p(K)$  の自由アーベル群の階数はベッチ数 (Betti number) と呼ばれ  $b_p(K)$  で表す。

このベッチ数は三角形分割と同様に位相不変量になる。

以下で単純なホモロジーの計算例を紹介する。

この計算例で示されるように円周には穴があるが円板には穴がないこの穴の数を種数という。

**定義 53. ホモトピー (homotopy)**

位相空間  $X, Y$  に対して、連続写像  $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$  がホモトピックであれば連続写像

$$F : [0, 1] \times X \rightarrow Y$$

において

$$f_0(x) = F(0, x), f_1(x) = F(1, x) \tag{5.2}$$

を満たすものがあることになる。これを

$$f_0 \simeq f_1$$

連続写像  $F$  または  $f_t(x) = F(t, x)$  で定義される連続写像の族

$$\{f_t\}_{t \in [0, 1]}$$

を  $f_0$  と  $f_1$  の間のホモトピー (**homotopy**) という。

つまり、連続的に形を変換することを前節でみたがそれを数学的に定義したのがホモトピー (homotopy) という考え方になる。

ある開集合  $U$  上に 2 つの連続な曲線  $c_0, c_1$  を考え、次の図のように始点と終点は一致しているとする。

$$c_i : [0, 1] \rightarrow U$$

$$c_0(0) = c_1(0), c_0(1) = c_1(1) \tag{5.3}$$

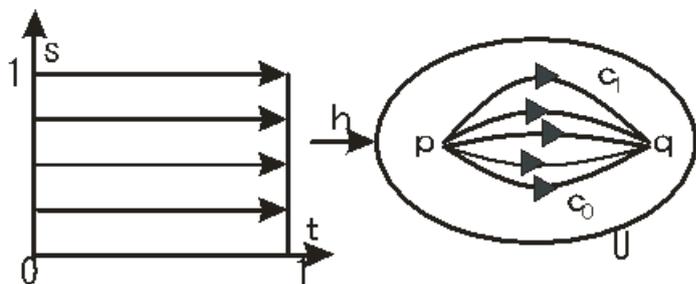


図 5.4: homotopy 両端を同一視して得られる写像  $h : I^2 \rightarrow U$

次を満たす写像  $h(s, t) : I^2 \rightarrow U$  があれば  $c_0, c_1$  はホモトピック (**homotopic**) またはホモトープ (**homotope**) であるという。

- $h(0, t) = c_0(t), h(1, t) = c_1(t) \quad \forall t \in I$
- $h(s, 0) = c_0(0), h(s, 1) = c_1(0) \quad \forall s \in I$

## 5.2 ホモトピー同値

**定義 54. ホモトピー同値**

つまり、 $X$  と  $Y$  が同じホモトピー型であれば、連続写像

$$f : X \rightarrow Y$$

$$g : Y \rightarrow X$$

が存在して

$$f \circ g \sim id_Y$$

$$g \circ f \sim id_X$$

が成り立つ。これをホモトピー同値といい、次で表す。

$$X \simeq Y$$

これも推移律、反射律をみたす。

これを詳しくみるために前節 3.8 の準同型写像を復習しておく、

2つの位相空間  $X, Y$  と連続写像  $f: X \rightarrow Y$  があるとき、2つのホモロジー群  $H_q(X), H_q(Y)$  の間に準同型写像

$$f_* : H_q(X) \rightarrow H_q(Y)$$

が自然に定義できる。

$X$  の  $q$  次元特異単体  $\sigma^q : \Delta^q \rightarrow X$  に対して、 $Y$  の  $q$  次元特異単体  $\sigma^q : \Delta^q \rightarrow Y$  が次の合成写像によって定義された。

$$f_q(\sigma^q) = f \circ \sigma^q$$

この時、

$$f_* = \{f_q | q \in \mathbb{Z}\}$$

を連続写像  $f$  の誘導するホモロジー群の準同型写像という。

特異ホモロジー群は空間  $X$  の位相タイプできまり、次のホモトピータイプで決まる。

2つの空間  $X, Y$  がホモトピー同値であるとは連続写像  $f: X \rightarrow Y$  と  $g: Y \rightarrow X$  があり合成写像

$$X \ni x \mapsto g(f(x)) \in X$$

$$Y \ni y \mapsto g(f(y)) \in Y$$

が連続的に変形し

$$X \ni x \mapsto x \in X$$

$$Y \ni y \mapsto y \in Y$$

となることである。この時の写像は

$$g(f(x)) = x, g(f(y)) = y$$

のようにはじめから恒等写像になっている。

従ってホモトピー同値は同相であることよりさらに広い概念である。

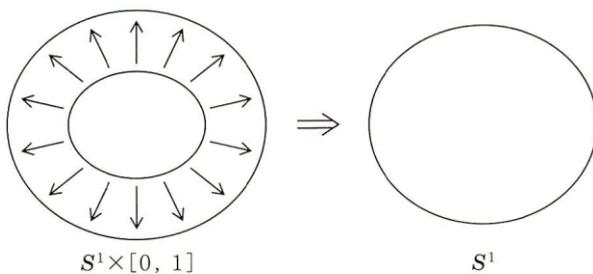


図 5.5: [69] ホモトピー同値な図形

ホモロジーの考えは、例えば1点  $P$  からなる位相空間のホモロジー空間を

$$H_q(P, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & (q = 0) \\ 0 & (q \neq 0) \end{cases}$$

と書ける。この時  $n$  次元のユークリッド空間  $\mathbb{R}^n$  は1点  $P$  とホモトピー同値であるので、何次元であろうともホモロジーから見れば区別がつかない。

$$H_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & (q = 0) \\ 0 & (q \neq 0) \end{cases}$$

ホモロジー群の間の準同型写像が一致することから次の定理が成り立つ。

**定理 14.** 誘導準同型写像のホモトピー不変

$X, Y$  を多面体、 $f, g: X \rightarrow Y$  を連続写像とする。この時  $f \simeq g$  ならば

$$f_* = g_* : H_i(X) \rightarrow H_i(Y)$$

が成り立つ。

*Proof.*  $X = |K|, Y = |L|$  となるように単体的複体  $K, L$  をとる。また、

$$F : X \times I \rightarrow Y, F(x, 0) = f(x), F(x, 1) = g(x)$$

を  $f$  から  $g$  へのホモトピーとする。 $X \times I$  を単体分割して下図のような  $K$  の柱体  $K \times I$  を作る。

$F$  は  $|K \times I|$  から  $|L|$  への連続写像とみなせる。そこで、 $K \times I$  を細分化して行って式 2.11 の  $F$  の単体近似から

$$\Phi : D^{(d)}(K \times I) \rightarrow L$$

を考える。ただし、 $\Phi$  に次の制限写像を  $f, g$  の単体近似になるように準備する。

$$\Phi_0 : D^{(d)}(K) \times \{0\}$$

$$\Phi_1 : D^{(d)}(K) \times \{1\}$$

証明は準同型写像を用いて

$$\Phi_{0*} = \Phi_{1*} : H_i(K) \rightarrow H_i(L)$$

を示せばよい。

そこで  $\Phi_{0*}, \Phi_{1*}$  をつなぐ鎖ホモトピーを次のように定義する。

$$\Xi_n : C_n(D^{(d)}(K)) \rightarrow C_{n+1}(L)$$

を  $C_n(D^{(d)}(K))$  の向き付き  $n$  次元単体  $\sigma^n$  に  $\Phi_{\#}(D^{(d)}(\sigma^n \times I))$  を対応させるものとして定義する。

$\partial_*, \partial'_*$  を  $D^{(d)}(K), L$  の境界準同型写像とすると  $\sum A$  を  $\sigma^n$  の境界に含まれる。向き付き  $n-1$  次元単体の総和として

$$\begin{aligned} (\Xi_{n-1} \circ \partial_n)(\sigma^n) &= \Xi_n \left( \sum A \right) \\ &= \sum_{\tau^{n-1} \in \partial \sigma^n} \Phi_{\#} \left( D^{(d)}(\tau^{n-1} \times I) \right) \end{aligned}$$

となる。

一方で、 $\Phi_{\#}$  の鎖準同型をつかうと

$$\begin{aligned} (\partial'_{n+1} \circ \Xi_n)(\sigma^n) &= \partial'_{n+1} \left( \Phi_{\#} \left( D^{(d)}(\sigma^n \times I) \right) \right) \\ &= \Phi_{\#} \left( \partial_{n+1} \left( D^{(d)}(\sigma^n \times I) \right) \right) \end{aligned}$$

となる。

ここで  $D^{(d)}(\sigma^n \times I)$  の境界はどうなるか考えると下図から底面は向きを考えて  $\sigma^n \times \{0\}$  と  $-\sigma^n \times \{1\}$  となる。

側面は  $-\partial\sigma^n \times I$  となる。

よって、

$$\begin{aligned} \Phi_{\#} \left( \partial_{n+1} \left( D^{(d)}(\sigma^n \times I) \right) \right) &= - \sum_{r^{n-1} \in \partial\sigma^n} \Phi_{\#} \left( D^{(d)}(r^{n-1} \times I) \right) \\ &\quad + \Phi_{\#} \left( D^{(d)}(\sigma^n \times \{0\}) \right) - \Phi_{\#} \left( D^{(d)}(\sigma^n \times \{1\}) \right) \end{aligned}$$

従って、側面の部分が打ち消し合い

$$\begin{aligned} (\Xi_{n-1} \circ \partial_n + \partial'_{n+1} \circ \Xi_n)(\sigma^n) &= \Phi_{\#}(\sigma^n \times \{0\}) - \Phi_{\#}(\sigma^n \times \{1\}) \\ &= (\Phi_0 - \Phi_1)(\sigma^n) \end{aligned}$$

となったので  $\Xi_*$  は  $\Phi_{0*}$  と  $\Phi_{1*}$  をつなぐ、鎖ホモトピーである。

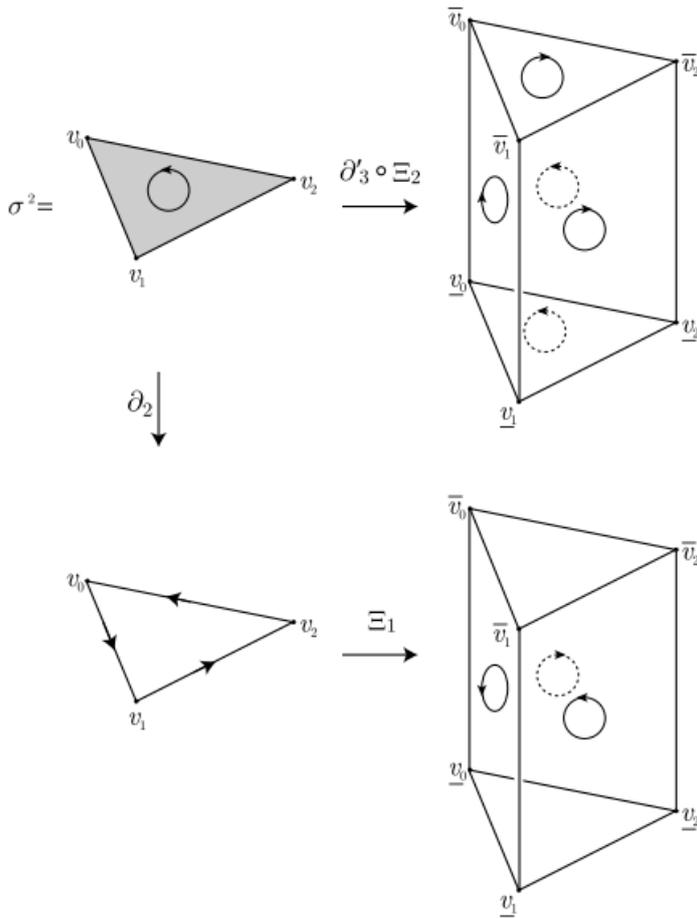


図 5.6: [108] より :  $\partial'_3 \circ \Phi_{\#}$  と  $\Phi_{\#} \circ \partial_2$

□

### 5.3 計算準備

ホモトピーの変形を数学的に表す準備をここでする。

#### 5.3.1 インターバル

例えば

$I^n (n \geq 1)$  を単位  $n$  次元立方体  $I \times \cdots \times I$  とする。すなわち

$$I^n = \{(s_1, s_2, \dots, s_n) | 0 \leq s_i \leq 1 (1 \leq i \leq n)\}$$

また、その境界を  $\partial I^n$  とし幾何的境界とする

$$\partial I^n = \{(s_1, \dots, s_n) | \in I^n | s_i = 0, 1\}$$

基本群では式 4.3 で定義したように、この基本インターバルの境界が基点  $x_0$  に射影された。

$$I = [0, 1]; \partial I \mapsto x_0$$

つまり、ループ化される。これは次の図のように 2 次元においても境界を 1 点に同一視してしまうことで、円板  $D^2$  から球面  $S^2$  をつくることに次元を上げることができる。

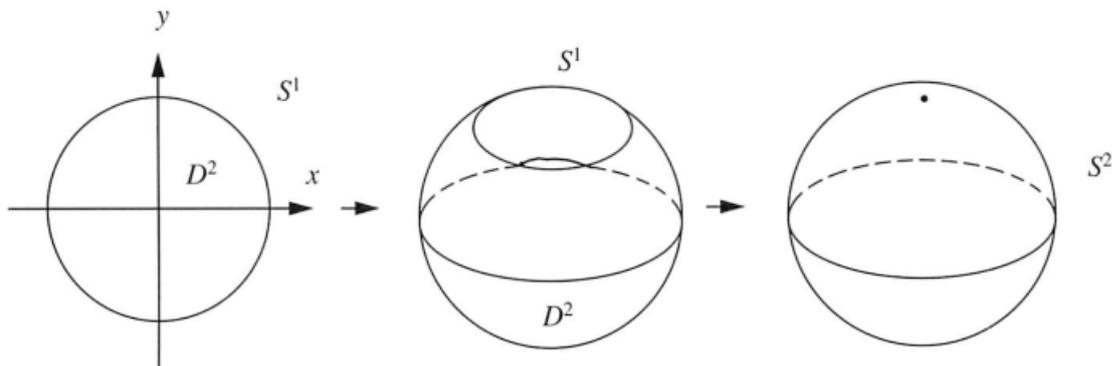


図 5.7: [12] より : 3 次元内の円板  $D^2$  の境界を同一視し、1 点にすると球面  $S^2$  ができる。

図でみるように  $D^2$  の境界は  $\partial D^2 = S^1$  なので、結局

$$S^1 \rightarrow \{0\}$$

のように円周  $S^1$  が 1 点に可縮であることを利用している。さらに高次元の場合でも次のように考える。

#### 定義 55. ホモトピー類

$\alpha, \beta, : I^n \mapsto X$  を  $x_0 \in X$  における  $n$  ループとする。  $\alpha$  が  $\beta$  にホモトピックであれば

$$F(s_1, \dots, s_n, 0) = \alpha(s_1, \dots, s_n)$$

$$F(s_1, \dots, s_n, 1) = \beta(s_1, \dots, s_n)$$

が成り立つ。さらにホモトピーであれば

$$(s_1, \dots, s_n) \in \partial I^n, t \in I$$

に対して

$$F(s_1, \dots, s_n, t) = x_0$$

が成り立つ。この時、

$$\alpha \sim \beta$$

と書く。 $\alpha$  が属する同値類をホモトピー類という。

### 5.3.2 群演算

2つの  $n$  ループがあるときの積を次のように定義する

定義 56 ( $n$  ループ積)。

$$\alpha * \beta(s_1, \dots, s_n) = \begin{cases} \alpha(2s_1, s_2, \dots, s_n) & (0 \leq s_1 \leq \frac{1}{2}) \\ \beta(2s_1 - 1, s_2, \dots, s_n) & (\frac{1}{2} \leq s_1 \leq 1) \end{cases}$$

$s_1$  以外のループを一まとめにして表す。同様に逆元を

$$\alpha^{-1}(s_1, s_2, \dots, s_n) \equiv \alpha(1 - s_1, s_2, \dots, s_n)$$

と定義すれば

$$\alpha^{-1} * \alpha(s_1, \dots, s_n) \sim \alpha * \alpha^{-1}(s_1, \dots, s_n) \sim c_{x_0}(s_1, \dots, s_n)$$

となる。ただし、 $c_{x_0}$  は  $x_0 \in X$  の定数ループ

$$c_{x_0} \rightarrow x_0$$

を表す。この様子は次の図のように  $s_1$  以外のループを一まとめにして表す。

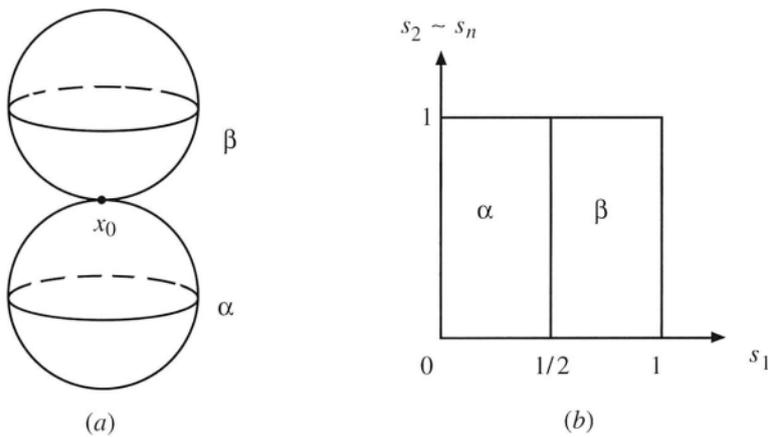


図 5.8: [12] より :  $\alpha * \beta$

図のように  $\alpha, \beta$  の第一ループにおいて

$$\alpha_1 + \beta_1 = 0$$

とすると

$$2s_1 + 2s_1 - 1 = 0$$

$$s_1 = \frac{1}{4}$$

2つのループを今、かけているので、

$$x_0 \rightarrow \frac{1}{2}$$

で2つのループが張られる。よって積  $\alpha * \beta$  は上図 (a) のようになっている。

これは高次に拡張することができる。

ホモトピー類の  $x_0 \in X$  における任意のループ  $\alpha, \beta$  は常に可換になる。

$$[\alpha] * [\beta] = [\beta] * [\alpha]$$

これは次の図のように位相空間の中でホモトピックに入れ替えができることから明らかである。

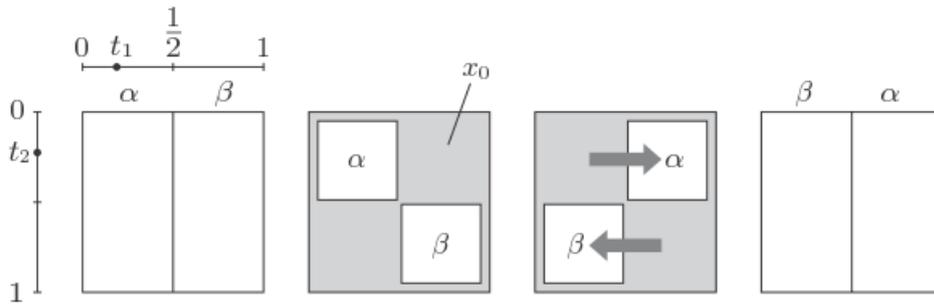


図 5.9: [108] より：ホモトピックで入れ替えることができる。

この時の点  $x_0$  は上図の灰色の部分全部に対応する。

これから 2 次元ホモトピー群の積は交換可能になることがわかる。

前節の弧状連結で見たよう  $\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_1)$  の同型は

$$\pi_n(X, x_0) \simeq \pi_n(X, x_1)$$

に拡張できる。

ただし、後節で考えるように無限次元の場合は注意がいる。

さらに

$$\alpha * \beta * \gamma * \dots$$

と積を増やしていくことができる。

これは次の図のようにインターバル区間がどんどん細分化される。積が有限であれば、直線的に伸びていくが、

もし、積を無限につくると、図右のようなループとみなすことができる。

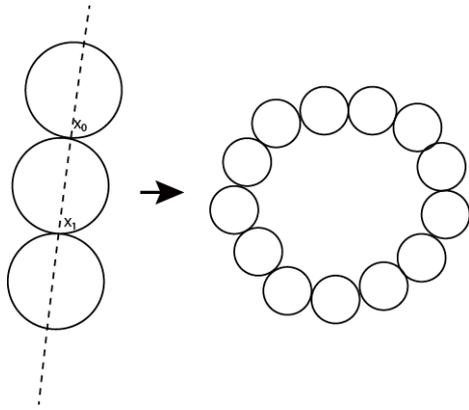


図 5.10: 大局的なループ

$X, Y$  が弧状連結であれば定理 13 次のようにループの積は直和になる。

$$\pi_n(X \times Y) \simeq \pi_n(X) \oplus \pi_n(Y)$$

が成り立つ。

### 5.3.3 例 1 正方形

次の図のように、1 辺が 1 の正方形の周で、縦の動きをパラメタ  $t$ 、横の動きをパラメタ  $s$  で表す。

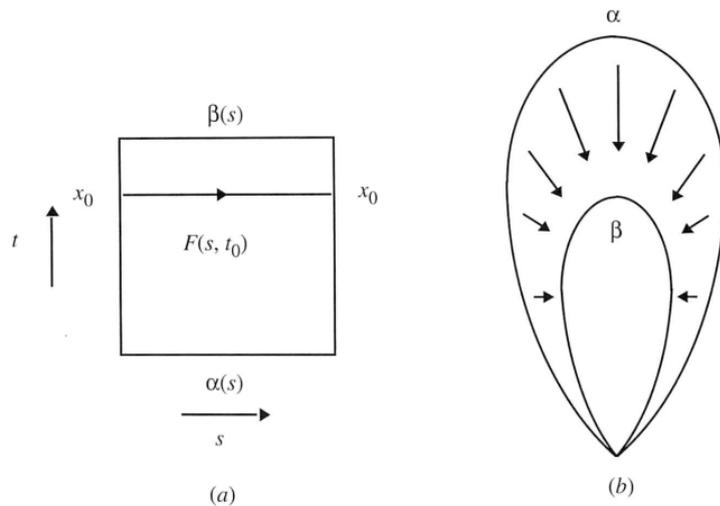


図 5.11: [12] より幾何的な連続変形と、代数的な変形

次のような写像を考える。

$$\alpha, \beta : I \rightarrow X$$

が  $x_0$  におけるループとする。

例えばこの正方形の上の辺を  $t = 0$  として  $\alpha$ 、下を  $t = 1$  として  $\beta$  とすると

$$F(s, 0) = \alpha(s), F(s, 1) = \beta(s) \forall s \in I$$

と表すことができ、次のように同一視する点  $x_0$  をとる。

$$F(0, t) = F(1, t) = x_0 \forall t \in I$$

ここ、長さや向きを定義していないので、パラメタ  $t$  を変化させれば、上図の右のように図が変化する。また、パラメタ  $s$  を小さくすれば 1 点に縮む。これは

$$F : I \times I \rightarrow X$$

を満たせば、 $F$  が  $\alpha$  と  $\beta$  間のホモトピーになることを表す。これを

$$\alpha \sim \beta$$

で表す。また、これから次の推移律が成り立つ。

$\alpha \sim \beta, \beta \sim \gamma$  とする。 $F(s, t)$  が  $\alpha, \beta$  間のホモトピーとし、 $G(s, t)$  は  $\beta, \gamma$  間のホモトピーとすると  $\alpha, \gamma$  間のホモトピー  $H(s, t)$  は

$$H(s, t) = \begin{cases} \alpha(s, 2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(s, 2t - 1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

で表すことができる。

以下で具体的に見てみる。

#### 5.3.4 例 2 円周

例えば円周  $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid z\bar{z} = 1\}$  から複素平面  $\mathbb{C}$  への写像を結ぶ関数を探すと、

$$f_t(z) = F(t, z) = (1-t)z + tz^2$$

を考えると、 $F$  は  $f_0(z) = z$  と  $f_1(z) = z^2$  で始まる写像

$$f_0, f_1 : S^1 \rightarrow \mathbb{C}$$

の間のホモトピーになる。しかし、 $f_0, f_1$  の値域を  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  を考えると、

$$F(1/2, -1) = 0$$

となるので  $F$  は  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  への写像ではない。従って  $F$  は

$$f_0, f_1 : S^1 \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

の間のホモトピーではない。次の図で見るように  $f_{1/2}$  は原点を通過する。

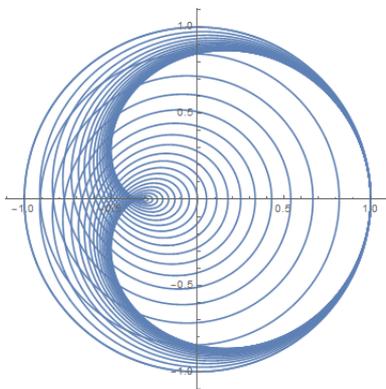


図 5.12:  $F(t, \theta) := (1-t)\exp(i\theta) + t\exp(2i\theta)$  のグラフを  $t = 1/3$  から 1 までを描画

いくつかの例でイメージをつかんでおこう。

- 任意の空ではない位相空間  $X$  を考える。 $n$  次元ユークリッド空間  $\mathbf{R}^n$  への連続写像のホモトピー集合  $[X, \mathbf{R}^n]$  は 1 点集合になる。

これは任意の連続写像  $f: X \rightarrow \mathbf{R}^n$  は

$$F(t, x) = tf(x)$$

とすれば原点  $0$  への定値写像  $c_0: X \rightarrow \mathbf{R}^n$  とホモトピックである。

- 離散位相を持つ空でない集合を  $K$  とする。 $X$  が弧状連結であることは  $[K, X]$  が 1 点だけからなる集合であることと同値である。

### 5.3.5 微分形式

例えば  $c_0, c_1$  がホモトープであれば次が成り立つ。

$$\int_{c_0} \omega = \int_{c_1} \omega \quad (5.4)$$

一般に  $R^n$  において始点と終点が一致する曲線はホモトピックである。つまり途中に穴がなければ通常の平面上の曲線はホモトピーである。

これは次のように示すこともできる。1 次微分形式

$$\omega = df \quad (5.5)$$

において式 2.18 より

$$\begin{aligned} \int_{c_i} \omega &= \int_{c_i} df \\ &= \int_0^1 c_i^* df \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt}(f \circ c_i) dt \\ &= f \circ c_i \Big|_0^1 = f(q) - f(p) \end{aligned}$$

これは  $R^n$  上に単連結な開集合  $U$  があれば  $U$  上の 1 次閉形式は全て完全形式である。この時  $\omega$  は閉形式であり

$$c_i: [0, 1] \rightarrow U = R^n, i = 0, 1$$

とおいて

$$h(s, t) = (1-s)c_0(t) + sc_1(t) \quad (5.6)$$

とおけば  $c_0, c_1$  はホモトピーであり式 5.4 が成り立つ。

この式について、 $c_0, c_1$  に具体的な関数  $\cos, \sin$  を用意して見る。

$$h(s, t) = (1-s)\cos[\pi t] + s\sin[\pi t] \quad (5.7)$$

としよう。この  $h$  を高さ軸にして、横軸に  $s, t$  を選べば次のような 3 次元グラフが描ける。

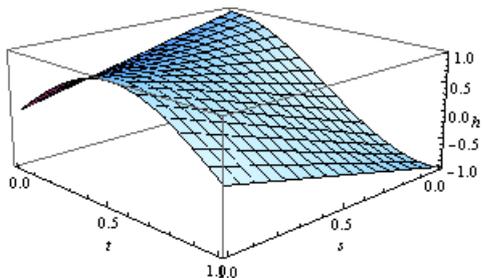


図 5.13:  $h(s, t) = (1 - s) \cos[\pi t] + s \sin[\pi t]$  のグラフ

このグラフでは  $t=1, s=1$  での断面と共に  $t=0, s=0$  からの連続的な変化が得られる。端点は共に曲面上にあるので共通していることがわかる。さらに次のように一方のパラメタを  $i$  として固定し、もう一つのパラメタを変化させ、関数の変化を足しあげる関数を定義しよう。

$$\begin{aligned} Hs(i) &= \int_0^1 h(s, i) ds = \frac{1}{2} (\cos i\pi + \sin i\pi) \\ Ht(i) &= \int_0^1 h(i, t) dt = \frac{2i}{\pi} \end{aligned} \tag{5.8}$$

これは次のようなグラフになる。

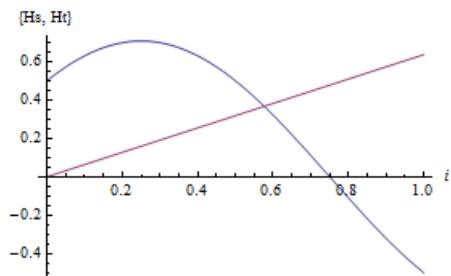


図 5.14:  $Hs$ (曲線)、 $Ht$  (直線) のグラフ、必ず交点が  $[0,1]$  の中にある

さらに  $Hs, Ht$  について  $i$  について積分すると

$$\begin{aligned} \int_0^1 Hs(i) di &= \frac{1}{\pi} \\ \int_0^1 Ht(i) di &= \frac{1}{\pi} \end{aligned}$$

であり、式 5.8 は積分を通してみれば同じものであることがわかる。

基本群によって位相空間  $X$  がループのホモトピー類をつくることを見たが、 $X$  には球面も、トーラスも様々な多様体をとれる。

高次の球面  $S^n$ , ( $n \geq 2$ ) のホモトピー類からなる集合は基本群と同様に群をつくる。

$X$  は位相空間とする。次元を単純に拡大できるものとして次の例がある。

- $n$  次元立方体

$n$  次元立方体は  $I^n = [0, 1]^n$  で定義される。 $[p, X]$  と  $[I^n, X]$  の間に自然な全単射な写像である。

- $n$  次元球面

非負整数  $n$  に対し、 $S^n = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{n+1} \mid \|\mathbf{x}\| = 1\}$  を  $n$  次元球面で表す。

$n$  次元球面から位相空間  $X$  への写像は定値写像とホモトピックである。

これは  $n$  次元球面  $S^n$  が  $n+1$  次元円板  $D^{n+1} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{n+1} \mid \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$  の境界と考えると

$$S^n = \partial D^{n+1}$$

が成り立つ。

## 5.4 変形計算

### 5.4.1 垂直・水平合成 [36]

写像  $F$  とホモトープな  $c_1, c_2$  の関係を次のような図式で表す。式 5.3 を満たす

$$F(s, t) = c(t)$$

を図式

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{c_1} \\ \Downarrow F \\ \xrightarrow{c_2} \end{array}$$

とする。この表現は次のように拡張できる。

垂直合成

例えば  $G$  が  $c_2$  から  $c_3$  へのホモトピーで

$$G(s, t) = F(1-s, t)$$

があり、さらに  $c_1$  から  $c_2$  へのホモトピー  $H(s, t)$  が

$$H(s, t) \begin{cases} F(2s, t) & (0 \leq s \leq \frac{1}{2}) \\ G(2s-1, t) & (\frac{1}{2} \leq s \leq 1) \end{cases}$$

存在する。この場合の表現が

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{c_1} \\ \Downarrow F \\ \Downarrow H \xrightarrow{c_2} \\ \Downarrow G \\ \xrightarrow{c_3} \end{array}$$

となる。これは

$$c_1 \sim c_2 \sim c_3$$

というホモトピーの関係を垂直に合成している。

このように図に表すとホモトピーの合成の様子がわかりやすい。これを図式表現という。

これらは前節 4.2 の道の積を表現していることにもなる。

### 5.4.2 演算

#### 定義 57. ホモトピーの積

従ってホモトピー類の積を道の積 4.5 の  $\alpha * \beta$  を利用して次のように定義する。

$$[\alpha] \cdot [\beta] := [\alpha \cdot \beta]$$

と定義すれば次のように水平合成として図式表現できる。

$$\begin{array}{ccc} \xrightarrow{\alpha} & \cdot & \xrightarrow{\beta} \\ F \Downarrow & & G \Downarrow \\ \xrightarrow{\alpha'} & \cdot & \xrightarrow{\beta'} \end{array} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha \cdot \beta} \\ H \Downarrow \\ \xrightarrow{\alpha' \cdot \beta'} \end{array}$$

図 5.15: [36] より : 水平合成

ホモトピー類の逆 前節で道の逆を、逆行列としてではなく式 4.4 のように定義した。ホモトピー類の逆も次のように定義できる。

#### 定義 58. ホモトピー類の逆

$$[\alpha]^{-1} := [\alpha^{-1}]$$

例えば  $\alpha(0) = x_0, \alpha(1) = x_1$  と決めば

$$\alpha \cdot \alpha^{-1} \sim e_{x_0}$$

$$\alpha^{-1} \cdot \alpha \sim e_{x_1}$$

が成り立つ。

そこで道  $\alpha$  を行って戻ってくるというループを考えて、上の式を図にしてみると次のようになる。  
 $s, t$  共にインターバル区間を持ち、上辺に経路  $\alpha \cdot \alpha^{-1}$  が描かれ、下辺が定点ループの  $e_{x_0}$  になっている。

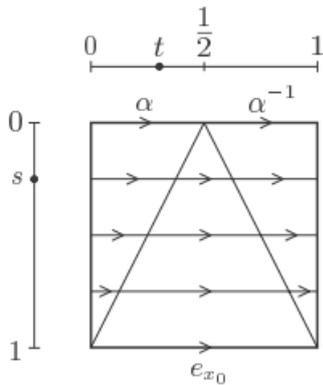


図 5.16: [36] より : 単位元に戻るホモトピー

この図を式にすると、 $\alpha \cdot \alpha^{-1}$  から  $e_{x_0}$  へのホモトピーを表す写像は

$$F(s, t) \begin{cases} \alpha(2t) & (0 \leq t \leq \frac{1}{2}(1-s)) \\ \alpha(1-s) & (\frac{1}{2}(1-s) \leq t \leq \frac{1}{2}(1+s)) \\ \alpha(2-2t) & (\frac{1}{2}(1+s) \leq t \leq 1) \end{cases}$$

となる。  
 さらに次の変形を考えてみよう。

$$e_{x_0} \cdot \alpha \sim \alpha$$

$$\alpha \cdot e_{x_0} \sim \alpha$$

この時の図は下のようになる。

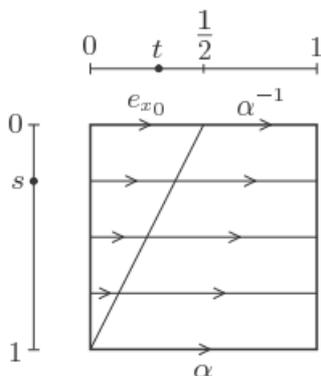


図 5.17: [36] より：単位元のかかるホモトピー

この図から次の関係式が作られる。

$$F(s, t) \begin{cases} \alpha(0) & (0 \leq t \leq \frac{1}{2}(1-s)) \\ \alpha\left(\frac{2}{1+s}\left(t - \frac{1}{2}(1-s)\right)\right) & (\frac{1}{2}(1+s) \leq t \leq 1) \end{cases}$$

道の積の場合に式 4.6 で見たように、結合律が成り立たないことをみたが、ホモトピーの場合は等しくなる必要はないのでホモトピックになる。これを見るために次のような 3 つの積を考える。

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma \sim \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$$

この関係は次の図のようになる。道のところで見たように時間配分が上の辺と下の辺で異なっていることがわかる。

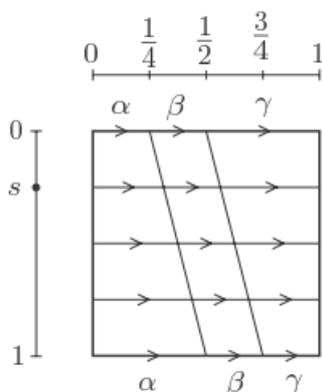


図 5.18: [36] より：3 つの積のホモトピー

これを式で表すのには、まず、道の場合の式 4.7, 4.8 を参考にして

$$((\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma)(t) = \begin{cases} \alpha(4t) & (0 \leq t \leq \frac{1}{4}) \\ \beta(4t-1) & (\frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2}) \\ \gamma(2t-1) & (\frac{1}{2} \leq t \leq 1) \end{cases}$$

$$(\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma))(t) = \begin{cases} \alpha(\frac{4t}{1+s}) & (0 \leq t \leq \frac{1}{2}) \\ \beta(4t-2) & (\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4}) \\ \gamma(4t-3) & (\frac{3}{4} \leq t \leq 1) \end{cases}$$

と表すことができるので  $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$  から  $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$  へのホモトピーが

$$F(s, t) = \begin{cases} \alpha(\frac{4t}{1+s}) & (0 \leq t \leq \frac{1}{4}(1+s)) \\ \beta(4t-1-s) & (\frac{1}{4}(1+s) \leq t \leq \frac{1}{4}(2+s)) \\ \gamma(\frac{4t-2-s}{2-s}) & (\frac{1}{4}(2+s) \leq t \leq 1) \end{cases}$$

と表すことができる。つまり、道とはことなり、結合律はホモトピーで成立する。

## 5.5 図式表現

### 5.5.1 可換図式

アーベル群と同様に鎖複体の間にも準同型の列がある。この列を表すのに便利なのが図式表現である。

#### 定義 59. 鎖準同型写像

2つの鎖複体

$$G_* := \{G_n, \partial_i\}_{i=0}^n, \quad G'_* := \{G'_n, \partial'_i\}_{i=0}^n$$

があり、準同型写像の列

$$\phi_i : G_i \rightarrow G'_i \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n)$$

を考える。全ての  $i \leq i \leq n$  について、次の関係が成り立つ時、

$$\phi_{i-1} \circ \partial_i = \partial'_i \circ \phi_i : G_i \rightarrow G'_{i-1}$$

$\phi_* := \{\phi_i\}_{i=0}^n$  を  $G_*$  から  $G'_*$  への鎖準同型写像といい、次のような図式が成り立つ。

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \xrightarrow{\partial_{i+2}} & G_{i+1} & \xrightarrow{\partial_{i+1}} & G_i & \xrightarrow{\partial_i} & G_{i-1} & \xrightarrow{\partial_{i-1}} & \cdots \\ & \circlearrowleft & \downarrow \varphi_{i+1} & \circlearrowright & \downarrow \varphi_i & \circlearrowleft & \downarrow \varphi_{i-1} & \circlearrowright & \\ \cdots & \xrightarrow{\partial'_{i+2}} & G'_{i+1} & \xrightarrow{\partial'_{i+1}} & G'_i & \xrightarrow{\partial'_i} & G'_{i-1} & \xrightarrow{\partial'_{i-1}} & \cdots \end{array}$$

図 5.19: [108] より：鎖準同型写像の図式表現

図の中の和の矢印はその周りの長方形に現れる 2通りの準同型写像の合成が一致することを表す。このように 2通りの合成が一致することを示した式を可換図式という。

## 6 ホモロジー群

前節のホモトピー類により、距離の定義のない、連続的な変形によって、図形や群を分類していく方法を見た。

これらはある規則で演算すると位相的に不変になるものがあることをが見つかる。これが極めて物理において重要な視野を拡大することにつながっていることが発見されてきた。こお不変になるものを簡単な整数  $\mathbb{Z}$  を用いて分類するのが、ホモロジー群である。

### 6.1 定義 [36]

既に前章で位相不変をつくるためにホモロジーを定義したがここでまとめておく。

第1章で輪体  $Z_p(K)$  と境界輪体  $B_p(K)$  との関係として

$$Z_p(K) \supset B_p(K)$$

の関係が成りたち、輪体と、境界輪体は境界演算子の核と像になるものとして次のように定義した。

$$\begin{aligned} Z_p(K) &= \ker \partial_p \\ B_p(K) &= \text{Im} \partial_{p+1} \end{aligned} \tag{6.1}$$

そこで  $q$  次元サイクルを輪体としてここでは次のように表す。

$$Z_q(C_*) = \{z \in C_q \mid \partial_q(z) = 0\}$$

簡単には変形して閉じた輪となるものである。

同様に  $q+1$  次元鎖体  $c \in C_{q+1}$  の境界として得られる

$$b = \partial_{q+1}(c)$$

を  $q$  次元境界サイクルといいその全体を

$$B_q(C_*) = \{c \in C_{q+1} \mid \partial_{q+1}(c) \in C_q\}$$

で表す。  $b \in B_q(C_*)$ ,  $b = \partial_{q+1}(c)$  ならば

$$\partial_q(b) = \partial_q(\partial_{q+1}(c)) = 0$$

だから  $b$  は  $Z_q(C_*)$  に属する。よって

$$C_p \supset Z_q(C_*) \supset B_q(C_*)$$

であり、 $Z_q(C_*)$  は  $C_p$  の部分加群であり、 $B_q(C_*)$  は  $Z_q(C_*)$  の部分加群になっている。

従って  $q$  次元ホモロジー群  $H_q(C_*)$  は商群として

$$H_q(C_*) \equiv \frac{Z_q(C_*)}{B_q(C_*)} = \frac{\ker \partial_q}{\text{Im} \partial_{q+1}} \tag{6.2}$$

とかける。慣れないと理解しにくい表現かもしれないが輪に変形できる多次元の面の境界面を同一視したものである。

また、2つの  $q$  次元サイクル  $z_1, z_2$  があるとき、この差  $z_1 - z_2$  がある  $q+1$  次元鎖体の境界になっているとき  $z_1$  と  $z_2$  はホモログスといい

$$[z_1] = [z_2]$$

といった。つまり、

$$[z_1] = [z_2] \Leftrightarrow z_1 - z_2 = \partial_p(c \in C_{q+1})$$

第2章の単体のところでみたように複体  $C_*$  は位相多様体  $X$  の単体分割の方法で多様なものがつくれる。同時に  $Z_q(C_*)$  や  $B_q(C_*)$  も変化する。

しかし重要なのはいかなる分割方法をとってみても、いかに  $Z_q(C_*)$  や  $B_q(C_*)$  が変化しようとも、次の商群は不変である。

$$H_q(C_*) = \frac{Z_q(C_*)}{B_q(C_*)}$$

これがホモロジー群を用いる利点である。そこで  $H_q(C_*)$  が単体分割によって定まる  $C_*$  に依存しないので  $\mathbb{Z}$  を整数として

$$H_q(X, \mathbb{Z})$$

と書いても問題がない。

## 6.2 意味

ホモロジーが単に商群として定義されるのではなく、その意味について考えてみる。

はじめに、ホモロジー群を次の鎖加群の準同型写像の系列から考えてみよう。

$$\cdots \rightarrow C_{n+1}(K) \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n(K) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(K) \rightarrow$$

これは

$$\partial_n \circ \partial_{n+1}(c) = 0, \quad (c \in C_{n+1}(K)) \tag{6.3}$$

を満たすので、自動的に

$$\text{Im} \partial_{n+1} \subset \ker \partial_n$$

をみtas。よって  $Z_n(K) \supset B_n(K)$  であるわけだ。

このとき、

$$Z_p(K) = B_p(K)$$

なのか、どうかという判定を商加群

$$H_n(K) = \frac{Z_n(K)}{B_n(K)}$$

が  $\{0\}$  か否かにかかる。式の商のイメージよりも実際には差であることに留意がいる。

つまり次の図でみるように  $\text{Im} \partial_{n+1}$  である  $B_n(K)$  より  $\ker \partial_n$  である  $Z_n(K)$  がどれだけ大きいかという差がホモロジー群であるとみなせる。

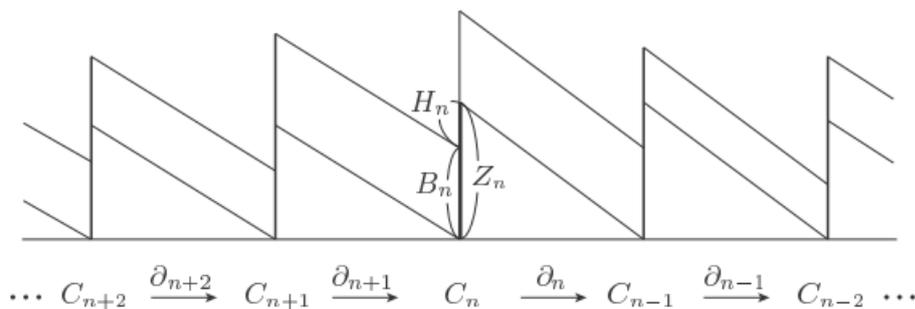


図 6.1: [36] より：鎖複体の図式によるホモロジーの関係

境界作用素  $\partial_{n+1}$  が次の境界作用素  $\partial_n$  の核の中に入っていて、この核  $\ker \partial_n$  から像  $\text{Im} \partial_{n+1}$  を引いた部分が  $H_n(K)$  であり、

これから差である。  $H_n(K)$  が  $\{0\}$  となれば完全系列になるのがわかる。

これは次の図のように輪体で考えると式 6.3 は

$$z' - z = \partial_{n+1}c, \quad (c \in C_{n+1}(K)) \tag{6.4}$$

となることで図の 2 つの境界は同じ向きのループであり、

$$\partial_{n+1}c = z' + (-z)$$

となる鎖が間にあることを示している。このとき  $z$  と  $z'$  はホモロークで

$$z \sim z'$$

とできる。

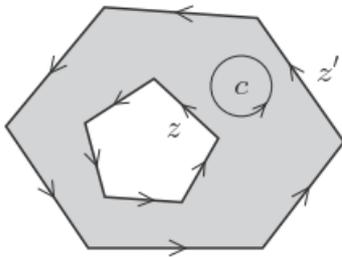


図 6.2: [36] より :  $\partial_{n+1}c = z' + (-z)$

この時  $z$  の向きが反対の時は  $z'$  を反対にだどることと同じなので  $\{0\}$  になる。

前節で次の円板  $\sigma$  と円周  $\alpha$  の違いを見た。

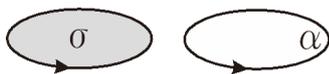


図 6.3:  $\partial\sigma = \alpha$  の関係を表す、 $\partial\alpha = 0$  である。

境界演算子を  $\partial$  で表す。次のように 2 次元図形  $\sigma$  の境界は 1 次元図形になる。

$$\partial\sigma = \alpha$$

しかし、1 次元の曲線には境界がない。

$$\partial\alpha = 0$$

つまり、境界の境界が逆向きを  $z^{-1}$  で表した時、

$$z \sim z^{-1}$$

に対応することになる。

### 6.3 基礎計算

はじめに以下で基礎的な計算例を見ておく。

鎖複体  $F_* := \{F_i, \partial_i\}_{i=0}^2$  を次のように表す。

$$F_2 := \langle \langle x | - \rangle \rangle, F_1 := \langle \langle y_1, y_2 | - \rangle \rangle, F_0 := \langle \langle z | - \rangle \rangle$$

また、関係  $\partial_1$  と  $\partial_2$  は

$$\partial_1 : Q = (4, 2)$$

$$\partial_2 : P = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix}$$

で定まる写像とすると、完全系列は

$$\{0\} \rightarrow^0 \mathbb{Z} \xrightarrow{P} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{Q} \mathbb{Z} \rightarrow^0 \{0\}$$

となる。これは  $\partial_2(x) = 4y_1 - 8y_2$  であり、

$$\begin{cases} \partial_1(y_1) = 4z \\ \partial_1(y_2) = 2z \end{cases}$$

も満たすことになる。よって  $QP = 0$  は

$$\partial_1(\partial_2(x)) = \partial_1(4y_1 - 8y_2) = 4 \times (4z) - 8 \times (2z) = 0 \quad (6.5)$$

となる。このホモロジーは次のように求める。

・  $H_0$  の場合

$$Z_0(F_*) = \ker(\partial_0) = F_0 \simeq \mathbb{Z}$$

また式 6.5 があるので

$$\begin{aligned} B_0(F_*) &= \text{Im}(\partial_1) = \{\partial_1(a_1y_1 + a_2y_2) \mid a_1, a_2 \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{(4a_1 + 2a_2)z = 0 \mid a_1, a_2 \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{2az \mid a \in \mathbb{Z}\} \simeq 2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z} \end{aligned}$$

となるので

$$H_0(F_*) \simeq \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$$

である。

・  $H_1$  の場合

この時、まず輪体群は

$$\begin{aligned} Z_1(F_*) &= \ker(\partial_1) \\ &= \{a_1y_1 + a_2y_2 \mid \partial_1(a_1y_1 + a_2y_2) = 0\} \\ &= \{a_1y_1 + a_2y_2 \mid (4a_1 + 2a_2)z = 0\} \\ &= \{a_1y_1 + a_2y_2 \mid (2a_1 + a_2)z = 0\} \\ &= \{a_1(y_1 - 2y_2) \mid a_1 \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

また、境界輪体群は  $\partial_2(x) = 4y_1 - 8y_2$  だったから

$$\begin{aligned} B_1(F_*) &= \text{Im}(\partial_2) \\ &= \{\partial_2(bx) | b \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{b(4y_1 - 8y_2) | b \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{4b(y_1 - 2y_2) | b \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

となる。よって商群をとると  $(y_1 - 2y_2)$  が共通しているので消えて、

$$H_1(F_*) \simeq \frac{a_1}{4b} \simeq \frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}}$$

となる。最後に

$H_2$  の場合

この場合は  $\partial_2(x) = 4y_1 - 8y_2$  だったから

$$\begin{aligned} Z_2(F_*) &= \ker(\partial_2) \\ &= \{cx | \partial_2(cx) = 0\} \\ &= \{cx | (4cy_1 - 8cy_2) = 0\} \\ &= \{cx | 4c = 0 \cap -8c = 0\} \\ &= \{0\} \end{aligned}$$

また、明らかに  $\partial_3$  は 0 写像だから

$$B_2(F_*) = \text{Im}(\partial_3) = \{0\}$$

となるので

$$H_2(F_*) \simeq \{0\}$$

となる。

## 6.4 基本群とホモロジー

ここで多面体の基本群を計算するために単体的複体の折線群を位相空間に対応させることを見る。

### 6.4.1 折線群 [12]

$f: |K| \rightarrow X$  を位相空間  $X$  の三角形分割とする。 $X$  内に基本ループがあれば  $|K|$  にも同じループがとれるはずである。

そこで 1 単体の基本集合を考察する。

#### 定義 60. 折線道

単体的複体  $K$  の折線道とは  $|K|$  の頂点の列  $v_0v_1 \cdots v_k$  において隣り合う対  $v_i v_{i+1}$  が 0 単体か、1 単体になるものをいう。特に

$$v_0 = v_k = v$$

のときの折線道を  $v$  における閉折線と呼ぶ。

2 つの折線  $\alpha, \beta$  が同値であるとは次の操作の有限回の合成で一方の閉折線から他方の閉折線が得られることとする。

1. 頂点  $u, v, w$  が  $K$  内にある 2 単体を張る時、下図のように折線道  $uvw$  を  $uw$  で置き換える。またはこの逆。
2.  $u = w$  の時、折線道  $uvw$  はまず  $uw$  に沿っていき、そこで逆に  $v$  から  $w = u$  に戻る。

この時は折線道  $uvw$  を 0 単体  $u$  で置き換える。

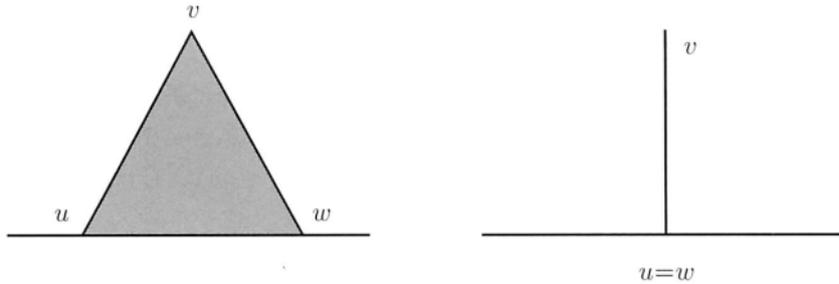


図 6.4: [12] より：折線道  $uvw$  を変形し、 $uw$  に置き換える。

この時、 $v$  における閉折線の同値類で  $vv_1 \cdots v_{k-1}v$  が属するものを

$$\{vv_1 \cdots v_{k-1}v\}$$

で表す。同値類全体の集合の積演算を次で定義する。

$$\{vu_1 \cdots u_{k-1}v\} * \{vv_1 \cdots v_{i-1}v\} \equiv \{vu_1 \cdots u_{k-1}vv_1 \cdots v_{i-1}v\}$$

これは群になり、 $v$  における  $K$  の折線群といい、次のように表現する。

$$E(K; v)$$

ここで重要なのは次の定理である。

$$E(K; v) \simeq \pi_1(|K|, v)$$

つまり、折線群は 1 次元ホモトピー類とみなせる。

さらに  $L$  を  $K$  の部分複体として、次の条件を満たすとする。

- $L$  は  $K$  の全ての頂点 (0-Simplex) を含む
- 多面体  $|L|$  弧状連結かつ単連結である。

### 定義 61. 木 (tree)

弧状連結な単体的複体  $K$  が与えられると、この条件を満たすような部分複体  $L$  が必ず存在し、これを木 (tree) という。

木  $T_M$  が他のどんな木の部分集合にもなっていないならば、これを極大木という。

このような部分複体  $|L|$  は単連結なので  $|L|$  の閉折線が  $E(K; v)$  に寄与しないので  $L$  の単体は必要に応じて無視することが多い。

さらに、この頂点に対応関係をつける。  $v_0, v_1, \dots, v_n$  を  $K$  の頂点とする。

$\langle v_i v_j \rangle$  が  $K$  の 1 単体とすると順序つけられた頂点  $v_i, v_j$  の各対に対してある構造  $g_{ij}$  を対応させる。

この  $g_{ij}$  の全てから生成される群を  $G(K; L)$  で表し、次の条件を満たすとする。

- $L$  の単体は無視してよいので  $\langle v_i v_j \rangle \in L$  の時  $g_{ij} = 1$  とする。
- $\langle v_i v_j v_k \rangle$  が  $K$  の 2 単体ならば  $v_i v_j v_k$  を囲むループが全て自明になるから  $g_{ij} g_{jk} g_{ki} = 1$  とする。

これにより、生成元  $\{g_{ij}\}$  との関係の集合が群  $G(K; L)$  を完全に決定する。よって次の定理が成り立つ。

**定理 15. 折線群**

$G(K; L)$  は  $E(K; L) \simeq \pi_1(|K|, v)$  に同型である。つまり折線群は 1 次元ホモトピー類とみなせる。

実際に計算する時には次の規則が有用である。

1. 最初に三角形分割  $f: |K| \rightarrow X$  を求める。
2. 弧状連結かつ単連結で  $K$  のすべての頂点を含むような部分複体  $L$  を求める。
3. 各 1 単体  $\langle v_i v_j \rangle \in K - L$  で  $i < j$  であるようなものに生成元  $g_{ij}$  を対応させる。
4.  $i < j < k$  であるような 2 単体  $\langle v_i v_j v_k \rangle$  があれば関係  $g_{ij} g_{jk} = g_{ik}$  を含める。これらの頂点の内 2 つが 1 単体になっていれば対応する生成元を 1 とする。
5. 上で定められた関係をもつ  $\{g_{ij}\}$  によって生成される群  $G(K; L)$  は求める  $\pi_1(X)$  に同型である。

例えば  $E(K; v)$  も  $G(K; L)$  も  $K$  の 0, 1, 2 単体のみから決まる。この  $K$  の 0, 1, 2 単体のみから決まる集合は  $K^{(2)}$  と表す。

これを  $K$  の 2-切片という。

**定理 16.** この時、次の 2 切片定理が成り立つ。

$$\pi_1(|K|) \simeq \pi_1(|K^{(2)}|)$$

が成り立つ。これは次のように有用である。

3 単体を球体  $D^3$  の多面体  $|K|$  とする。この境界は球面  $S^2$  の多面体である。  
 $D^3$  は可縮だから

$$\pi_1(|K|) = \{e\}$$

となることがわかれば、先の 2 切片定理より

$$\pi_1(S^2) \simeq \pi_1(|K|) = \{e\}$$

とできる。これを一般化すると  $n \geq 2$  に対して  $(n+1)$  単体  $\sigma_{n+1}$  とその境界は同じ 2 切片をもつ。  
 $\sigma_{n+1}$  は可縮で、その境界は球面になる

$$\partial(\sigma_{n+1}) = S^2$$

よって

$$\pi_1(S^n) \simeq \{e\}, (n \geq 2)$$

という公式が示された。

**6.4.2 多角形**

これを次のように使う。次のような  $S^1$  の単体的複体を考える。一般的な  $S^1$  のホモロジーは後に計算する。

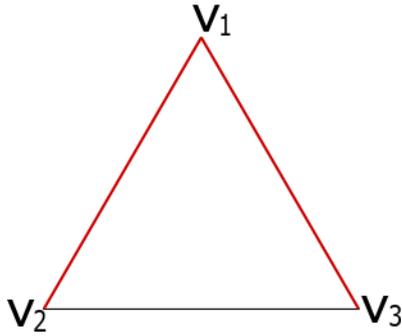


図 6.5: 赤線部分が極大木になる。

ここでは  $\{g_{ij}\}$  によって生成される群  $G(K; L)$  が  $\pi_1(X)$  に同型になることを用いれば、まず

$$K \equiv \{v_1, v_2, v_3, \langle v_1 v_2 \rangle, \langle v_1 v_3 \rangle, \langle v_2 v_3 \rangle\}$$

として、 $v_1$  を基点に極大木を探すと、上図の赤線のように線分を 1 つはずした。

$$L = \{v_1, v_2, v_3, \langle v_1 v_2 \rangle, \langle v_1 v_3 \rangle\}$$

を選ばばよい。この時の生成元は

$$g_{23} = g_{21}g_{13}$$

となるので結局  $g_{23}$  の 1 つしかない。一方で  $K$  には 2 単位しかないので次が成り立つ。

$$\pi_1(S^1) \simeq G(K; L) = (g_{23}; \emptyset) \simeq \mathbb{Z}$$

となる。

次にこの多角形の中身をつめた 2 次元板にし、これを  $D^2$  とする。この三角形分割を  $|K|$  とするとこの  $K$  自身が  $L$  になるので

$$K - L \simeq \{\emptyset\}$$

となる。これからすぐに

$$\pi_1(|K|) = \{e\}$$

となる。

### 6.4.3 ブーケ

次に図のような  $n$  個の円周を 1 点で接着した図形を  $n$  ブーケという。下図は 3-ブーケの三角形分割を表す。

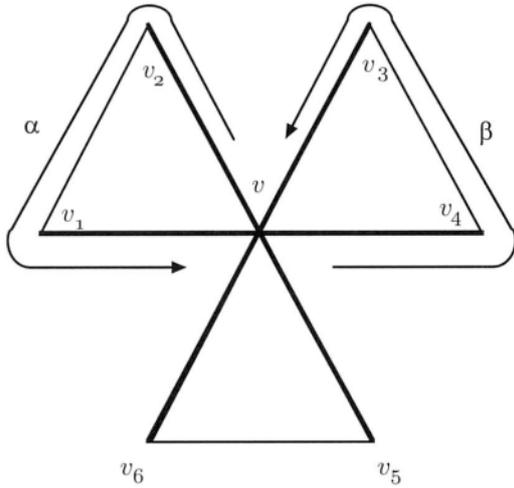


図 6.6: [12] より : 3-ブーケ ; 太線が極大木になる。

$v$  を基点にすると極大木は図の太線部分なので

$$\{vv_1, vv_2, vv_3, vv_4, vv_5, vv_6\}$$

なので生成元を求めると

$$\{g_{12}, g_{34}, g_{56}\}$$

しかないことが図からわかる。よってこれらの関係が  $\{\emptyset\}$  だから

$$\pi_1(3bouquet) = G(K; L) = (x, y, z; \emptyset)$$

である。これは自由群でも可換ではない。これは  $v$  を基点としたループを上図のように  $\alpha, \beta$  とすると

$$\alpha * \beta * \alpha^{-1} \approx \beta$$

となるので

$$[\alpha] \cdot [\beta] \neq [\beta] \cdot [\alpha]$$

となることから図形的にも確認できる。

一般に  $n$  ブーケには  $n$  個の生成群

$$\{g_{12}, \dots, g_{2n-1, 2n}\}$$

を持ち、基本群は関係が空の  $n$  個の生成群をもつ自由群と同型になる。

#### 6.4.4 トーラス

この方法でトーラス  $T^2$  も計算してみよう。  $T^2$  の三角形分割が次の図のようになる。

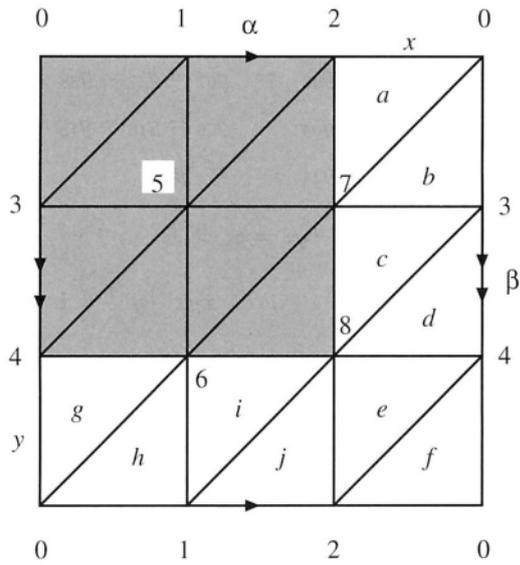


図 6.7: [12] より : トーラスの三角形分割

この場合の極大木は斜線部分の部分複体でこれを  $L$  とする。

生成元を書き出すために  $x = g_{02}, y = g_{04}$  とする。立体的につなげると次の関係がある。

- 1)  $g_{02}g_{27} = g_{07} \rightarrow xg_{27} = x$
- 2)  $g_{03}g_{37} = g_{07} \rightarrow g_{37} = y$
- 3)  $g_{37}g_{78} = g_{38} \rightarrow g_{38} = y$
- 4)  $g_{34}g_{48} = g_{38} \rightarrow g_{48} = y$
- 5)  $g_{24}g_{48} = g_{28} \rightarrow g_{24}x = g_{28}$
- 6)  $g_{02}g_{24} = g_{04} \rightarrow xg_{24} = y$
- 7)  $g_{04}g_{46} = g_{06} \rightarrow g_{06} = y$
- 8)  $g_{01}g_{16} = g_{06} \rightarrow g_{01}y = y$
- 9)  $g_{16}g_{68} = g_{18} \rightarrow yg_{68} = y$
- 10)  $g_{12}g_{28} = g_{18} \rightarrow g_{12}y = y$

となる。6) から

$$g_{24} = x^{-1}y$$

となるので 5) に代入すると

$$x^{-1}yx = g_{28} = y$$

となるので結局

$$xy = yx$$

または

$$xyx^{-1}y^{-1} = 1$$

という関係があることがわかる。これは  $G(K; L)$  は 2 つの可換な生成元からなることを示す。よって

$$G(K; L) = (x, y; xyx^{-1}y^{-1}) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

これは前節のトーラス基本群 4.12 に一致する。

さらに穴の数を  $g$  として  $\mathbb{R}^2$  のある部分集合の境界を貼り付けてつくる  $\Sigma_g$  の多様体には基本群として  $2g$  個のループがあった。

例えば  $T^2$  の場合は  $g = 1$  なので次の図のように基点を  $v$  とした 2 つの  $\alpha, \beta$  のループがある。

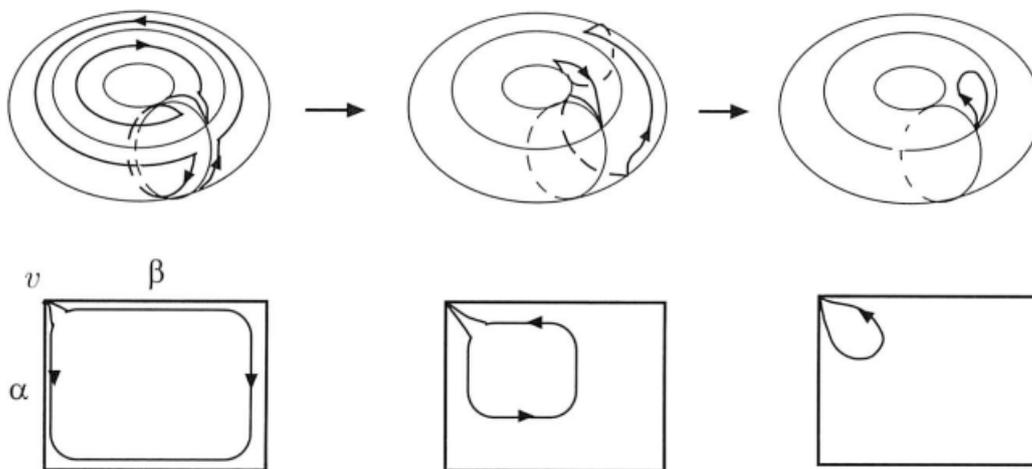


図 6.8: [12] より：トーラス上の独立した 2 つのループ  $\alpha, \beta$

先の場合ではループ  $\alpha$  をとれば

$$g_{12} = g_{01} = 1$$

とつぶせて、 $x = g_{02}$  と同一視できる。同様にループ  $\beta$  をとれば

$$g_{03} = g_{34} = 1$$

とつぶせて、 $y = g_{04}$  と同一視できる。

一般には次のように定数ループ  $c_v$  と同じになる。

$$\prod_{i=1}^g (\alpha_i \cdot \beta_i \cdot \alpha_i^{-1} \cdot \beta_i^{-1}) \sim c_v$$

よってこれはホモロジーの関係にして次の 1 つがあるだけになる。

$$\prod_{i=1}^g (x_i y_i x_i^{-1} y_i^{-1}) = 1$$

#### 6.4.5 ホモロジーと基本群

ここまでの例をみても、1 次ホモロジー群  $H_1(K)$  と基本群  $\pi_1(|K|)$  には類似性がある。

少なくとも、円、円板、 $n$  次元球面、トーラスをみてきた限り、基本群と 1 次元ホモロジー群は一致する。

しかし、例えば 2-ブーケの  $H_1 \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  となるが、 $\pi_1 = (x, y, \emptyset)$  となる。 $H_1$  は自由加群だが、 $\pi_1$  は自由群である。

一般に  $H_1(K)$  と  $\pi(|K|)$  との間には次の関係がある。

$K$  を連結な単体的複体とする。この時、

$$H_1(K) \simeq \pi_1(|K|)/F$$

となる。ただし  $F$  は  $\pi(|K|)$  の交換子部分群である。

交換子部分群  $F$  とは群  $G(x_i; r_m)$  があるとき、次の元から生成される群である。

$$x_i x_j x^{-1} x_j^{-1}$$

従って  $G/F$  は  $\{x_i\}$  から生成される群で、関係の集合が  $\{r_m\}$  と  $\{x_i x_j x^{-1} x_j^{-1}\}$  の2つを持つ。この時、次の定理が成り立つ。

$$\pi_1(|K|) \simeq (x_i; r_m) \rightarrow H_1(K) \simeq (x_i; r_m, x_i x_j x^{-1} x_j^{-1})$$

例えば

$$\pi_1(2bouquet)/F \simeq (x, y; xyx^{-1}) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

が得られ、これは  $H_1(2bouquet)$  と同型である。

## 6.5 計算準備

ホモロジー類の計算方法はまさに多種多様である。その計算方法は今も尚、新しく生まれつつある。ここでその有用な方法と基礎知識をまとめておこう。

### 6.5.1 マイヤービートリス完全系列

これまでに見たように、さらに複雑になるとホモロジー群の実計算は遠慮したくなる。しかし、特異ホモロジー群にはと呼ばれるものがあり、この時の計算簡単になる。

#### 定義 62. 完全系列

$V_i (i \in \mathbb{Z})$  を加群とし、その準同型写像からなる次の系列がある時、前節の式 2.12 の境界作用素のように

$$\cdots V_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} V_i \xrightarrow{f_i} V_{i-1} \cdots \quad (6.6)$$

次が成り立てば完全系列であるという。

$$\begin{aligned} \{f_{i+1}(x) | x \in V_{i+1}\} &= \{y \in V_i | f_i(y) = 0\} \\ \text{Im } f_{i+1} &= \ker f_i \end{aligned} \quad (6.7)$$

が成り立てばよい。

この左辺が  $f_{i+1}$  の像で右辺は  $f_i$  の核である。ホモロジーが式 6.1 から

$$H_q(X, \mathbb{Z}) = \frac{Z_q(X)}{B_q(X)} = \frac{\ker \partial_q}{\text{Im } \partial_{q+1}}$$

であるので完全系列であればホモロジーが計算できる。

その1つがマイヤービートリス完全系列である。

単体的複体  $K$  が

$$K = K_1 \cup K_2$$

で表されているとする。つまり、 $K_1 \cap K_2$  が  $K_1$  および  $K_2$  の部分複体で、 $K_1, K_2$  はともに  $K = K_1 \cup K_2$  の部分複体である。

これを可換図式で表すと次のようになる。

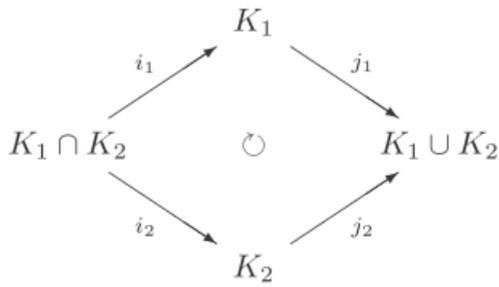


図 6.9: [108] より : マイヤー・ビートリス完全系列

マイヤー・ビートリス完全系列

ホモロジー群  $H_n(K_1 \cup K_2), H_n(K_1), H_n(K_2), H_n(K_1 \cap K_2)$  の間に次の完全系列が存在する。

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow H_{n+1}(K_1 \cup K_2) \\ \xrightarrow{\delta_{n+1}} H(K_1 \cap K_2) \xrightarrow{(i_{1*}, i_{2*})} H_n(K_1) \oplus H_n(K_2) \xrightarrow{j_{1*} - j_{2*}} H_n(K_1 \cup K_2) \\ \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(K_1 \cap K_2) \xrightarrow{(i_{1*}, i_{2*})} H_{n-1}(K_1) \oplus H_{n-1}(K_2) \xrightarrow{j_{1*} - j_{2*}} H_{n-1}(K_1 \cup K_2) \\ \cdots \end{aligned}$$

ただし、包含写像を次のようにおいた。

$$i_1 : K_1 \cap K_2 \hookrightarrow K_1$$

$$i_2 : K_1 \cap K_2 \hookrightarrow K_2$$

$$j_1 : K_1 \hookrightarrow K_1 \cup K_2$$

$$j_2 : K_2 \hookrightarrow K_1 \cup K_2$$

証明は文献 [108] にある。

例えば位相空間  $X$  が和集合

$$X = U \cup V$$

で与えているとすると、この系列は次のようになる。和と共有部分の置き換えに注意する。

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow H_{q+1}(U \cap V) \rightarrow H_{q+1}(U) \oplus H_{q+1}(V) \rightarrow H_{q+1}(U \cup V) \\ \rightarrow H_q(U \cap V) \rightarrow H_q(U) \oplus H_q(V) \rightarrow H_q(U \cup V) \rightarrow \cdots \\ \rightarrow H_1(U \cap V) \rightarrow H_1(U) \oplus H_1(V) \rightarrow H_1(U \cup V) \\ \rightarrow H_0(U \cap V) \rightarrow H_0(U) \oplus H_0(V) \rightarrow H_0(U \cup V) \\ \rightarrow 0 \end{aligned}$$

何か暗号のようにも見えるが第 2 部であつかった立体写像をつかって球面を表現することを例に考えてみる。  
 $n$  次元球面

$$S^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$$

のホモロジー群を考えよう。先に  $n = 1$  について求めたので帰納法を使えば  $n \geq 2$  の場合について示せばよい。

球面を次の2つの領域、北半球、南半球に分割する。

$$U = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in S^n \mid x_{n+1} \geq 0\}$$

$$V = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in S^n \mid x_{n+1} \leq 0\}$$

この時、例えば円周と球面のように次の関係あることに注意する。

$$S^n = U \cup V, S^{n-1} = U \cap V$$

さらに  $U, V$  は一点に可縮だから1点とホモトピーであり

$$H_q(U) = H_q(V) = \begin{cases} \mathbb{Z} & (q = 0) \\ 0 & (q \neq 0) \end{cases}$$

$$H_q(U \cap V) = H_q(S^{n-1}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & (q = 0, q = n-1) \\ 0 & (q \neq 0, q \neq n-1) \end{cases}$$

となるのでマイヤー・ヴィートリス完全系列から

$$H_q(U) \oplus H_q(V) \rightarrow H_q(U \cup V) \rightarrow H_{q-1}(U \cap V) \rightarrow H_{q-1}(U) \oplus H_{q-1}(V)$$

の部分に注目すると  $q \geq 2$  の時に

$$0 \rightarrow H_q(S^n) \rightarrow H_{q-1}(S^{n-1}) \rightarrow 0$$

となるので、これから

$$H_q(S^n) = H_{q-1}(S^{n-1})$$

である。よって

$$H_q(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & (q = 0) \\ 0 & (q \neq 0) \end{cases}$$

になる。つまり、 $n$ 次元球は  $n$ に関係なく、同じホモロジー群である。

### 6.5.2 短完全系列 [36]

完全系列の中で最も短いものが短完全系列である。

一般に商加群  $M/N$  が定義され、次の写像

$$p: M \rightarrow M/N, a \rightarrow [a]$$

は全射であり、準同型写像になる。よって

$$\ker p = N, \text{Imp} = M/N$$

が成り立つ。よって、包含写像を  $\iota$  とすると

$$N \xrightarrow{\iota} M \xrightarrow{p} M/N$$

という写像の系列をつくる。

$$p \circ \iota(x) = 0 \quad (x \in N)$$

が成り立ち、

$$\text{Im} \iota \subset \ker p$$

となるが

$$\text{Im} \iota = \ker p$$

となるので、一般に

**定義 63. 短完全系列**

$$M_1 \xrightarrow{\phi_1} M_2 \xrightarrow{\phi_2} M_3$$

の時に  $\phi_1$  が単射、 $\phi_2$  が全射で

$$\text{Im} \phi_1 = \ker \phi_2$$

であればこれを、**短完全系列 (short exact sequence)** という。

この時は次の図のように単射  $i: N \hookrightarrow M$  によって  $N$  は  $M$  の中にすっぽりおさまり、  
全射  $p: M \rightarrow M/N$  によって  $N$  は完全に 0 につぶれることを表す。また、 $N \subset M$  に対して

$$N = M \Leftrightarrow M/N = \{0\}$$

が必要十分条件であることを示している。

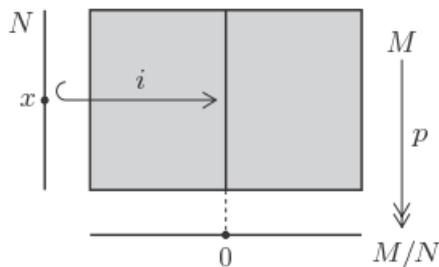


図 6.10: [108] より：縦横の射から商空間が 0 につぶれる様子

### 6.5.3 普遍被覆空間

ある空間のホモトピー群が構造がわかっている別のホモトピー群から求めることができれば便利になる。  
特に位相空間とその**普遍被覆空間**の高次ホモトピーの関係をここでみておく。

**定義 64 (被覆空間).**  $X$  と  $\tilde{X}$  を連結な位相空間とする。連続写像  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  が存在して次の性質を満たせば、

対  $(\tilde{X}, p)$  と書いて、 $\tilde{X}$  を  $X$  の被覆空間という。

1)  $p$  は全射である。

2) 各点  $x \in X$  に対して、 $x$  を含む連結な開集合  $U \subset X$  が存在し、 $p^{-1}(U)$  は  $\tilde{X}$  の中で開集合の非交和となり、

各開集合は写像  $p$  により  $U$  の上に同相写像される。

特に  $\tilde{X}$  が単連結であれば  $(\tilde{X}, p)$  は  $X$  の**普遍被覆空間**と呼ぶ。

### 6.5.4 ポアンカレ予想 [108]

1次元ホモトピー群は位相空間を調べる有用な道具になる。有名なポアンカレ予想にも利用された。 $n$ 次元球を次で定義する。

$$S^n := \left\{ (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^n (x_i)^2 = 1 \right\}$$

この  $S^n$  は  $n+1$ 次元ユークリッド空間の部分空間で後に見るように1次元ホモトピー群は

$$\pi_1(S^n; x_0) = \{[e_{x_0}]\}$$

である。2次元以上の球面では1次元ループは必ず可縮になる。

そこで、この逆を考える。つまり、コンパクトで弧状連結な境界のない多様体  $X$  のホモトピー群が

$$\pi_1(X; x_0) = \{[e_{x_0}]\}$$

を満たせば、 $X$  は  $S^n$  に同相か。という問題である。

つまり、どんなループも連続的に1点につぶせるのは球面上に限るのかという問題である。

これが言えることは、

#### 予想 1. ポアンカレ予想

$n$ 次元 ( $n \geq 2$ ), コンパクト、弧状連結、かつ境界のない多様体  $X$  の1次元ホモトピー群が自明であれば  $X$  は球面に同相である。

が成り立つことになる。 $n=2$ で正しいことは証明され、 $n \geq 5$ の場合を1961年にスモールが示し、 $n=4$ の場合は1982年にフリードマンが証明した。 $n=3$ の倍は2003年にペレルマンが示したが、検証はまだ、途中である。

## 6.6 ホモロジーの計算

### 6.6.1 単体・錐

はじめに錐のホモロジー群を計算してみる。全ての単体的複体は錐になったので、これで単体的複体も計算できることになる。

#### 定理 17. 錐のホモロジー

結論は、錐  $x * K$  のホモロジー群は0次元単体と等しく

$$H_i(x * K) = \begin{cases} \mathbb{Z} & (i = 0) \\ \{0\} & (i > 0) \end{cases}$$

となる。

*Proof.*  $x * K$  の全ての頂点は  $x$  と弧状連結であるから ( $i = 0$ ) の場合はすぐに

$$H_0(x * K) = \mathbb{Z}$$

である。

次の ( $i > 0$ ) の場合の  $H_i(x * K) = \{0\}$  を示すために鎖複体  $\{C_i(x * K), \partial_i\}$  が  $C_i(x * K)$  で完全であればよい。

そこで、 $\partial_i \circ \partial_{i+1} = 0$  であるから式 6.7 から

$$\text{Im}(\partial_{i+1}) \supset \ker(\partial_i) = Z_i(x * K)$$

となることを示せば良い。そこで  $K$  の向きづけられた  $(i-1)$  次元単体を次のようにおく。

$$\langle \sigma^{i-1} \rangle = \langle v_0, v_1, \dots, v_{i-1} \rangle$$

錐の定義から

$$x * \langle \sigma^{i-1} \rangle := \langle x, v_0, v_1, \dots, v_{i-1} \rangle \quad (6.8)$$

とおく。この境界は次のような差の列になる。

$$\begin{aligned} \partial_i (x * \langle \sigma^{i-1} \rangle) &= \langle v_0, v_1, \dots, v_{i-1} \rangle \\ &\quad - \sum_{k=0}^{i-1} (-1)^k \langle x, v_0, v_1, \dots, v_{k-1}, v_{k+1}, \dots, v_{i-1} \rangle \\ &= \langle \sigma^{i-1} \rangle - x * \partial_{i-1} \langle \sigma^{i-1} \rangle \end{aligned} \quad (6.9)$$

ここで  $Z_i(x * K)$  の元を  $c^i$  とすると  $\tau_i$  を  $i$  次元単体、 $\sigma_k$  は  $(i-1)$  次元単体とすれば、輪体は

$$c^i = \sum_{j=1}^l a_j \langle \tau_j \rangle + \sum_{k=1}^m b_k x * \langle \sigma_k \rangle \quad (6.10)$$

と書くことができた。よって式 6.8 から輪体の境界は 0 だから

$$\partial_i c^i = \sum_{j=1}^l a_j \partial_i \langle \tau_j \rangle + \sum_{k=1}^m b_k \langle \sigma_k \rangle - \sum_{k=1}^m b_k x * \partial_{i-1} \langle \sigma_k \rangle = 0$$

となる。また、右辺の最後の和のみに  $x$  が現れているので  $x(\dots) + (\dots) = 0$  とわければ、任意の  $x$  で成り立つためには

$(\dots) = 0$  になる。よって

$$\sum_{j=1}^l a_j \partial_i \langle \tau_j \rangle + \sum_{k=1}^m b_k \langle \sigma_k \rangle = 0$$

となるが、この錐をとれば

$$\sum_{j=1}^l a_j x * \partial_i \langle \tau_j \rangle + \sum_{k=1}^m b_k x * \langle \sigma_k \rangle = 0 \quad (6.11)$$

となる。ここで次は  $(i+1)$  鎖体をつくるから

$$\sum_{j=1}^l a_j x * \partial_i \langle \tau_j \rangle \in C_{i+1}(x * K)$$

とすれば式 6.9 から 6.11 を用いると 6.10 が得られる。

$$\begin{aligned} \partial_{i+1} \left( \sum_{j=1}^l a_j x * \partial_i \langle \tau_j \rangle \right) &= \sum_{j=1}^l a_j \partial_i \langle \tau_j \rangle - \sum_{j=1}^l a_j x * \partial_i \langle \tau_j \rangle \\ &= \sum_{j=1}^l a_j \partial_i \langle \tau_j \rangle + \sum_{k=1}^m b_k x * \langle \sigma_k \rangle \\ &= c^i \end{aligned}$$

つまり

$$c_i = \text{Im}(\partial_{i+1})$$

がなりたつことになる。これは式 6.4 の書き換えでもある。 □

これからただちに次がいえる。

**定理 18.** 単体ホモロジー群

$$H_i(\Delta^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & (i = 0) \\ \{0\} & (i > 0) \end{cases}$$

### 6.6.2 線分

ここから具体的にホモロジーの計算例を示す。

はじめに線分として  $K = \{p_0, p_1, (p_0, p_1)\}$  を考えよう。

線分には穴がない。この時のチェインとして

$$C_0(K) = \{ip_0 + jp_1 \mid i, j \in \mathbb{Z}\} \quad (6.12)$$

$$C_1(K) = \{k(p_0p_1) \mid k \in \mathbb{Z}\} \quad (6.13)$$

さらに  $(p_0p_1)$  は  $K$  のどんな単体の境界になれないから

$$B_1(K) = 0$$

よって分母に 0 がだが、これは 1 に読み替えたので、

$$H_1(K) = \frac{Z_1(K)}{B_1(K)} = Z_1(K) \quad (6.14)$$

ところが式 6.13 から  $z = m(p_0p_1) \in Z_1(K)$  とすると  $B_1(K) = 0$  なので

$$\partial_1 z = m\partial_1(p_0p_1) = m(p_1 - p_0) = 0$$

となる。  $p_1 \neq p_0$  だから  $m = 0$  になることがわかる。これから  $Z_1(K) = 0$  ときまる。これは分子が 0 だから、式 6.14 より

$$H_1(K) = 0$$

である。

次に  $H_0$  を求める。  $Z_0(K) = C_0(K) = \{ip_0 + jp_1\}$  だったから

$$B_0(K) = \text{Im } \partial_1 = \{\partial_1 i(p_0p_1) \mid i \in \mathbb{Z}\} = \{i(p_0 - p_1) \mid i \in \mathbb{Z}\}$$

だから全射準同型写像  $f: Z_0(K) \rightarrow \mathbf{Z}$  を

$$f(ip_0 + jp_1) = i + j$$

とすれば

$$\text{Ker } f = f^{-1}(0) = B_0(K)$$

よって第 2 部の準同型定理より

$$Z_0/\text{Ker } f \simeq \text{Im } f \simeq \mathbb{Z}$$

従って

$$H_0(K) = \frac{Z_0(K)}{B_0(K)} \simeq \mathbb{Z}$$

となる。  $H_0$  は連結であれば  $\mathbb{Z}$  となる。

### 6.6.3 円周

次に円周  $S^1$  の三角形分割を見てみる。 $S^1$  は正多角形  $A_1A_2 \cdots A_n$  の周と同相だったからこれを用いて単体分割する。

正  $n$  角形とすると

$$A_{n+1} = A_1$$

だから第 1 章でみたように、 $n$  本の辺  $\tau_i = \langle A_iA_{i+1} \rangle$  が 1 次元単体、 $n$  個の頂点  $\langle A_i \rangle$  は 0 次元単体である。よって

$$C_1 = \mathbb{Z}\tau_1 \oplus \mathbb{Z}\tau_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\tau_n$$

$$C_0 = \mathbb{Z}\langle A_1 \rangle \oplus \mathbb{Z}\langle A_2 \rangle \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\langle A_n \rangle$$

である。境界作用素は

$$\partial_1(\tau_i) = \langle A_{i+1} \rangle - \langle A_i \rangle$$

であり、

$$\partial_1 : C_1 \rightarrow C_0$$

を満たす。また、明らかに

$$C_2 = 0$$

だから  $B_1(C_*) = 0, C_{-1} = 0$  だから

$$Z_0(C_*) = C_0$$

になる。

次に輪体  $Z_1(C_*)$  の元は  $n$  角形の周の定数倍

$$k(\tau_1 + \cdots + \tau_n) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

しかないので

$$Z_1(C_*) = \mathbb{Z}(\tau_1 + \cdots + \tau_n) \simeq \mathbb{Z}$$

となる。よって

$$H_1(S^1, \mathbb{Z}) = Z_1(C_*)/B_1(C_*) \simeq \mathbb{Z}/\{0\} = \mathbb{Z} \quad (6.15)$$

となる。これから  $H_1(S^1, \mathbb{Z})$  は多角形の周、あるいは円周の整数倍の集合である。

次に  $H_0 = Z_0/B_0$  は  $B_1(C_*)$  が  $\partial_1(\tau_i) = \langle A_{i+1} \rangle - \langle A_i \rangle$  という形の元を全て含むので

$$H_0 = Z_0(C_*)/B_0(C_*) = C_0/B_0(C_*)$$

は次のように同一視する

$$[A_1] = [A_2] = \cdots = [A_n]$$

よって結局

$$H_0(S^1, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$$

となり、これは 1 点  $[A_i]$  の整数全体の集合になる。よって  $H_1(S^1, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, H_0(S^1, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$  という結果が得られた。

これは輪が点に変形できることを表している。また、結果は  $n$  に無関係であり、分割の仕方に依存しない。特に  $n = 1$  の場合は単体分割というより胞体分割という。

これを 3 角形分割の方法でも求めておこう。

$$K = \{p_0, p_1, p_2, \{p_0p_1\}, \{p_1p_2\}, \{p_2p_0\}\}$$

とすると最大で 1-単体までである。従って  $\partial_2$  はない。

$$B_1(K) = 0$$

であり、

$$H_1(K) = \frac{Z_1(K)}{B_1(K)} = Z_1(K)$$

そこで

$$z = i(p_0p_1) + j(p_1p_2) + k(p_2p_0) \in Z_1(K), \quad i, j, k \in \mathbb{Z}$$

とおくと

$$\begin{aligned} \partial_1 z &= i(p_1 - p_0) + j(p_2 - p_1) + k(p_0 - p_2) \\ &= p_0(k - i) + p_1(i - j) + p_2(j - k) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{6.16}$$

が成り立つ必要がある。これは

$$i = j = k$$

である必要があるので

$$Z_1(K) = \{i((p_0p_1) + (p_1p_2) + (p_2p_0))\}, \quad i \in \mathbb{Z}$$

となるので

$$H_1(K) = Z_1(K) \simeq \mathbb{Z}$$

と計算できる。

次に  $H_0(K)$  は

$$Z_0(K) = C_0(K)$$

であり、0-単体には境界がないので式 6.16 のように

$$\begin{aligned} B_0(K) &= \{\partial_1(l(p_0p_1) + m(p_1p_2) + n(p_2p_0))\}, \quad l, m, n \in \mathbb{Z} \\ &= \{(n-l)p_0 + (l-m)p_1 + (m-n)p_2\}, \quad l, m, n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

となるから全射準同型写像  $f: Z_0(K) \rightarrow \mathbb{Z}$  を

$$f(ip_0 + jp_1 + kp_2) = i + j + k$$

で定義すると

$$\ker f = f^{-1}(0) = B_0(K)$$

となる。第 2 部の準同型定理から

$$Z_0 / \ker f \simeq \text{Im} f \simeq \mathbb{Z}$$

となるので

$$H_0 = Z_0 / B_0 = Z_0 / \ker f \simeq \mathbb{Z} \tag{6.17}$$

が得られた。つまり円周  $S^1$  は整数  $\mathbb{Z}$  とホモログスである。

円周には穴があるので 1 点に可縮にならない。  $H_1(K) \simeq \mathbb{Z}$  となっている。

#### 6.6.4 円板

次に中身をつめた円板  $D^1$  の三角形分割を見てみる。

$$K = \{p_0, p_1, p_2, \{p_0p_1\}, \{p_1p_2\}, \{p_2p_0\}, \{p_0p_1p_2\}\}$$

まず 2 単体が存在するから

$$H_2(K) = Z_2(K)/B_2(K)$$

$(p_0p_1p_2)$  が境界になる単位はこの  $K$  には存在しないので

$$B_2(K) = 0$$

$z = m(p_0p_1p_2) \in Z_2$  とすると

$$\partial_2 z = m(p_0p_1 - p_0p_2 + p_1p_2) = 0$$

よって  $m = 0$  となるので

$$H_2(K) = Z_2(K) = 0$$

次に

$$H_1(K) = Z_1(K)/B_1(K)$$

だからまず、 $K$  には  $(p_0p_1p_2)$  の境界は存在するので

$$B_1(K) = \{l(p_0p_1) + m(p_1p_2) + n(p_2p_0)\}$$

とおけるが境界の境界がない条件から

$$\partial_1 (l(p_0p_1) + m(p_1p_2) + n(p_2p_0)) = (n-l)p_0 + (l-m)p_1 + (m-n)p_2 = 0$$

とおけるので結局式 6.16 のように

$$n = m = l$$

が成り立つので

$$B_1(K) = \{n((p_0p_1) + (p_1p_2) + (p_2p_0))\}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

とみなせるから

$$B_1(K) \simeq \mathbb{Z}$$

次に  $Z_1(K)$  については円周と同じだから

$$Z_1(K) \simeq \mathbb{Z}$$

となるので次のように分母、分子ともに同じ場合は 1 ではなくて

$$H_1(K) = Z_1(K)/B_1(K) \simeq 0 \tag{6.18}$$

となる。円周では 2 次元上に穴が 1 つあるが、円板には穴がないので 1 点に可縮で  $H_1(K) \simeq 0$  となっている。

### 6.6.5 トーラス

次に2次元トーラス  $T^2$  について考えてみよう。

四角形  $ABCD$  の辺  $AB$  と辺  $DC$ 、辺  $BC$  と辺  $AD$ 、を貼り付けることでできたから **3角分割**を用いて三角形  $ABC$  と三角形  $CDA$  に分割する。

厳密には前節で見たように図右のように3頂点が重ならないようにすべきだが、ここでは簡単にするため図左をつかう。これで計算はずいぶん楽になる。胞体ホモロジーの理論から結果的には変わりがないことが示されている。

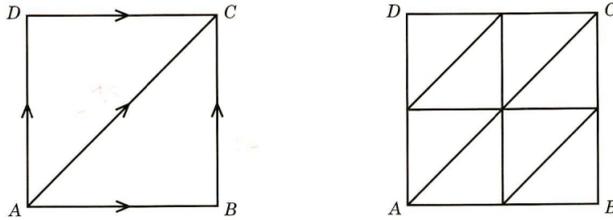


図 6.11: トーラスの3角形分割 [69] より

従って単体として2次元  $\sigma$ 、1次元  $\tau$ 、0次元  $p$  とここではおいて

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \langle ABC \rangle, \sigma_2 = \langle CDA \rangle \\ \tau_1 &= \langle AB \rangle = \langle DC \rangle, \tau_2 = \langle BC \rangle = \langle AD \rangle, \tau_3 = \langle AC \rangle \end{aligned}$$

$$p = \langle A \rangle = \langle B \rangle = \langle C \rangle = \langle D \rangle$$

とおく。よって

$$\partial_2(\sigma_1) = \tau_1 + \tau_2 - \tau_3, \partial_2(\sigma_2) = -\tau_1 - \tau_2 + \tau_3 \quad (6.19)$$

$$\partial_1(\tau_1) = \partial_1(\tau_2) = \partial_1(\tau_3) = p - p = 0 \quad (6.20)$$

となる。これから点と閉曲線には境界はないので

$$\begin{aligned} Z_2(C_*) &= \mathbb{Z}(\sigma_1 + \sigma_2) \\ B_2(C_*) &= \partial_2(\sigma_1) + \partial_2(\sigma_2) = 0 \end{aligned}$$

となり、

$$Z_1(C_*) = \mathbb{Z}\tau_1 \oplus \mathbb{Z}\tau_2 \oplus \mathbb{Z}\tau_3$$

となるが  $B_1(C_*)$  の計算には留意がいる。式 6.20 を足しても0になるが、

$$\partial(\sigma) = 0$$

の構造ルールがあるので線の境界  $B_1(C_*)$  は  $H_1(T^2, \mathbb{Z})$  においては辺について

$$[\tau_3] = [\tau_1] + [\tau_2]$$

が成り立っていることがわかる。よって次のように  $B_1(C_*)$  は計算される。

$$B_1(C_*) = \mathbb{Z}(\tau_1 + \tau_2 - \tau_3) = \mathbb{Z}\{0\} = \mathbb{Z}$$

次に 0 単体は明らかに

$$Z_0(C_*) = \mathbb{Z}p, B_0(C_*) = 0$$

となる。よってまとめると

$$H_2(T^2, \mathbb{Z}) = \frac{\mathbb{Z}(\sigma_1 + \sigma_2)}{\{0\}} = \mathbb{Z}[\sigma_1 + \sigma_2] \simeq \mathbb{Z}$$

$$H_1(T^2, \mathbb{Z}) = \frac{\mathbb{Z}\tau_1 \oplus \mathbb{Z}\tau_2 \oplus \mathbb{Z}\tau_3}{\mathbb{Z}\{0\}} = \mathbb{Z}\tau_1 \oplus \mathbb{Z}\tau_2 \simeq \mathbb{Z}_2$$

$$H_0(T^2, \mathbb{Z}) = \frac{\mathbb{Z}p}{\{0\}} \simeq \mathbb{Z}$$

である。

この時、 $H_2(T^2, \mathbb{Z})$  の生成元  $[\sigma_1 + \sigma_2]$  はトーラスの表面全体であり、 $H_1(T^2, \mathbb{Z})$  の生成元  $[\tau_1], [\tau_2]$  はトーラスを 1 周する 2 つの閉曲線群ある。(下図の  $a, b$  に相当する) 従って、トーラスは 2 枚の平面を張ってできるのが穴が 1 つあるので  $H_2(T^2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$  であり、トーラス表面は直交した 2 つのサークルでできるので  $H_1(T^2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^2$  この場合、下図の  $c = a + b$  があり、これは可縮ではない式 6.15 の円周と同相である。

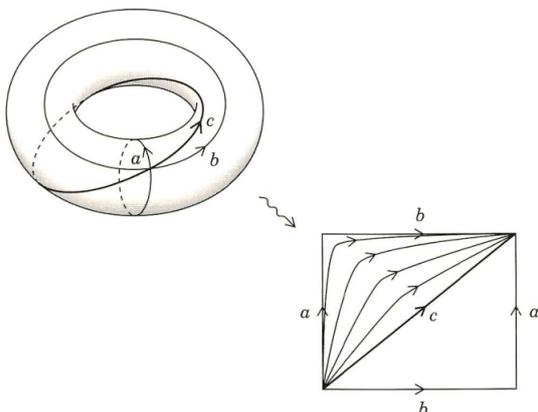


図 6.12: 2次元トーラスの3角形分割 [69] より

### 6.6.6 トーラス 2

前節で三角分割の計算に依存しなくても直感的にホモロジーの計算ができることを見た。これは自由加群の性質をつかうとわかりやすい。

つまりトーラスにおいて  $H_2(T^2)$  は 1 つの閉曲面自身で生成できる自由加群とみなせば

$$H_2(T^2) \simeq \mathbb{Z}$$

である。さらに  $H_1(T^2)$  は 2-チェインの境界にはならない。よって  $a, b$  の 2 つを生成群を持つ自由加群と考えれば

$$H_1(T^2) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_2$$

となり、 $T^2$  が連結であれば

$$H_0(T^2) \simeq \mathbb{Z}$$

となる。これを下図のように種数  $g$  のトーラスに応用する。

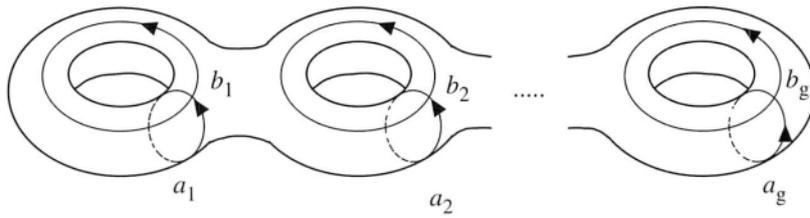


図 6.13: [12] より：複数の連結ドーナツ

これを  $\Sigma_g$  とすると  $\Sigma_g$  の閉曲面は境界を持たないし、3-チェインの境界にもならない。よって

$$H_2(\Sigma_g) \simeq \mathbb{Z}$$

次に  $H_1$  はある領域の境界になっていないループを探す。

すると穴の数  $g$  だけの 2 つの生成元  $a_g, b_g$  が図のようにあることがわかる。従って

$$H_1(T^2) \simeq \overbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}^{2g} \simeq \mathbb{Z}_{2g}$$

となる。また  $\Sigma_g$  は連結であるから

$$H_0(\Sigma_g) \simeq \mathbb{Z}$$

となる。

もちろん次の図のように平面につぶして分割しても同じ結果が得られる。

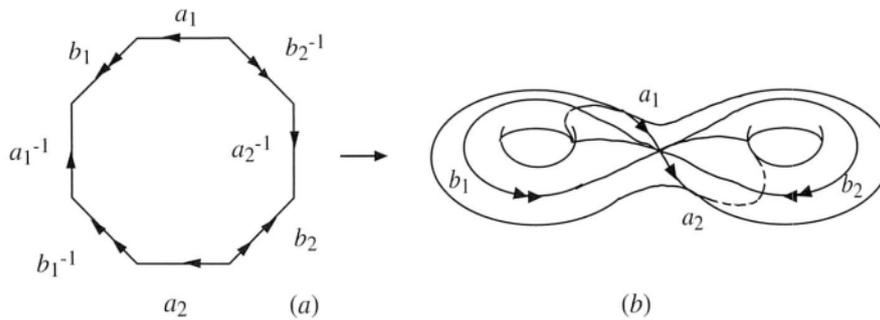


図 6.14: [12] より：種数 2 の場合のループ

### 6.6.7 メビウスの帯

次の図はメビウスの帯の三角形分割である。この時明らかに

$$B_2(K) = 0$$

一つの輪体を選び  $z_2 \in Z_2(K)$  とすると、この三角形分割は 6 つの区分からなり、

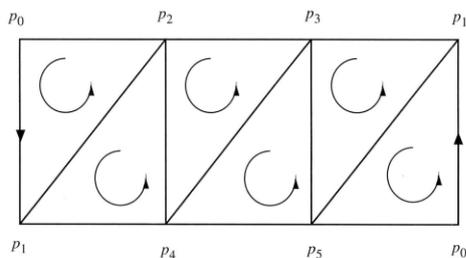


図 3.8. メビウスの帯の三角形分割.

図 6.15: [12] より

$$z = i(p_0p_1p_2) + j(p_2p_1p_4) + k(p_2p_4p_3) + l(p_3p_4p_5) + m(p_3p_5p_1) + n(p_1p_5p_0)$$

となるので

$$\begin{aligned} \partial_2 z &= i\{(p_1p_2) - (p_0p_2) + (p_0p_1)\} \\ &+ j\{(p_1p_4) - (p_2p_4) + (p_2p_1)\} \\ &+ k\{(p_4p_3) - (p_2p_3) + (p_2p_4)\} \\ &+ l\{(p_4p_5) - (p_3p_5) + (p_3p_4)\} \\ &+ m\{(p_5p_1) - (p_3p_1) + (p_3p_5)\} \\ &+ n\{(p_5p_0) - (p_1p_0) + (p_1p_5)\} = 0 \end{aligned}$$

よってこれを満たす各係数は 0 しかない。これから

$$H_2(K) = \frac{Z_2(K)}{B_2(K)} = \{0\}$$

となる。次に  $H_1$  も同じようにして求まるが、各 1 単体には向きがあり、互い違いの辺で打ち消すとして、足し合わせると外の外周しかのこらない。従って、円周と同相だから

$$H_1(K) = Z_1(K) \simeq \mathbb{Z}$$

$$H_0 = Z_0/B_0 \simeq \mathbb{Z}$$

とできる。連結の構造から計算を簡単にできるわけだ。

### 6.6.8 クラインの壺

メビウスの帯と同様に向き付けのできない図形がクラインの壺である。

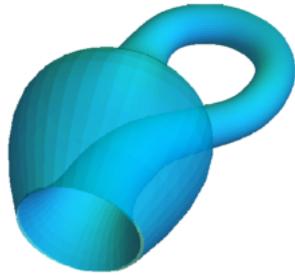


図 6.16: Klein Bottle

これは次のように、平面四角形の各点を同一視してつくることができる。

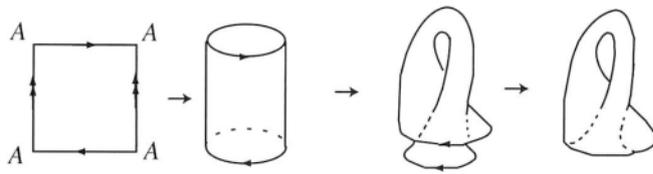


図 6.17: [12] より : クラインの壺の作成

これは下図のようにループを決めると

$$\alpha \cdot \beta \cdot \alpha^{-1} \cdot \beta \sim e_{x_0}$$

であり、また、次のようにかけることがわかる。

$$\alpha \cdot \beta = \beta^{-1} \cdot \alpha$$

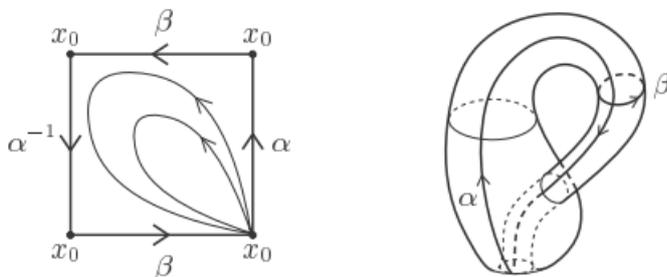


図 6.18: [36] より : 定点ループとホモトープな積

また、次のように平面展開すると

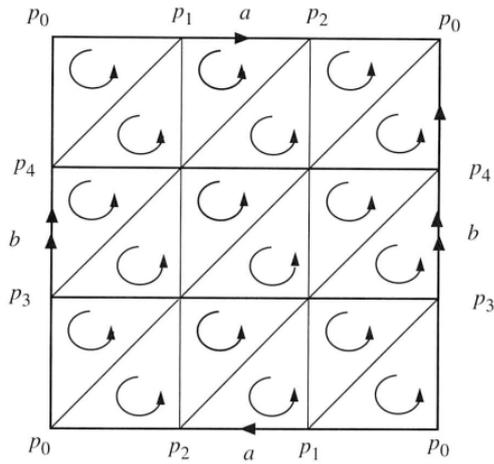


図 6.19: [12] より : クラインの壺の展開

となる。この図を  $K$  とする。この時も明らかに

$$B_2(K) = 0$$

となり、 $H_2(K) = Z_2(K)$  となるが  $z_2$  を求めるために 1 単体を連結すると外側の境界のみになる。よって

$$\partial_2 z = -2ma$$

のみが残る。よって  $m = 0$  で  $\partial_2 z = 0$  である。これから

$$H_2(K) = \{0\}$$

がすぐに得られる。次に  $H_1$  を求める。これは先のトーラスと同様に任意の 1 単体が

$$z_1 = ia + jb$$

のようにかかる。トーラスのように自由加群が 2 つある。しかし、さらに全体を足してもメビウスのように円周と同相にはならず、

$a$  の整数倍が残るので

$$H_1(K) \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}$$

となる。 $K$  は連結だから

$$H_0(K) \simeq \mathbb{Z}$$

である。

### 6.6.9 実射影空間

第 4 部で実射影空間  $\mathbb{R}P^2$  は球面  $S^2$  の直径対点を同一視して得られた。

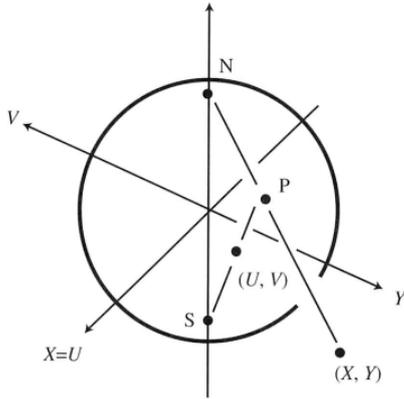


図 6.20: [12] より:P 点の立体射影

次のように、平面四角形の各点を同一視してつくることことができる。

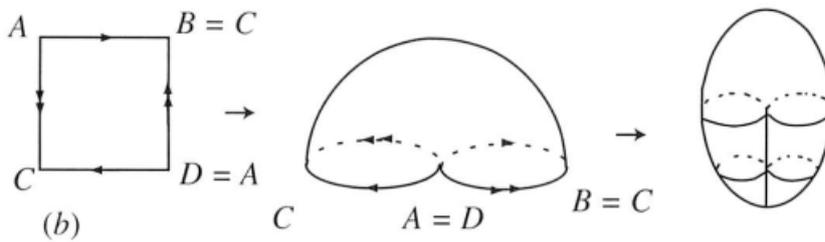


図 6.21: [12] より：実射影空間の作成

これを三角形分割するために平面に潰す。のりしろがつくように注意して平面にすると次の図のようになる。直径対蹠点となるので、6角形の対辺を振りながら貼り合わせるから

$$p_5p_4, p_3p_5, p_4p_3$$

が対応する。そこで、これを次のように図にして、定点ループと同じなる経路の積をさがすと、

$$\alpha \cdot \beta \cdot \alpha \cdot \beta \sim e_{x_0}$$

となることがわかる。ところが

$$\gamma = \alpha \cdot \beta$$

が成り立っているから

$$\gamma \cdot \gamma = e_{x_0}$$

と表すこともできる。これは実射影平面のホモロジー群  $\pi_1(\mathbb{R}P^2, x_0)$  は単位元  $e$  と 2 乗して単位元になる元  $\gamma$  のみから成り立ち、これからも

$$\pi_1(\mathbb{R}P^2, x_0) = \{[e], [\gamma]\} = \mathbb{Z}_2$$

であることがわかる。

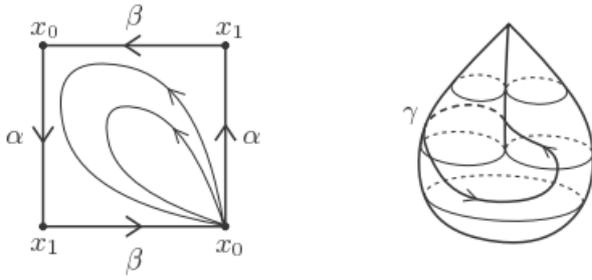


図 6.22: [36] より：定点ループとホモトープな積

上の図から  $\gamma$  は 1 回巻きではどけない 2 回巻きになっていて、2 回巻きではじめて 1 点に縮めることができる。

この下図平面図形を  $K$  とする。

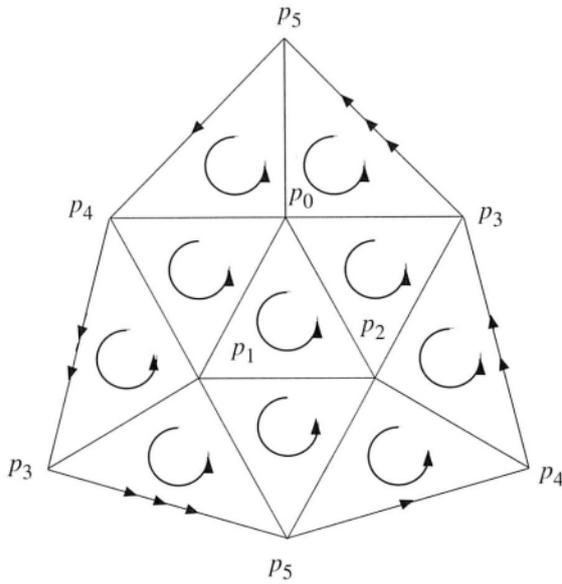


図 6.23: [12] より：実射影空間：向きをつける

このホモロジーを三角形分割で求める。まず、明らかに境界輪体  $B_2(K)=0$  である。そこで次に  $z \in Z_2(K)$  として図の 10 個の 2 単体を足し上げると、図の向きに注意して

$$z = m_1(p_0p_1p_2) + m_2(p_0p_4p_1) + m_3(p_0p_5p_4) + m_4(p_0p_3p_5) + m_5(p_0p_2p_3) \\ + m_6(p_2p_4p_3) + m_7(p_2p_5p_4) + m_8(p_2p_1p_5) + m_9(p_1p_3p_5) + m_{10}(p_0p_4p_3)$$

とおく、従って境界をとると

$$\begin{aligned}
\partial_2 z &= m_1\{(p_1 p_2) - (p_0 p_2) + (p_0 p_1)\} \\
&+ m_2\{(p_4 p_1) - (p_0 p_1) + (p_0 p_4)\} \\
&+ m_3\{(p_5 p_4) - (p_0 p_4) + (p_0 p_5)\} \\
&+ m_4\{(p_3 p_5) - (p_0 p_5) + (p_0 p_3)\} \\
&+ m_5\{(p_2 p_3) - (p_0 p_3) + (p_0 p_2)\} \\
&+ m_6\{(p_4 p_3) - (p_2 p_3) + (p_2 p_4)\} \\
&+ m_7\{(p_5 p_4) - (p_2 p_4) + (p_2 p_5)\} \\
&+ m_8\{(p_1 p_5) - (p_2 p_5) + (p_2 p_1)\} \\
&+ m_9\{(p_3 p_5) - (p_1 p_5) + (p_1 p_3)\} \\
&+ m_{10}\{(p_4 p_3) - (p_1 p_3) + (p_1 p_4)\} \\
&= 0
\end{aligned}$$

これを満たす係数  $m$  は

$$m_i = 0 \quad (1 \leq i \leq 10)$$

である。よって

$$H_2(K) = \frac{Z_2(K)}{B_2(K)} = \{0\}$$

である。ただ、この計算は図の 2 単体を辺の向きが互い違いなら消えるとして足して行くと、外の境界しか残らない。

よって

$$\partial_2 z = 2m(p_3 p_5) + 2m(p_5 p_4) + 2m(p_4 p_3) \tag{6.21}$$

としても

$$m = 0$$

となり、同じ結果が出る。

次に 1 単体を考えると、どの 1 単体も 1 次元輪体をなして、

$$z_1 = (p_3 p_5) + (p_5 p_4) + (p_4 p_3)$$

の整数倍とホモロガスの関係になっている。

また、式 6.21 は  $z$  の偶数倍が 2-チェインの境界であることを表している。

この時の  $z+z$  は式 5.1 から 0 とホモロガスになった。よって

$$H_1(K) = \{[z] | [z] + [z] \sim [0]\}$$

と考えられるので

$$H_1(K) \simeq \mathbb{Z}_2$$

これは 2-チェインの構造を反映している。

## 7 コ・ホモロジー [69]

前部で多様体と微分形式を考えてきたが、この関係から局所座標系によらない関数形を決めるアイデアが登場した。

多様体上で定積分ではなく、未知な方程式をもつ不定積分を考えてみる。

積分の結果としては実数を得られるから  $\mathbb{R}$  を 1 次元微分多様体とすると 1 変数関数  $f(x)$  の原始関数  $F(x)$  を考え

微分方程式

$$y' = f(x)$$

の解が

$$y = F(x)$$

とみなせる。そこで

$$F'(x)dx = f(x)dx$$

とし、左辺の未知関数  $F(x)$  を **0** 形式

$$\omega = F(x)$$

さらに右辺は既知の **1** 形式

$$d\omega_0 = f(x)dx$$

とおくと

$$d\omega = F'(x)dx$$

とおけるので微分方程式  $y' = f(x)$  は

$$d\omega = d\omega_0$$

という式で表すことができ、これは座標系  $x$  に依存しない。つまり、一般に  $r$  形式の  $d\omega_0$  がわかっているならば  $(r-1)$  形式の  $\omega$  を求めればよいことになる。

例えば円周  $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$  上の不定積分を考えると

$$(x, y) = (\cos \theta, \sin \theta)$$

と表すことができる。よって  $\theta$  を局所座標として  $d\omega_0 = d\theta$  とすると

$$d\omega = d\theta$$

を満たす  $\omega$  を探せばよいことになる。そこで

$$\omega = F(\theta)$$

とすると

$$F'(\theta) = 1$$

だから

$$F(\theta) = \theta + C$$

となる。しかし、 $S^1$  上では周期的な条件

$$F(\theta + 2\pi) = F(\theta)$$

があるが、この解はこの条件を満たさない。一方で  $\mathbb{R}$  上であれば

$$\omega = (\theta + C)$$

は解となる。

これは多様体  $S^1$  と多様体  $\mathbb{R}$  が同相ではないことを示している。

微分方程式の背景として多様体の相違を考えることができることを示唆し、方程式の成立する背後にある座標系との関係に何か普遍性があるのではないかという契機になった。

これが de Rham cohomology のアイデアになった。後節で定義する。

## 7.1 複素平面

ホモロジーでは例えば  $n$  次元ユークリッド空間は実数  $\mathbb{R}$  と同じホモロジーであるといった表現をする。式の上でも等号を用いるわけですが、その意味をここで考える。

複素射影平面  $\mathbb{C}P^1$  を考え、多項式を  $P(x, y)$  とし、複素平面に拡大した、根全体を  $\mathcal{P}$  とする。

ただし、連続的な変形で移るものは同じであるとして考えると、多項式の場合、グラフの曲り方みたいなものは無視でき、 $P$  の次数  $k$  で決まると考える。この元を例えば

$$k[\mathbb{C}P^1]$$

とすると、これは 1 次式の根全体の集合とすることができるので直線を表す。

例えば

$$P_a(x, y) = x^2 + axy + 4y^2 - 1$$

のように  $a$  をパラメタとして 2 次多項式を定義する。これは  $a = 0$  で次のような楕円を  $x - y$  平面上に描く。

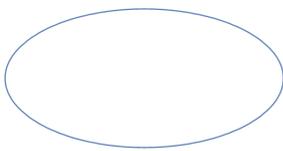


図 7.1:  $a = 0$  の場合の楕円

しかし、縦軸に  $a$  を取り、 $a$  を動かすことで次のように図形が双曲線へと変化していく。

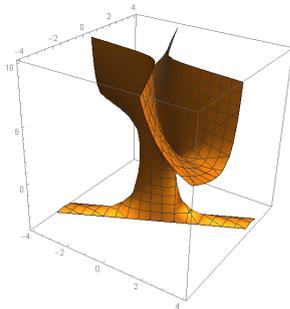


図 7.2:  $a = -4$  から  $a = 10$  までの連続変化

$a = -4$  の時には

$$P_{-4}(x, y) = (x - 2y + 1)(x - 2y - 1)$$

となり、次の図のように直線

$$L_1 : x - 2y + 1 = 0$$

$$L_2 : x - 2y - 1 = 0$$

の和集合が解となる。

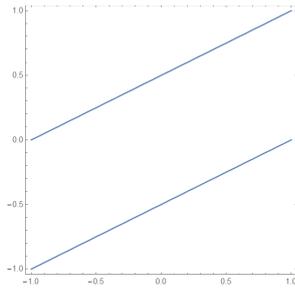


図 7.3:  $a = -4$  の時

ここでこの  $L_1, L_2$  は連続変化で重なるので同一視してしまうと結局

(2 次図形が表す図形) =  $2 \times$  (1 次図形が表す図形)

という関係が得られ、一般化すると

( $k$  次図形が表す図形) =  $k \times$  (1 次図形が表す図形)

ということになり、これが複素射影平面の 2 次ホモロジー群は整数全体  $\mathbb{Z}$  であると表すことにする。

つまり、ホモロジーのしているのは特に群の個数であって、関数式の形とかは見えないことになる。

空間  $X$  の  $d$  次ホモロジー群を  $H_d(X)$  と書く。この場合は複素空間の 2 次元への射影なので

$$H_d(\mathbb{C}P^2) = \begin{cases} \mathbb{Z} & d = 0, 2, 4 \\ 0 & \text{other} \end{cases}$$

となることがわかっている。先に  $d = 2$  の場合を見た。また  $d = 0$  の場合とは点に相当するので  $\mathbb{Z}$  はそのまま点の数となる。

では  $d = 4$  の場合とは複素射影平面においては 4 次元の図形で境界のないものは複素射影平面そのものということになる。

従ってこの時もホモロジーで見ると複素射影平面の数が  $\mathbb{Z}$  に等しいだけある。

$d = 0, 2, 4$  の場合の  $H_d(\mathbb{C}P^2) \simeq \mathbb{Z}$  の中で  $1 \in \mathbb{Z}$  となる元を  $u_d$  とする。このとき、 $d$  について

$$u_0 \cdots \text{Points}$$

$$u_2 \cdots \text{Line}$$

$$u_4 \cdots \mathbb{C}P^2$$

とすると交点数で先の定理を表すことができる。つまり、 $n$  本の線と  $m$  本の線の交点は  $nm$  個の点となるので

$$n[u_2] \cdot m[u_2] = nm[u_0] \tag{7.1}$$

と表される。これから次の交点数の関係が得られる。

$$n[u_0] \cdot m[u_0] = 0$$

$$n[u_2] \cdot m[u_0] = 0$$

$$n[u_4] \cdot m[u_0] = nm[u_0]$$

$$n[u_4] \cdot m[u_2] = nm[u_2]$$

$$n[u_4] \cdot m[u_4] = nm[u_4] \tag{7.2}$$

つまり、2点の共通部分は2点が一致しないかぎり空集合であり、線と点との共通部分はいが、空間と空間の共通部分はあるということになる。

ここでホモロジーの双対空間がコホモロジーであったのでこれを\*を用いて

$$[u_d]^* \rightarrow x^{(4-d)}$$

で表す。 $x^{4-d}$ はホモロジー  $u_d$  に対応したコホモロジーの元となる。

一般にコホモロジー群を  $H^d(X)$  で表し、次の関係をポアンカレ同型という。複素射影平面は  $n = 4$  として

$$H_d(X) \simeq H^{n-d}(X)$$

そこでポアンカレ同型をとる作用を\*で表す。つまり・積を\*で写すと∪積になるとして先の式7.2の交点数の関係をポアンカレ同型で写すと次のようになる。

$$x^{(d)} \cup x^{(d')} = \begin{cases} x^{(d+d')} & (d+d' \leq 4) \\ 0 & (d+d' \geq 5) \end{cases} \tag{7.3}$$

とまとめることができる。

例えば式7.1を\*で写すと  $d = d' = 2$  として

$$x^{(2)} \cup x^{(2)} = (u_2 \cdot u_2)^* = u_0^* = x^{(4)}$$

と表すとカップ積と内積の2つの表現で表すことができるのが双対性の特徴である。

ここでは複素射影空間を考えるので  $d = 1, 3$  は双対にならない。これを表すのに式7.3はホモロジーの言葉で、複素平面のコホモロジーにカップ積を考えると環

$$\mathbb{Z}/(x^3)$$

になることを表している。環とイデアルについて環  $\mathfrak{A}$  とは群の部分集合  $I$  が加法について閉じていて

$$x \in \mathfrak{A}, y \in I \rightarrow xy, yx \in I \tag{7.4}$$

である時、 $I$ を両側イデアルという。イデアル  $I$  が与えられると環  $\mathfrak{A}$  に次の関係で

$$x - y \in I \tag{7.5}$$

同値関係を定義できる。これにより同値類がつくられ剰余環

$$R/I \tag{7.6}$$

を定義したことを思い出すと

ここでの  $()$  は  $x^3$  で生成される多項式  $\mathbb{Z}[x]$  のイデアルとなる。つまり、 $\mathbb{Z}/(x^3)$  とは整係数1変数多項式全体の  $\mathbb{Z}[x]$  に

$$x^3 = 0$$

という関係式を付け加えたものである。これをホモロジーを用いて

$$H(\mathbb{C}P^2) \simeq \mathbb{Z}/(x^3)$$

と表現する。  
 さらに高次元の複素  $n$  次元射影平面でも

$$H(\mathbb{C}P^n) \simeq \mathbb{Z}/(x^{n+1})$$

となる。商の部分は核となるので、興味あることに次節で扱う量子コホモロジー環では

$$H(\mathbb{C}P^n) \simeq \mathbb{Z}/(x^{n+1} - q)$$

となり、量子化の過程を表すことができる。

## 7.2 de Rham cohomology

$M$  を  $n$  次元可微分多様体であるとする。 $M$  上で微分方程式を考えると前節の例でみたように

$$d\omega = d\omega_0 \tag{7.7}$$

は  $r$  形式の方程式になるが、これは解を持つとは限らない。そこで  $C^r(M)$  を  $M$  上の  $r$  形式の全体集合とし、 $B^r(M)$  をその中で微分方程式が解を持つような  $d\omega_0$  全体の部分集合であるとする。このとき、 $\omega$  は  $C^{r-1}$  形式になるから

$$B^r(M) = \{d\omega \mid \omega \in C^{r-1}(M)\}$$

$$B^0(M) = \{0\}$$

また、微分形式が満たされているので  $C^r(M), B^r(M)$  は加法群になっていて、実ベクトル空間の条件を満たす。

さらに  $\omega \in C^r(M)$  としたとき  $d\omega = 0$  を見たすベクトル空間を

$$Z^r(M) = \{\omega \in C^r(M) \mid d\omega = 0\}$$

で定義し、これは  $d\omega$  の核に対応する空間で  $d\omega \in B^r(M)$  をとると、常に

$$d(d\omega) = 0$$

となるから  $d\omega \in Z^r(M)$

$$B^r \subset Z^r \subset C^r$$

という関係がある。この関係は前節での輪体  $Z_p$  と境界輪体  $B_p$  との関係と同じである。

### 定義 65. ド・ラームコホモロジー群 (de Rham cohomology)

ここでは次で  $r$  次ド・ラームコホモロジー群 (de Rham cohomology)  $H^r(M, \mathbb{R})$  を定義する。

$$H^r(M, \mathbb{R}) = \frac{Z^r(M)}{B^r(M)} \tag{7.8}$$

極端には直線の境界  $B^r$  は両端の点になるが、これを同一視すると  $H^r$  とは円になってしまう。

これは量子力学の観測問題で後に粗視化をとりあつかうが、興味ある関係になっている。

例えば  $M = \mathbb{R}$  と  $M = S^1$  の場合を考えよう。

$M$  は 1 次元多様体だから任意の 1 形式は外微分で 0 になる。これから

$$Z^1(M) = C^1(M)$$

である。はじめに  $M = \mathbb{R}$  の時、任意の関数には原始関数が存在できるから、任意の 1 形式を  $\omega$  とし、0 形式  $f$  によって

$$\omega = df$$

と表すことができる。これは

$$B^1(M) = C^1(M)$$

である。よって式 7.8 は

$$H^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = H^1(M, \mathbb{R}) = \frac{Z^r(M)}{B^r(M)} = \frac{C^1(M)}{C^1(M)} = 0$$

分数計算が普通の商計算 1 ではないので注意する。  $Z = B$  であれば  $H^1 = 0$  である。

次に  $M = S^1$  の時、微分方程式 7.8 は解を持たない。これは局所的な  $d\theta$  では  $S^1$  全体で定義された関数  $f$  を表すことができない。よって  $B^1(S^1) \neq C^1(S^1)$  であるので  $H^r(S^1, \mathbb{R}) \neq 0$  となる。さらに例えば一般に

$$f(\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

とフーリエ級数で表すことができる。さらに三角関数の和の部分は

$$d(\sin n\theta) = n \cos n\theta d\theta$$

$$d(\cos n\theta) = -n \sin n\theta d\theta$$

と表せるので、 $S^1$  上で不定積分が存在しないのは定数関数  $a_0$  の部分であることがわかる。これから

$$Z^1(S^1, \mathbb{R}) = \mathbb{R}, B^1(S^1, \mathbb{R}) = 0$$

とできるので

$$H^r(S^1, \mathbb{R}) = \mathbb{R}$$

となる。

前章では図形の位相として整数  $\mathbb{Z}$  となる場合をみたが、ホモロジーが 2 つの引数を持つことと、外微分の演算により、座標依存せずに計算でき、微分形式と関係をつけたことが大きな発見となった。

### 7.2.1 一般化

前章で整数の場合を考えましたが、ホモロジーの関係はさらに実数  $\mathbb{R}$ 、複素数  $\mathbb{C}$  に拡張することができる。

ホモロジー計算には  $K$  を  $\mathbb{R}, \mathbb{C}$  の体であるとき、次の結果を知っておくと便利である。テンソル積を  $\otimes$  として

$$\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} K = K$$

$$\mathbb{Z}^m \otimes_{\mathbb{Z}} K = K^m$$

$$(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} K = 0$$

$$(A_1 \oplus \cdots \oplus A_m) \otimes_{\mathbb{Z}} K = \left( A_1 \otimes_{\mathbb{Z}} K \right) \oplus \left( A_2 \otimes_{\mathbb{Z}} K \right) \oplus \cdots \oplus \left( A_m \otimes_{\mathbb{Z}} K \right)$$

となる。ホモロジーの計算は拡張して考えた場合の方が単純になる場合がある。例えば  $H_r(M, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^m \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  となる場合、

$$H_r(M, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^m$$

となる。

ホモロジーと双対な関係がコホモロジーである。

第 2 部の微分幾何ではホッジ作用素について学んだがこれと同じように双対な関係をつくることができる。

**定義 66. 完全**

$p$  次微分形式  $\omega$  が  $d\omega = 0$  を満たせば閉じているという。さらに多様体  $M$  上に  $p-1$  次微分形式  $\theta$  が存在し、

$$\omega = d\theta \quad (7.9)$$

と書けるなら完全であった。。常に  $d(d\theta) = 0$  なので完全微分形式は閉微分形式である。

さらに輪体に対しての双対を考える。

**定義 67. 双対境界輪体群 (coboundary\_cycle\_group)**

閉じた  $p$  次微分形式の全体を  $Z^p(M)$ , 完全な  $p$  次微分形式の全体を  $B^p(M)$  とするとこれを  $p$ -双対境界輪体群 (coboundary\_cycle\_group) という。

$$\begin{aligned} Z^p(M) &= \{\omega \in A^p(M); d\omega = 0\} \\ &= \text{Ker}\{d: A^p(M) \rightarrow A^{p+1}(M)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B^p(M) &= \{d\theta; \theta \in A^{p-1}(M); d\omega = 0\} \\ &= \text{Im}\{d: A^{p-1}(M) \rightarrow A^p(M)\} \end{aligned}$$

と表すことができる。 $Z^p(M)$  についてサイクルのイメージ、 $B^p(M)$  は微分形式のイメージに対応する。

この時

$$B^p(M) \subset Z^p(M)$$

である。

**定義 68.  $p$  次元 de Rham コホモロジー群 (de Rham cohomology group)**

さらに次のように  $p$  次元 de Rham コホモロジー群 (de Rham cohomology group)  $H^p$  を定義する。

同じものの表現で  $H_{DR}^p$  として de\_Rham のコホモロジーであることを区別する場合もある。ここでは  $DR$  は省略する。

$$H^p(M) = Z^p(M)/B^p(M) \quad (7.10)$$

これを Im, ker で表現すると

$$H^p(M) = \text{ker}(d: \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^{p+1}(M)) / \text{ker}(d: \Omega^{p-1}(M) \rightarrow \Omega^p(M)) \quad (7.11)$$

となる。

また一般に  $p$  次微分形式  $A^p$  はベクトル空間であるが次のような直和を定義すると

$$A(M) = \bigoplus_{p=0}^n A^p(M) \quad (7.12)$$

は外積から多元環になる。さらに

$$Z(M) = \bigoplus_{p=0}^n Z^p(M) \quad (7.13)$$

は  $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta \pm \omega \wedge d\eta$  だから部分環となることがわかる。

$$B(M) = \bigoplus_{p=0}^n B^p(M) \quad (7.14)$$

とすると  
さらに環  $Z(M)$  と群の部分環  $B(M)$  が加法について閉じていて

$$x \in Z, y \in B \rightarrow xy, yx \in B \quad (7.15)$$

を満たすので部分環  $B(M)$  が  $Z(M)$  の左右の作用に対し閉じているイデアルになっている。  
従ってこれを同値関係として剰余類が定義できて

$$H(M) = \bigoplus_{p=0}^n H^p(M) \quad (7.16)$$

とすると式 7.10 から  $H(M)$  も多元環になる。  
よって

### 定義 69. de Rham コホモロジー環 (de Rham cohomology ring)

$$\omega \in Z^p(M), \eta \in Z^q(M) \quad (7.17)$$

から式 7.10 によってつくられる剰余類  $H$  の元をそれぞれ

$$[\omega] \in H^p(M), [\eta] \in H^q(M) \quad (7.18)$$

とすると積が次のように定義できる。

$$[\omega] \cdot [\eta] = [\omega \wedge \eta] \quad (7.19)$$

とかける。つまり積について閉じているのでこの  $H(M)$  が **de Rham コホモロジー環 (de Rham cohomology ring)** である。

#### 7.2.2 例 1 実数

Poincare の補題によれば  $U \subset \mathbb{R}^n$  が 1 点に可縮できる領域であれば完全である。つまり

$$H^p(U) = 0 \quad p > 0 \quad (7.20)$$

ならば  $df = 0$  となる関数は定数なので  $Z^0(M) = \mathbb{R}$  とすることができる。また完全性から  $B^0(M) = 0$  だから常に

$$H^0(M) = \mathbb{R} \quad (7.21)$$

が成り立つ。つまり身近な実数は **0** 次元のコホモロジー群ということがきる。

#### 7.2.3 例 2 円周

円周は先に確認をしたが再び別視点で考察する。

式 6.17 から

$$S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

と書けた。  $\mathbb{R}$  上の  $\mathbb{Z}$  周期の関数を  $f(x)$  として任意の閉じた微分 1 形式である  $\Omega^1(S^1)$  の要素が

$$f(x)dx$$

とかける。  $\Omega^1(S^1)$  が完全形式であるためにはこれが全微分で表される必要があったから

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

となる  $\mathbb{R}$  上の  $\mathbb{Z}$  周期の関数を  $F(x)$  が存在しないといけない。よって 1 次元の場合は  $[0, 1]$  の台上で

$$F(x+1) - F(x) = \int_0^1 f(x+t)dt$$

だから全ての  $x$  について

$$\int_0^1 f(x+t)dt = 0$$

でなくてはならない。 $f(x)$  の周期性から  $x$  に無関係で

$$\int_0^1 f(t)dt = 0$$

である必要がある。よって

$$H^1(S^1, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}$$

である。

### 7.3 Čech cohomology

また、Čech のコホモロジーと呼ばれるものもあり、局所有限な  $M$  の開被覆を  $U = \{U_\alpha\}$  とすると  $U_{\alpha_1} \cap U_{\alpha_2} \cap \cdots \cap U_{\alpha_p} \neq \emptyset$  の時、これを次のように表現する。

$$U_{\alpha_1 \alpha_2, \dots, \alpha_p} = U_{\alpha_1} \cap U_{\alpha_2} \cap \cdots \cap U_{\alpha_p} \quad (7.22)$$

これを Čech の  $p$  次元単体 (psimplex) という。

従って、 $p$  次元双対鎖 (pcochain)  $c$  は各  $p$  次元単体に実数  $c_{\alpha_1 \alpha_2, \dots, \alpha_p} \in R$  を対応させるものとして定義できる。単体から実数を対応させるという意味で双対である。 $c_{\alpha_1 \alpha_2, \dots, \alpha_p}$  は  $p$  に関して交代積であるとすれば  $p$  次元双対鎖全体はベクトル空間を張る。これを

$$C^p(U; R) \quad (7.23)$$

とする。前にならって双対境界作用素 (coboundary operator)  $\delta$  を次で定義する。

$$\begin{aligned} \delta : C^p(U; R) &\rightarrow C^{p+1}(U; R) \\ (\delta c)_{\alpha_1 \alpha_2, \dots, \alpha_{p+1}} &= \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j c_{\alpha_1 \alpha_2, \dots, \check{\alpha}_j \dots \alpha_{p+1}} \end{aligned} \quad (7.24)$$

すると前回と同様にして境界の境界はないという関係式

$$\delta \circ \delta = 0 \quad (7.25)$$

が成り立つ。よって Čech のコホモロジー群を次のように定義する。

$$H^p(U; R) = \{c \in C^p(U; R); \delta c = 0\} / \delta(C^{p-1}(U; R)) \quad (7.26)$$

ただし、 $U$  は 1 点に可縮な被覆である必要がある。

## 7.4 微分形式上のコホモロジー

次に Čech のコホモロジーは双対鎖として実数  $c \in R$  を考えたがここでは  $U$  上での微分形式との対応を考える。

$q$  次微分形式  $\omega \in A^q$  での  $p$  次双対鎖の全体を

$$C^p(U; A^q) \quad (7.27)$$

と置く。ただし、 $\omega = \omega_{\alpha_0 \alpha_1, \dots, \check{\alpha}_j \dots \alpha_p}$  は  $U_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2, \dots, \alpha_p}$  上に制限する。先と同様に双対境界作用素を次で定義する。

$$\delta : C^p(U; A^q) \rightarrow C^{p+1}(U; A^q) \quad (7.28)$$

同様にコホモロジー群は次で定義される。

$$H^p(U; A^q) = \{\omega \in C^p(U; A^q); \delta\omega = 0\} / \delta(C^{p-1}(U; A^q)) \quad (7.29)$$

ここで 1 の分解を用いて

$$C(U; A^q) = \bigoplus_p C^p(U; A^q) \quad (7.30)$$

に対するホモトピー作用素  $L$  を

$$L : C^p(U; A^q) \rightarrow C^{p-1}(U; A^q) \quad (7.31)$$

を定義する。ただし  $U_{\alpha_0 \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}}$  上の微分形式を  $\rho_\alpha \omega_{\alpha_0 \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}}$  として、この外では常に 0 とする。として 1 の分割  $\rho_\alpha$  の定義から作用素  $L$  は次のように作用する。

$$\begin{aligned} (L\omega)_{\alpha_0 \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}} &= \sum_{\alpha} \rho_\alpha \omega_{\alpha \alpha_0 \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}} \\ \omega &= \omega_{\alpha_0 \alpha_1, \dots, \alpha_p} \in C^p(U; A^q) \end{aligned} \quad (7.32)$$

となるので境界演算子を作用させると

$$\begin{aligned} (\delta L\omega)_{\alpha_0 \alpha_1, \dots, \alpha_p} &= \sum_j (-1)^j (L\omega)_{\alpha_0 \alpha_1, \dots, \check{\alpha}_j \dots \alpha_p} \\ &= \sum_{j, \alpha} (-1)^j \rho_\alpha \omega_{\alpha \alpha_0 \alpha_1, \dots, \check{\alpha}_j \dots \alpha_p} \end{aligned} \quad (7.33)$$

また  $\delta$  は境界演算子だから定義から

$$\begin{aligned} (L\delta\omega)_{\alpha_0 \alpha_1, \dots, \alpha_p} &= \sum_{\alpha} \rho_\alpha (\delta\omega)_{\alpha \alpha_0 \alpha_1, \dots, \alpha_p} \\ &= \sum_{\alpha} \rho_\alpha \left( \sum_j (-1)^{j+1} \omega_{\alpha \alpha_0 \alpha_1, \dots, \check{\alpha}_j \dots \alpha_p} \right) \\ &= \sum_{\alpha} \rho_\alpha \omega_{\alpha_0 \alpha_1, \dots, \alpha_p} + \sum_{j, \alpha} (-1)^{j+1} \rho_\alpha \omega_{\alpha \alpha_0 \alpha_1, \dots, \check{\alpha}_j \dots \alpha_p} \end{aligned}$$

3 行目では  $\alpha = \alpha_j$  の時とわけている。さらに  $\sum_a \rho_a = 1$  なので上の式を足し合わせると。

$$\delta L\omega + L\delta\omega = \omega \quad (7.34)$$

となることがわかる。ただし、

$$\omega = \omega_{\alpha_0\alpha_1, \dots, \alpha_p} \in C^p(U; A^q), \quad p \geq 1 \quad (7.35)$$

である。よって  $\delta\omega = 0$  であれば式 7.34 から

$$\omega = \delta L\omega \quad (7.36)$$

コホモロジー群は次のようになる。

$$H^p(U; A^q) = \{\delta(L\omega) \in C^p(U, A^q); \delta\omega = 0\} / \delta(C^{p-1}(U; A^q)) = 0, \quad p \geq 1 \quad (7.37)$$

である。では  $p = 0$  の場合は

$$H^0(U; A^q) = \{\omega \in C^0(U, A^q); \delta\omega = 0\} \quad (7.38)$$

だから式 7.33 から

$$\omega = \omega_{\alpha_1} + (1 - \rho_1)\omega_{\alpha_2} \quad (7.39)$$

だから  $\delta\omega_{\alpha_1\alpha_2} = 0$  は端点が等しいことを示し、近傍  $U_{\alpha_1} \cap U_{\alpha_2}$  において

$$\omega_{\alpha_1} = \omega_{\alpha_2} \quad (7.40)$$

が成り立ち、多様体  $M$  上全てで次々に  $\omega_{\alpha_1} = \omega_{\alpha_2}$  が成立し、 $\omega = (\omega_\alpha)$  が全領域で成り立ち、 $q$ -次微分形式が成り立つ。つまり

$$H^0(U; A^q) = A^q(M) \quad (7.41)$$

であり、コホモロジー群により微分形式が多様体上にできる興味ある結果が得られた。

この結果ははじめの出発点である式 7.27 を  $p$  次双対鎖をとったによる。

式 7.28 のように  $C^p(U, R)$  上に双対境界作用素を定義しようとする

$$L : C^p(U; R) \rightarrow C^{p-1}(U; R) \quad (7.42)$$

定数  $c \in C^p(U; R)$  について  $\rho_\alpha c$  が決まらないので  $L$  は定義できない。

ここで  $f$  を実数を定値関数とみなす写像であるとする。次の写像

$$H^p(U, R) \rightarrow H^p(M) \quad (7.43)$$

をつくるために次の定数  $c$  を出発点に選ぶ。

$$\begin{aligned} c &= c_{\alpha_0\alpha_1, \dots, \alpha_p} \in C^p(U, R) \\ \delta c &= 0 \end{aligned}$$

次に下図ダイアグラムを参考にして  $p$  次双対鎖上の  $0$  次微分形式を

$$\omega^{(p,0)} = f(c) \in C^p(U, A^0) \quad (7.44)$$

と表すと

$$\delta\omega^{(p,0)} = \delta f(c) = f(\delta c) = 0 \quad (7.45)$$

となるが

$$H^p(U, A^0) = 0 \quad (7.46)$$

なので

$$\omega^{(p,0)} = \delta\theta^{(p-1,0)} \quad (7.47)$$

を満たす。

$$\theta^{(p-1,0)} = (\theta_{\alpha_0\alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}}^{(p-1,0)}) \in C^{p-1}(U, A^0) \quad (7.48)$$

が存在する。次に微分 1 形式を

$$\omega^{(p-1,1)} = d\theta^{(p-1,0)} = \left( d\theta_{\alpha_0\alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}}^{(p-1,0)} \right) \in C^{p-1}(U, A^1) \quad (7.49)$$

とおくと境界作用素を作用させれば

$$\delta\omega^{(p-1,1)} = \delta d\theta^{(p-1,0)} = d\delta\theta^{(p-1,0)} = d\omega^{(p,0)} = df(c) = 0 \quad (7.50)$$

となるが

$$H^{p-1}(U, A^1) = 0 \quad (7.51)$$

なので

$$\omega^{(p-1,1)} = \delta\theta^{(p-2,1)} \quad (7.52)$$

となる。

$$\theta^{(p-2,1)} = (\theta_{\alpha_0\alpha_1, \dots, \alpha_{p-2}}^{(p-2,1)}) \in C^{p-2}(U, A^1) \quad (7.53)$$

が存在する。さらに次に

$$\omega^{(p-2,2)} = d\theta^{(p-2,1)} = \left( d\theta_{\alpha_0\alpha_1, \dots, \alpha_{p-2}}^{(p-2,1)} \right) \in C^{p-2}(U, A^2) \quad (7.54)$$

とおくことを連続して繰り返すと最後には

$$\omega^{(0,p)} = d\theta^{(0,p-1)} = \left( d\theta_{\alpha_0}^{(0,p-1)} \right) \in C^0(U, A^p) \quad (7.55)$$

のように微分 p 形式に達する。つまりまとめると次のように境界作用素で 0 次微分形式の定数がつくられ

$$f(c) = \omega^{(p,0)} = \delta\theta^{(p-1,0)} \quad (7.56)$$

次のように微分作用素を作用させ、p 次元を微分形式に割り振り

$$d\theta^{(p-1,0)} = \omega^{(p-1,1)} \quad (7.57)$$

これを繰り返すと次のように M 上に p 次微分形式が作成される。

$$d\theta^{(0,p-1)} = \omega^{(0,p)} \quad (7.58)$$

そして双対鎖ができれば

$$\delta\omega^{(0,p)} = \delta d\theta^{(0,p-1)} = d\delta\theta^{(0,p-1)} = d\omega^{(1,p-1)} = dd\theta^{(1,p-2)} = 0 \quad (7.59)$$

であるから  $\omega^{(0,p)}$  は  $M$  上で定義された  $p$  次微分形式であり

$$d\omega^{(0,p)} = dd\theta^{(0,p-1)} = 0 \quad (7.60)$$

だから閉微分形式であるので

$$\omega^{(0,p)} \in A^p(M), \quad \omega^{(0,p)} \in Z^p(M) \quad (7.61)$$

と書き、その代表する  $H^p(U; R)$  の元を  $[c]$  と書く。  $[\omega^{(0,p)}] \in H^p(M)$  をこの元  $[c]$  に対応させる時、写像

$$H^p(U, R) \rightarrow H^p(M) \quad (7.62)$$

が  $[c]$  の選びかたや  $\theta^{(0,p-1)}, \theta^{(p-1,0)}$  の選び方には依存しない。逆に

$$H^p(M) \rightarrow H^p(U, R) \quad (7.63)$$

を見るには閉じた  $p$  次微分形式

$$\omega \in Z^p(M) \subset A^p(M) \quad (7.64)$$

から出発し、

$$\omega^{(0,p)} = \omega|_{U_{\alpha_0}}, \quad \omega_{\alpha}^{(0,p)} \in C^p(U, A^0) \quad (7.65)$$

とおくと

$$\delta\omega^{(0,p)} = 0 \quad (7.66)$$

また、  $d\omega_{\alpha_0}^{(0,p)} = 0$  であるから  $\omega_{\alpha}^{(0,p)} = d\theta_{\alpha_0}^{(0,p-1)}$  となる  $\theta_{\alpha_0}^{(0,p-1)} \in A^{p-1}(U_{\alpha_0})$  が存在する。次に

$$\theta^{(0,p-1)} = [\theta_{\alpha_0}^{(0,p-1)}] \in C^0(U, A^{p-1}) \quad (7.67)$$

とおく。

$$\omega^{(1,p-1)} = \delta\theta^{(0,p-1)} \in C^1(U, A^{p-1}) \quad (7.68)$$

と定義する。

$$d\omega_{\alpha_0}^{(1,p-1)} = d\delta\theta^{(0,p-1)} = \delta d\theta^{(0,p-1)} = \delta\omega^{(0,p)} = 0 \quad (7.69)$$

であるから

$$\omega^{(1,p-1)} = [\omega_{\alpha_0}^{(1,p-1)}] \quad (7.70)$$

に Poincare の補題を適応すれば

$$\omega^{(1,p-1)} = d\theta^{(1,p-2)} \quad (7.71)$$

が成り立つ

$$\theta^{(1,p-2)} \in C^1(U; A^{p-2}) \quad (7.72)$$

が存在するので  $H^p(M) \rightarrow H^p(U, R)$  は同型写像である。

微分作用素と境界作用素を組み合わせることで図式表現を用いると下のようなダイアグラムが作成できる。

$$\begin{array}{ccccccc}
 C^{p+1}(U; R) & \xrightarrow{f} & C^{p+1}(U; A^0) & \xrightarrow{d} & C^{p+1}(U; A^1) & \cdots & C^{p+1}(U; A^p) \\
 \uparrow \delta & & \uparrow \delta & & \uparrow \delta & & \uparrow \delta \\
 C^p(U; R) & \xrightarrow{f} & C^p(U; A^0) & \xrightarrow{d} & C^p(U; A^1) & \cdots & C^p(U; A^p) \\
 \uparrow \delta & & \uparrow \delta & & \uparrow \delta & & \uparrow \delta \\
 C^{p-1}(U; R) & \xrightarrow{f} & C^{p-1}(U; A^0) & \xrightarrow{d} & C^{p-1}(U; A^1) & \cdots & C^{p-1}(U; A^p) \\
 \uparrow \delta & \vdots & \uparrow \delta & \vdots & \uparrow \delta & \vdots & \uparrow \delta \\
 C^0(U; R) & \xrightarrow{f} & C^0(U; A^0) & \xrightarrow{d} & \cdots & \xrightarrow{d} & C^0(U; A^p)
 \end{array} \tag{7.73}$$

つまり境界作用素は双対鎖の次元を増やし、微分作用素は微分形式の次元を増やす。この過程をまとめると

$$\begin{aligned}
 ic &= \omega^{(p,0)} = \delta\theta^{(p-1,1)} \\
 d\theta^{(p-1,0)} &= \omega^{(p-1,1)} = \delta\theta^{(p-2,1)} \\
 d\theta^{(p-2,1)} &= \omega^{(p-2,2)} = \delta\theta^{(p-3,2)} \\
 &\dots \dots \dots \\
 d\theta^{(1,p-2)} &= \omega^{(1,p-1)} = \delta\theta^{(0,p-1)} \\
 d\theta^{(0,p-1)} &= \omega^{(0,p)}
 \end{aligned}$$

となる。

$$\delta\omega^{(0,p)} = d\delta\theta^{(0,p-1)} = \delta d\theta^{(0,p-1)} = d\omega^{(1,p-1)} = dd\theta^{(1,p-2)} = 0 \tag{7.74}$$

よって  $\omega^{(0,p)}$  は  $M$  上で定義された  $p$  次微分形式であり

$$\omega^{(0,p)} \in A^p(M) \tag{7.75}$$

また、 $d\omega^{(0,p)} = dd\theta^{(0,p-1)} = 0$  だから閉形式であり

$$\omega^{(0,p)} \in Z^p(M) \tag{7.76}$$

となるわけである。

これから次のような de Rham の定理がいえる。

**定理 19. de Rham の定理**

$U = \{U_\alpha\}$  を局所有限で可縮な  $M$  の被覆とする。このとき Čech のコホモロジー群  $H^p(U; R)$  と de Rham のコホモロジー群  $H^p(M)$  との間に自然な同型対応が存在する。

**7.4.1 holonomy**

微分可能な多様体上  $M$  で次のような閉曲線  $\xi$  により点  $p$  に戻るような曲線を考える。

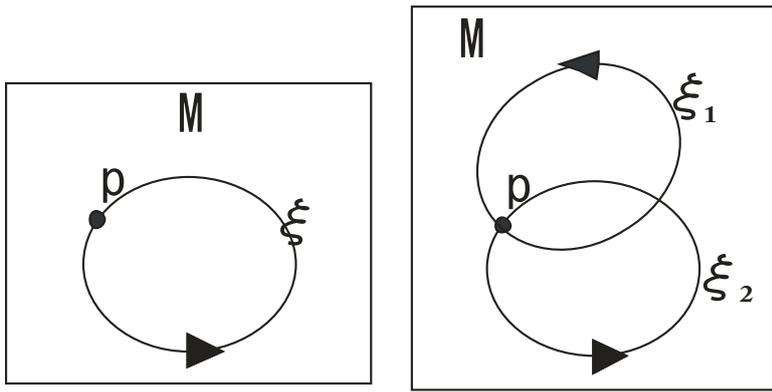


図 7.4: 点  $p$  を基点にした 2 つのループ

ファイバ上のベクトル空間のあるベクトル  $v$  について曲線を 1 周する間に接続に対応し、

$$v \rightarrow \Omega(\xi)v \quad (7.77)$$

とかけたとき  $\Omega(\xi)$  はホロノミであるという。図右に見るようにホロノミは group をつくる。  $p$  を基点として

$$\xi_3 = \xi_1 + \xi_2 \quad (7.78)$$

とすると

$$\Omega(\xi_3) = \Omega(\xi_1)\Omega(\xi_2) \quad (7.79)$$

を満足する。

多様体を  $M$  として底にもち次のような座標とベクトル空間のセットからなる集合  $U_i, U_j$  として

$$U_i(x_i, v_i) \quad (7.80)$$

$$U_j(x_j, v_j) \quad (7.81)$$

とおくと  $U_i, U_j$  の共通集合の領域では  $i$  から  $j$  への変換関数を  $g_{ij}(x)$  とおいて、次の図のような場合

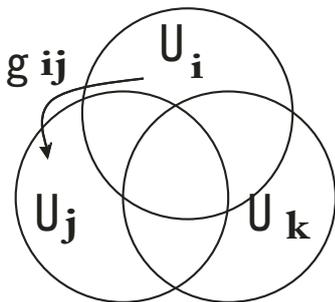


図 7.5: 変換関数  $g_{ij}$

$$v_k = g_{ki}(x)v_i \quad (7.82)$$

$$v_k = g_{kj}(x)v_j = g_{kj}(x)g_{ji}(x)v_i \quad (7.83)$$

が成り立つので

$$g_{ki}(x) = g_{kj}(x)g_{ji}(x) \quad (7.84)$$

が成り立つ。これを cocycle 条件という。

#### 7.4.2 CS theory Heegaard 分解

トーラスの中に独立したサイクル  $\alpha$ 、 $\beta$  をつくる。 $\alpha$  は可縮とする。

この補集合から双対なトーラスをつくる  $\beta$  が可縮になる。

中身のつまったトーラスは  $S^1 \times S^2$  になる。しかし反転かけると  $S^3$  になる。

$$(T_{\alpha\beta} \cdot T_{\alpha\beta}) = S^1 \times S^2$$

$$(T_{\alpha\beta} \cdot T_{\beta\alpha}) = S^3$$

これは 3 次元空間に無限遠の一点を付け加えればいい。

### 7.5 写像度

#### 定義 70. 写像次数

$n$  次の向きづけられた閉じた多様体を  $M, N$  とする。 $M$  から  $N$  の中へのなめらかな写像

$$\psi : M \rightarrow N \quad (7.85)$$

があると  $N$  上の  $n$  形式  $\omega$  を  $M$  上の  $n$  形式  $\psi^*\omega$  に引き戻す写像を次のように定義する。

$$\psi^* : H^n(N) \rightarrow H^n(M) \quad (7.86)$$

この時、 $\int_N \omega$  と  $\int_M \psi^*\omega$  の積分を考える。 $\psi$  は微分同相 (1 対 1 で逆も  $C^\infty$  級) とは限らないから次のようにおく。

$$\int_M \psi^*\omega = \deg(\psi) \int_N \omega \quad (7.87)$$

この時の実数  $\deg(\psi)$  を写像次数 (degree of mapping) という。

写像次数  $\deg(\psi)$  は  $M$  から  $N$  への写像  $\psi$  によって  $N$  が何回覆われるかの実効回数を表す。

これから巻き数 (winding number) とよばれる。

$M$  内の点  $P$  での接空間を  $T_P(M)$  とし、 $N$  内の点  $Q = \psi(P)$  での接空間を  $T_Q(N)$  とする。

線形写像  $d\psi(P) : T_P(M) \rightarrow T_Q(N)$  が 1 対 1 の写像であれば写像  $\psi$  は正則 (regular) であるという。

この時  $N$  内の正則値  $Q$  に対して  $\psi^{-1}(Q)$  は次のように有限個の点からなる。

$$\psi^{-1}(Q) = \{P_1, P_2, \dots, P_r\} \quad (7.88)$$

そしてこの有限な  $P_1, P_2, \dots, P_r$  の点の非連結な近傍  $U_1, U_2, \dots, U_r$  に対応する  $Q$  の近傍  $V$  が次の図のように存在する。

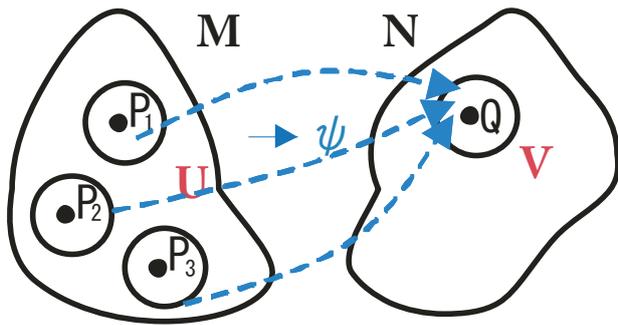


図 7.6: N 上の正則値  $Q \in V$  と非連結な逆像  $P_i \in U$

正則値  $Q$  とその逆像  $P$  の座標を

$$Q = \{y^1, y^2 \dots y^n\}, \quad P = \{x^1, x^2 \dots x^n\} \quad (7.89)$$

とする。

写像  $\psi$  と異なり線形写像  $d\psi(P)$  は  $T_P(M)$  を  $T_Q(N)$  に同相に写像するのでヤコビアンは

$$J(P) = \left| \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right| \quad (1 \leq i, j \leq n) \quad (7.90)$$

は 0 成分を持たない。さらに  $\psi$  は  $P$  の近傍  $U$  を  $Q$  の近傍  $V$  に微分同相に写像する。

ヤコビアンが正なら向きも同じになり、負であれば向きが逆になる。

像  $\psi^{-1}(P)$  は有限個の点からなるので  $\psi: M \rightarrow N$  の正則値  $Q$  における写像次数は次のように表される。

$$\deg(\psi) = \sum_{P \in \psi^{-1}(Q)} \text{sgn}(J(P)) \quad (7.91)$$

これは例えば次のような関数がある時、ヤコビアンはこの関数の傾きであるので写像次数は 1 となる。

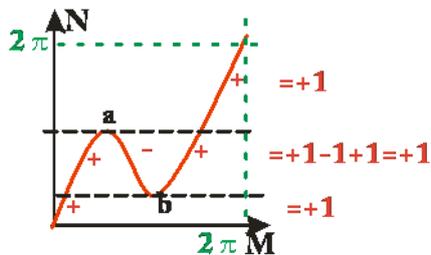


図 7.7:  $\psi: S^1 \rightarrow S^1$  の写像度の例、臨界点をのぞけばどこも +1 になる。点 a, b は臨界点である。

これは  $M = S^1$  を 1 周 ( $2\pi$ ) する間に  $N = S^1$  が 1 回覆われたことに対応している。

従って写像次数は全ての正則値で同じ値をとる。しかも整数値しかとらない。

これは場の理論と関係が深く、次のような場の量  $\psi^a$  を考える。

$$\psi^a(x) = \phi^a(x) / \sqrt{\sum_{a=0}^n |\phi^a(x)|^2} \quad (7.92)$$

ただし、

$$\sum_{a=0}^n |\phi^a(x)|^2 = 1 \quad (7.93)$$

であり、 $\phi$  は次のようななめらかな写像であるとする。

$$\phi : M \rightarrow S^n \quad (7.94)$$

$\omega$  を体積形式として  $Vol(S^n)$  で体積を表し、

$$\int_N \omega = Vol(S^n) \quad (7.95)$$

引き戻しによる積分は  $\epsilon$  を完全反対称テンソルとして

$$\int_M \phi^* \omega = \frac{1}{n!} \int_M \epsilon_{a_0 a_1 \dots a_n} \phi^{a_0} d\phi^{a_1} \wedge \dots \wedge d\phi^{a_n} \quad (7.96)$$

よって式 7.87 より

$$\deg(\phi) = \frac{1}{Vol(S^n)} \int_M \epsilon_{a_0 a_1 \dots a_n} \phi^{a_0} d\phi^{a_1} \wedge \dots \wedge d\phi^{a_n} \quad (7.97)$$

ここで  $n$  次元球の体積は

$$Vol(S^n) = 2\pi^{\frac{n+1}{2}} \left( \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \right)^{-1} \quad (7.98)$$

で与えられ  $Vol(S^1) = 2\pi$ 、 $Vol(S^2) = 4\pi$  を得る。巻き数  $\deg(\phi)$  は整数値をとる。

これは物理における場の量には運動の法則とは別な位相的性質に起因した保存量があることを示し、これをトポロジカル量子数 (topological quantum number) という。

## 7.6 量子コホモロジー環

$n = 2$  の複素射影平面を量子論に拡張する。そのために量子カップ積  $\cup_q$  を次のように用いる。

$$x^3 = q$$

とおき、

$$x^1 \cup_q x^2 = q$$

$$x^2 \cup_q x^2 = qx$$

となる。 $q = 0$  とすれば式 7.3 と同じになる。

さて、ここで双対関係  $[u_d]^* \rightarrow x^{(4-d)}$  を用いて内積表現  $\cdot_q$  に変えことを考える。まず単純に

$$[u_3]^* \cdot_q [u_2]^* = qu_4$$

$$[u_2]^* \cdot_q [u_2]^* = qu_3$$

のようにはならない。次のようになる。

$$u_2 \cdot_q u_0 = qu_4$$

$$u_0 \cdot_q u_0 = qu_2 \quad (7.99)$$

これを理解するため、第 1 章で取り上げた  $d$  次有理関数をまず考える。

$A \cap_d B$  を  $A$  と  $B$  が交わる  $d$  次元有理関数の和集合とする。これを用いて、古典的な  $\cdot$  が幾何的には単なる交点数で  $\mathbb{C}P^2$  に含まれる図形をおおざっぱに  $A, B$  として

$$A \cap B = \sum A \cap_d B \quad (7.100)$$

を数え上げればよかった。しかし、 $\cdot_q$  は  $q$  のべき級数という意味になり、

$$A \cdot_q B = \sum q^d (A \cap_d B) \quad (7.101)$$

となる。例えば  $d=0$  の時、 $f, g, h$  はともに定数になる。

$$A \cap_0 B = A \cap B$$

であり、 $q=0$  とすると式 7.101 から交点の数ということがわかる。

$d=1$  の時、 $f, g, h$  は 1 次関数である。例えば

$$h(z) = a(z - b)$$

のようにおける。定義域  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  の変数変換をして  $b$  が無限大  $\infty$  になるようにする。例えば

$$z = \frac{b(w+1)}{w}$$

とすると

$$h = \frac{ab}{w}$$

となる。 $\phi \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  として有理関数の成分は

$$\phi(z) = \left( \frac{f(z)}{h(z)}, \frac{g(z)}{h(z)} \right) = \frac{w}{ab} \left( a' \left( \frac{b(w+1)}{w} + b' \right), c' \left( \frac{b(w+1)}{w} + d' \right) \right)$$

とおけるので、改めて

$$\phi(z) = (az + b, cz + d)$$

のように 1 次関数の成分を持つようになる。これは 1 次有理曲線の像が 1 次関数で直線あることを表す。

以上から式 7.99 を考えると  $u_0$  は点であったから  $A$  と  $B$  がそれぞれ  $\mathbb{C}P^2$  の 1 点  $A, B$  の時、

$d=1$  の場合はこの点  $A, B$  を通る直線の和集合になることを表し、当然 2 点で直線が 1 つ決まるので

$$u_0 \cap_1 u_1 = 1 \text{ Line}$$

となる。直線が表す 2 次ホモロジー類が  $u_2$  だから  $u_0 \cdot_q u_0$  は

$$u_0 \cdot_q u_0 = qu_2 + q^2 + q^3 + \dots$$

となるが複素射影平面上では  $q$  は 2 次以上にならないことが知られているので式 7.99 の下の式

$$u_0 \cdot_q u_0 = qu_2$$

が出る。次に上の式についてはこれは  $u_0$  と  $u_2$  つまり、点と直線の交点になる。そこで  $A$  は直線、 $B$  は点とすると

$$u_0 \cap_1 u_2 = \bigcup_{a \in A} \bar{a}B$$

の直線群になり、これは平面全体を覆うことができるので、無限遠に拡張すると  $\mathbb{C}P^2$  全体になる。

$$u_0 \cdot_1 u_2 = u_4$$

### 7.6.1 線型独立性

$\{x_0, \dots, x_p\} \subseteq \mathbb{R}^n$  として線分  $x_1 - x_0, \dots, x_p - x_0$  が線形独立で

$$\sum s_i x_i = \sum t_i x_i \text{ and } \sum s_i = \sum t_i$$

であれば

$$s_i = t_i \tag{7.102}$$

が各  $i = 0, \dots, p$  が成り立つ。これは  $\sum s_i x_0 = \sum t_i x_0$  だから

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=0}^p (s_i - t_i) x_i = \sum_{i=0}^p (s_i - t_i) x_i - \left[ \sum_{i=0}^p (s_i - t_i) \right] x_0 \\ &= \sum_{i=1}^p (s_i - t_i) (x_i - x_0) \end{aligned}$$

のようにかける。これが任意の  $x_i - x_0$  に、成り立つためには式 7.102 が成り立つ。

### 7.6.2 一般化

ここまでの計算においていずれも 0 次元ホモロジー群は

$$H_0(K) \simeq \mathbb{Z}$$

となった。実はこれは単体的複体には共通した性質であることを示そう。

$K$  が連結であるとする。任意の 0-単体の対  $p_i$  と  $p_j$  について

$$\partial_1((p_i p_k) + m(p_k p_l) + n(p_m p_j)) = p_j - p_i$$

を満たすような 1-単体の例  $(p_i p_k), (p_k p_l), \dots, (p_m p_j)$  が存在する。この時  $p_i$  は  $p_j$  にホモロガスであるから

### 7.6.3 Link 同相

次のような微分同相写像  $h$  を定義する

$$h : \mathbb{R}^3 \times I \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad h_t(\cdot, t) \quad t \in [0, 1] \tag{7.103}$$

また 2 つの関数  $f, g$  は次の関係があれば Link 同相である。

$$\begin{aligned} h_0 &= I \\ g &= h_1 \circ f \end{aligned}$$

次に  $k$ -component は次のような関係である。

$S^1$  は  $\mathbb{R}^3$  空間への埋め込みで

$$\coprod_k S^1 \text{ into } \mathbb{R}^3$$

また  $\mathbb{R}^3$  から  $\mathbb{R}^2$  への射影を次で表す

$$\pi(x, y, z) = (x, y)$$

link  $L$  を次の写像の表現とする。

$$f : \prod_k S^1 \text{ into } \mathbb{R}^3$$

従って

$$\pi \circ f \tag{7.104}$$

となる。

## 8 Hopf 代数 [35]

ここまで幾何的にホモロジー、コホモロジーを見てきたので、ここで代数的な側面からも双対の関係をみておく。

### 8.1 coalgebra

$k$  を体として  $k \subset \mathbb{C}$ 、 $A$  を単位元  $I$  を持つ環であるとする。また、 $k$  上にベクトル空間ができて、

$$A \times A \rightarrow A, (a, b) \mapsto ab$$

が双線型写像であれば  $A$  を  $k$  代数 ( $k$ -algebra) という。

この時、双線形写像だから、次のような対応する線形写像が存在する。

$$m : A \otimes A \rightarrow A, a \otimes b \mapsto ab$$

また、単位元  $I$  は線形写像

$$u : k \rightarrow A, \alpha \mapsto \alpha \cdot I$$

どちらも行先が同じ  $A$  である。わかりやすく可換図で次を表すことにしよう。

- 結合律  $(a, b)c = a(b, c)$

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A \otimes A & \xrightarrow{m \otimes id} & A \otimes A \\ \downarrow id \otimes m & & \downarrow m \otimes id \\ A \otimes A & \xrightarrow{m} & A \end{array}$$

- 単位律  $Ia = a = aI$

$$\begin{array}{ccccc} k \otimes A & \xrightarrow{u \otimes id} & A \otimes A & \xleftarrow{id \otimes u} & A \otimes k \\ & \searrow \sim & \downarrow m & \sim \swarrow & \\ \alpha \otimes a & & A & & a \otimes \alpha \\ & \searrow & & \swarrow & \\ & & \alpha a \quad a \alpha & & \end{array}$$

この組み合わせ、 $(A, m, u)$  が  $k$ -algebra である。そこで上図の矢印を反対にすると余代数 (coalgebra) が定義できる。これはあるベクトルから双対な空間をつくることに対応する。

$C$  はベクトル空間として、この2つの双線型写像を次のように定義する。

$$\begin{aligned} \Delta : C &\rightarrow C \otimes C \\ \epsilon : C &\rightarrow k \end{aligned}$$

- 余結合律

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\Delta} & C \otimes C \\ \downarrow \Delta & & \downarrow id \otimes \Delta \\ C \otimes C & \xrightarrow{\Delta \otimes id} & C \otimes C \otimes C \end{array}$$

- 余単位律  $I\epsilon = \epsilon = \epsilon I$

$$\begin{array}{ccccc} & & c & c & \\ & & \swarrow & \searrow & \\ \alpha \otimes a & & C & & a \otimes \alpha \\ & \sim \swarrow & \downarrow \Delta & \searrow \sim & \\ k \otimes C & \xleftarrow{\epsilon \otimes id} & C \otimes C & \xrightarrow{id \otimes \epsilon} & C \otimes k \end{array}$$

この組み合わせは  $(C, \Delta, \epsilon)$  が  $k$ -coalgebra といふ。  $\Delta$  は comultiplication(余積)、  $\epsilon$  は余単位積 (counit) と呼ばれる。いくつかの具体例を見てみよう。

- 差分

例えば  $S$  を集合として  $S$  の元全体を基底にとるベクトル空間を

$$kS = \bigoplus_{s \in S} ks$$

とする。対応して comultiplication を

$$\Delta : kS \rightarrow kS$$

counit を

$$\epsilon : kS \rightarrow k$$

を  $s \in S$  に対し、

$$\Delta(s) = s \otimes s, \quad \epsilon(s) = 1$$

となるように決めると  $kS$  は  $k$ -coalgebra となる。これは可換であることから

$$(\Delta \otimes id)(\Delta(s)) = \Delta(s) \otimes s = s \otimes s \otimes s = s \otimes \Delta(s) = (id \otimes \Delta)(\Delta(s))$$

$$(\epsilon \otimes id)(\Delta(s)) = \epsilon(s) \otimes s = I \otimes s = s = I \otimes s = s \otimes \epsilon(s) = (\epsilon \otimes id)(\Delta(s))$$

となり、  $k$ -coalgebra となる。

- 作用素

さらに  $\{I, \partial\}$  を基底とするベクトル空間  $C = k \oplus k\partial$  を考えると  $\Delta : C \rightarrow C \otimes C, \epsilon : C \rightarrow k$  を

$$\Delta(\partial) = \partial \otimes I + I \otimes \partial, \quad \epsilon(\partial) = 0$$

$$\Delta(I) = I \otimes I, \quad \epsilon(I) = I$$

とすれば

$$\begin{aligned} (\Delta \otimes id)(\Delta(\partial)) &= \Delta(\partial) \otimes I + \Delta(I) \otimes \partial \\ &= \partial \otimes I \otimes I + I \otimes \partial \otimes I + I \otimes I \otimes \partial \\ &= \partial \otimes \Delta(I) + I \otimes \Delta(\partial) = (id \otimes \Delta)(\Delta(\partial)) \end{aligned}$$

$$(\epsilon \otimes id)(\Delta(s)) = \epsilon(s) \otimes s = I \otimes s = s = I \otimes s = s \otimes \epsilon(s) = (\epsilon \otimes id)(\Delta(s))$$

となり  $k$ -coalgebra となる。

- 微分作用素

さらに  $\{d_0, \dots, d_n, \dots\}$  を規定とするベクトル空間を次で定義する。

$$B(k) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} kd_n$$

この時、

$$\Delta(d_n) = \sum_{i+j=n} d_i \otimes d_j, \quad \epsilon(d_n) = \begin{cases} 1 & (n=0) \\ 0 & (n>0) \end{cases}$$

となるように決めれば k-coalgebra となる。

これらはライプニッツ則などの微分関係を満たしていることに注意する。例えば

$$s : k[x] \rightarrow k[x], \quad f(x) \mapsto f(x+1), \quad \partial = \frac{d}{dx}$$

とすると、関数に対する作用

$$\begin{aligned} s(fg) &= s(f)s(g) \\ \partial(fg) &= \partial(f)g + f\partial(g) \end{aligned}$$

であり、 $a \in k$  の時、次のように定数に対する作用である。

$$\begin{aligned} s(a) &= a = \epsilon(s)a \\ \partial(a) &= 0 = \epsilon(\partial)a \end{aligned}$$

また、上記の微分作用素の場合特に sequence of divided powers という。これは

$$d_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n}$$

に対応する。この時、

$$d_n(fg) = \sum_{i+j=n} d_i(f)d_j(g)$$

が成り立つ。k-coalgebra の要素  $A$  が次の図式を満たせば  $A$  は可換 (**commutative**) という。この図の  $tw$  ひねり写像 **twist map** で

$$tw : a \otimes b \mapsto b \otimes a$$

を満たす。

$$\begin{array}{ccc} & m \swarrow & A \otimes A \\ A & & \uparrow tw \\ & m \searrow & A \otimes A \end{array}$$

さらに、この矢印を逆にして余可換性 (**cocommutative**) を次の図式で定義する。

$$\begin{array}{ccc} & \Delta \nearrow & C \otimes C \\ C & & \downarrow tw \\ & \Delta \searrow & C \otimes C \end{array}$$

## 8.2 記法

$C$  を  $k$ -coalgebra とすると  $c \in C$  について余積  $\Delta$  は

$$\Delta(c) = \sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i \quad (a_i, b_i \in C)$$

については今後、次の簡略記号を用いる。

$$\Delta(c) = \sum c_1 \otimes c_2$$

例えば余結合律は次のようになる。

$$\sum \Delta(c_1) \otimes c_2 = \sum c_1 \otimes \Delta(c_2) \quad (\forall c \in C)$$

しかし、明らかに  $\Delta$  はどこに入れても結果が同じになるので、この式は

$$\sum \Delta(c_1) \otimes c_2 = \sum c_1 \otimes \Delta(c_2) = \sum c_1 \otimes c_2 \otimes c_3$$

とかくことにすると、これで  $c$  に 2 回  $\Delta$  を作用させたことになる。

以下同様に 3 回作用させれば

$$\sum c_1 \otimes c_2 \otimes c_3 \otimes c_4$$

となる。この時の  $\sum$  は標準的な和とは異なり、簡略された意味になるので注意する。

この便利な記法で同じように余単位律を表現すると

$$\sum \epsilon(c_1)c_2 = c = \sum c_1\epsilon(c_2) \quad (\forall c \in C)$$

となる。よって余可換表現は

$$\sum c_1 \otimes c_2 = \sum c_2 \otimes c_1 \quad (\forall c \in C)$$

別に

$$\Delta(c) = \sum_{(c)} c_{(1)} \otimes c_{(2)}$$

と添え字を書く場合もある。これらから次のような代数関係が成り立つ。

$$\begin{aligned} \sum c_1 \otimes \cdots \otimes \epsilon(c_i) \otimes \cdots \otimes c_{n+1} &= \sum c_1 \otimes \cdots \otimes \epsilon(c_i)c_{i+1} \otimes \cdots \otimes c_{n+1} \\ &= \sum c_1 \otimes \cdots \otimes c_{i-1}\epsilon(c_i) \otimes \cdots \otimes c_{n+1} \\ &= \sum c_1 \otimes \cdots \otimes c_n \end{aligned}$$

$$\sum f(c_2) \otimes \Delta(c_1) = \sum f(c_3) \otimes c_1 \otimes c_2$$

$$\sum \Delta(c_2) \otimes f(c_1) = \sum c_2 \otimes c_3 \otimes f(c_1)$$

$$\sum f(c_1) \otimes \epsilon(c_3) \otimes c_2 = \sum f(c_1) \otimes c_2$$

$$\sum \epsilon(c_1) \otimes f(c_3) \otimes \epsilon(c_2) = \sum f(c_2) \otimes c_1$$

$$\sum \epsilon(c_1) \otimes \epsilon(c_3) \otimes f(c_2) = f(c)$$

つまり、 $c_i$  に  $\Delta$  がかかると  $c_i \otimes c_{i+1}$  にかわり、 $c_{i+1}, c_{i+2}$  は  $c_{i+2}, c_{i+3}$  に 1 つ増える。  
逆に  $\epsilon(c_i)$  があると  $c_{i+1}, c_{i+2}$  は  $c_i, c_{i+1}$  に 1 つ減ると考えればよい。

### 8.3 双対代数

$C$  を  $k$ -coalgebra、 $A$  を  $k$ -algebra とし、 $Hom_k(C, A)$  を  $C$  から  $A$  への  $k$ -linear map の集合とすると  $Hom_k(C, A)$  の積  $*$  を次で定義する。

$$(f * g)(c) = \sum f(c_1)g(c_2), \quad (f, g \in Hom_k(C, A), c \in C) \quad (8.1)$$

図式で表現すると

$$f * g : C \xrightarrow{\Delta} C \otimes C \xrightarrow{f \otimes g} A \otimes A \xrightarrow{m} A$$

である。この時  $*$  の単位元が  $u \circ \epsilon$  であり  $Hom_k(C, A)$  は  $k$ -algebra になる。

特に  $C$  の双対空間  $C^* = Hom_k(C, k)$  は  $*$  積により、 $k$ -algebra となる。これを  $C$  の双対代数 (dual algebra) という。

例えば  $n^2$  の基底を持つベクトル空間を

$$C = \bigotimes_{i,j=1}^n kX_{ij}$$

として余積と余単位積を次で定義する。

$$\Delta(X_{ij}) = \sum_{s=1}^n X_{is} \otimes X_{sj}, \quad \epsilon(X_{ij}) = \delta_{ij}$$

すると、この双対代数  $C^*$  は次の行列代数と同型である。

$$C^* \simeq M_n(k)$$

$$\phi \mapsto (\phi(X_{ij}))_{i,j}$$

### 8.4 coalgebra map

algebra の環準同型かつ線型写像である場合、algebra-map という。この algebra-map から図式の矢印を反対にすることで coalgebra-map が定義できる。

まず、 $f : A \rightarrow B$  が線形写像で  $A, B$  共に  $k$ -algebra であり、次の図式が可換であれば  $f$  は  $k$ -algebra-map である。

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \uparrow_m & & \uparrow_m \\ A \otimes A & \xrightarrow{f \otimes f} & B \otimes B \\ & & \uparrow_u \\ & & k \end{array}$$

次に  $C, D$  を  $k$ -coalgebra、 $f : C \rightarrow D$  が線形写像での図式が可換であれば  $f$  は  $k$ -coalgebra-map という。

$$\begin{array}{ccc}
C & \xrightarrow{f} & D \\
\downarrow \Delta & & \downarrow \Delta \\
C \otimes C & \xrightarrow{f \otimes f} & D \otimes D \\
\searrow \epsilon & & \swarrow \epsilon \\
& k &
\end{array}$$

これを前節の  $\sum$  記法で表記すると,  $f : C \rightarrow D$  が  $k$ -coalgebra-map であるためには  $\forall c \in C$  に対して

$$\begin{cases} \Delta(f(c)) = \sum f(c_1) \otimes f(c_2) \\ \epsilon(f(c)) = \epsilon(c) \end{cases}$$

が成り立つことである。ここで  $f : C \rightarrow D$  が coalgebra-map で、その双対  $f^* : D^* \rightarrow C^*$  は algebra map になることをみると  $\phi, \psi \in D^*, c \in C^*$  として式 8.1 から

$$f^*(\phi * \psi)(c) = (\phi * \psi)(f(c)) = \sum \phi(f(c_1))\psi(f(c_2)) = f^*(\phi) * f^*(\psi)$$

coalgebra map の双対をとると algebra map になる。また、 $C^*, D^*$  の単位元は  $C, D$  の余単位元  $\epsilon_D, \epsilon_C$  であるから

$$f^*(\epsilon_D) = \epsilon_D \circ f = \epsilon_C$$

となり、 $f^*$  は単位元を保存する。

## 8.5 subcoalgebra

$V, W$  をベクトル空間とし、その部分空間を  $V' \subset V, W' \subset W$  とする。canonical な全射を

$$V \otimes W \rightarrow (V/V') \otimes (W/W')$$

とすると、この kernel は

$$V' \otimes W + V \otimes W'$$

となり、次が完全列 (exact sequence) になる。

$$0 \rightarrow V' \otimes W + V \otimes W' \rightarrow V \otimes W \rightarrow (V/V') \otimes (W/W')$$

$C$  を coalgebra,  $C \supset D, I$  を subspace とする。

$\Delta(D) \subset D \times D$  の時、 $D$  を  $C$  の subalgebra という。

この時、 $(D, \Delta|_D, \epsilon|_D)$  が  $k$ -coalgebra になる。

さらに  $I$  が  $\Delta(I) \subset I \otimes C + C \otimes I, \epsilon(I) = 0$  の時の  $I$  を  $C$  の coideal という。

## 9 モース理論 [30][39]

第3部でモース関数が0でないヘシアンを持つ非退化な曲線になることをみた。

空間の位相をその関数を通して調べる理論がモース理論である。

無限次元の多様体をループ空間を考えて、有限とみなし位相と測地線の関係を考えていくものである。

前部での微分幾何と関わりが深く、結び目理論と関係して、今後1つの背景を構成できるものになるだろう。

## 9.1 準備

### 9.1.1 Euler 数

前部で平面図形において頂点の数  $V$ 、辺の数  $E$ 、面の数を  $S$  として

$$\chi = V - E + S$$

をつくるとこれは位相不変でオイラー数と呼ばれ、で普通の閉じた閉曲面は 1 となった。

これを立体曲面に応用する。ただし、球面のように  $S^2$  の境界はない場合を考える。

図のように  $z$  方向からこれに直交する平面との接点をみていく。極大、極小の場合は  $n_0 = +1, n_2 = +1$ 、鞍点の場合は  $n_1 = -1$  という約束をすると穴のない平曲面は新たにオイラー数を

$$\chi = n_0 - n_1 + n_2 = 2$$

となる。

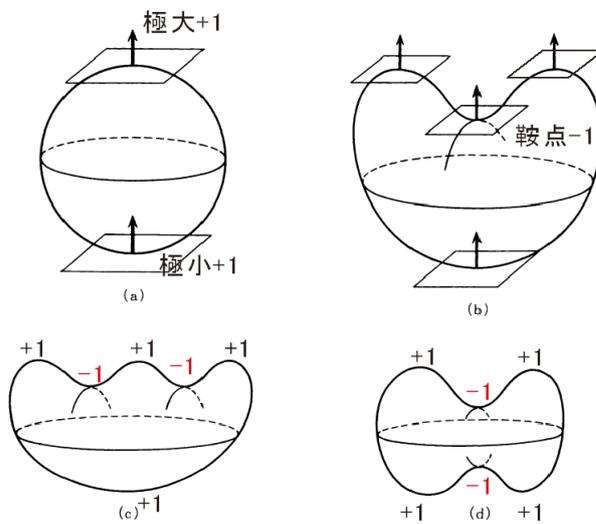


図 9.1: [39] より

さらに次の図のように穴の数（種数）を  $g$  とすると

$$\chi = 2 - 2g$$

は位相不変量であることがわかる。

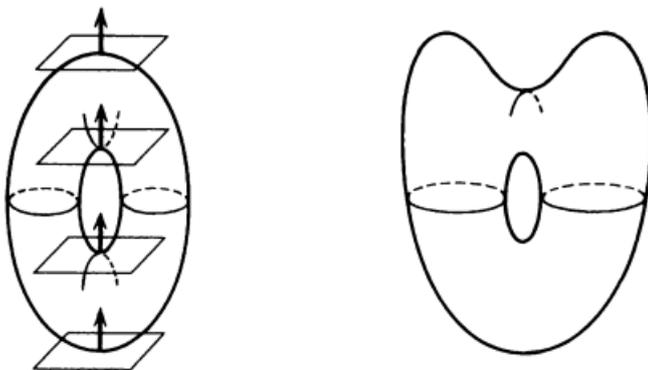


図 9.2: [39] より  $g=1$  の場合

ここで関数

$$f : M \ni (x, y, z) \rightarrow z \in \mathbb{R}$$

とその勾配ベクトルを  $z$  方向の単位ベクトル  $e = (0, 0, 1)$  を接平面  $T_p M$  に直交射影して定義する。直交性から  $p \in M$  から

$$\nabla f_p = 0$$

であることがその必要十分な条件になる。このような点を  $\nabla f$  の零点といった。紛らわしいが、これは  $f$  の臨界点 (critical\_point) である。

$\nabla f$  の零点  $p$  に対して整数  $\nu_p$  を

$$\nu_p = \begin{cases} +1 & (\text{external point}) \\ -1 & (\text{saddle point}) \end{cases}$$

これによってオイラー数が

$$\chi = \sum \nu_p = 2 - 2g$$

となる。

### 9.1.2 Horp の定理

次に具体的に境界のある場合を考えよう。

ここでは円板  $D^2$  を考える。この境界は  $S^1$  である。

$$D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$$

の場合を考える。

式 9.2 から、ここでは  $f$  の臨界点  $p$  において Hessian

$$Hf_p = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p) \end{pmatrix}$$

が正則であるとし、 $f$  の臨界点は  $S^1$  上にはなく、 $S^1$  上では  $f$  は定値でしかも最大値をとる。すると、 $f$  の臨界点について

$$\nu_p = \begin{cases} +1 & (\det Hf_p > 0) \\ -1 & (\det Hf_p < 0) \end{cases}$$

とおくと、全ての臨界点について

$$\sum_p \nu_p = 1 \tag{9.1}$$

が成り立つ。ここで次元を 1 つ増やして  $z$  方向に  $f$  の値をとる。

$\mathbb{R}^3$  内で  $f$  のグラフを  $M$  とすると

$$M = \{(x, y, z); (x, y) \in D^2, z = f(x, y)\}$$

とおけるから、関数

$$M \ni (x, y, z) \rightarrow z = f(x, y) \in \mathbb{R}$$

としてこれを  $\hat{f}$  で表すことにする。すると、 $\hat{f}$  の零点  $\hat{p}$  は  $f$  の零点  $p$  によって

$$\hat{p} = (p, f(p)) = (p, 0)$$

のように持ち上げて考える。すると次が成り立つ。

$$\sum_p \nu_p = \sum_{\hat{p}} \nu_{\hat{p}}$$

$$\sum_{\hat{p}} \nu_{\hat{p}} = n_0 - n_1 + n_2 = 1$$

これらはさらに一般的な図形に足しても成立し、**Horp の定理**として知られている。X がコンパクトな曲面 M 上のベクトル場で、零点が全て孤立していれば X の各零点 p に対して

$$\sum_p \text{Ind}_p X = \chi(M)$$

である。

### 9.1.3 不動点定理

ある集合 S から集合 S への写像 h に対して、 $h(p) = p$  となる元の  $p \in S$  を不動点 (fix\_point) という。Brouwer によって写像

$$h : D^2 \rightarrow D^2$$

については必ず不動点があることが次のように示された。

背理法をもちいて、h が不動点をもたないと仮定する。

点  $p \in D^2$  は  $h(p)$  と異なる点だから  $h(p)$  と  $p$  を結ぶ線分が定まり、線分と境界  $S^1$  との交点  $r(p)$  が決まる。

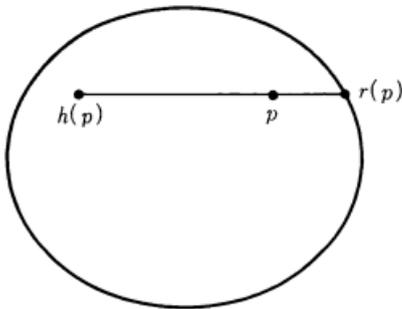


図 9.3: [39] より不動点定理

写像  $r : D^2 \rightarrow S^1$  は連続であることから r は次の性質を持つ

$$p \in S^1$$

に対して

$$r(p) = p$$

一方で、 $D^2$  は連続変形で  $S^1$  にはならない。これから連続関数  $r : D^2 \rightarrow S^1$  は存在しない。よって不動点をもたないとした仮定が間違いだということになる。

### 9.1.4 Hesse 行列

多様体の幾何学的な構造を解析するのに Morse 関数は有用である。

特に次の節で紹介する Hesse 行列の負の固有値の数であるモース指数は重要になる。

2 変数の実数値関数  $z = f(x, y)$  を考える。xy 平面上の一点  $p_0 = (x_0, y_0)$  について  $z$  が  $f$  の臨界点であると次を満たす時である。

時間の連続性

$$\frac{\partial f}{\partial x}(p_0) = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial y}(p_0) = 0$$

また 2 次導関数が 0

$$f''(p_0) = 0$$

である時を退化している臨界点といい。それ以外が非退化な臨界点になる。

退化しているとき、その関数は 1 次導関数が 0 になるだけの場合にくらべさらにつぶれた図形になる。

これを 2 変数以上でしかも座標系に依存しないようにしたのが次のヘシアン行列である。

$$H_f(p_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p_0) \end{pmatrix} \quad (9.2)$$

このヘシアンの行列式が 0 でなければ一般に非退化な臨界点になる。

## 9.2 Morse 関数

### 9.2.1 定義

いよいよ、今後重要になる、モース関数をここで説明する。

簡単にはある、立体をつるして、水面に近づけていき、その接点を見ていこうというものである。

曲面  $M$  上の関数  $f$

$$f : M \rightarrow \mathbb{R} \quad (9.3)$$

の臨界点がすべて非退化であれば  $f$  を **Morse 関数** という。

$M$  が閉曲面であれば  $f$  の臨界点は有限個である。

はじめに有限次元の多様体  $M$  を考え、この  $M$  上の関数  $f$  を局所的にみる。

この時、 $f$  の  $p$  での微分が 0 でなければ  $p$  点回りの  $M$  の座標系をうまく選べば、

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_n$$

となるようにすることができる。

$df = 0$  となる点のことを臨界点 (**critical point**) とする。

臨界点周りの  $f$  の様子は次のような Hessian を考えるとわかりやすかった。

$$H_f(p_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(p_0) \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(p_0) \\ \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(p_0) \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(p_0) \end{pmatrix}$$

$p$  が臨界点である時、この Hessian は共役の数だけ異なる、これは別の座標系  $(y_1, \dots, y_n)$  で計算したヘッセ行列が

$$\left( \frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_j} \right) = {}^t \left( \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right) \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) \left( \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right)$$

であるから非退化であることはヘッセ行列が可逆でないといけない。

### 9.2.2 モース指数

非退化な臨界点  $p$  において座標系を適当にとると

$$f(x_1, \dots, x_n) = -\sum_{i=1}^k x_i^2 + \sum_{i=k+1}^n x_i^2$$

とすることができ  $k$  をモース指数 (Morse\_Index) という。この  $k$  はヘッセ行列の負の固有値に等しい。例えば図左のモース指数は

$$p_1 = 2, p_2 = 2, q = 1, r = 0$$

である。

これは、この図形の下に水面ががあって、図形を水面に近づけ、接触した点が  $r$  で指数 0、さらに下げていって鞍点に達した、

点が  $q$  で指数は 1、さらに水没し、水面と接するピーク  $p$  があれば指数が 2 である。

これらの指数によって図形が分類できるようになる。

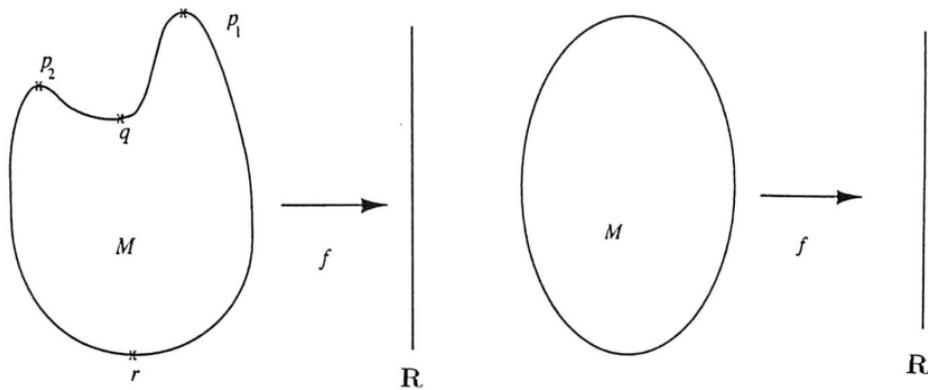


図 9.4: [30] より : 多様体  $M$  に対して、関数  $f$  は高さ ( $z$  座標) を対応させる

### 9.2.3 モース不等式

次の定理をモースの不等式という。

閉多様体  $M$  上にモース関数  $f$  があり、 $f$  の指数  $k$  の臨界点の数が  $d_k$  とすると、任意の体  $\mathbf{F}$  に対して

$$\text{rank } H^k(M; \mathbf{F}) \leq d_k \tag{9.4}$$

が成り立つ。ただし、 $H^k$  は後に扱うコホモロジーである。

例えば上図左では指数が  $k = 0, 1, 2$  であったが、これに対応してコホモロジーが  $1, 0, 1$  となる。

右辺の臨界点の数は  $1, 1, 2$  となり、成立している。

これが第 5 部で扱ったリーマン計量を使って証明ができる。

リーマン計量は  $T_p(M) \otimes T_p(M) \rightarrow \mathbf{R}$  で点  $p$  に滑らかに依存する正定値  $g_{M,p}$  で得られた。

モース関数  $f$  の勾配ベクトル場がこれに対応して、任意の接ベクトル  $X$  に対して、

$$g_{M,x}(\text{grad}_x f, X) = X(f)(x)$$

が成り立つとする。また、勾配  $-\text{grad } f$  は 1 パラメタ変換群をつくるので、これを  $\phi_t$  とする。

すると、開始点での微分係数が勾配になるとして、任意の  $x, t_0$  について

$$\phi_0(x) = x$$

$$\frac{D\phi_t(x)}{dt}\Big|_{t=t_0} = -\text{grad}_{\phi_{t_0}(x)}f$$

が成り立ち、次で臨界点  $p$  における  $e_p$  を次で定義する。

$$e_p \equiv \left\{ x \in M \mid \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(x) = p \right\}$$

この時、次の定理が成り立つ。

- $p$  のモース指数を  $k$  とすると  $e_p$  は  $\mathbf{R}^k$  に同相になる。
- $\bar{e}_p$  を  $e_p$  の閉包とすると、 $\bar{e}_p$  で  $\bar{e}_p - e_p$  を 1 点につぶしたものは  $k$  次元球面  $S^k$  に同相になる。

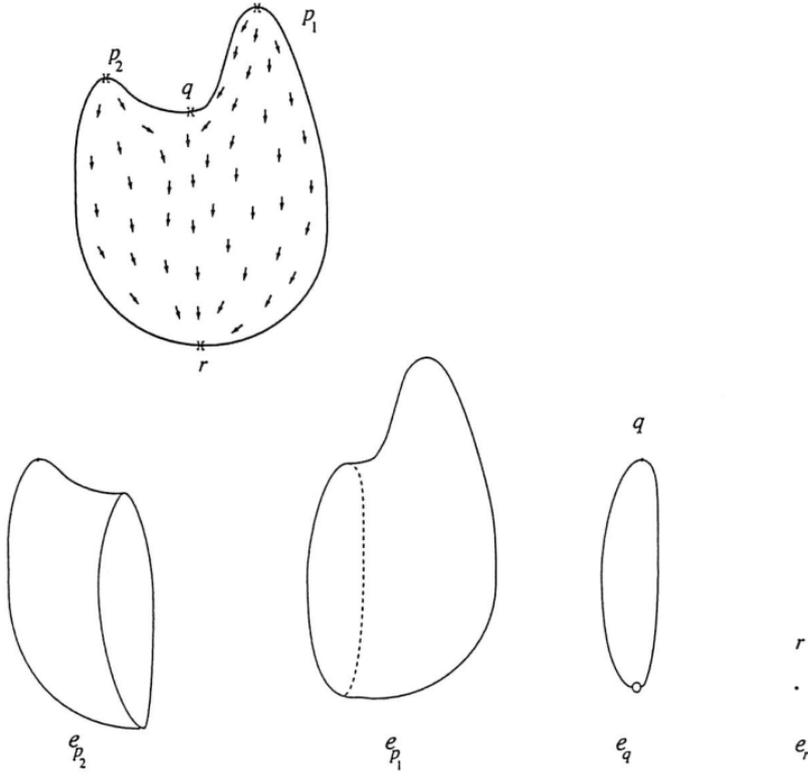


図 9.5: [30] より:  $e_p$  で分解した様子; ベクトル場の向きに依存する

これは上図のように各臨界点からのベクトル場を見て、切断する  $q$  点は輪になるが点  $r$  は除外し、 $r$  点、1 点にわけらる。

これは後の  $k$  次元 CW 複体への分解をあらわしている。

実数  $c_0 < c_1 < \dots < c_k < \dots < c_n$  として、臨界点  $p$  が指数  $k$  の臨界点であれば  $f(p) < c_k$  となるように選び

$$M_k = \{x \in M \mid f(x) < c_k\}$$

とおく。コホモロジ-を用いて、次が言えれば定理が説明される。

$$H_*(M_k, M_{k-1}; \mathbf{Z}) = \begin{cases} 0 & k \neq * \\ \mathbf{Z}^{d_k} & k = * \end{cases}$$

切除同型定理から指数  $k-1$  の内側と境界を覗いたものと同型になる。

$$H_*(M_k, M_{k-1}; \mathbf{Z}) \simeq H_*(M_k - \text{Int}M_{k-1}, \partial M_{k-1}; \mathbf{Z})$$

つまり、次の図のように  $M_k - \text{Int}M_{k-1}$  で  $\partial M_{k-1}$  を 1 点につぶすと  $d_k$  個の  $n$  次元球面  $S^n$  を 1 点ではったものになる。

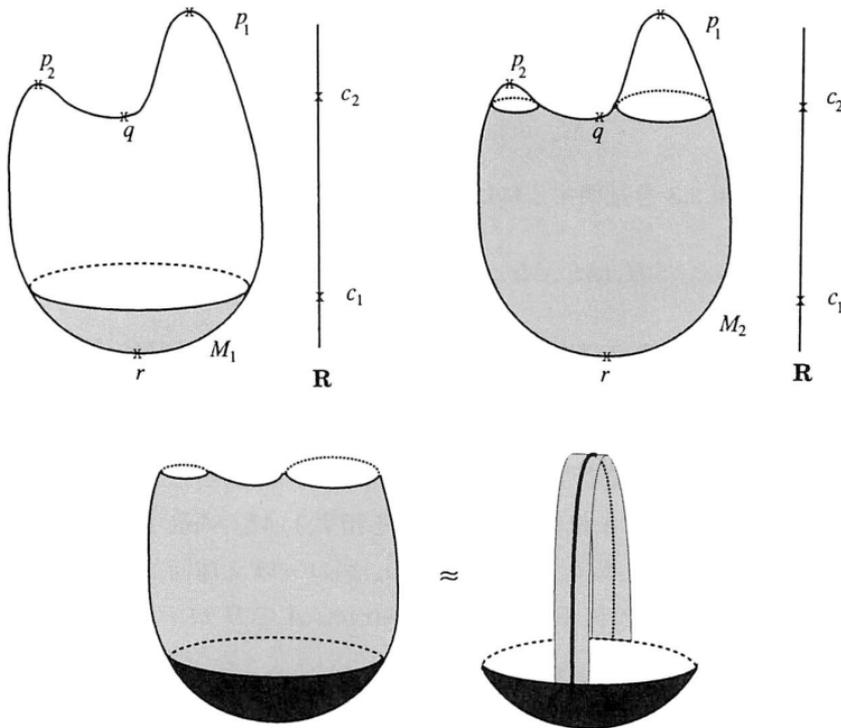


図 9.6: [30] より : コホモロジー同相

これも最初のように立体図形に水に沈めるイメージで考えると指数 0 の点  $r$  より多く入れると、円板と同相になる。

次の指数 1 の  $q$  点をすぎると持ち手のあるかごと同相になる。最上点  $p_1$  を過ぎてしまえば球と同相である。

#### 9.2.4 ポアンカレ予想

ポアンカレが出した次の課題がある。

単連結な  $n$  次元閉多様体  $M$  が球面と同じホモロジーを持つなら、球面と  $M$  は同相になるか。

スメイルがこの問題に次元が  $n$  が 5 以上の場合に解決を与えた。この解決にモース関数が使われたのである。これは先の図 2.1 の左のような図形が、右のように変形できれば臨界点が 2 つにへり、球面と同相になる。

この変形は次の図のように  $p_1$  と  $q$  がくっついてキャンセルできる。このキャンセルが成立するためには次の条件がある。

- $p$  のモース指数 =  $q$  でのモース指数 + 1
- $p$  と  $q$  を結ぶ  $-\text{grad } f$  の積分曲線は 1 本存在する。

例えば次の図のように先の図 2.1 の  $p$  と  $q$  がこの関係を満たすので  $p$  と  $q$  を結ぶ  $-\text{grad } f$  の曲線に沿って  $f$  を変形していける。

これはでこぼこをなおしていく操作で、局所的な曲率の変化を最小にしていける。

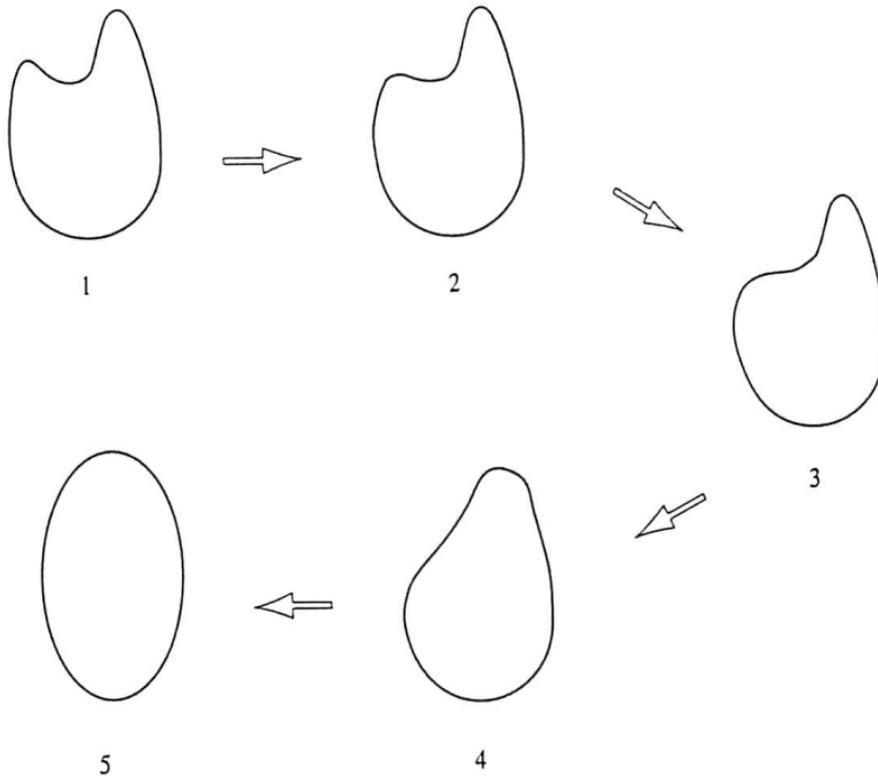


図 9.7: [30] より :  $p$  と  $q$  を結ぶ積分曲線をつぶしていく

### 9.2.5 交叉解消定理

前節でみたようにでこぼこを修正するための操作には2つの条件があった。ところがこれだけでは必要十分になれない。

そこで、この操作を次の図のような絡み目の解消として考えてみる。

まず、臨界点  $p$  について、安定多様体を  $S_p$ 、不安定多様体を  $U_p$  とする。 $-\text{grad} f$  が引き起こす1パラメタ変換群を  $\phi_t$  とすると

$$S_p = \left\{ x \in M \mid \lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(x) = p \right\}$$

$$U_p = \left\{ x \in M \mid \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(x) = p \right\}$$

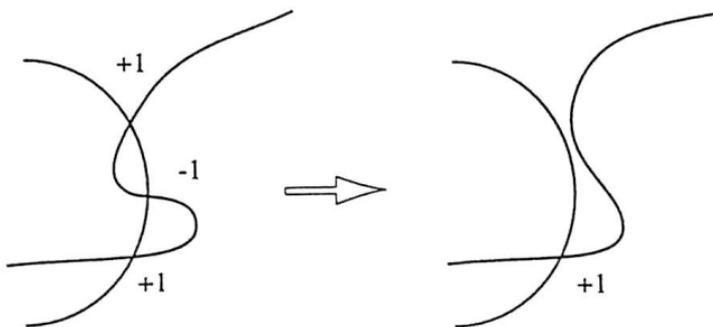


図 9.8: [30] より:横断的な交叉; 符号をつける。

と定義すると、 $U_p$  は前節の  $e_p$  と同じものになる。多様体の次元を  $n$ 、臨界点のモース指数を  $k$  とすると、 $S_p$  は  $n - k$  次元、 $U_p$  は  $k$  次元になる。そこで、 $f(p) > c > f(q)$  となる  $c$  を 1 つとり、

$$N = f^{-1}(c)$$

とおく、必要なら  $c$  を取り換えて、 $N$  が部分多様体になるようにする。

今度この部分多様体  $N$  をある意味都合良く登場させる。

$U_p, S_q$  は図のように、 $N$  と横断的に交わる。

上図のように交叉する時の向きで符号をつけると。交叉符号の和が 0 になるように交叉が解消できる。

$S_q(c) = N \cap S_q, U_p(c) = N \cap U_p$  とおく。

$$\dim U_p(c) = k - 1$$

$$\dim S_q(c) = n - k$$

$S_q(c), U_p(c)$  の定めるホモロジー類の  $N$  で交点数を次のように定義する。

$$[U_p(c)] \cdot [S_q(c)] \in H_0(N)$$

結局これは交叉を解消し、

$$\pm 1$$

をとる。交点数については後章で詳しく述べる。

## 9.3 無限次元

### 9.3.1 6次元以上の多様体

以上から次のようなホイットニーによる交叉解消定理を示すことができる。

極めて想像が難しい、5次元以上の多様体をここでは考える。

$N$  は単連結な 5次元以上の多様体とする。これの向き付け可能な部分多様体を  $X_1, X_2$  とする。

この時の次元は

$$\dim N = \dim X_1 + \dim X_2$$

とし、交点数を次のようにおく。

$$s = [X_1] \cdot [X_2]$$

この時、 $X_1, X_2$  をアイソトピー (isotopy) で動かして、交点数が  $|s|$  となるようにできる。

これをモース理論の用いる。多様体  $M$  について  $\pi_1(M) = 1$  とし、

$$[U_p(c)] \cdot [S_q(c)] = \pm 1$$

と仮定する。この時、 $U_p(c), S_q(c)$  を isotopy で適当に動かすと 2つの部分がただ 1点で交わるようにできる。

これから、isotopy に沿ってこのモース関数  $f$  を変形し、安定多様体と不安定多様体が  $N$  上で一点で交わるようにできる。

これはモース関数に対して  $p$  と  $q$  を結ぶ積分曲線がただ 1本存在することになる。

これが前節のモース関数を変形して  $p$  と  $q$  をキャンセルすることができる。

つまり、 $p, q$  が  $f$  の臨界点の組で

- $p$  のモース指数 =  $q$  でのモース指数 + 1
- $p$  と  $q$  を結ぶ  $-\text{grad } f$  の積分曲線は 1本存在する。

が成り立てば、多様体  $M$  が 6次元以上で、 $M$  は単連結なら  $f$  を変形して  $p, q$  をキャンセルできる。

### 9.3.2 スメイルの条件

$M$  を境界  $N_+ \cup N_-$  を持つ、コンパクト多様体とし、

$$f : M \rightarrow [0, 1]$$

を  $M$  上のモース関数で

$$f^{-1}(0) = N_-, f^{-1}(1) = N_+$$

を満たすとすると、6次元以上の多様体で次の条件を満たせば  $f$  を変形して臨界点がないようにできる。

1.  $M, N_{\pm}$  は単連結
2. 埋め込みが誘導する写像  $H_*(N_-; \mathbb{Z}) \rightarrow H_*(M; \mathbb{Z})$  が同型になる。

これをスメイルの条件という。

これからスメイルが6次元以上の閉多様体について、ポアンカレ予想が成り立つことを次のように説明した。まず、 $M$  上のモース関数  $f$  でただ1つの点  $p$  で極小値をとり、また、ただ1つで点  $q$  で極大値をとるような図形をつくる。

次に  $\epsilon > 0$  を十分小さく選んで

$$M' = f^{-1}([f(p) + \epsilon, f(q) - \epsilon])$$

必要であれば

$$f(p) + \epsilon = 0$$

$$f(q) - \epsilon = 1$$

としてもかまわない。この時  $M'$  の境界を考えると

$$\partial M' = f^{-1}(0) \cup f^{-1}(1) = S^{n-1} \cup S^{n-1}$$

とできて、 $M'$  が上の条件 1,2 を満たすから

$$M' \simeq S^{n-1} \times [0, 1]$$

と可微分同相である。よってこの条件より弱い  $M$  は  $S^n$  と同相である。非常に簡単にポアンカレ予想が示されたわけである。

### 9.3.3 測地線

$\Omega(M)$  をループ空間  $S^1 \rightarrow M$  への写像全体とする。 $\Omega(M)$  の元  $\ell$  に対して、その長さを  $L(\ell)$  とする。

この時、 $L(\ell)$  の微分が消える  $\Omega(M)$  のある元  $\ell$  を測地線とみなせる。

そこで絶対値 1 の複素数全体を  $S^1$  と書く。

今、有限次元のコンパクト多様体  $M$  について  $S^1$  から  $M$  への写像全体を  $\Omega(M)$  として次のような関数で長さ  $L$  を定義する。

$$L(\ell) = \int_{t \in S^1} \left| \frac{D\ell}{dt}(t) \right| dt \quad (9.5)$$

パラメタ  $t$  が  $S^1$  上で定義されていることに注意する。さらにある局所部分を考えて、

$s \in (-\epsilon, \epsilon)$  のパラメタを持つ  $\Omega(M)$  の族を  $\ell_s$  とする。

これは  $\ell_0 = \ell$  となる任意の族  $\ell_s$  に対して、微分

$$\left. \frac{dL(\ell_s)}{ds} \right|_{s=0} \quad (9.6)$$

を作ることができる。この微分が0になれば、この  $l$  を測地線という。つまり

$$l(t) = p_0 \tag{9.7}$$

のようにおけば、これは定値測地線になる。

しかし、これ以外に測地線が存在するだろうか。局所的な部分を考えているので、おそらく他にも存在しそうである。

そこでこれを示すために、各  $p_0 \in M$  について式 9.6 が 0 であれば

$$\frac{dL(l_s)}{dt} \Big|_{s=0} = 0$$

となるので  $l(t) = p_0$  となる曲線は  $L$  の極小値を与えている。

もし、これら以外に  $L$  に極値がなければ  $-\text{grad} L$  は次の図のように  $\Omega(M)$  から  $M$  への第 1 章であつた変位レトラクトを与える。

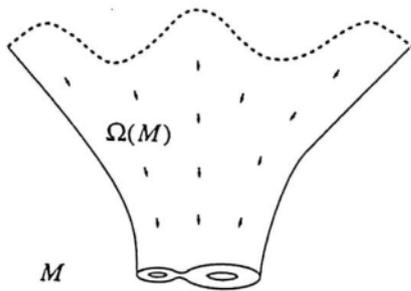


図 9.9: [30] より:変位レトラクト:ベクトル場に沿って  $M$  上に変形ができる。

従って、もし、測地線が式 9.7 のみであれば  $M$  と  $\Omega(M)$  はホモロジー同型ということになるが、この場合は  $S^1$  と  $S^2$  のよう同型にならない。従って、これから定値曲線以外の測地線が必ず存在することになる。

しかし、そのためには  $\Omega(M)$  がコンパクトでないといけない。そうしないと、極小値以外に極値がなくても  $X$  から極小値を与える、

臨界点全体集合へのリトラクトが存在できない。

例えば次の図では極小値を与える臨界点が 1 つであるが、 $X$  のホモトピー型は  $S^1$  と同じである。

一方で、極値を与える臨界点は  $S^1$  型ではなく、可縮である。

従って、 $X$  と極小値を与える臨界点全体の集合とはホモトピー同値にならない。

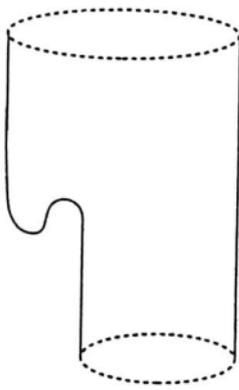


図 9.10: [30] より:極小点を与える臨界点が 1 つある。これは  $S^1$  とホモロジー同相にならない。

また、ループ空間  $\Omega(M)$  は空間が無限次元なので局所コンパクトにならない。従って、実数  $R$  に対して

$$\{x \in \Omega(M) | L(x) \leq R\}$$

がコンパクトという意味になるためには工夫がいる。無限次元ならではの特性が必要になる。

例えば上図のようなことが起こらないように、前節のスマイルの条件を課すことである。ここでは簡単な例を見る。

まず、有限次元コンパクトリーマン多様体  $M$  とその上の 2 点  $p, q$  をとり

$$\Omega(p, q) = \ell : [0, 1] \rightarrow M \begin{cases} \ell(0) = p \\ \ell(1) = q \end{cases}$$

とおく。つまり、 $\ell$  は単位インターバルと  $M$  上の点を結ぶ関数である。

さらにループ空間  $\Omega(p, q)$  上に長さ  $L$  をつくることを考える。

そして、 $M$  上の  $p, q$  を結ぶループ空間上の長さ最小曲線  $L_{min}$  が存在することを示したい。

つまり次の定理を示したい。

有限次元コンパクト多様体  $M$  上には 2 点を結ぶ最小曲線が存在する。

まず、 $\Omega(p, q)$  上での  $L$  下限を  $d$  として、 $\Omega(p, q)$  の元の列を

$$\ell_i (i = 1, 2, 3, \dots)$$

とするとコンパクトであるから

$$\lim_{i \rightarrow \infty} L(\ell_i) = d \tag{9.8}$$

となるようにとれる。 $\{x \in \Omega(M) | L(x) \leq R\}$  が任意の実数  $R$  についてコンパクトで  $L$  が連続ならば、 $\ell_i$  の最短線が得られそうだが、これは正しくない。

ここでのループ空間に 2 つの位相、 $C^1$  位相と一様収束位相があるからである。

これは次のループ曲線のポアンカレ写像の図のように多様体  $\Sigma$  とループ空間の関係を見るとわかる。

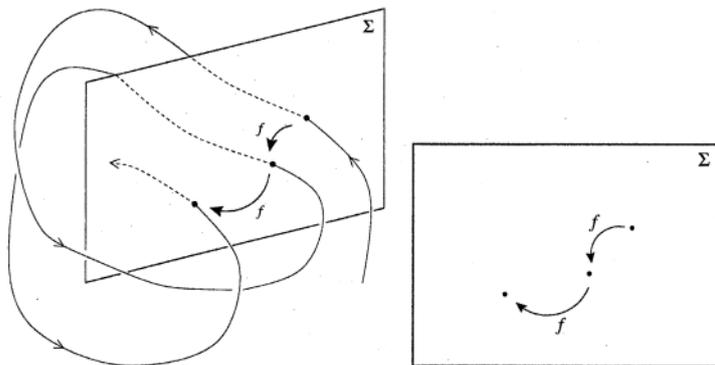


図 9.11: 安定・不安定多様体からみる相空間の輸送 より

そこで  $\ell_i$  の収束部分を見るために  $\ell_i$  の速度が一定になるようにパラメタを選ぶ。

式 9.5 から大局的なパラメタ  $t$  を導入して、列  $\ell$  の変化率の大きさから長さ  $L$  を定義したので

$$\left| \frac{d\ell_i}{dt} \right| \equiv L(\ell_i) \tag{9.9}$$

のように選ぶことができる。

$\ell_i$  の連続性 (Ascoli-Arzelà) の定理から、一様収束する部分列が存在し、これを  $\ell_i$  とおき、極限は  $\ell_{min}$  とすると

$L$  が一様収束位相について連続であるなら  $L(\ell_{min})$  は最短線になる。  
 しかし、 $C^1$  位相は連続であるが、明らかに一様収束位相は連続ではない。  
 ところが、連続ではなくても次成り立つ。

$$L(\ell_{min}) \leq \lim_{i \rightarrow \infty} L(\ell_i) \quad (9.10)$$

が次のように示せる。 $\epsilon$  を任意の正の数とする。閉区間  $[0, 1]$  の分割を

$$0 = t_1 < t_2 < \cdots < t_N = 1$$

として、距離関数  $d(\cdot, \cdot)$  とおくと隣接  $t_i$  の足し合わせとの差

$$\left| L(\ell_{min}) - \sum_{i=1}^{N-1} d(\ell(t_i), \ell(t_{i+1})) \right| < \epsilon$$

となるものを選ぶと、 $j \rightarrow \infty$  とすることで式 9.9 から

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N-1} d(\ell(t_i), \ell(t_{i+1})) &= \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{N-1} d(\ell_j(t_i), \ell_j(t_{i+1})) \\ &\leq \lim_{j \rightarrow \infty} L(\ell_j) \end{aligned}$$

がとれる。

ところが式 9.8 と決めたので  $L(\ell) \leq d$  である。 $d$  が  $\Omega(p, q)$  上の  $L$  の下限であったのだから

$$L(\ell_{min}) = d$$

となり、この  $\ell_{min}$  が最短線になることになり式 9.10 が示された。

つまり、無限速での列の速さは

$$\left| \frac{d\ell_{min}}{dt} \right| \leq \left| \frac{d\ell_{\infty}}{dt} \right|$$

ここではループ空間上に一様収束位相を仮定した。しかし、考慮が必要なのはこのループ空間には  $C^1$  の位相もあることである。

これから閉多様体  $M$  上のほとんど全ての計量について  $M$  には無限本の測地線がある。という予想がたちそうである。

しかし、無限次元の場合でもモース不等式 9.4 が成り立つので、各生成元に対して、少なくとも 1 つの臨界点に対応し、

測地線がとれる。下図のように  $n$  重被覆写像

$$f : e^{it} \rightarrow e^{nit}$$

があり、

$$\ell : S^1 \rightarrow M$$

を閉測地線とすると、これを合成した  $f \circ \ell$  も測地線になる。このような測地線を除いても無限個あるわけである。

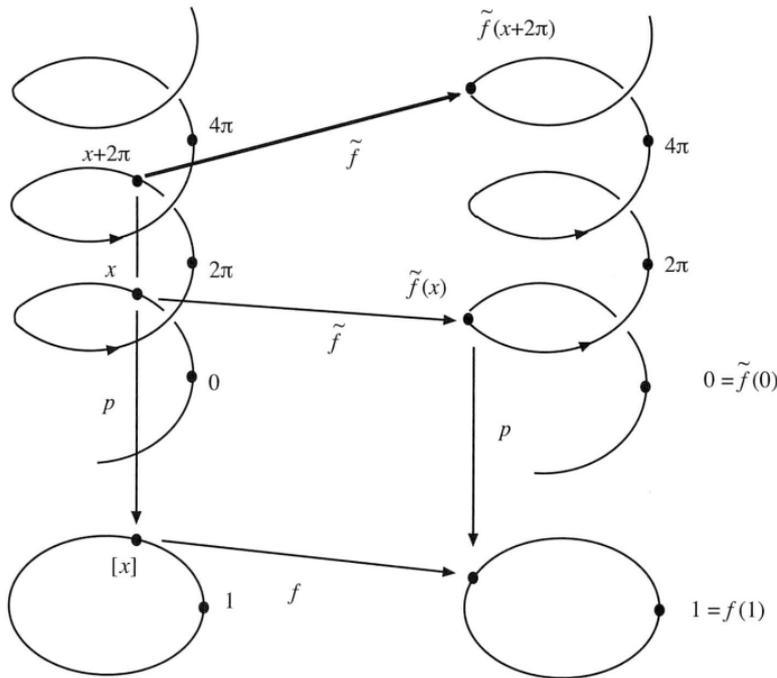


図 9.12: [12] より :

### 9.3.4 調和写像

次に無限次元モース理論、独特な例を見よう。有限と無限を区別するようなヤン・ミルズ場において重要になる。

はじめに 2 次元多様体  $S^2$  からの写像を

$$X = \{f : S^2 \rightarrow M\}$$

として、 $f_*$  を  $f$  の微分で決まる接空間の間の写像とする。

この時、次のような内積  $g_M$  を持つ計量行列  $g$  を定義する。

$$g = \begin{pmatrix} g_M \left( f_* \left( \frac{\partial}{\partial x} \right), f_* \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) \right) & g_M \left( f_* \left( \frac{\partial}{\partial x} \right), f_* \left( \frac{\partial}{\partial y} \right) \right) \\ g_M \left( f_* \left( \frac{\partial}{\partial y} \right), f_* \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) \right) & g_M \left( f_* \left( \frac{\partial}{\partial y} \right), f_* \left( \frac{\partial}{\partial y} \right) \right) \end{pmatrix}$$

また、2 次元多様体としての球面  $S^2$  は次と同相だから

$$S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

$$x + iy \in \mathbb{C}$$

として、 $f$  に依存した、次のような面積関数が定義できる

$$A(f) = \int_{\mathbb{C}} \sqrt{\det(g)} dx dy$$

このときザックス-ウーレンベックの定理は

$M$  を単連結閉リーマン多様体とすると、極小曲面で表されるホモトピー類の全体は  $\pi_2(M)$  を生成する。

これから 2 次のホモトピー群  $\pi_2(M)$  の元と  $X = \{f : S^2 \rightarrow M\}$  の連結成分が 1 対 1 に対応する。

ここで  $\pi_2$  は  $X$  の接ベクトル場の連結成分の集合に可換群の構造を入れたものとする。

このもとで極小平面で表される元は  $\pi_2(M)$  を生成する。しかし、 $\pi_2(M)$  の任意の元が極小平面になるわけではない。

ここに有限次元のモース理論と異なることがおきている。

2次元の平面を考える場合、面積が座標に依存しないので、 $S^2$  から自身への任意の可微分写像を  $\phi$  とすると

$$A(f \circ \phi) = A(f)$$

が成立する。

ここで  $\text{Diff}(S^2)$  を  $S^2$  からそれ自身への可微分写像のつくる群とすると  $\text{Diff}(S^2)$  は  $X$  に作用し、この作用で関数  $A$  が不変になる。物理的にはラグランジアンからのゲージ変換のようなイメージだろうか。無次元リー群のような大きな群が大局的に作用していれば都合がいいが、局所ゲージ変換のように、この場合は  $A$  の臨界点を考えると、この点を  $\text{Diff}(S^2)$  で動かしても、全て臨界点になる。

これは臨界点の各連結成分の次元が  $\infty$  であることを示す。

いいかえればヘッセ行列の核 (kernel) は無限次元になる。

これは式 9.3 を満たすモース関数とみることができなくなってしまう。

これを解決する方法として、文献 [30] で深谷氏は2つの解決案を示している。

1つは  $X$  を  $\text{Diff}(S^2)$  で割って商空間として無限次元多様体を考え、 $A$  はこの上の関数として定義することである。

もう一つは  $A$  を少し変形して、 $g$  の対角成分のみを引き出し、汎関数とし、物理的なエネルギーにしてしまう。

$$E(f) = \int_C \left( g_M \left( f_* \left( \frac{\partial}{\partial x} \right), f_* \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) \right) + g_M \left( f_* \left( \frac{\partial}{\partial y} \right), f_* \left( \frac{\partial}{\partial y} \right) \right) \right) dx dy$$

とおく。こうおいても面積関数  $A$  と同じ次元である。

これは第5部の曲面  $\Sigma$  の第1基本形式を  $\mathbf{I}$  として

$$\mathbf{I} : ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

第2基本形式を  $\mathbf{II}$  として

$$\mathbf{II} : \sum_{i,j=1}^2 h_{ij} du^i du^j = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 \quad (9.11)$$

$$\begin{aligned} h_{ij} &:= \sum_{n=1}^2 \langle \mathbf{x}_{ij}, \mathbf{e}_n \rangle = \frac{|\mathbf{x}_{ij} \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2|}{\|\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2\|} \\ &= -\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{e}_j \rangle \quad (i, j = 1, 2) \end{aligned}$$

を定義したのを思い出そう。ここでは、 $\mathbb{C}$  のリーマン計量  $h_{i,j}$  をつかうと  $i = j$  のみ値をとり、

$$E(f) = \int_{\Sigma} \sum_{i,j} h^{i,j} g_M \left( f_* \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right), f_* \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \right) \Omega$$

とできる。ただし、 $\Omega$  は一般的な体積要素で、 $m$  次微分形式であれば

$$g_{ij} = g \left( \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right)$$

$$\Omega_M = \sqrt{\det(g_{ij})} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m$$

$$h^{i,j} = h_{i,j}^{-1} = 1 \quad (i = j)$$

である。

この時、面積関数とエネルギーの間に次の関係がなりたつ。

$$A(f) \geq E(f)$$

等号が成立するのが、

$$g_M \left( f_* \left( \frac{\partial}{\partial x} \right), f_* \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) \right) = g_M \left( f_* \left( \frac{\partial}{\partial x} \right), f_* \left( \frac{\partial}{\partial y} \right) \right) = g_M \left( f_* \left( \frac{\partial}{\partial y} \right), f_* \left( \frac{\partial}{\partial y} \right) \right) = 0$$

となるときのみで、この時、接空間での引き戻し  $f^*$  を用いて、次のようにかける。

$$f^* g_M = c \cdot h$$

これは第 8 部で触れる共形変換になっている。第 8 部の Weyl 変換のところでは  $c = e^{2\sigma}$  とおいた。今後よく利用されるが

$S^2$  の標準的な計量を  $\mathbb{C} = S^2 - \{\infty\}$  に制限したものと  $\mathbb{C}$  の 2 次元ユークリッド空間の間にはこうした変換がある。

ここで重要なのは定義域が 2 次元なので次の定理成り立つ。

$S^2$  上の任意の計量  $h$  に対して  $\mathbf{Diff}(S^2)$  の元  $\phi$  が存在して、 $\phi^* h$  は  $S^2$  の標準計量のスカラー倍である。

これは、例えば高速で運動する系内と比較した運動方程式を考えればよい。

さらに次のような単純な構造があることを示す。

1. 2 次元多様体の場合、計量の共形類と複素構造には 1 対 1 の対応がある。
2.  $S^2$  上の複素構造は一意である。

これら共形的な構造については第 8 部で詳しく扱う。ここではモース理論を考えると

この定理から、面積関数の極小値  $A(f)$  は各  $f \circ \phi$  が共形的であるように  $\mathbf{Diff}(S^2)$  の元  $\phi$  が選べるので

$$A(f) = A(f\phi) = E(f\phi) \leq E(f)$$

が成り立つことになる。これから次の定理がいえる。

$f: S^2 \rightarrow M$  に対して  $f$  が  $E$  の極小値であることと  $f$  が  $A$  の極小、共形的であることは同値である。

これから  $A$  の極小を与える任意  $f$  に対して  $\mathbf{Diff}(S^2)$  の元を合成して共形的にできる。

このようにエネルギー  $E$  の極小値を与える  $f$  を調和写像 (Harmonic map) という。

重要な役割をしているが抽象的であった  $\mathbf{Diff}(S^2)$  の役割を  $S^2$  からそれ自身への共形写像の群が果たすことになる。

これは第 8 部の 2 次元共形変換でも扱うが、第 1 部で扱ったメビウス変換の複素版になり

$$PSL(2; \mathbb{C}) = SL(2; \mathbb{C}) / \{\pm 1\}$$

と同型で、 $z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  として

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot z = \frac{az + b}{cz + d}$$

よってエネルギー  $E$  を使うことで有限次元の群  $PSL(2; \mathbb{C})$  を扱えばよいことになり、取り扱いが楽になる。2 次元空間からの写像空間を相空間とし、エネルギー、面積をラグランジアンとする場の理論はシグマモデル ( $\sigma$ -model) と呼ばれる。 $\mathbf{Diff}(S^2)$  はこのモデルのゲージ変換群に相当する。

そこでザックス-ウーレンベックの定理を考える。

これはリーマン多様体での小曲面で表されるホモトピー類の全体は  $\pi_2(M)$  を生成するというものであった。

これは  $f_0$  とホモトピックな調和写像があるかという問題になる。そこで

$$C = \inf \{E(f) | f \sim f_0\}$$

とおく。この問題は  $f_0$  とホモトピックな写像列  $f_i$  が

$$\lim_{i \rightarrow \infty} E(f_i) = E(f)$$

となるものを選んだ時、 $f_i$  が収束部分列を持つかが問題になる。  
 この時の収束の仕方が、一様なのか、 $C^1$  収束なのかは問題だが、より弱い一様収束でよしとする。  
 そこで  $f_i \phi_i$  が一様収束するような  $\phi_i \in PSL(2; \mathbb{C})$  が存在するかが問題になる。  
 これが存在しないことを以下で示す。  
 $S^2 \times S^1$  に直積リーマン計量を入れたものを 2 つ用意し、次の図のように、これを細いチューブ

$$S^2 \times [0, 1]$$

でつないだものを  $M$  とおく。

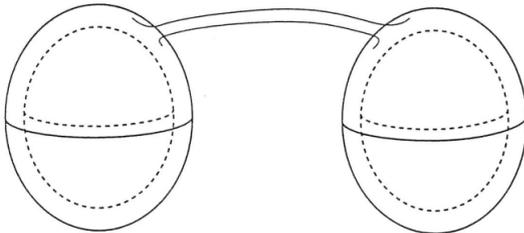


図 9.13: [30] より :

これは球面が  $\mathbb{Z}$  のホモロジー類であったから

$$\pi_2(M) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

で 2 つの  $S^2$  が生成元になっている。(1, 1) 型のホモトピー類を考える。  
 このホモトピー類に含まれる  $S^2$  の面積は標準的な計量を入れた  $S^2$  の面積の 2 倍以上になると考えられる。  
 従って、 $i$  が大きいと  $f_i$  の像は、下図のよに、それぞれの  $S^2 \times S^1$  の中の  $S^2$  から小さい円板を除き、  
 それらの  $S^2 \times [0, 1]$  に含まれる  $S^1 \times [0, 1]$  でつないだものになっていると考えられる。  
 すると、 $f_i$  の像の極限は 2 つの  $S^2$  とそれを結ぶ曲がった線分の和集合になる。  
 これは確かに、従って、 $f_i$  を  $PSL(2; \mathbb{C})$  と合成しても収束部分列は存在しない。  
 よって前節の定理：有限次元コンパクト多様体  $M$  上には 2 点を結ぶ最小曲線が存在する。  
 を示した時のように簡単にいかない。



図 9.14: [30] より :

それでもザックス・ウーレンバックは次の内容を証明した。  
 次を満たす  $f_i$  に対して、

$$\lim_{i \rightarrow \infty} E(f_i) = E(f)$$

有限個の  $S^2$  の点  $x_1, \dots, x_n$  が存在し、 $f_i$  は

$$S^2 - \{x_1, \dots, x_n\}$$

でコンパクト一様に収束する部分列を持つ。

先と同じように上図で  $f_i$  を  $PSL(2; \mathbb{C})$  の元で動かす。これは共形変換を満たした。

まず、次のようにノルムを 1 で固定し、点  $p$  を出発する。  $f_{i*}$  は  $f_i$  のヤコビ行列とする。

この移動を

$$f_i(0) = p, \|f_{i*}(0)\| = 1$$

となるようにすると、  $f_i$  は一点を除いて、コンパクトに一様収束する。

その極限が 2 つの  $S^2$  とそれを結ぶ曲線の和集合の中で、左側の  $S^2$  から曲線の付け根部分が除かれるものになる。

次に  $f_i$  を共形変換で動かして、

$$f'_i(0) = q, \|f'_{i*}(0)\| = 1$$

となるような  $f'_i$  をとる。

すると同様に  $f'_i$  も一点を除いてコンパクトに収束し、  $S^2$  とそれを結ぶ曲線の和集合の中で、右側の  $S^2$  から曲線の付け根部分が除かれるものになる。

これは  $p$  点を基点とした列  $f_i$  の立場から見れば  $f'_i$  の極限に当たる  $S^2$  が無限遠方で飛び出すと見ることができる。

このような現象をバブル (bubble) という。この時、

$$E\left(\lim_{i \rightarrow \infty} f'_i\right) + E\left(\lim_{i \rightarrow \infty} f_i\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} E(f_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} E(f'_i)$$

が成り立つ。これがバブルとなるのは、基点をずらして、共形変換で写していくと、極限が異なったものが得られ、

$f_i$  はそれらの破片にちぎれている。しかし、破片のエネルギーの総和は  $f_i$  のエネルギーの極限になる。

つまり、ちぎれた破片が  $f_i$  の極限全体をつくる。

これから次の定理が成り立つ。

$f$  を  $D^2 - \{0\} = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$  からコンパクト多様体への調和写像として、そのエネルギーは有限とする。

この時、  $f$  は  $D^2$  からの調和写像に拡張される。

この定理はリーマンの拡張定理

$D^2 - \{0\}$  上の有界な正則関数は  $D^2$  上の正則関数に拡張する。

を一般化したものである。この定理を使い部分列の極限が  $S^2$  からの調和写像に拡張されている。

このように  $f_i$  の極限が有限個にちぎれる。いうならばエネルギーに極小値を与え、空間に、無と有を区分していくことになる。

$f_i$  のホモトピー類を考えるなら調和写像のホモトピー類の和を考えればよいことになる。

これは後章でモジュライ空間のコンパクト化として考察をする。

このように有限次元には見られないことが無限次元のモース理論にはおきる。

物理で重要なヤン-ミルズ場、概複素曲線、アインシュタイン計量、自己双対計量、定平均曲率などの変分問題に共通して見られる現象である。

## 10 ド・ラームの定理

ホモロジーやコホモロジーの多様性は距離の概念がなく、大雑把に変形できるところにあった。

しかし、物理では距離や時間の概念を入れて実物体を考察していく必要がある。

そこで、ホモロジーに計量を持たせて、積分できるような体系を持たせたい。

## 10.1 微分形式上の積分

$n$ 次元可微分多様体上で積分を考えよう。 $r$ 単体  $\sigma$  上では  $r$ 形式  $\omega$  の積分  $\int_{\sigma} \omega$  が定義された。鎖体を

$$\delta = a_1\sigma_1 + \cdots + a_m\sigma_m$$

を考えると、この鎖体上の積分として

$$\int_{\delta} \omega = a_1 \int_{\sigma_1} \omega + \cdots + a_m \int_{\sigma_m} \omega$$

が定義できる。

ここで  $\delta \in B_r(M, \mathbb{R})$  とすると、ある  $\gamma \in C_{r+1}(M, \mathbb{R})$  から

$$\delta = \partial\gamma$$

と表すことができるからストークスの定理から

$$\int_{\delta} \omega = \int_{\partial\gamma} \omega = \int_{\gamma} d\omega$$

となる。特に  $\omega \in Z^r(M, \mathbb{R})$  であれば、 $d\omega = 0$  だから

$$\int_{\delta} \omega = 0$$

となる。従って  $\delta_1, \delta_2 \in Z_r(M, \mathbb{R})$  で  $\delta_1 - \delta_2 \in B_r(M, \mathbb{R})$ ,  $\omega \in Z^r(M, \mathbb{R})$  であれば

$$\int_{\delta_1} \omega = \int_{\delta_2} \omega$$

となる。ここで  $\delta$  のホモロジー類を  $[\delta]$  と書くことにする。

ホモロジー群の元として  $[\delta_1] = [\delta_2] \in H_r(M, \mathbb{R})$  に対して

$$\int_{[\delta_1]} \omega = \int_{[\delta_2]} \omega$$

が定義できる。これは  $\omega \in Z^r(M, \mathbb{R})$ ,  $\delta \in H_r(M, \mathbb{R})$  であれば積分

$$\int_{\delta} \omega$$

が定義できることを示している。

そこで微分形式の考えからド・ラームコホモロジーの元をホモロジー上で積分することは興味深い。

前節で  $\omega = d\theta$  であれば完全形式であるとした。そこで  $\omega$  は 1 形式、1 階の微分方程式

$$\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \tag{10.1}$$

で表す。微分で書き換えると

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$$

これを解くために次のような関数  $\phi(x)$  を考える。

### 定理 20. 積分可能条件

第 2 部でもふれたが一般に  $\omega$  がであればある関数  $\phi(x)$  が存在し、 $\omega = d\phi$  とかけることである。すなわち、

$$d\phi(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

である。これは積分可能 (integrable) ともいう。

この時、 $\phi(x, y) = Const$  が式 10.1 の解となるので積分可能条件

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$$

が成り立つ。

積分には前章でのドラム複体を用いて

**定理 21. ド・ラームの第一定理**

$p$ -輪体  $c_p$  上の  $p$ -閉形式の  $\omega_p$  の積分を周期 (*period*) という。ここでは  $per(c_p)$  で表し、

$$per(c_p) = \int_{c_p} \omega_p$$

と表すことができる。ここで閉形式  $\omega_p$  が完全であるための必要十分条件は全ての周期が  $0$  になることである。これをド・ラームの第一定理という。

さらに

**定理 22. ド・ラームの第二定理**

各  $p$ -輪体  $c$  について実数となる  $per(c)$  が存在し、次の条件を満たすとす。

$$\sum_i a_i c_i = \text{boundary} \rightarrow \sum_i a_i per(c_i) = 0$$

この時、 $M$  上の閉形式  $\omega$  が存在し、はじめに指定された  $per(c)$  を周期を持つ。

$$per(c) = \int_c \omega$$

これをド・ラームの第二定理という。

具体的に第一定理を見てみる。

周期の例として次のような力学的な保存力  $F$  を考える。

$$V(x) = - \int_{x_0}^x \sum_i F_i dx^i$$

この積分は端点のみに依存し  $x_0 \sim x$  の経路に依存しない。従ってこれが周期として

$$\int_{x_0}^x \omega = \int_{x_0}^x \sum_i F_i dx^i \tag{10.2}$$

とかける。この時、全ての閉曲線  $c$  について

$$\int_c \omega = 0 \tag{10.3}$$

が成り立つことでもある。この条件は  $\omega$  の完全形式

$$\omega = -dV \tag{10.4}$$

と表される。次に  $\omega$  が保存力の場合になるための制限を考えると

1-形式  $\omega$  の 1-輪体  $c$  上の積分を

$$(\omega, c) = \int_c \omega \tag{10.5}$$

とおき、前節のストークスの定理を用いると同値類  $[\omega], [c]$  に拡張できる。つまり

$$[c] \in H_1(M)$$

であるから対応して  $[\omega]$  を元とする群を 1 次コホモロジー群とし、式 7.10 から  $H^1(M)$  で表す

$$[\omega] \in H^1(M)$$

式 10.5 の右辺が実数であるからこれは次のような写像である、

$$(\omega, c) = H^1(M) \times H_1(M) \rightarrow \mathbf{R}$$

この時、完全性の条件式 10.3 が成り立つことは空間  $M$  が 1 点に連続変形可能であることであるから

$$H^1(M) = 0$$

である。よって  $\omega = -dV$  が成り立つことがこの明快な結論を得たわけであるが、こうした例が物理には多くある。

例えば電磁気学のアンペールの法則は式 10.2 に変えて

$$\int_c \omega = \int_c \sum_i H_i dx^i = I$$

のように電流に対応する。この場合は 0 ではないので 1 点に連続変形ができない。

$$H^1(M) = \mathbf{R}$$

これらはさらに高次に拡張され、 $p$  階テンソルのように

$$(\omega^p, c_p) = \int_{c_p} \omega^p = H^p(M) \times H_p(M) \rightarrow \mathbf{R}$$

と対応する。

## 10.2 調和積分論 [30]

第 2 部で取り上げた多様体上の  $k$  次微分形式  $\omega$  は局所座標  $(x^1 \dots, x^m)$

**定義 71.** 多様体上の  $k$  次微分形式

$$\omega = \sum_{i_1 \dots i_k, j_1 \dots j_k} f_{i_1 \dots i_k} \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^{j_1}} & \dots & \frac{\partial x^{i_k}}{\partial y^{j_1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^{j_k}} & \dots & \frac{\partial x^{i_k}}{\partial y^{j_k}} \end{bmatrix} dy^{j_1} \wedge \dots \wedge dy^{j_k}$$

さらに

**定義 72.** 外微分作用素

外微分作用素  $d: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$  とは

$$d(f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) = \sum \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

で定義された。

また重要な性質として

$$dd = 0$$

となるので次のチェイン図

$$0 \rightarrow \Omega^0 \xrightarrow{d} \Omega^1 \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Omega^{m-1} \xrightarrow{d} \Omega^m \rightarrow 0$$

が成り立つ。

これからドラームの定理をホモロジーで示すと次のようになる。

**定理 23. ドラームの定理**

これに式 7.10 から次のような関係が成り立つ。

$$H_{dr}^k(M; \mathbf{R}) = \frac{\ker : \Omega^k \rightarrow \Omega^{k+1}}{\text{Im}d : \Omega^{k-1} \rightarrow \Omega^k} \quad (10.6)$$

このコホモロジーが多様体のコホモロジーと一致するのがドラームの定理である。つまり

$$H_{dr}^k \simeq H^k \quad (10.7)$$

となる環同型が存在する。

ここで  $H_{dr}^k$  の環構造は微分形式のかけ算に依存する。そこで次の調和積分論が重要になる。

つまり、元々長さのないホモロジーの考えに計量を与えることをする。

これは多様体上のラプラス方程式の解を考えていくことになる。

多様体上にリーマン計量を入れることを考える。この計量が入るとホッジ作用素  $*$  が次のように決まる。

$k$  次微分形式の空間を  $\Lambda^k(M)$  として、 $g$  はその内積とする。つまり、

$$g(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}, dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k}) = \det \begin{pmatrix} g_{i_1 j_1} & \cdots & g_{i_1 j_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{i_k j_1} & \cdots & g_{i_k j_k} \end{pmatrix}$$

ただし、

$$g_{ij} = g \left( \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right)$$

である。

次に微分幾何でも定義した体積要素を次で定義する。 $m$  次微分形式を用いて、向きを保つ座標系として

$$\Omega_M = \sqrt{\det(g_{ij})} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m$$

また、正規直交系を使うと  $m$  次微分形式は

$$\Omega_M = e^1 \wedge \cdots \wedge e^m$$

と表すことができた。

ここで 2 次形式

$$\Omega^k(T_p^*(M)) \otimes \Omega^{m-k}(T_p^*(M)) \rightarrow \Omega^m(T_p^*(M)) = \mathbb{R}$$

が非退化であるから  $u \in \Omega^k(M)$  に対して余次元は  $*u \in \Omega^{m-k}(M)$  として、

内積の定義から

$$v \wedge *u = g(v, u)\omega \quad (10.8)$$

が任意の  $v \in \Omega^k(M)$  に対して満たされる、ただ 1 つの微分形式として定めることができる。

また、

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{\deg \alpha \deg \beta} \beta \wedge \alpha$$

から

$$u \wedge *u = (-1)^{\deg u(m - \deg u)} *u \wedge u$$

となるので、2回ホッジ作用素をつかうと

$$**u = (-1)^{\deg u(m - \deg u)}u$$

となることがわかる。

$\Lambda^k(M)$  上に  $L^2$  内積が次のように定義できた。

$$\langle u, v \rangle_{L^2} = \int_M g(u, v) \Omega_M$$

この  $L^2$  内積について外微分作用素  $d$ 、共役作用素  $\delta$  とすると次が成り立つように  $\delta$  を決める。

$$\langle du, v \rangle_{L^2} = \langle u, \delta v \rangle_{L^2} \quad (10.9)$$

これは内積を作るベクトルは共変、反変のように、対称ではないことによる。

さらに、ここではある隣接した次数の微分形式が重要になる。

第4部で共役微分演算子を次のように定義した。

**定義 73.** 共役微分演算子 (co-differential oprator)  $\delta$  を定義する。

$k$  形式の  $\omega$  にホッジ作用素  $*$  を作用させると  $n - k$  形式になるので

$$**\omega = (-1)^{(n-k)k} \omega \quad (10.10)$$

となる。 $\delta\omega$  は  $d\omega$  が  $k + 1$  形式だから  $k - 1$  形式になるべきである。そこで  $*\omega$  が  $n - k$  形式、 $d*\omega$  が  $n - k + 1$  形式、 $*d*\omega$  が  $k - 1$  形式になるので

$$\delta\omega = (-1)^{nk+n+1} *d*\omega \quad (10.11)$$

と書ける。

式 10.9 は次のような  $u, v$  でなければ変分作用素と共に内積を作ることはできない。

**定理 24.** 共役微分の定理 1

$$u \in \Omega^k(M), v \in \Omega^{k+1}(M)$$

従って、次が成り立つ。

$$d(u \wedge *v) = 0$$

この時、ホッジ作用素の性質から次も成り立つ。

$$\delta = -(-1)^{\deg u \cdot m} *d*$$

*Proof.* 実際に確かめてみると、

式 10.8 から

$$\begin{aligned}
 \int_M g(du, v)\Omega_M &= \int_M du \wedge *v \\
 &= \int_M d(u \wedge *v) - (-1)^{\deg u} \int_M u \wedge d*v \\
 &= -(-1)^{\deg u \cdot m} \int_M u \wedge **d*v \\
 &= (-1)^{\deg u \cdot m} \int_M g(u, -*d*v)\Omega_M \\
 &= \int_M g(u, \delta v)\Omega_M
 \end{aligned}$$

とかくことができるので定理が示された。 □

この演算子を用いるとラプラス演算子が簡単に次のように定義できる。

**定義 74.** ラプラス演算子

$$\Delta := d\delta + \delta d \tag{10.12}$$

ラプラス演算子は第 1 部、第 4 部でみたように、物理にとっては重要な演算子で、それが共役微分演算子の交換積で表現されていることはとても興味深い。

第 4 部でみたように、この対称性からラプラス演算子は k 形式を k 形式に写す。例えば関数  $f(C^0)$  に作用させると

$$\Delta f = -\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( g^{ij} \sqrt{g} \frac{\partial f}{\partial x^j} \right)$$

また電磁場は次の 2 つの関係式にまとめることができた。

$$\partial_\mu F_{\nu\rho} - \partial_\nu F_{\mu\rho} = 0$$

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = 4\pi j_\nu$$

そこで次のように 1 形式と 2 形式で改めて場の量を定義すると

$$F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$$

$$J = J_\mu dx^\mu$$

さらに外微分を作用させると

$$dF = \frac{1}{2} \partial_\mu F_{\mu\rho} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho = 0$$

となる。つまり、これまでのホモロジー的にみれば境界の境界をとったわけだ。一方でこの  $dF$  に共役微分演算子を作用させると 1 形式が次のように得られる。

$$\delta dF = \partial^\mu F_{\mu\nu} dx^\nu = 4\pi j_\nu dx^\nu = 4\pi J$$

これは 0 でない。境界面に直交した流れを表している。

また、

**定義 75.** 調和形式

調和  $k$  形式 (harmonic  $k$  form) の作る空間を

$$\mathcal{H}^k(M; \mathbb{R}) = \{u \in \Lambda^k(M) | \Delta u = 0\}$$

とする。

この時、式 10.6 から次の定理が成り立つ。

**定理 25.** ド・ラーム同型 2

調和  $k$  形式とド・ラーム  $k$  形式は同型になる。

$$\mathcal{H}^k(M; \mathbb{R}) = H_{d^r}^k(M; \mathbb{R})$$

これを示すためにまず次の補題を示す。

**補題 1.** 調和形式

$$\mathcal{H}^k(M; \mathbb{R}) = \{u \in \Lambda^k(M) | \delta u = du = 0\}$$

*Proof.* ラプラシアン の定義式 10.12 から明らかに

$$du = \delta u = 0 \Rightarrow \Delta u = 0$$

である。

次に、逆を示せばよい。そこで、 $\Delta u = 0$  とすると

$$\langle u, \Delta u \rangle \equiv 0$$

また、演算子を左から作用させて、 $\langle \delta u, \delta u \rangle, \langle du, du \rangle$  は 0 以上でないといけませんが、

$$\begin{aligned} \langle u, \Delta u \rangle &= \langle u, d\delta u + \delta du \rangle \\ &= \langle \delta u, \delta u \rangle + \langle du, du \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

となるので

$$du = \delta u = 0$$

である。 □

補題がいたので、次に  $\Omega^k(M)$  の  $L^2$  ノルムについて完備化を  $L^2(\Lambda^k(M))$  と書く。

後で説明するように  $d, \delta$  は  $L^2(\Lambda^k(M))$  の間の非有界作用素に拡張され、次のような  $L^2$  内積について分解ができる。

**定理 26.** ホッジ-小平の分解定理

$$L^2(\Lambda^k(M)) = \text{Im}d \oplus \text{Im}\delta \oplus \ker \Delta$$

*Proof.* まず、3つの空間が直交していることをいう必要がある。

$$\langle du, \delta v \rangle = \langle ddu, v \rangle = 0$$

$$u \in \ker \Delta \Rightarrow u \in \ker \delta \Rightarrow \langle u, dv \rangle = \langle \delta u, v \rangle = 0$$

から

$$\text{Im}d \perp \text{Im}\delta, \ker \Delta \perp \text{Im}\delta, \text{Im}d \perp \ker \Delta$$

である。よって空間  $L^2(\Lambda^k(M))$  をこの3つの空間で張られていることがいえればよい。

$$u \in L^2(\Lambda^k(M))$$

が3つの空間いずれにも直交するとする。すると、任意の

$$v \in L^2(\Lambda^{k-1}(M))$$

に対して

$$\langle u, dv \rangle = 0$$

だから式 10.9 より、 $\langle \delta u, v \rangle = 0$  が任意の  $v \in L^2(\Lambda^{k-1}(M))$  に対して成り立つ。よって

$$\delta u = 0$$

となる。同様に任意の  $v \in L^2(\Lambda^{k+1}(M))$  に対して

$$\langle u, \delta v \rangle = 0$$

となるので

$$du = 0$$

となるから

$$\Delta u = 0$$

でないといけなくなる。しかし、 $u$  は  $\mathcal{H}^k(M; \mathbb{R})$  に直交すると仮定したので  $u = 0$  となる。 □

これにより、

次によってド・ラーム同型 2 の定理  $\mathcal{H}^k(M; \mathbb{R}) = H_{D,r}^k(M; \mathbb{R})$  の証明ができる。

*Proof.* ド・ラーム同型 2

$$\ker d = \text{Im}d \oplus \ker \Delta$$

を言えればいいが

$$\ker d \supseteq \text{Im}d \oplus \ker \Delta$$

は明らかなので

$$u \in \text{Im}\delta \cap \ker d$$

とすると

$$\delta\delta = 0$$

と調和形式の補題から

$$u \in \ker \delta \cap \ker d = \ker \Delta$$

よって、先のホッジ-小平の分解定理から  $u = 0$  であり、

$$\ker d \subseteq \text{Im}d \oplus \ker \Delta$$

となる。よって

$$\ker d = \text{Im}d \oplus \ker \Delta$$

□

深谷氏はこの議論の不十分なところが3つの関数空間が閉部分空間かどうか分からない点として指摘している。

つまり、ここで示されたのは

$$\overline{\text{Im}d \oplus \text{Im}\delta \oplus \ker \Delta} = L^2(\Lambda^k(M))$$

である。

## 11 結び目理論 [38]

ここでは結び目の基本理論について学ぶ。ひもが結ばれるかいないかは実際のひもで古くから問題になっていた。また、ロープの結び方も多様にある。日本にも組紐と呼ばれる伝統工芸がある。1984年に Jones 多項式が発表されると、この結び目は量子場にも応用されるようになる。

もちろん、名のごとく超弦理論に応用されていく、結び目というのは3次元空間がないとできないが、これを2次元に写して考える。しかし、単に平面にしてみれば、上、下の区別がなくなるが、これを与えて、近2次元のように考えていくことが特徴である。こうした考えは位相的に自由度を与えて、前部のファイバーとホモロジーの考えを融合させていく。今後の理論物理にとっても重要な内容がひもに絡まっているのである。

### 11.1 ビオ・サバルの法則

第5部の電磁気でアンペールの法則

$$\int_S d\mathbf{S} \cdot \nabla \times \mathbf{B} = \oint_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{B} = \mu_0 \int_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{J} = \mu_0 I$$

さらに、ビオ・サバルの法則を次のように導いた。

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I ds \times \mathbf{r}}{4\pi r^3}$$

これは下図のように、電流と磁場のループ  $C_1, C_2$  が絡まっていないと値を持たない。

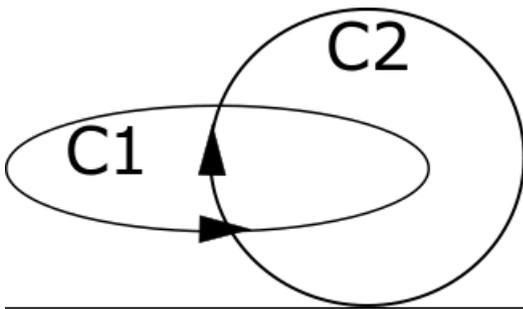


図 11.1: 絡まるループ

ビオ・サバルの法則を次のように書き直す。  $C_2$  のような電流がつくる磁場を  $C_1$  のループで積分し、次元を単純化して

$$L = \frac{1}{4\pi} \int_{C_1} \int_{C_2} \frac{(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot (d\mathbf{x} \times d\mathbf{y})}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|^3}$$

となる。これは  $d\mathbf{x}, d\mathbf{y}$  の張る面積ベクトルと  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  の差ベクトルとの内積だが、これを  $C_1$  と  $C_2$  の絡み数と定義できる。

他にも、絡み数を定義できて、これらが不変量として扱うことができることがわかってくると、物理との関連が見えてきそうである。

## 11.2 導入

観測の理論においても普通はより高次元空間に観測者をおいて、物体を見る。第5部でファーバーみたが、これも多様体の埋め込みにより、その射影された像を観測者と共有できる空間として重要であった。近年になった、これら結び目として数学的に扱う方法がある。

つまり、ひもが絡まっているかいないかは、平面の射影からの情報ではえられず、これを空間に持ち上げてみるとわかる。

ロープや糸を結ぶ方法については紀元前の古くから知られている。

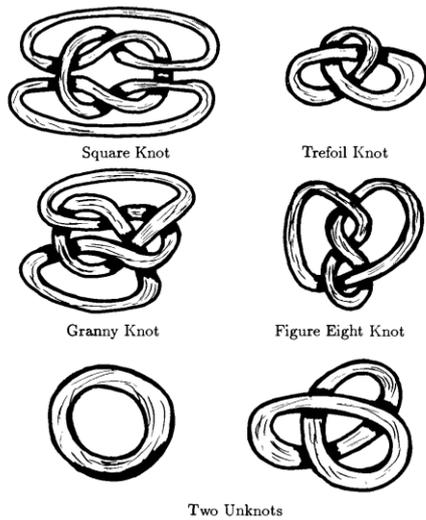


図 11.2: [38] より

しかし、結び目の理論は比較的新しく、長さという考え方を無視した、トポロジーの例として、最近では素粒子や有機化学などの分野で応用されている。

結び目の理論は伸縮は自由で極めて平面的にみることができるが次の図のように、射影空間ではなく。曲線が上か下を通るかを区別する。

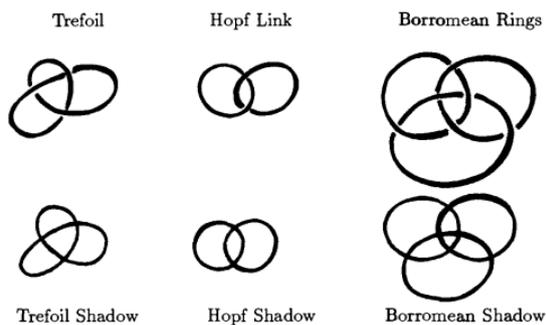


図 11.3: [38] より

図において shadow は射影平面である。ところが上段の図が結び目理論の舞台であり、上、下の2つの自由度があることに注意する。こうした事情は次の図のように虚数単位を持つ複素空間のリーマン葉に類似している。

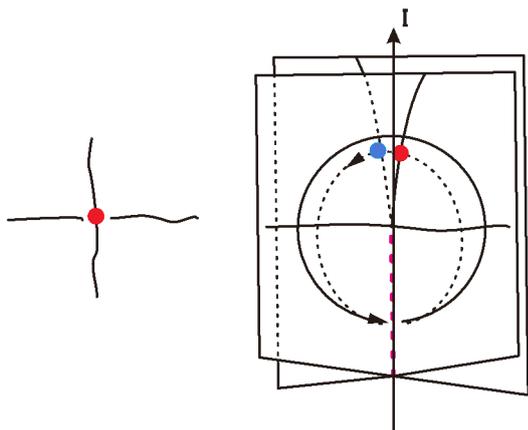


図 11.4: 右が2つのリーマン葉、負の虚軸に切れ込みがある。

つまり、リーマン葉では図のように半直線にわたって切れ込みを入れるが、結び目理論では交差点に極小の切れ込みを入れる。

### 11.3 分割と結合

結び目となる交差点を除去、あるいは結合する方法として、次の  $A, B$  の基本的な方法がある。

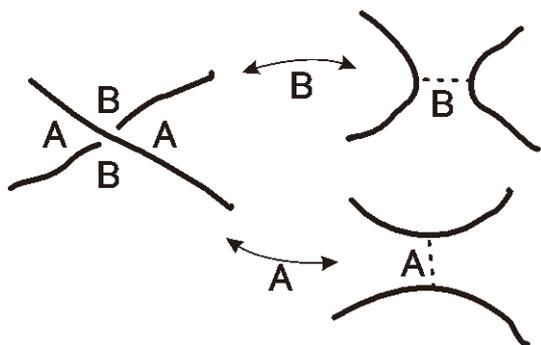


図 11.5: 分割、結合則

結び目によって、2層にわかれていることを考慮すると図のように  $A$  と  $B$  は区別される。

単純な射影平面であれば図右の上下の図は回転すれば同型であるが結び目の上下により区別されるため2つの方法を考慮しないと結び目を逆につくることができない。

つまり図の左にみる基本形において上下の違いは複素平面において  $A \rightarrow B$  への回転に対応した関係になる。ここで、 $A$  を演算子とみなすと  $B$  もまた演算子でありこれらの間の関係として次のように定義する。

$$A = B^{-1}$$

また、次の図のように分割されたもの  $A, B$  のパターンで結び目に変えることができる。

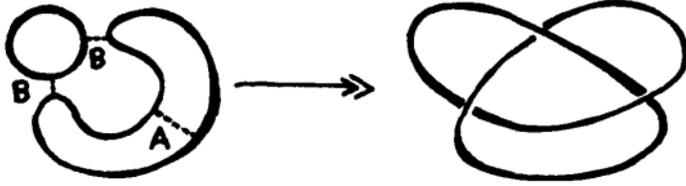


図 11.6:

#### 11.4 こよりの理論

ここで  $K_n$  でひもにねじりを加えて得られるトーラスリンク (torus\_link\_of\_type(2,n)) として例えば



図 11.7: [38] より

とおくと次の図から  $K_n$  は A,B 型の分離で単純に分けられることができ、 $B = A^{-1}$  として

$$\langle \text{link with } n \text{ crossings} \rangle = A \langle \text{link with } n-1 \text{ crossings} \rangle + A^{-1} \langle \text{link with } n-1 \text{ crossings} \rangle$$

図 11.8: [38] より

となるので一般に

$$\langle K_n \rangle = A \langle K_{n-1} \rangle + A^{-1} (-A^3)^{n-1}$$

が成り立つ。これら一般に次のような数列を満たす。

$$\langle K_n \rangle = A \langle K_{n-1} \rangle + (-1)^{-1} A^{-3n+2}$$

これから、こより型について次のように具体的に求めることができる。

$$\begin{aligned} \langle K_1 \rangle &= -A^3 \\ \langle K_2 \rangle &= -A^4 - A^{-4} \\ \langle K_3 \rangle &= -A^5 - A^3 + A^{-7} \\ \langle K_4 \rangle &= -A^6 - A^{-2} + A^6 - A^{-10} \end{aligned}$$

これから鏡像

$$L(A) = L(A^{-1})$$

になるのは  $\langle K_2 \rangle$  であることがわかる。

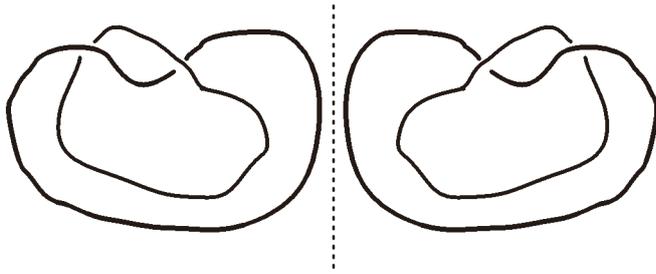
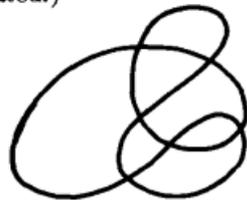


図 11.9:  $K_2$  の鏡像

### 11.5 塗り分け理論

結び目のある曲線の射影は図のように 2 色で塗り分けができる。

**This is a long example. To begin with, take any link shadow. (No over or undercrossings indicated.)**



$U$

**Shade the regions with two colors (black and white) so that the outer region is shaded white, and so that regions sharing an edge receive opposite colors.**



図 11.10: [38] より

この塗り分けの問題は結び目を交差点とみなして道路を必ず曲がルールで一筆書きができるかという問題になる。

Now, find a route that traverses every street in this map once, and so that it always turns at each cross-street.



図 11.11: [38] より

ここで次のように前節の  $A$  分割と  $B$  分割を考えると、 $A$  分割では領域が結ばれ、 $B$  分割では分けられる。この影表示を  $S$  で表す。

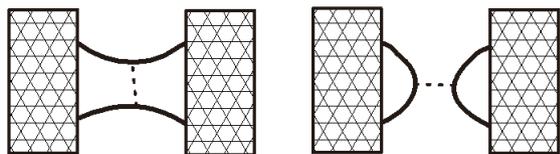


図 11.12: [38] より

これを塗り分けに利用すると、一筆書きされていれば次のように 2 つの分割ができ、結局 2 色で塗り分けが可能である。



図 11.13: [38] より

これから次のような規則が導ける。  
例えば次の図形を考えよう。

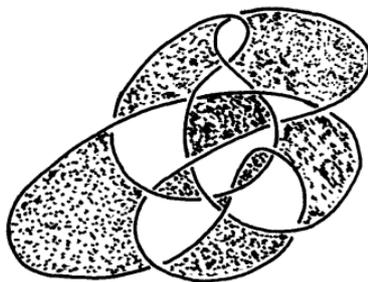


図 11.14: [38] より

この図形を  $K$  とし、これを次のルールで分けた図形を  $S$  とする。



図 11.15: [38] より

$\ell(S)$  をループの数、 $V(K)$  を交差点の数として、高次の場合

$$A^{V(K)}(-A^2 - A^{-2})^{\ell(S)-1} = (-1)^{\ell(S)} A^{V(K)+2\ell(S)-2}$$

の操作で分けることができる。最高次の係数が  $(-1)^{\ell(S)}$  となる。

## 11.6 交点数

向きのあるひも  $L$  を用意する。

単純な結び目には矢印方向に右巻き+1 と左巻き-1 しかない。これを交点数という。

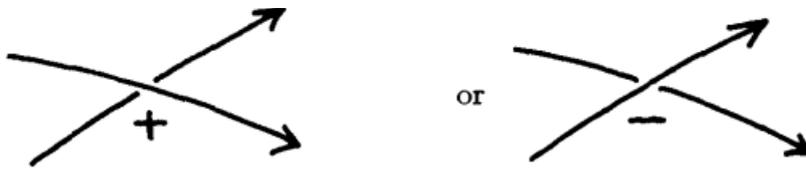


図 11.16: [38] より:交点数

これを全て足し上げたものを絡み数といい次で定義する。

$$L_K(L) = \sum_i \frac{1}{2} (N_+ - N_-)$$

例えば、次の図のように計算する。



$$\ell k(L) = \frac{1}{2} (1 + 1) = 1$$

and



$$\ell k(L') = -1.$$

図 11.17: [38] より:絡み数

例えば下図の場合を左上から左周りに計算すると

$$L_k = \frac{1}{2} (-1 + -1 + 1 + 1) = 0$$

となるので赤と青のひもは絡まず抜けることになる。

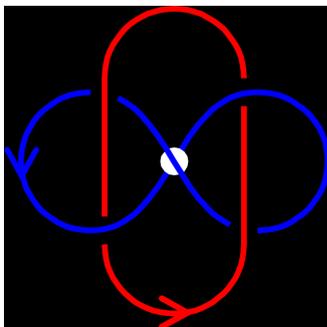


図 11.18: 絡み数=0

## 11.7 ジョーンズ多項式 [104]

結び目と絡み目をみてきたがこれらを数学的に表現していく。

円周  $S^1$  を 3次元ユークリッド空間  $\mathbb{R}^3$  に滑らかに埋め込んだ像を結び目 (knot) という。

$\ell$  個の  $S^1$  を  $\mathbb{R}^3$  に滑らかに埋め込んだ像を  $\ell$  成分の絡み目 (link) という。従って 1 成分のみの絡み目が結び目である。

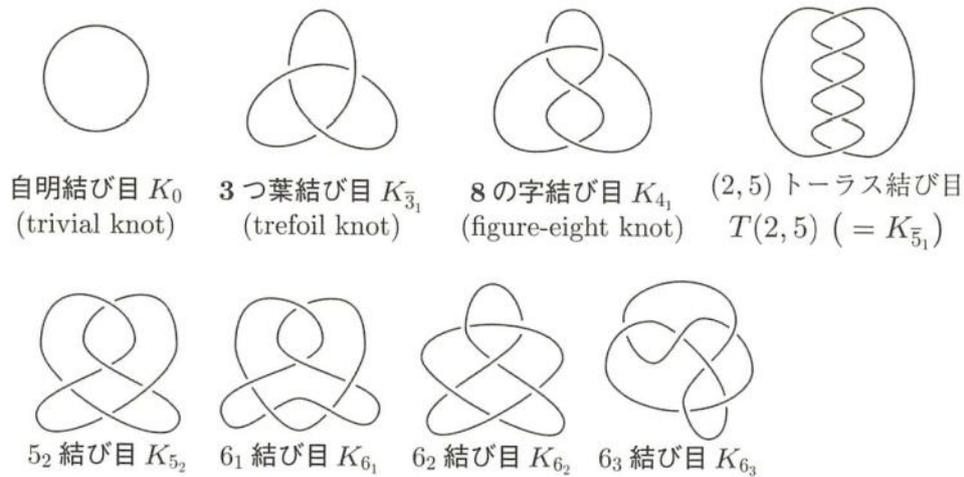
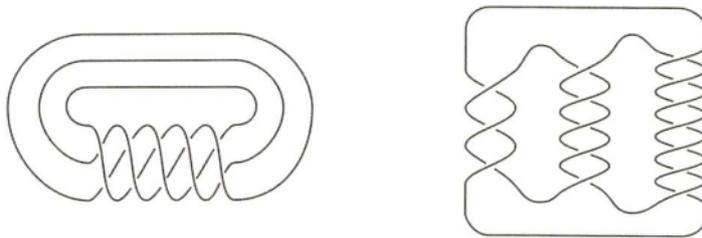


図 11.19: [104] より：結び目の例 1

また、無限個まで拡張できる結び目として次のトーラス結び目  $T$  とプレッツェル結び目  $P$  がある。



(3,5) トーラス結び目  $T(3,5)$     (3,5,7) プレッツェル結び目  $P(3,5,7)$

図 11.20: [104] より：結び目の例 2

2つの結び目、もしくは絡み目  $K, K'$  について、 $h_0$  が  $\mathbb{R}^3$  の恒等写像になるような微分同相写像の族  $h_t$

$$h_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (t \in [0, 1])$$

があって、

$$h_1(K) = K'$$

となれば  $K$  と  $K'$  は isotopic といい、変形過程である  $h_t$  を isotopy という。簡単には自己交差しないように連続変形できればよい。

例えば上図 3つ葉と  $T(2,3)$  はイソトピックである。ある写像  $I$  が

$$I(K) = I(K')$$

を満たすならば、これをイソトピー不変量 (isotopy\_invariant) という。

### 11.7.1 ライデマイスター移動

このイソトピックで図式のひもを移動する方法としてライデマイスター移動 (Reidemeister\_move) があり、基本移動は次の3種類しかない。

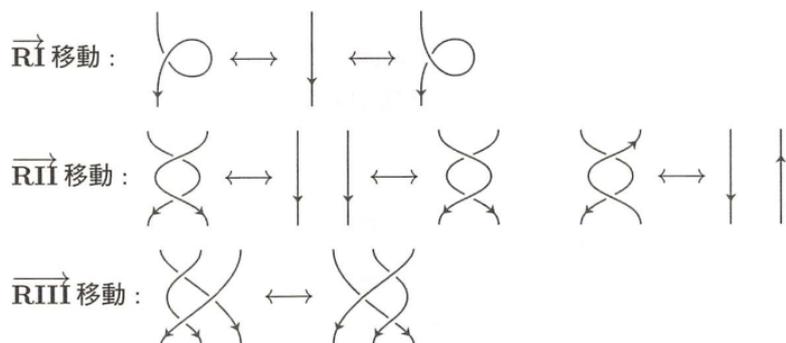


図 11.21: [104] より: Reidemeister\_move

簡単には RI は引っ張って伸びるもの、RII は閉じた円が1つあるものを円の部分を伸ばして、分けられるもの、RIII は閉じた円を結び目の反対につくるような移動である。

### 11.7.2 カウフマン括弧 (Kauffman bracket)

図式  $D$  に対してカウフマン括弧を  $\langle D \rangle \in \mathbb{Z}[A, A^{-1}]$  として次で定義する。

$$\langle \text{crossing} \rangle = A \langle \text{right arc} \rangle \langle \text{left arc} \rangle + A^{-1} \langle \text{left arc} \rangle \langle \text{right arc} \rangle$$

図 11.22: [104] より: カウフマン括弧

またループと空白については次のように決める。

$$\langle \bigcirc D \rangle = (-A^2 - A^{-2}) \langle D \rangle$$

$$\langle \text{空集合の図式 } \emptyset \rangle = 1$$

図 11.23: [104] より: カウフマン括弧

任意の図式  $D$  の交点数が  $k$  個あると  $2^k$  の図式の線形和ができる。

また輪が  $\ell$  個あると図式が  $(-A^2 - A^{-2})^\ell$  に置き換えられる。

これから図式をカウフマン括弧によって次のよう  $A$  の多項式に置き換えることができる。

$$\begin{aligned}
\langle \text{三葉図形} \rangle &= A^3 \langle \text{三葉図形} \rangle + A \langle \text{三葉図形} \rangle + A \langle \text{三葉図形} \rangle \\
&+ A \langle \text{三葉図形} \rangle + A^{-1} \langle \text{三葉図形} \rangle + A^{-1} \langle \text{三葉図形} \rangle \\
&+ A^{-1} \langle \text{三葉図形} \rangle + A^{-3} \langle \text{三葉図形} \rangle \\
&= A^3(-A^2 - A^{-2})^2 + A(-A^2 - A^{-2}) + A(-A^2 - A^{-2}) \\
&+ A(-A^2 - A^{-2}) + A^{-1}(-A^2 - A^{-2})^2 + A^{-1}(-A^2 - A^{-2})^2 \\
&+ A^{-1}(-A^2 - A^{-2})^2 + A^{-3}(-A^2 - A^{-2})^3 \\
&= (-A^2 - A^{-2})(-A^5 - A^{-3} + A^{-7})
\end{aligned}$$

図 11.24: [104] より :

第一項はまず図式に  $A$  を 3 回かけて結び目を外す。次は  $A$  を 2 回かけてはずし、1 つは  $A^{-1}$  で横にはずす括弧になる。

したがって全体で  $A$  が 1 回かかる。これは 3 パターンある。

次に  $A$  は 1 回で  $A^{-1}$  を 2 回かけてはずす括弧も同様に全体で  $A^{-1}$  がかかり 3 パターンある。

最後に  $A^{-3}$  ではずしてある。第 2 項からは全て円の基本形に括弧の中がなったので  $-A^2 - A^{-2}$  を 1 つの円に対応させればよい。

結果この 3 葉図形を  $\langle K_{3+} \rangle$  で表すと

$$\langle K_{3+} \rangle = (-A^2 - A^{-2})(-A^5 - A^{-3} + A^{-7}) \quad (11.1)$$

また、この図形の鏡像も同様に計算すると

$$\langle K_{3-} \rangle = (-A^2 - A^{-2})(-A^{-5} - A^3 + A^7) \quad (11.2)$$

となり、等しくない。しかし、どれも  $(-A^2 - A^{-2})$  の因数を持つ。

この結果は外し型に依存しない。注意すべきは  $A, A^{-1}$  の外し方について足し合わせることである。

手書きになるが基本形をみておく。全て *(This.)* として計算することにする。

$$\begin{aligned}
\langle \text{三葉図形} \rangle &= A^{-1} \langle \text{三葉図形} \rangle + A \langle \text{三葉図形} \rangle \\
&= A^{-1} \{ A \langle \text{三葉図形} \rangle + A \langle \text{三葉図形} \rangle \} \\
&+ A \{ A \langle \text{三葉図形} \rangle + A^{-1} \langle \text{三葉図形} \rangle \}
\end{aligned}$$

図 11.25: 1

この場合は円が2つある場合があるので

$$\begin{aligned}
 \langle \text{This1} \rangle &= A^{-2} (-A^2 - A^{-2})^2 + (-A^2 - A^{-2}) + A^2 (-A^2 - A^{-2}) + (-A^2 - A^{-2})^2 \\
 &= (-A^2 - A^{-2})^2 (A^{-2} + 1) + (-A^2 - A^{-2}) (A^2 + 1) \\
 &= (-A^2 - A^{-2}) \{ (-A^2 - A^{-2}) (A^{-2} + 1) + A^2 + 1 \} \\
 &= (A^2 + A^{-2}) (A^{-4} + A^{-2})
 \end{aligned}$$

上の図形を鏡像したものを考えると、次のように異なった結果になる。

$$\begin{aligned}
 \langle \text{鏡像} \rangle &= A \langle \text{鏡像} \rangle + A^{-1} \langle \text{鏡像} \rangle \\
 &= A \{ A \langle \text{鏡像} \rangle + A^{-1} \langle \text{鏡像} \rangle \} \\
 &+ A^{-1} \{ A^{-1} \langle \text{鏡像} \rangle + A \langle \text{鏡像} \rangle \}
 \end{aligned}$$

図 11.26: 2

$$\begin{aligned}
 \langle \text{This2} \rangle &= A^2 (-A^2 - A^{-2})^2 + (-A^2 - A^{-2}) + A^{-2} (-A^2 - A^{-2})^2 + (-A^2 - A^{-2}) \\
 &= (-A^2 - A^{-2})^2 (A^2 + A^{-2}) - 2 (A^2 + A^{-2}) \\
 &= \{ (-A^2 - A^{-2})^2 - 2 \} (A^2 + A^{-2}) \\
 &= (A^2 + A^{-2}) (A^4 + A^{-4})
 \end{aligned}$$

次に R2 移動に相当するものを見てみると

$$\begin{aligned}
 \langle \text{R2} \rangle &= A \langle \text{R2} \rangle + A^{-1} \langle \text{R2} \rangle \\
 &= A \{ A \langle \text{R2} \rangle + A^{-1} \langle \text{R2} \rangle \} \\
 &+ A^{-1} \{ A^{-1} \langle \text{R2} \rangle + A \langle \text{R2} \rangle \}
 \end{aligned}$$

図 11.27: 3

$$\begin{aligned}
 \langle \text{This3} \rangle &= A^2 + (-A^2 - A^{-2}) + A^{-2} + 1 \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

となって、R2 移動前後で不変である。

では R1 の場合を見てみると、次の鏡像2つの場合、異なる値が得られる。

$$\begin{aligned}
\langle \overline{\sigma} \rangle &= A \langle \overline{\circ} \rangle + A^{-1} \langle \overline{\leftarrow} \rangle \\
&= A(-A^2 - A^{-2}) + A^{-1} = -A^3 \\
\langle \sigma \rangle &= A \langle \leftarrow \rangle + A^{-1} \langle \overline{\circ} \rangle \\
&= A + A^{-1}(-A^2 - A^{-2}) \\
&= -A^{-3}
\end{aligned}$$

図 11.28: 4

つまり、R1 では、何か重みをかけないと、移動の前後で同じにならない。

### 11.7.3 ジョーンズ多項式

R 移動での結び目の不変量になるための方法を考えてよう。はじめに重みをつけて不変量をつくる。前節で見たように RI 移動では 1 点交点があるので

$$\langle \text{RI} \rangle = A \langle \text{RI} \rangle + A^{-1} \langle \text{RI} \rangle = -A^3 \langle \text{RI} \rangle$$

図 11.29: [104] より : RI のカウフマン括弧

となり

$$A(-A^2 - A^{-2}) + A^{-1} = -A^3$$

であり、不変量ではない。

次に RII 移動の例を見ると

$$\langle \text{RII} \rangle = A \langle \text{RII} \rangle + A^{-1} \langle \text{RII} \rangle = \langle \text{RII} \rangle$$

図 11.30: [104] より:RII のカウフマン括弧:(fig:R1)

となるので、

$$A(A + A^{-1}) + A^{-1}(-A^3) = 1$$

これは不変量になる。

次に RIII 移動の例を見ると

$$\langle \text{RIII} \rangle = A \langle \text{RIII} \rangle + A^{-1} \langle \text{RIII} \rangle = A \langle \text{RIII} \rangle + A^{-1} \langle \text{RIII} \rangle$$

図 11.31: [104] より:RIII のカウフマン括弧

2番目の等式では RII 移動で変わらない性質を利用した。  
 この場合、右の図では

$$A \{ A(A + A^{-1}) + A^{-1}(A + A^{-1}) \} + A^{-1} = A(A^2 + A^{-2} + 2) + A^{-1} \\ = A^3 + 2(A^{-1} + A)$$

紙面垂直な軸で 180 度回転対称である。

$$\langle \text{crossing} \rangle = A \langle \text{crossing} \rangle + A^{-1} \langle \text{crossing} \rangle \\ = A \{ A \langle \text{crossing} \rangle + A^{-1} \langle \text{crossing} \rangle \} + A^{-1} \langle \text{crossing} \rangle \\ = A \{ A(A + A^{-1}) + A^{-1}(A + A^{-1}) \} + A^{-1} \\ = A^3 + 2(A + A^{-1})$$

図 11.32: 5

のようになったので、不変量を得るためにまず、次のようにひもに向きを決めることにより前節でも登場した正負の交点数  $\epsilon$  を決める。



図 11.33: [104] より: 交点符号規則 ; 右ねじでからめば-, はずれれば+

次のようにねじれ (writhe) を定義する。

$$w(K) = \sum_p \epsilon(p)$$

そこで結び目不変になる次の量が定義できる。ある図式  $D$  に対して

$$\mathcal{L}_D = (-A^3)^{-w(D)} \langle D \rangle$$

これによって、先の fig:R1 を見ると、この重みのおかげで次のように R1 でも不変になる。

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} \curvearrowright &= (-A^3)^{-w(\curvearrowright)} \langle \curvearrowright \rangle \\
&= (-A^3)^{-[1+w(\curvearrowright)]} (-A^3) \langle \curvearrowright \rangle \\
&= (-A^3)^{-w(\curvearrowright)} \langle \curvearrowright \rangle \\
&= \mathcal{L} \curvearrowright
\end{aligned}$$

図 11.34: [104] より:

この  $\mathcal{L}$  を有効絡み目  $L$  に対して、イソトピー不変量という。

さらに  $L$  に対して、結び目の向きに対しても不変になるようにジョーンズの多項式を定義する。

$$V_L(t) = (-A^2 - A^{-2})^{-1} (-A^3)^{-w(D)} \langle D \rangle |_{A^2=t^{-1/2}} \in \mathbb{Z} [t^{1/2}, t^{-1/2}]$$

これが、結び目の分類に使われる。

例えば



$K_0 =$

の場合、 $w(D) = 0$  だから

$$V_{K_0}(t) = (-A^2 - A^{-2})^{-1} \cdot (-A^2 - A^{-2})^1 \cdot (-A^3)^0 |_{A^2=t^{-1/2}} = 1$$



$K_{3+} =$

の場合、 $w(D) = 3$  だから式 11.1 より

$$\begin{aligned}
V_{K_{3+}}(t) &= (-A^2 - A^{-2})^{-1} \cdot (-A^3)^{-3} \cdot (-A^2 - A^{-2}) (-A^5 - A^{-3} + A^{-7}) |_{A^2=t^{-1/2}} \\
&= (A^{-4} + A^{-12} - A^{-16}) |_{A^2=t^{-1/2}} \\
&= t + t^3 - t^4
\end{aligned}$$



$K_{3-} =$

$K_-$

の場合、 $w(D) = -3$  だから 11.2 より

$$\begin{aligned}
V_{K_{3-}}(t) &= (-A^2 - A^{-2})^{-1} \cdot (-A^3)^3 \cdot (-A^2 - A^{-2}) (-A^{-5} - A^3 + A^7) |_{A^2=t^{-1/2}} \\
&= (A^4 + A^{12} - A^{16}) |_{A^2=t^{-1/2}} \\
&= t^{-1} + t^{-3} - t^{-4}
\end{aligned}$$

となる。

### 11.7.4 スkein関係式

$\mathbb{R}^3$  内において3次元球体内で図のような重なり方ををして、その外では同じなるような有向絡み目を考える。

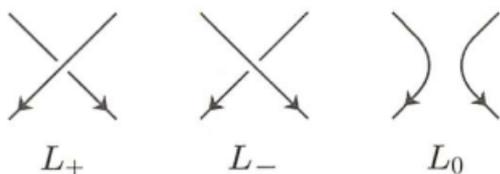


図 11.35: [104] より :

まず、これらのジョーンズ多項式を計算すると

$L_+$  は交点数が +1 だから

$$\begin{aligned} V_{L_+} &= (-A^2 - A^{-2})^{-1} \cdot (-A^3)^{-1} \cdot (A + A^{-1})|_{A^2=t^{-1/2}} \\ &= (-t^{-1/2} - t^{1/2})^{-1} (-t^{1/2} - t) \end{aligned}$$

よって

$$t^{-1}V_{L_+}(t) = (-t^{-1/2} - t^{1/2})^{-1} (-t^{-1/2} - 1)$$

$L_-$  は交点数が -1 だから

$$\begin{aligned} V_{L_-} &= (-A^2 - A^{-2})^{-1} \cdot (-A^3)^1 \cdot (A + A^{-1})|_{A^2=t^{-1/2}} \\ &= (-t^{-1/2} - t^{1/2})^{-1} (-t^{-1} - t^{-1/2}) \end{aligned}$$

よって

$$tV_{L_-} = (-t^{-1/2} - t^{1/2})^{-1} (-1 - t^{1/2})$$

$L_0$  は交点数が 0 だから

$$\begin{aligned} V_{L_0} &= (-A^2 - A^{-2})^{-1}|_{A^2=t^{-1/2}} \\ &= (-t^{-1/2} - t^{1/2})^{-1} \end{aligned}$$

よって

$$(t^{1/2} - t^{-1/2})V_{L_0} = (-t^{-1/2} - t^{1/2})^{-1} (t^{1/2} - t^{-1/2})$$

となる。よってこれらには

$$\begin{aligned} t^{-1}V_{L_+}(t) - tV_{L_-} &= (-t^{-1/2} - t^{1/2})^{-1} (-t^{-1/2} + t^{1/2}) \\ &= (t^{1/2} - t^{-1/2})V_{L_0} \end{aligned} \tag{11.3}$$

となる。これをskeinの関係式 (**skein\_relation**) という。

これを用いてジョーンズ多項式を計算する方法がある。

先の  $K_{3+}$  を例にしてみよう。まず、次のように全て単位円にまで分解していく。この図をskein木という。

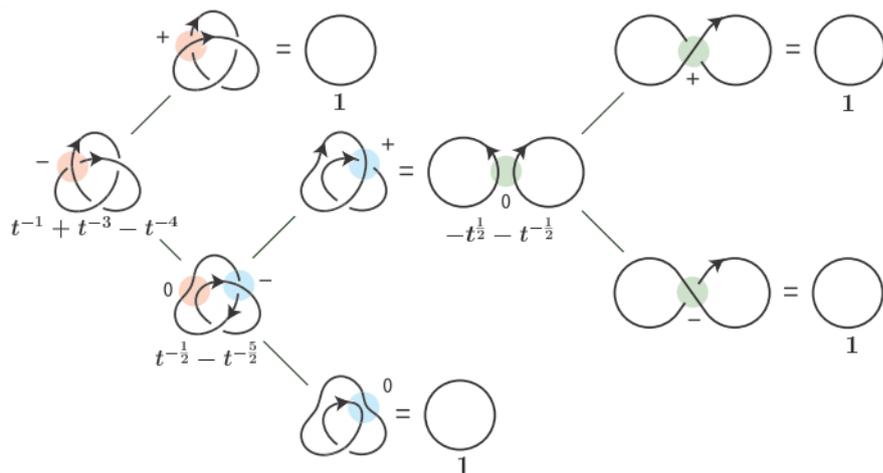


図 11.36: 結び目の数学 ; 今井淳より : スケイン木

はじめに元の図形を交点数 0 とそうでないもの（この場合は元が+1 なので-）にわけ

この時、スタートの-を+に変えた側は絡みはとれて円と同相なり終る。交点を切り、0としたのは残して、次の交点に進む。

今度の交点は-なのでこれを 0 と+に変える。今度は 0 に変えたのは円と同相になるので終る。

中央の+に変えたものは 2 つの逆回転の円になる。

これは 0 の交点が図の右端のように右図のように+、-の 2 つを持つ 8 の字を足したものとする。

この 8 の字は円と同相なので、すべて (0,+,-) を使って円にまでいきついたことになる。

このようにして、全ての交点なくなるまで繰り返す。

上図の色付き円のように交点数をチェックしておき、この+,-,0 に応じて、スケイン関係を移項して使う。

こんどはこれを逆に右から左にたどるわけだ。

はじめに左端からみて、円周 2 つのジョーンズ多項式を  $V_1(t)$  とおく。

式 11.3 のスケインの関係から円周の交点数は 1 だから

$$t^{-1} - t^1 = (t^{1/2} - t^{-1/2}) V_1(t)$$

$$V_1(t) = -t^{1/2} - t^{-1/2}$$

が得られた。これが図の中央の絵のホップリング (+) 式が求まった。すぐ左下のホップリンク (-) 図の式を  $V_2(t)$  とする。

これに再び、スケインの関係を使うと

$$tV_{L-}(t) = -(t^{1/2} - t^{-1/2}) V_{L_0} + t^{-1} V_{L+}$$

だから左下のホップリンク (-) は円周と  $V_1(t)$  に分かれているから  $V_{L_0} = 1, V_{L+} = V_1(t) = -t^{1/2} - t^{-1/2}$  を代入して

$$V_2(t) = t^{-1} \left\{ -(t^{1/2} - t^{-1/2}) \cdot 1 + t^{-1} (-t^{1/2} - t^{-1/2}) \right\} = t^{-1/2} - t^{-5/2}$$

となる。そして最後に求める左端の  $K_{3+}$  が円周と  $V_2(t)$  に分かれるから、今度も求めるものの交点数は-だから

スケインの関係を

$$tV_{L-}(t) = -(t^{1/2} - t^{-1/2}) V_{L_0} + t^{-1} V_{L+}$$

と移項して、 $V_{L_0} = V_2(t), V_L, V_{L_+} = 1$  を代入すると

$$V_{K_{3+}}(t) = t^{-1} \left\{ - \left( t^{1/2} - t^{-1/2} \right) \cdot \left( -t^{1/2} - t^{-1/2} \right) + t^{-1} \cdot 1 \right\} = t^{-1} + t^{-3} - t^{-4}$$

が得られる。

少々複雑な絡み目になったら、もはやどんなに気合いを入れても解く気になれないかもしれないが、とりあえず関係式が得られたのでプログラムを書いて、機械にやらせることができるようになったわけである。

## 12 組紐理論

### 12.1 組みひも群

結び目、絡み目について学んだが、さらに多くのひもを考え、群として扱えるようにしたい。

そこで、 $\mathbb{R}^2 \times [0, 1]$  に  $n$  本のひもを、端点が  $\{1, 2, \dots, n\} \times \{0\} \times \{0, 1\}$  になるように高さ関数が単調になるようにする。

この  $n$  本の像を組みひも (**braid**) という。

下図のように上下面を固定し、下向きの矢印をつけて、適当に動かし、全て自己交差しないようになればイソトピックという。

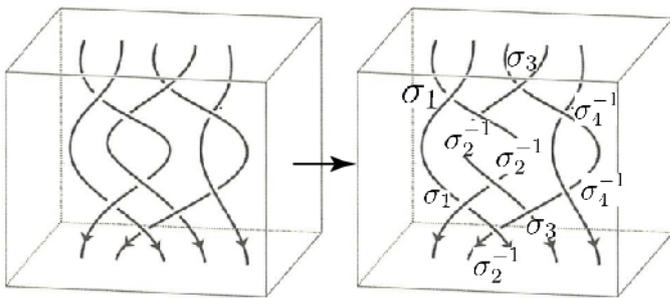


図 12.1: 図  $\Sigma$ ; 組みひもは基本、下向きの矢印をつける。上下は固定して高さは  $[0, 1]$  とする

次に、この組みひもの状態をどう表すかを考えよう。上図左の各交点には、上図右のように記号を振ることができる。

これをみていく。結び目でやった  $A, A^{-1}$  のように交差の仕方で下図のように指数の符号を決める。

注意点は上下に交点のみをみる狭い視野をとり、その視野内で左端から番号  $i = 1, 2, \dots$  を振ること。

従って、1本のひもを縦に長く連続してみると、同じひも  $i$  は変化してよいし、となりのひもは常に  $i+1$  番目になる。

注目した交点を  $\sigma_i$  とし、交差の仕方で指数の符号を変化させる。

$$\sigma_i = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & i & & i+1 & & \\ & & \diagdown & & \diagup & & \\ & & & & & & \\ & & \diagup & & \diagdown & & \\ & & & & & & \end{array} \\ \downarrow \dots \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \dots \downarrow \end{array}, \quad \sigma_i^{-1} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & i & & i+1 & & \\ & & \diagup & & \diagdown & & \\ & & & & & & \\ & & \diagdown & & \diagup & & \\ & & & & & & \end{array} \\ \downarrow \dots \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \dots \downarrow \end{array}$$

図 12.2: [104] より :

このルールで図の組みひもの状態を表してみる。上から順番に視野を下げていくと 9 個の交点について先の

図の右のように記号が振れて

$$\begin{aligned} \Sigma &= \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_4^{-1} \sigma_4^{-1} \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2^{-1} \\ &= \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2^{-2} \sigma_2^{-1} \sigma_4^{-2} \sigma_3 \sigma_2^{-1} \end{aligned}$$

となる。こうしてできるイソトピー類は群をなし、**組みひも群 (braid group)  $B_n$**  で表す。  
この群の生成元は上の例でもわかるようにひもの数が  $n$  本あるとき、 $n - 1$  となることに留意する。  
この群は下図で見るように次の関係式が一般に成り立つ。

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad (|i - j| \geq 2)$$

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \quad (i = 1, 2, \dots, n - 2)$$

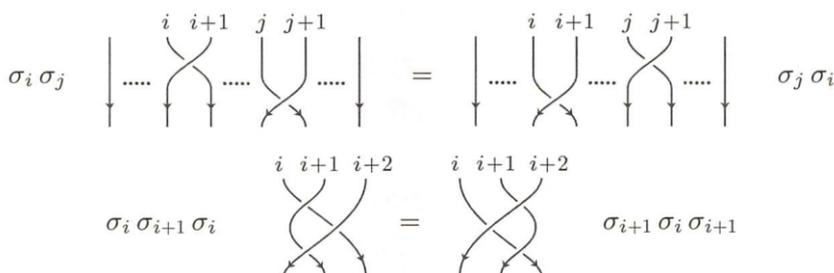


図 12.3: [104] より:組みひもの関係式

上から見ていく順番には依存しないことを示し、2 段目では RIII 移動で不変になることを示している。

## 12.2 閉包

下図のように組みひもの上と下をつなげてできる有効絡み目を組みひもの**閉包 (clouser)** という。  
向きがそろうので便利になることが多い。

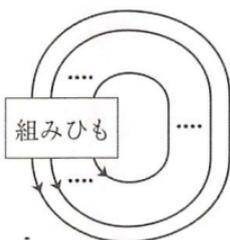


図 12.4: [104] より:閉包

任意の有効絡み目は、ある組みひもの閉包で表すことができる。  
これを 8 の字結びで見ると、下図のようにある観測点  $\times$  から、時計周りになっている部分をイソトピーで移動する。  
下図の例では点線部分を大きく広げて手前側に折ればよい。こうして全て反時計回りに揃える。  
次に図の切れ目のところで引き延ばして、絡み目の部分をまとめ上げれば、閉包形ができる。

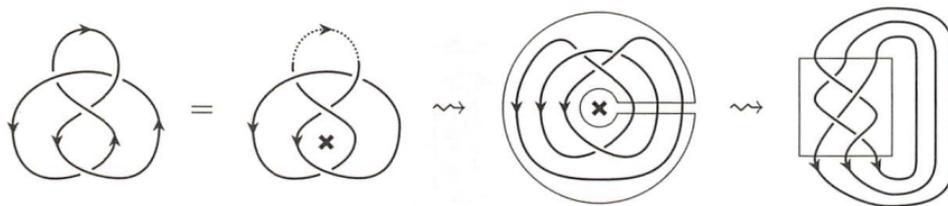


図 12.5: [104] より:閉包

### 12.3 マルコフ移動

2つの組みひも  $b_1, b_2$  についての閉包がイソトピックな絡み目となるために必要十分条件がわかっていて、次のマルコフ移動 (Markov\_move) を  $b_1$  に施して、 $b_2$  が得られればよい。

- MI 移動: 任意の  $a, b \in B_n$  について  $ab \longleftrightarrow ba$
- MII 移動: 任意の  $b \in B_n$  について  $b\sigma_n \longleftrightarrow b \longleftrightarrow b\sigma_n^{-1}$

ここで組みひも群  $\{B_n\}$  の MII 移動における  $b\sigma_n^{\pm 1} \in B_{n+1}$  である。

つまり有効絡み目  $\{K_n\}$  はイソトピーなマルコフ移動 MI, MII で移りり合う次の式が成り立つ。

$$\{K_n\} / \text{Isotopic} = \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \right) / \text{MI or MII}$$

例えば  $a, b$  を組みひも群として次の図のような同値関係が得られる。

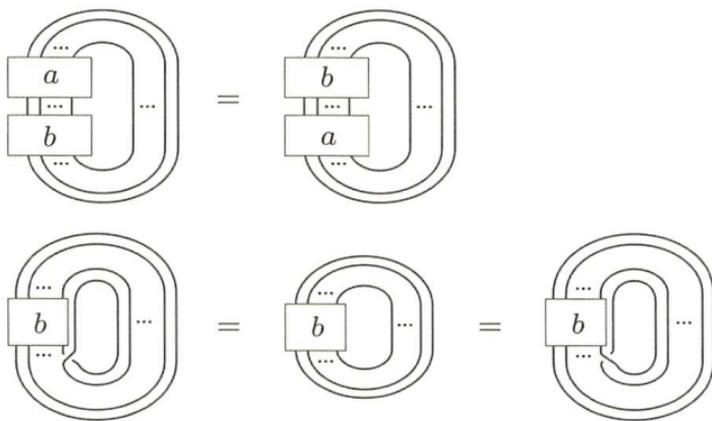


図 12.6: [104] より:マルコフ移動

### 12.4 絡み目の不変量

有限次元のベクトル空間  $V$  について、その双対空間を  $V^*$  とおき、線形写像  $V \rightarrow V$  の空間全体を  $End(V)$  で表すことにする。

$f \otimes x \in V^* \otimes V$  を

$$(y \mapsto f(y)x) \in End(V)$$

に対応させ、

$$V^* \otimes V = End(V)$$

のように同一視する。\$End(V)\$ 上のトレースを次のように表す。

$$trace : End(V) = V^* \otimes V \rightarrow \mathbb{C}$$

最後は縮約を表し、\$f \otimes x \mapsto f(x)\$ のよる線形写像

$$V^* \otimes V \rightarrow \mathbb{C}$$

のことであり \$trace\$ は \$End(V)\$ の元が行列表示であれば通常の対角和のことである。ここでさらにベクトル空間 \$V\_1, V\_2\$ があるとき \$trace\_2\$ を次のように定義する。

$$\begin{aligned} trace_2 : End(V_1 \otimes V_2) &= (V_1 \otimes V_2)^* \otimes (V_1 \otimes V_2) \\ &= V_1 \otimes V_2^* \otimes V_1 \otimes V_2 \rightarrow V_1^* \otimes V_1^* = End(V_1) \end{aligned}$$

最後は \$V\_2\$ に関して縮約している。

例えば \$V = \{e\_0, e\_1\}\$ は 2 次元ベクトル空間の時、

$$V \otimes V = \{e_0 \otimes e_0, e_0 \otimes e_1, e_1 \otimes e_0, e_1 \otimes e_1\}$$

に関して、線形写像 \$A \in End(V \otimes V)\$ が行列

$$A = \begin{pmatrix} A_{00}^{00} & A_{01}^{00} & A_{10}^{00} & A_{11}^{00} \\ A_{00}^{01} & A_{01}^{01} & A_{10}^{01} & A_{11}^{01} \\ A_{00}^{10} & A_{01}^{10} & A_{10}^{10} & A_{11}^{10} \\ A_{00}^{11} & A_{01}^{11} & A_{10}^{11} & A_{11}^{11} \end{pmatrix}$$

と表すと \$trace\_2(A)\$ は

$$trace_2(A) = \begin{pmatrix} A_{00}^{00} + A_{01}^{01} & A_{10}^{00} + A_{11}^{01} \\ A_{00}^{10} + A_{01}^{11} & A_{10}^{10} + A_{11}^{11} \end{pmatrix}$$

となる。ただし、\$V \otimes V\$ のベクトルは基底も含めて

$$v_{00} \cdot e_0 \otimes e_0 + v_{01} \cdot e_0 \otimes e_1 + v_{10} \cdot e_1 \otimes e_0 + v_{11} \cdot e_1 \otimes e_1 = \begin{pmatrix} v_{00} \\ v_{01} \\ v_{02} \\ v_{03} \end{pmatrix}$$

$$v_{00} \cdot e_0^* \otimes e_0^* + v_{01} \cdot e_0^* \otimes e_1^* + v_{10} \cdot e_1^* \otimes e_0^* + v_{11} \cdot e_1^* \otimes e_1^* = (v_{00}, v_{01}, v_{01}, v_{11})$$

で表す。左ベクトルへの \$A\$ の作用は、右ベクトルに \$A\$ の行列表示を左からかけることで表される。つまり、基底を与えることで \$V \otimes V\$ と \$\mathbb{C}^4\$ を同一視して、\$A\$ を \$\mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4\$ の線形写像とみなせばよい。

## 13 位相的場の理論 [104]

### 13.1 双曲線構造方程式

結び目を図のように 1 点で切って開いた図形 (1-タングル) を考える。

この時、下図のように図式の片に複素パラメタを対応させる。これを双曲線構造パラメタという。

交点を超えるひもで端点とつながる片のパラメタは図のように 0 とし、交点をくぐるものには \$\infty\$ をつける。

内側の辺には変数を振り、外側は全て 1 を振る。

各交点での変数を含む回転の向きは常に上のひもから下のひもへの向きにとる。

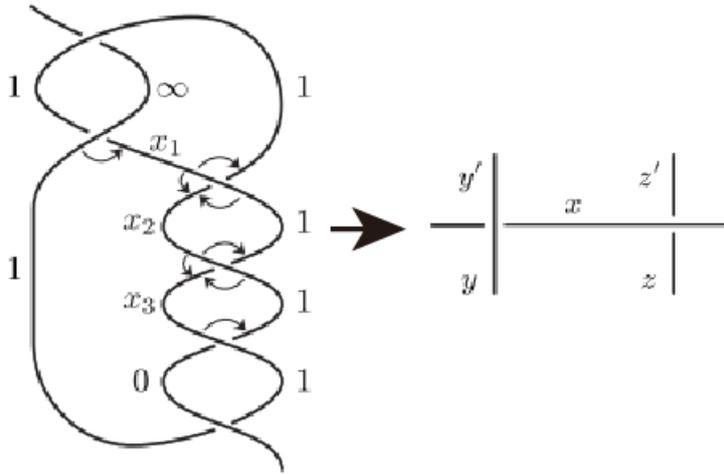


図 13.1: [104] より

この結び目につけたパラメタと基本構造だけを抜き出し、図右のように簡略化する。するとこれから次のような双曲線方程式をつくることができる。

一般的には

$$\left(1 - \frac{x}{y}\right) \left(1 - \frac{z'}{x}\right) = \left(1 - \frac{x}{y'}\right) \left(1 - \frac{z}{x}\right)$$

とおく。上図の場合は上から順に

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{x_2}{x_1}\right) &= (1 - x_1) \left(1 - \frac{1}{x_1}\right) \\ \left(1 - \frac{x_2}{x_1}\right) \left(1 - \frac{1}{x_2}\right) &= (1 - x_2) \left(1 - \frac{x_3}{x_2}\right) \\ \left(1 - \frac{x_3}{x_2}\right) \left(1 - \frac{1}{x_3}\right) &= (1 - x_3) \end{aligned} \tag{13.1}$$

のようにする。

3次元双曲空間  $\mathbb{H}^3$  の境界

$$\partial\mathbb{H}^3 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

に4つの頂点をつけた下図のような図形を理想4面体という。

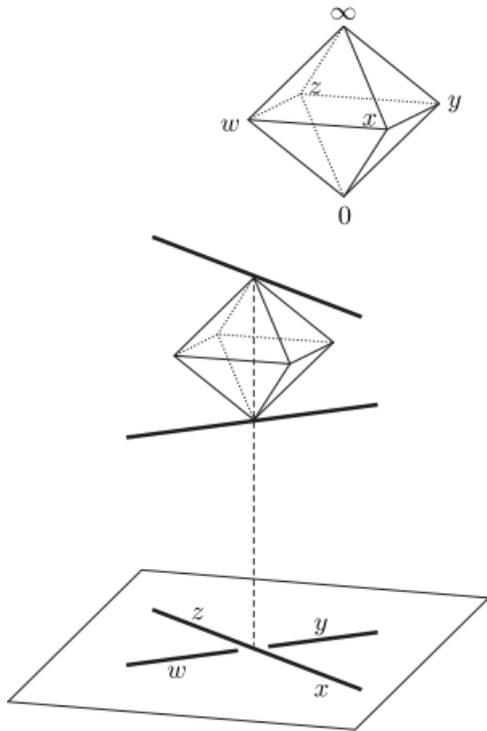


図 13.2: [104] より

これは双曲線が2点間の行路差を一定にしたので  $\mathbb{H}^3$  の等長変換群が  $PSL_2\mathbb{C}$  の複素線形射影空間になる。よって上図の下のように結び目の交差を反映したタングル図がかける。この交差は第6部でも見たように右、左周りの向きを持つので

これに対応して、次のような記号で表す。これを基本タングル図式と呼ぶ。

$$\begin{array}{cc}
 \begin{array}{c} x \quad y \\ \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \\ \hline \end{array} & \rightsquigarrow & \text{Li}_2\left(\frac{x}{y}\right) - \text{Li}_2(1) & \quad & \begin{array}{c} x \quad y \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ \hline \end{array} & \rightsquigarrow & \text{Li}_2(1) - \text{Li}_2\left(\frac{y}{x}\right)
 \end{array}$$

図 13.3: [104] より:基本タングル図式

ただし、**2重対数関数**  $Li_2$  を次のように定義する。

$$Li_2(z) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} = - \int_0^z \frac{\log(1-t)}{t} dt$$

これは次のように展開される

$$Li_2(z) = z + \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{9} + \frac{z^4}{16} + \frac{z^5}{25} + \frac{z^6}{36} + \frac{z^7}{49} + \frac{z^8}{64} + \frac{z^9}{81} + \frac{z^{10}}{100} + O(z^{11})$$

よって次のようなグラフになる。

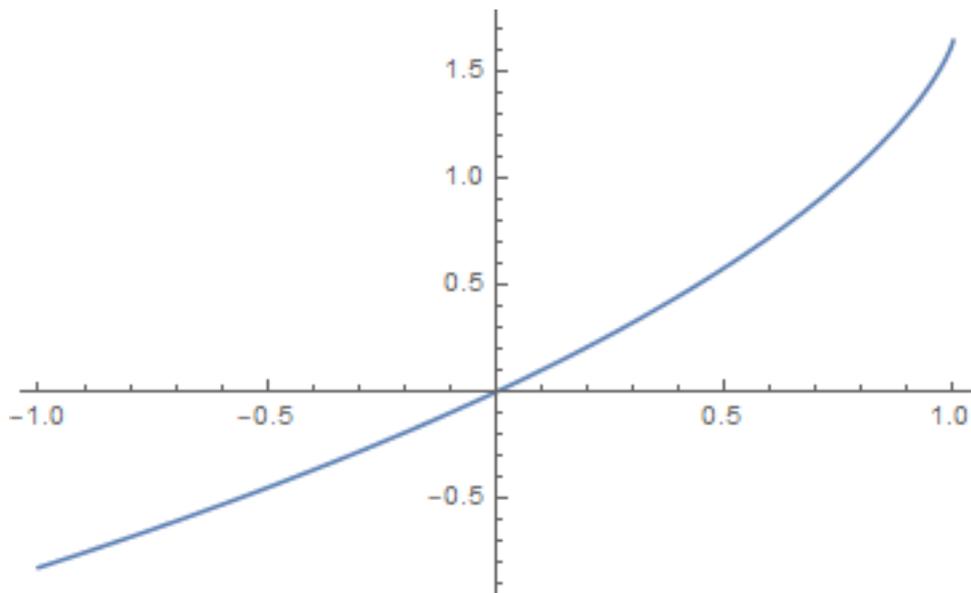


図 13.4: 多重対数関数

この関数を用いて非退化な 4 面体の角にポテンシャルを対応させる。

先の図 13.1 の場合は左上から順に

$$\begin{aligned}
 V(x_1, x_2, x_3) &= Li_2\left(\frac{x_1}{1}\right) - Li_2(1) \\
 &+ Li_2(1) - Li_2\left(\frac{1}{x_1}\right) + Li_2\left(\frac{x_2}{x_1}\right) - Li_2(1) + Li_2(1) - Li_2\left(\frac{x_2}{1}\right) \\
 &+ Li_2(1) - Li_2\left(\frac{x_1}{x_2}\right) + Li_2\left(\frac{x_3}{x_2}\right) - Li_2(1) + Li_2(1) - Li_2\left(\frac{x_3}{1}\right) \\
 &+ Li_2(1) - Li_2\left(\frac{1}{x_3}\right)
 \end{aligned}$$

が成り立つので結局

$$\begin{aligned}
 V(x_1, x_2, x_3) &= +2Li_2(1) + Li_2(x_1) - Li_2(x_2) - Li_2(x_3) \\
 &- Li_2\left(\frac{1}{x_1}\right) - Li_2\left(\frac{1}{x_2}\right) - Li_2\left(\frac{1}{x_3}\right) + Li_2\left(\frac{x_2}{x_1}\right) + Li_2\left(\frac{x_3}{x_2}\right)
 \end{aligned}$$

となる。

2 重多数関数は次の微分則を満たす。

$$x \frac{\partial}{\partial x} Li_2\left(\frac{x}{y}\right) = -\log\left(1 - \frac{x}{y}\right)$$

$$y \frac{\partial}{\partial y} Li_2\left(\frac{x}{y}\right) = \log\left(1 - \frac{x}{y}\right)$$

これを用いて  $V(x_1, x_2, x_3)$  を微分すると  $\frac{\partial}{\partial x_i} V$  は

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ Li_2(x_1) - Li_2(x_2) - Li_2(x_3) - Li_2\left(\frac{1}{x_1}\right) - Li_2\left(\frac{1}{x_2}\right) - Li_2\left(\frac{1}{x_3}\right) + Li_2\left(\frac{x_2}{x_1}\right) + Li_2\left(\frac{x_3}{x_2}\right) \right\}$$

となり、結局

$$V(x_1, x_2, x_3) = 0$$

となる。一般に4つの頂点が

$$a, b, c, d \in \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \partial\mathbb{H}^3$$

であるよう理想4面体の体積は2重対数関数を用いて

$$\text{vol}(4\text{面体}) = \text{Im}Li_2(z) + \log|z| \arg(1-z)$$

ただし、第1部のリーマン球で領域を反転する複比を用いて

$$z = \frac{(a-b)(c-d)}{(a-c)(b-d)}$$

となる。

### 13.2 Kashaev 不変量の漸近展開

$N$  を2以上の自然数とする。簡単にするため、次の記号を定義しておく。

$$q \equiv \exp\left(\frac{2\pi i}{N}\right)$$

$$(x)_n \equiv (1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^n)$$

$$\mathcal{N} = \{0, 1, \dots, N-1\}$$

$$i, j, k, l \in \mathcal{N}$$

$$R_{kl}^{ij} = \frac{Nq^{-\frac{1}{2}+i-k}\theta_{kl}^{ij}}{(q)_{|i-j|}(\bar{q})_{|j-l|}(q)_{|l-k-1|}(\bar{q})_{|k-i|}}$$

$$\bar{R}_{kl}^{ij} = \frac{Nq^{\frac{1}{2}+i-k}\theta_{kl}^{ij}}{(\bar{q})_{|i-j|}(q)_{|j-l|}(\bar{q})_{|l-k-1|}(q)_{|k-i|}}$$

ただし、 $m$  を  $N$  で割った時のあまりを  $[m]$  として、

$$\theta_{kl}^{ij} \begin{cases} 1 & [i-j] + [j-l] + [l-k-1] + [k-i] = N-1 \\ 0 & \text{Other} \end{cases}$$

である。

結び目を  $K$  とし、これの1点タングルを考え、この図式を  $D$  とする。

$D$  を適当に第6部で扱った平面イソトピーで変形し、単純にする。交点と極大、極小点で切った各切片を考え、これにラベルとして  $\mathcal{N}$  を次の図のように対応させる。

これをラベル付けと呼ぶ。端点につながるものには0を対応させ、次のように各切片の重み  $W$  を定義する。

$$\begin{aligned} W\left(\begin{array}{cc} i & j \\ \swarrow & \searrow \\ k & l \end{array}\right) &= R_{kl}^{ij}, & W\left(\begin{array}{cc} & \\ \curvearrowright & \\ k & l \end{array}\right) &= q^{-1/2}\delta_{k,l-1}, & W\left(\begin{array}{cc} & \\ \curvearrowleft & \\ k & l \end{array}\right) &= \delta_{k,l}, \\ W\left(\begin{array}{cc} i & j \\ \swarrow & \searrow \\ k & l \end{array}\right) &= \bar{R}_{kl}^{ij}, & W\left(\begin{array}{cc} i & j \\ \curvearrowright & \\ & \end{array}\right) &= q^{1/2}\delta_{i,j+1}, & W\left(\begin{array}{cc} i & j \\ \curvearrowleft & \\ & \end{array}\right) &= \delta_{i,j} \end{aligned}$$

図 13.5: [104] より：基本タングル図式と重み

次に **Kashaev** 不変量を次で定義する。交点を *cross*、極大点 *max*、極小点 *min* として

$$\langle K \rangle_N = \sum \prod_{\text{Label } cross} W(cross) \prod_{max} W(max) \prod_{min} W(min) \in \mathbb{C}$$

とすると、これは  $D$  の取り方に依存しない。**Reidemeister** 移動で不変になる。この  $\langle K \rangle_N$  は  $K$  のイソトピー不変になり、

これを  $K$  の Kashaev 不変量という。Kashaev は双曲結び目  $K$  に対し、 $|\langle K \rangle_N|$  の漸近挙動に双曲体積が現れる、次の

**Kashaev** 予想をした。

任意の双曲結び目  $K$  に対して **Kashaev** 不変量の漸近挙動は

$$\langle K \rangle_N \sim \infty e^{Nv(K)}$$

となる。ただし、

$$v(K) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} (cs(S^3 - K) + \sqrt{-1}vol(S^3 - K))$$

## 参考文献

- [1] 菅野礼治 ゲージ理論の解析力学 2007
- [2] G.M. ザスラフスキー 三島信彦、齊藤徹也、新藤 茂 訳 1989 カオス-古典および量子力学系-
- [3] 内山龍雄 相対性理論 1977 岩波全書
- [4] Tristan Needham **Visual complex analysis** 1997 培風館
- [5] J.W.Noh, A.Foug'eres, and L.Mandel **Operational approach to the phase of quantum field** 1992 Physical Review A 45
- [6] D.T.Pegg, S.M.Barnett **Phase properties of quantized single-mode electromagnetic field** 1989 Physical Review A 39
- [7] 小林昭七 接続の微分幾何とゲージ理論 1989 裳華房
- [8] 野水克己 現代微分幾何入門 1969 裳華房
- [9] 佐藤光 群と物理 1992 丸善株式会社
- [10] Tristan Needham **Visual Complex Analysis** 1997 OXFORD
- [11] 小沢哲也 曲線・曲面と接続の幾何 1997 培風館
- [12] 中原幹生 理論物理学のための幾何学とトポロジー **I,II** 2000 ピアソン・エデュケーション
- [13] 丹羽雅昭 超伝導の基礎 2002 東京電機大学出版局
- [14] 矢吹治一 量子論における位相 1998 日本評論社
- [15] Tai Tsun Wu, Chen Ning Yang **Concept of nonintegrable factors and global formulation of gauge fields** 1975 Physical Review D 12
- [16] R.Glies **Reconstruction of gauge potentials from Wilson loops** 1981 Physical Review D 24

- [17] Pratul Bandyopadhyay **Geometry,Topology and Quantum Field Theory**
- [18] 深谷賢治 双曲幾何 岩波書店 2004
- [19] Shinichi Deguchi Kazuo Fujikawa **Second-quantized formulation of geometric phases** 2005  
Physical Review A72
- [20] 大貫義朗 鈴木増雄 柏太郎 経路積分の方法 岩波 現代の物理学
- [21] 柏 太郎 サイエンス社 新版 演習 場の量子論
- [22] J.David Jackson **Classic Electrodynamics** 2001
- [23] 中村 哲・須藤彰三 電磁気学 朝倉書店 2012
- [24] Matthew N.O. **Elements of Eletromagnetic**
- [25] **Lectures on Clifford(Geometric) Algebras and Appliations** Rafal Ablamowicz Garret Sobczyk 2003
- [26] Julian Schwinger シュウインガ—量子力学 Springer 2000
- [27] 野村健太郎 トポロジカル絶縁体・超伝導体の基礎理論 September 11, 2013
- [28] 安藤陽一 トポロジカル絶縁体入門 2014
- [29] Brian R. Greene **STRING THEORY ON CALABI-YAU MANIFOLDS** Columbia University
- [30] 深谷 賢治 ゲージ理論とトポロジー 1995 Springer
- [31] Joseph L.Birman **Geometry,Particles,and Fields** Springer
- [32] Charles Nash Sinddhartha Sen **Topoloy and geometry for Physics** Mineola,New York
- [33] 二木 昭人 微分幾何講義-一般理論と現代物理への応用 サイエンス社
- [34] Andre Weil ケーラー多様体論入門 1958 Springer
- [35] 天野勝利 **Hopf** 代数とは 筑波大学
- [36] 谷村省吾 トポロジー・圏論・微分幾何 サイエンス社 SGC-52
- [37] 坪井 俊 幾何学3 微分形式 東京大学出版
- [38] Louis H.Kauffman **KNOTS AND PHYICS** World Sientific 1993
- [39] 服部昌夫 多様体のトポロジー 岩波 2003
- [40] David W. Lyons **An Elementary Introduction to the Hopf Fibration** Lebanon Valley College
- [41] Nicholas Wheeler **Transformational principles latent in the theory of CLIFFORD AL-  
GEBRAS** Reed College Physics Department 2003
- [42] Mathematica Demonstration Richard Hennigan **Rotating the Hopf Fibration**  
<http://www.wolfram.com/>
- [43] Ana Cannas da Silva **Lectures on Symplectic Geometry** 2006

- [44] **Rotations of the three-sphere and symmetry of the Clifford Torus** John McCuan and Lafe Spietz October 5,1998
- [45] Maris Ozols **Geometry of qubit** 2007
- [47] Rupert Way **Dynamics in the Hopf bundle, the geometric phase and implications for dynamical systems** University of Surrey U.K 2008
- [48] Chris J Isham **Modern Differential Geometry for Physicists**
- [50] Robert Gilmore **Lie Groups, Lie Algebras, and Some of Their Applications**
- [51] Bo-Yu Hou, Bo-Yuan Hou **DIFFERENTIAL GEOMETRY FOR PHYSICS** World Scientific 1997
- [52] Thomas J. Bridges **The Orr-Sommerfeld equation on a manifold**
- [53] 佐古彰史 **超対称性ゲージ理論と幾何学** 2007 日本評論社
- [54] 早川尚男 **連続体力学** 京都大学大学院 平成 17 年
- [55] 岡部洋一 **電磁気学** 放送大学 2015
- [56] Bjorn Felsager **Geometry, Particles, and Fields** Springer 1997
- [57] 及川正行 **偏微分方程式** 岩波書店 1955
- [60] 三尾典克 **変形体の力学** 東京大学
- [61] Daniel Z. Freedman and Antoine Van Proeyen **Supergravity** CAMBRIDGE
- [62] V.P Nair **Quantum Field Theory** 2005 Springer
- [63] **Diagrammatica The Path to Feynman Rules** Martinus Veltman 1995 Cambridge University Press
- [64] Martin Ammon Johanna Erdmenger **Gauge/Gravity Duality: Foundations and Applications** 2005 Cambridge University Press
- [65] Kawamura Yoshiharu **相対論的量子力学** 裳華房
- [66] 泰泉寺雅夫 **数物系のためのミラー対称性入門** 2014 サイエンス社
- [67] 堀川穎二 **複素代数幾何学入門** 岩波書店
- [68] Shiing-shen Chern **Complex Manifolds Without Potential Theory** 1995 Springer Verlag New York, LLC
- [69] 安藤哲也 **コホモロジー** 2002 日本評論社
- [70] Joseph Polchinski **String Theory I, II** Cambridge University Press 1998
- [71] 坂本真人 **量子力学から超対称性へ** SGC ライブラリ 96 2012 サイエンス社
- [72] Barton Zwiebach **A First Course in STRING THEORY** 2009 Cambridge University Press
- [73] 深谷 賢治 編 **ミラー対称性入門** 2009 日本評論社
- [74] 白水 徹也 **アインシュタイン方程式** 2012 SGO ライブラリ サイエンス社

- [75] 唐木田健一 ひとりで学べる一般相対性理論 講談社 2015
- [76] 深谷賢治 数学者による数学者のための **StrigDuality** 京都大学
- [77] 坪井 俊 幾何学Ⅷ ホモロジー入門 東京大学出版会
- [78] 佐藤秀司・佐藤周友 代数的サイクルとエタールコホモロジー Springer 2012
- [79] 石橋延幸・村上公一 弦の場の理論 2012 SGO ライブラリ サイエンス社
- [80] 伊藤克司 共形場理論 2011 SGO ライブラリ サイエンス社
- [81] 高柳 匡 ホログラフィー原理と量子エンタングルメント サイエンス社
- [82] 江沢 洋、渡辺敬二、鈴木増雄、田崎清明 繰り込み群の方法 1999 岩波書店
- [83] 今村 洋介 超弦理論の基礎 2010 SGO ライブラリ サイエンス社
- [84] 江口 徹 菅原 祐二 共形場理論 2015 岩波書店
- [85] 西森 秀稔 相転移・臨界現象の統計物理学 倍風館
- [86] Michael E.Peskin, Daniel V.Schroeder **An introduction to quantum Field Theory**
- [87] Charles Kittel and Herbrt Kroemer **THERMAL PHYSICS** W.H.Freeman and Company 1980
- [88] J.J Sakurai **Modern Quantum Mechanics** 1985 The Benbjamin/Cumming Publishng Company,Inc.
- [89] 松田 哲 複素関数 理工系の基礎数学5 岩波書店 1995
- [90] 小林 昭七 複素幾何 岩波書店 2005
- [91] 早川 尚男 非平衡統計力学 サイエンス社 SGC ライブラリ 2006
- [92] Mukund Rangamani & Tadashi Takayanagi **“Holographic Entanglement Entropy“** 2017
- [93] 松枝 宏明 量子系のエンタングルメントと幾何学 森北出版 2016
- [94] 治部真里 高橋康 添削形式による場の量子論 日本評論社 1997
- [95] V.P. ナイア著 阿部泰裕 磯暁 訳 現代的視点からの場の量子論 Springer 2005
- [96] 大津 元一 現代光科学 Ⅷ、Ⅷ 光の物理的基礎 朝倉書店 1994
- [97] 日置 善郎 相対論的量子場 吉岡書店 2008
- [98] 細谷 暁夫 量子コンピューターの基礎 サイエンス社 1999
- [99] Michael A. Nielsen & Isaac L. Chuang **Quantum Computation and Quantum Information** Cambride University press 2010
- [100] Brian C.Hall Lie Groups,Lie Algebras, and Represetations **An Elementary Introduction** Springer 2015
- [101] 谷村省吾 ホロノミーと力学系 名古屋大学
- [102] Raffaele Rani **On Parallel Transport and Curvature** 2009
- [103] 塩濱 勝博, 成 慶明 曲面の微分幾何学 日本評論社 2005

- [104] 大槻 知忠 結び目の不変量 共立出版 2015
- [105] 鈴木 増雄 統計力学 岩波書店 1994
- [106] Anastasios Mallios **MODERN DIFFERENTIAL GEOMETRY IN GAUGE THEORIES** Springer 2009
- [107] **Lectures on Geometry** Edited by N.M,J.WOODHOUSE OXFORD university press 2017
- [108] 田中利夫・村上齊 トポロジー入門 サイエンス社 SGC ライブラリ 42 2005
- [109] 川村嘉春 基礎物理から理解するゲージ理論 サイエンス社 SGC ライブラリ 42 2017
- [110] 細谷 裕 ゲージヒッグス統合理論 サイエンス社 SGC ライブラリ 42 2018
- [111] 堺井義秀 山田憲和 野尻美保子 素粒子物理学 KEK 2012
- [112] 鈴木 増雄 経路積分と量子解析 サイエンス社 2017
- [113] David Tong **Quantum Field Theory** Universith of Cambridge 2006
- [114] 並木美喜雄 大場一郎 散乱の量子力学 岩波書店 1997
- [115] 福田礼次郎 フーリエ解析 岩波書店 1995
- [116] Adam Lupu-Sax **Quantum Scattering Theory and Applications** Harvard University 1998
- [117] 佐藤文隆 児玉英雄 一般相対性理論 岩波書店 1992
- [118] 松本幸夫 多様体の基礎 東京大学出版 1989
- [119] Wulf Rossmann **Lie Groups** OXFORD 2002
- [120] 佐武一郎 リー群の話 日本評論社 1982
- [121] F. シャトラン 行列の固有値 Springer 1988
- [122] 生西明夫 中神 匠 作用素環入門 1 岩波 2006
- [123] 黒田成俊 関数解析 共立出版 1980
- [124] 堀田昌寛 量子情報と時空の物理 第2版 サイエンス社 2019
- [125] 砂田利一 行列と行列式 岩波 2003